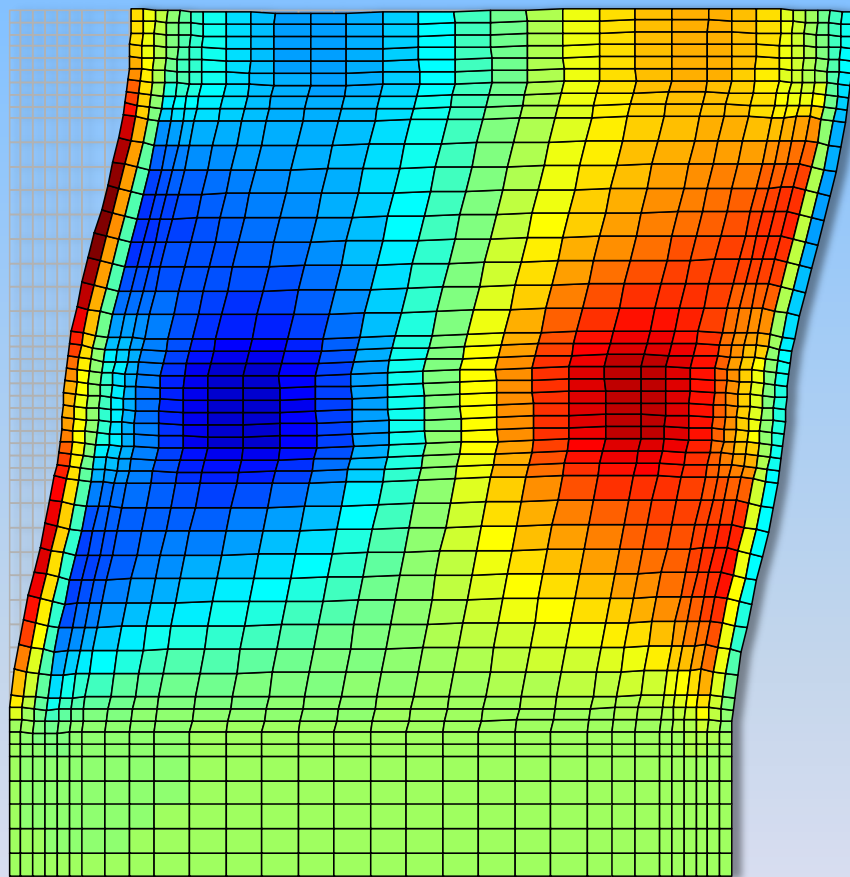




ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΙΧΟΠΛΗΡΩΜΕΝΩΝ ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ



Διπλωματική Εργασία

Ταράτσας Βλάσιος

Αθήνα, Μάρτιος 2021

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΣ-ΦΙΛΗΣ ΚΟΚΚΙΝΟΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Όνοματεπώνυμο φοιτητή: **ΒΛΑΣΙΟΣ ΤΑΡΑΤΣΑΣ**

Τίτλος
Διπλωματικής Εργασίας:

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΙΧΟΠΛΗΡΩΜΕΝΩΝ ΠΛΑΙΣΙΩΝ
ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ**

Η διπλωματική εργασία εξετάστηκε επιτυχώς από την κάτωθι
Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή:

Τριαντ.-Φίλης Κόκκινος
Αναπληρωτής Καθηγητής
Επιβλέπων

Αντώνιος Κυριαζόπουλος
Καθηγητής
Μέλος

Νικόλαος Πνευματικός
Αναπληρωτής Καθηγητής
Μέλος

Μάρτιος 2021, ΑΙΓΑΛΕΩ

ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο κάτωθι υπογεγραμμένος **Ταράτσας Βλάσιος** του Κωνσταντίνου, με αριθμό μητρώου 6416 φοιτητής του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής της Σχολής Μηχανικών του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών, δηλώνω υπεύθυνα ότι:

«Είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, οι όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε ακριβώς είτε παραφρασμένες, αναφέρονται στο σύνολό τους, με πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών, που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία έχει συγγραφεί από μένα αποκλειστικά και αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου, όσο και του Ιδρύματος.

Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του διπλώματός μου».

Ο Δηλών



Ταράτσας Βλάσιος



Abstract

Diploma Thesis Title:

Finite Element Analysis of Infilled Frames

Author: **Taratsas Vlasios**

(March 2021)

This diploma thesis studies and demonstrates the important role of infill walls in the response of plane frames, its effect on the stiffness of concrete frames and the structure as a whole. The numerical implementation is achieved by implementing the finite element method and developing a computer program using MatLab.

The first chapter is an introduction to discs, walls and masonry in general and reference is made to the various types of masonry, their mechanical properties and the advantages or disadvantages of each type. In the second chapter there is a presentation of the behavior of infilled walls through a literature review of the pertinent research and also the Hellenic and the European Codes regarding the modeling and analysis of such structures. Chapter three describes the finite element method, its basic concepts and its accuracy. Chapter four emphasizes the application of the finite element method to the case of plane stress problems, focuses in the presentation of the four-node quadrilateral and the three-node triangular finite elements. Finally, chapter five deals with a variety of structures under plane stress conditions, involving masonry or infill walls, which are analyzed and studied using a finite element program code written in MatLab. The numerical results are compared to analytical solutions demonstrating the strength of the method. Also, the developed numerical tools using the finite element method are used to study the effect of infill walls in the behavior of plane frames and the structural stiffness.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται αναφορά στην σημαντικότητα των τοιχοπληρώσεων στις κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα και πως αυτές επηρεάζουν τη συμπεριφορά ολόκληρης της κατασκευής. Η αριθμητική ανάλυση γίνεται με εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και ειδικότερα με προγραμματισμό αυτής στη MatLab.

Συγκεκριμένα, το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί εισαγωγή και γίνεται γενικά αναφορά στους τύπους τοιχοποιιών, στη μηχανική συμπεριφορά τους και στα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα που τις χαρακτηρίζουν. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια γενική αναφορά στη συμπεριφορά των τοιχοπληρώσεων μέσα από μια βιβλιογραφική ανασκόπηση, αλλά και στον τρόπο σύμφωνα με τον οποίο γίνεται η προσομοίωση και η ανάλυση τους βάσει του ΚΑΝ.ΕΠΕ. και Ευρωκώδικα 8. Ακολούθως, στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφεται γενικά η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, καθώς επίσης και η αξιοπιστία που αυτή προσφέρει. Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται ειδική περιγραφή των πεπερασμένων στοιχείων για την περίπτωση της επίπεδης έντασης και συγκεκριμένα αναλύονται, το ορθογωνικό στοιχείο τεσσάρων κόμβων, το τριγωνικό στοιχείο τριών κόμβων και το τριγωνικό στοιχείο τριών κόμβων σε επιφανειακές συντεταγμένες. Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται εφαρμογές αριθμητικής ανάλυσης επίπεδων φορέων με μοντέλο ορθογωνικών πεπερασμένων στοιχείων και βάσει προγραμματισμού της μεθόδου στη MatLab. Επίσης, επιδεικνύεται η δύναμη της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και η αξιοποίησή της στον προσδιορισμό της συμβολής της τοιχοπληρώσεως στην στιβαρότητα πλαισιωτών κατασκευών.

Περιεχόμενα

Περίληψη	1
Περιεχόμενα	2
Κατάλογος Εικόνων	5
Κατάλογος Πινάκων	6
Ευχαριστίες	7
Εισαγωγή	8
Κεφάλαιο 1	
Τοιχοποιία	10
1.1 Γενικά	10
1.2 Τύποι Τοιχοποιιών	11
1.2.1 Κατάταξη τοιχοποιιών με κριτήριο το είδος των πλίνθων	11
1.2.2 Ονομασίες τοιχοποιιών με κριτήριο τον τύπο δόμησης.....	13
1.2.3 Κατάταξη τοίχων ανάλογα με τη χρήση τους	14
1.2.4 Συστήματα τοιχοποιίας.....	16
1.3 Στοιχεία μηχανικής της τοιχοποιίας	17
1.3.1 Γενικά – Συμβολισμοί	17
1.3.2 Θλιπτική αντοχή τοιχοποιίας.....	19
1.3.3 Εφελκυστική αντοχή τοιχοποιίας	22
1.3.4 Διατμητική αντοχή τοιχοποιίας	23
1.3.5 Αντοχή τοιχοποιίας υπό τυχούσα επίπεδη καταπόνηση.....	25

1.3.6	Συμπεριφορά άοπλης τοιχοποιίας υπό εναλλασσόμενη σεισμική καταπόνηση.....	27
1.3.7	Παραμορφώσεις – Μηχανικές σταθερές τοιχοποιίας.....	27
1.4	Πλεονεκτήματα – Μειονεκτήματα	29

Κεφάλαιο 2

Συμπεριφορά Τοιχοπληρώσεων	31	
2.1	Γενικά	31
2.2	Διάταξη τοιχοπληρώσεων.....	32
2.2.1	Ανομοιόμορφη κατανομή τοιχοπληρώσεων καθ' ύψος.....	33
2.2.2	Ασύμμετρη διάταξη των τοιχοπληρώσεων σε κάτοψη	36
2.3	Μηχανισμοί αστοχίας τοιχοπληρώσεων.....	36
2.4	Φόρτιση εκτός επιπέδου	39
2.5	Μέθοδοι ανάλυσης τοιχοπληρώσεων και μοντέλα προσομοίωσης βάσει ΚΑΝΕΠΕ.....	40
2.5.1	Μέθοδος θλιβόμενης διαγωνίου.....	41
2.5.2	Ανάλυση με τη χρήση διατμητικού φατνώματος.....	42
2.6	Ευρωκώδικας 8.....	44

Κεφάλαιο 3

Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων	46	
3.1	Ιστορική Αναδρομή Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων.....	46
3.2	Γενική Περιγραφή Της Μεθόδου	48
3.3	Μητρική ανάλυση με το μοντέλο των μετατοπίσεων.....	50
3.3.1	Διακεκριμενοποίηση της κατασκευής.....	50
3.3.2	Υπολογισμός του μητρώου ακαμψίας του στοιχείου	52
3.3.3	Διαμόρφωση του τελικού συστήματος ακαμψίας.....	52
3.3.4	Επίλυση του συστήματος ακαμψίας.....	53
3.3.5	Υπολογισμός εντατικών μεγεθών και παραμορφωσιακών μεγεθών.....	53
3.4	Γενικές οικογένειες στοιχείων	53
3.5	Αξιοπιστία της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων	54

Κεφάλαιο 4

Πεπερασμένα στοιχεία επίπεδης έντασης – παραμόρφωσης	58
4.1 Ορθογωνικό στοιχείο επίπεδης έντασης – παραμόρφωσης τεσσάρων κόμβων.....	58
4.1.1 Συναρτήσεις σχήματος	59
4.1.2 Μητρώο παραμόρφωσης	63
4.1.3 Μητρώο στιβαρότητας	64
4.1.4 Μητρώο τάσεων	65
4.2 Τριγωνικό στοιχείο επίπεδης έντασης – παραμόρφωσης τριών κόμβων.....	67
4.2.1 Συναρτήσεις σχήματος	68
4.2.2 Μητρώο παραμόρφωσης	70
4.2.3 Μητρώο στιβαρότητας	71
4.2.4 Μητρώο τάσεων	72
4.3 Τριγωνικό στοιχείο τριών κόμβων σε επιφανειακές συντεταγμένες.....	73
4.3.1 Συναρτήσεις σχήματος	73
4.3.2 Μητρώο παραμόρφωσης	76
4.3.3 Μητρώο στιβαρότητας	77

Κεφάλαιο 5

Αριθμητικά Παραδείγματα	78
5.1 Παράδειγμα 1: Ορθογωνικός ανισότροπος τοίχος με ομοιόμορφο θλιπτικό φορτίο	79
5.2 Παράδειγμα 2: Ορθογωνικός τοίχος με επιβεβλημένες μετατοπίσεις στηρίξεων.....	86
5.3 Παράδειγμα 3: Επίλυση προβόλου με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο	88
5.4 Παράδειγμα 4: Ανάλυση κοντού προβόλου ως δισδιάστατου φορέα	90
5.5 Παράδειγμα 5: Ανάλυση διωρόφου πλαισίου με τοίχους πληρώσεως.....	94
Βιβλιογραφία	100

Κατάλογος Εικόνων

Εικόνα 1.1	Λιθοδομή	12
Εικόνα 1.2	Πλινθοδομή	12
Εικόνα 1.3	Τσιμεντολιθοδομή	12
Εικόνα 1.4	Μικτή Τοιχοποιία	13
Εικόνα 1.5	Δρομική Τοιχοποιία.....	13
Εικόνα 1.6	Μπατική Τοιχοποιία	14
Εικόνα 1.7	Υπερμπατική Τοιχοποιία.....	14
Εικόνα 1.8	Φέρουσα Τοιχοποιία.....	15
Εικόνα 1.9	Διαχωριστικές Τοιχοποιίες.....	15
Εικόνα 1.10	Συνδετική Τοιχοποιία	15
Εικόνα 1.11	Τοίχος Προστασίας	16
Εικόνα 1.12	Τοίχος Αντιστήριξης	16
Εικόνα 1.13	Κοίλη Τοιχοποιία	17
Εικόνα 2.1	Αστοχία μαλακού ορόφου σε πιλοτή, σεισμός Αιγίου, 1995.....	34
Εικόνα 2.2	Απώλεια του 2ου ορόφου, σεισμός Kocaeli, Τουρκία 1999.....	34
Εικόνα 2.3	Αστοχίες κοντών υποστυλωμάτων, σεισμός Αθήνας 1999.....	35
Εικόνα 2.4	Αστοχία υποστυλωμάτων λόγω ισχυρών τοιχοπληρώσεων.....	35
Εικόνα 2.5	Εκτός επιπέδου αστοχία τοιχοπληρώσεων.....	40

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 3.1	Σφάλματα κατά την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.....	60
Πίνακας 5.1	Αρχείο δεδομένων Παραδείγματος 1.....	84
Πίνακας 5.2	Αρχείο αποτελεσμάτων Παραδείγματος 1.....	85

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστώ θερμά την οικογένεια μου για τη συνεχή υποστήριξη, την ανιδιοτελή βοήθεια και αμέριστη συμπαράσταση που μου παρείχε σε όλο το διάστημα των σπουδών μου, συμπεριλαμβανομένης και της εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Κόκκινο Τριαντάφυλλο για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε στην ανάθεση της διπλωματικής αυτής εργασίας, για την καθοδήγηση και βοήθεια που μου πρόσφερε και τον χρόνο που μου αφιέρωσε κατά την εκπόνησή της.

Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι το οπλισμένο σκυρόδεμα είναι το βασικότερο δομικό στοιχείο των κατασκευών στην Ελλάδα, το οποίο συνδυάζεται συνήθως με τη χρήση άοπλης τοιχοποιίας για την κάλυψη των φατνωμάτων. Ο συνηθέστερος τύπος τοιχοποιίας είναι η οπτοπλινθοδομή δηλαδή τούβλα τα οποία ψήνονται σε θαλάμους ή καμίνια και έχουν ως κύρια σύσταση τους αργιλικό πηλό και συνδετικό κονίαμα. Η επιρροή των τοιχοπληρώσεων στη σεισμική απόκριση των κατασκευών είναι μεγάλη, ωστόσο στις περισσότερες περιπτώσεις δεν λαμβάνονται υπόψη ως φέροντα στοιχεία και δεν υπάρχουν στο μοντέλο και στους υπολογισμούς για τον σχεδιασμό των κατασκευών παρά μόνο λαμβάνονται υπόψη ως κατακόρυφα φορτία και μάζες.

Η επιρροή αυτή είναι γενικά θετική. Οι τοιχοπληρώσεις αυξάνουν την αντοχή σε οριζόντια φορτία, καθώς και την απορρόφηση σεισμικής ενέργειας στο κτίριο, μέχρι σημείου που σε περιοχές χαμηλής σεισμικότητας, κτίρια που δεν έχουν σχεδιασθεί για σεισμό να είναι σε θέση να ανταπεξέλθουν με επιτυχία σε σεισμούς και μέτριας έντασης. Από την άλλη πλευρά βεβαίως, ακούγεται συχνά η άποψη ότι οι τοιχοπληρώσεις μπορεί να επηρεάζουν και αρνητικά τη σεισμική συμπεριφορά. Θεωρείται ότι η αύξηση της δυσκαμψίας του κτηρίου εξαιτίας των τοιχοπληρώσεων μπορεί να αυξήσει τις σεισμικές δυνάμεις περισσότερο από την αύξηση της αντοχής που δίνουν οι τοιχοπληρώσεις. Το σημαντικότερο όμως είναι ότι τυχόν ασύμμετρη ή μη-κανονική κατανομή των τοιχοπληρώσεων σε κάτοψη ή καθ' ύψος, μπορεί να προκαλέσει στρωφικές περί κατακόρυφο άξονα ταλαντώσεις ή δημιουργία μαλακού ορόφου. Δημιουργία μαλακού ορόφου, που σημαίνει και συγκέντρωση σ' αυτόν της απορρόφησης σεισμικής ενέργειας και των ανελαστικών παραμορφώσεων, μπορεί να προκύψει και σε κτίρια με πολύ κανονική διάταξη τοιχοπληρώσεων, λόγω ενδεχόμενης συγκέντρωσης των βλα-

βών στις τοιχοπληρώσεις ενός ορόφου, που θα έχει σαν αποτέλεσμα την κατάρρευσή τους. Στην κατάρρευση των τοιχοπληρώσεων μπορεί να συμβάλλουν και οι εκτός επιπέδου τους αδρανειακές δυνάμεις, που αναπτύσσονται από τη μάζα των ίδιων των τοίχων λόγω της εγκάρσιας στον τοίχο συνιστώσας της τρισεδιάστατης σεισμικής δράσης. Η διαγώνια ή οριζόντια ρηγμάτωση των τοίχων λόγω της εντός του επιπέδου του τοίχου σεισμικής συνιστώσας και απόκρισης, αυξάνει την εκτός του επιπέδου τους τρωτότητα των τοίχων.

Οι σύγχρονοι αντισεισμικοί κανονισμοί, είτε αγνοούν την επιρροή των τοιχοπληρώσεων στη συνολική σεισμική απόκριση του κτηρίου, είτε τη λαμβάνουν υπόψη εντελώς στοιχειωδώς. Ως εκ τούτου υπάρχει ανάγκη και ευρύ πεδίο για τη βελτίωση των κανονισμών προς αυτή την κατεύθυνση.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία επισημαίνεται το πόσο ουσιαστικός είναι ο ρόλος των τοιχοπληρώσεων σε κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα και πως ακριβώς αυτές επηρεάζουν τη συμπεριφορά όλης της κατασκευής. Η αριθμητική ανάλυση των πρακτικών εφαρμογών γίνεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, η οποία προγραμματίστηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας στη MatLab.

Κεφάλαιο 1

ΤΟΙΧΟΠΟΙΑ

1.1 ΓΕΝΙΚΑ

Με τον όρο τοιχοποιία χαρακτηρίζουμε σώματα τα οποία είναι στιβαρά και αποτελούνται από λιθοσώματα, φυσικά ή τεχνητά, που έχουν μικρότερες ή μεγαλύτερες διαστάσεις με μορφή άλλοτε περισσότερο ή λιγότερο κανονική. Από αυτά συγκροτούνται οικοδομικές κατασκευές (τοίχοι) μεγαλύτερης ή μικρότερης αντοχής σε καταπονήσεις. Ως τοιχοποιία, όμως, δε χαρακτηρίζουμε μόνο τις κατασκευές τοίχων, αλλά και τα θεμέλια από τοίχους, τις ασίδες και τους θόλους.

Η τοιχοποιία ως δομικό στοιχείο χρησιμοποιείται από την αρχαιότητα. Αρχικά ο πηλός χρησιμοποιήθηκε για τη σύνδεση των λίθων μεταξύ τους (φυσικών ή τεχνητών), αλλά και για να κατασκευάζονται τεχνητοί λίθοι και χυτές τοιχοποιίες. Αργότερα, χρησιμοποιήθηκαν οπτοί πλίνθοι (τούβλα) και κονιάματα που περιείχαν άσβεστη, ενώ κατά τη νεότερη εποχή με τη χρήση τωντσιμέντων παράχθηκαν ισχυρότερα συνδετικά κονιάματα λιθοδομών και κατασκευάσαμε και άλλους τεχνητούς λίθους.

Ο ρόλος των φυσικών λίθων ως βασικό υλικό δόμησης περιορίστηκε σημαντικά με την ανάπτυξη και χρήση του οπλισμένου σκυροδέματος. Σε αυτό, επίσης, συνέβαλε η προσπάθεια περιορισμού της βαριάς χειρονακτικής εργασίας, η επιδίωξη συντόμευσης του χρόνου ολοκλήρωσης εν γένει των κατασκευών και, τέλος, η δυνατότητα παραγωγής τυποποιημένων και διασφαλισμένης ποιότητας και μορφής τεχνητών λίθων. Τελευταία, επιδιώκοντας τη δημιουργία όσο το δυνατόν ελαφρότερων κατασκευών, αρχίζει να

μειώνεται ο ρόλος ακόμη και των συνηθισμένων τεχνητών λίθων και να εμφανίζεται μια τάση αντικατάστασής τους από άλλα υλικά, όπως μέταλλα, γυαλί και σώματα από ειδικής σύνθεσης κονιάματα.

1.2 ΤΥΠΟΙ ΤΟΙΧΟΠΟΙΩΝ

1.2.1 Κατάταξη τοιχοποιών με κριτήριο το είδος των πλίνθων

1. Λιθοδομές

α. Ξηρολιθοδομές

- i. Αργοξηρολιθοδομές (Ξηρολιθιές)
- ii. Ημιλάξευτες ξηρολιθοδομές
- iii. Λάξευτες ξηρολιθοδομές

β. Αργολιθοδομές

γ. Ημιλάξευτες λιθοδομές

δ. Λάξευτες λιθοδομές

2. Πλινθοδομές

α. Ωμοπλινθοδομές

β Οπτοπλινθοδομές

- i. Συμπαγών πλίνθων με ή χωρίς σκάφη
- ii. Διάτρητων πλίνθων (με οριζόντιες οπές)
- iii. Διάκενων πλίνθων (με κατακόρυφες οπές ή διάκενα)

3. Τσιμεντολιθοδομές - Γυψοδομές

α. Τσιμεντοπλίνθων βαρέως τύπου

β. Πλίνθων ελαφροσκυροδέματος (Κισσηρόπλινθοι)

γ. Πλίνθων αεροσκυροδέματος

δ. Γυψοπλίνθων (Για μη φέροντα ηχομονωτικά χωρίσματα)

4. Μικτές τοιχοποιίες

α. Λιθοπλινθοδομές

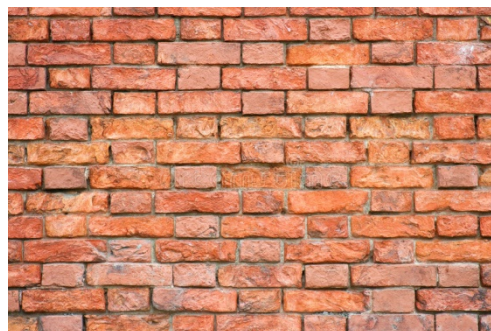
β. Ξυλόπηκτες τοιχοποιίες (Τσατμάδες)

γ. Σύνθετες τοιχοποιίες (Με επένδυση όψεως κ.τ.λ.)

Είναι πολύ συνηθισμένη, ιδιαίτερα στις Η.Π.Α., η πλήρωση των διάκενων των τσιμεντόλιθων με ισχυρό κονίαμα (*grouted masonry*) για τη δημιουργία κατακόρυφων νευρώσεων.



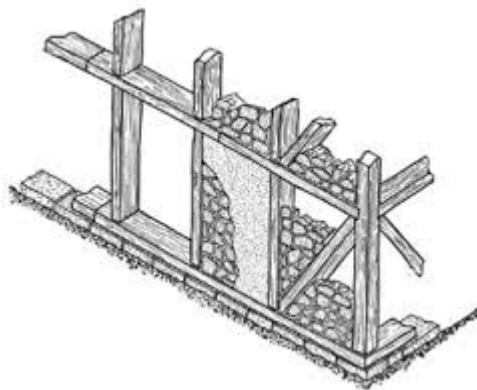
Εικόνα 1.1 Λιθοδομή



Εικόνα 1.2 Πλινθοδομή



Εικόνα 1.3 Τσιμεντολιθοδομή



Εικόνα 1.4 Μικτή Τοιχοποιία

1.2.2 Ονομασίες τοιχοποιιών με κριτήριο τον τύπο δόμησης

- α. Ανισόδομη τοιχοποιία
- β. Ισόδομη τοιχοποιία
 - i. Ισοϋψές σύστημα
 - ii. Ανισοϋψές σύστημα
- γ. Έμπλεκτες τοιχοποιίες
- δ. Δρομική τοιχοποιία
- ε. Μπατική τοιχοποιία
- στ. Υπερμπατική τοιχοποιία
- ζ. Κοίλη ή Ψαθωτή τοιχοποιία (δύο στρώσεις με εσωτερικό διάκενο)
- η. Τοιχοποιία με αλυσοειδές ή σταυροειδές σύστημα πλέξης (English bond)
- θ. Τοιχοποιία με μικτό σύστημα πλέξης (Flemish bond)
- ι. Οπλισμένη τοιχοποιία



Εικόνα 1.5 Δρομική Τοιχοποιία



Εικόνα 1.6 Μπατική Τοιχοποιία



Εικόνα 1.7 Υπερμπατική Τοιχοποιία

1.2.3 Κατάταξη τοίχων ανάλογα με τη χρήση τους

Οι τοίχοι κατατάσσονται, ανάλογα με το σκοπό που επιτελούν ή τον τρόπο που αξιοποιούνται, στις κάτωθι περιπτώσεις:

- α. φέροντες με φορτία
- β. διαχωριστικούς
- γ. συνδετικούς
- δ. σε τοίχους προστασίας (περίφραξης)
- ε. σε τοίχους ειδικών έργων (αντιστήριξης και υποστήριξης).



Εικόνα 1.8 Φέρουσα Τοιχοποιία



Εικόνα 1.9 Διαχωριστικές Τοιχοποιίες



Εικόνα 1.10 Συνδετική Τοιχοποιία



Εικόνα 1.11 Τοίχος Προστασίας



Εικόνα 1.12 Τοίχος Αντιστήριξης

1.2.4 Συστήματα τοιχοποιίας

1. Κοίλη τοιχοποιία η οποία αποτελείται από δύο ανεξάρτητες κατακόρυφες στρώσεις μεταξύ των οποίων σχηματίζεται ένα συνεχές κενό. Οι επιμέρους τοίχοι που συνιστούν την κοίλη τοιχοποιία κατασκευάζονται από συμπαγή ή διάτρητα λιθοσώματα και υπολογίζονται ως ανεξάρτητοι τοίχοι.

- Ο κάθε τοίχος πρέπει να έχει πάχος τουλάχιστον 100 mm.
- Το πλάτος του ενδιάμεσου κενού πρέπει να είναι από 25 έως 100 mm.
- Η σύνδεση των τοίχων γίνεται με μεταλλικούς συνδέσμους.

2. Συμπαγής τοιχοποιία, η οποία έχει πάχος ίσο με ένα ή περισσότερα λιθοσώματα, συμπαγή ή διάτρητα. Εδώ κατατάσσεται και η κοίλη τοιχοποιία, στην περίπτωση κατά την οποία το κενό γεμίζει με κονίαμα.



Εικόνα 1.13 Κοίλη Τοιχοποιία

1.3 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΗΣ ΤΟΙΧΟΠΟΙΑΣ

1.3.1 Γενικά – Συμβολισμοί

- Η μηχανική συμπεριφορά της τοιχοποιίας χαρακτηρίζεται από:
 - α. Σχετικά υψηλή θλιπτική αντοχή.
 - β. Ιδιαίτερα χαμηλή εφελκυστική αντοχή.
 - γ. Σχετικά ικανοποιητική αντοχή σε διάτμηση.
 - δ. Έντονα ανισότροπη συμπεριφορά.
- Εκτός από την θλιπτική αντοχή, τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά αποτελούν και τις βασικές αδυναμίες της τοιχοποιίας. Οι αδυναμίες αυτές οφείλονται όχι μόνο στον ψαθυρό χαρακτήρα των πλίνθων και του κονιάματος, αλλά κυρίως στην συμπεριφορά της διεπιφάνειας επαφής ιδιαίτερα κατά μήκος των συνεχών οριζόντιων αρμών που έχουν χαρακτηριστεί ως τα "αδύνατα επίπεδα της τοιχοποιίας".
- Στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου γίνεται μια σύντομη εισαγωγή στις μηχανικές ιδιότητες της τοιχοποιίας. Οι απαραίτητοι συμβολισμοί είναι οι ακόλουθοι:

h_w : ύψος τοίχου (wall)

- l_w : μήκος (πλάτος) τοίχου
 σ_n : ορθή τάση τοιχοποιίας κάθετα (normal) στους οριζόντιους αρμούς
 σ_p : ορθή τάση τοιχοποιίας παράλληλα (parallel) στους οριζόντιους αρμούς
 τ : διατμητική τάση
 $\sigma_{1,2}$: κύριες τάσεις
 f_{bc} : θλιπτική αντοχή πλίνθου (brick)
 f_{bt} : εφελκυστική αντοχή πλίνθου
 f_{mc} : θλιπτική αντοχή κονιάματος (mortar)
 f_{mt} : εφελκυστική αντοχή κονιάματος
 f_{jt} : αντοχή αρμού (joint) σε αποκόλληση (tension)
 f_{js} : αντοχή αρμού σε ολίσθηση (slip) υπό θλίψη
 f_{jso} : αντοχή αρμού σε ολίσθηση ($\sigma_n = 0$)
 f_{wc} : θλιπτική (compression) αντοχή τοιχοποιίας (φόρτιση κάθετα στους οριζόντιους αρμούς)
 f_{wt}^n : εφελκυστική (tension) αντοχή τοιχοποιίας κάθετα στους οριζόντιους αρμούς
 f_{wt}^p : εφελκυστική αντοχή παράλληλα προς τους οριζόντιους αρμούς
 f_{ws} : διατμητική (shear) αντοχή τοιχοποιίας υπό θλίψη
 f_{wso} : διατμητική αντοχή τοιχοποιίας ($\sigma_n = 0$)
 μ : συντελεστής τριβής αρμού
 E_b : μέτρο ελαστικότητας πλίνθων
 E_m : μέτρο ελαστικότητας κονιάματος
 E_w : μέτρο ελαστικότητας τοιχοποιίας
 G_w : μέτρο διάτμησης τοιχοποιίας
 ν_w : λόγος Poisson τοιχοποιίας

1.3.2 Θλιπτική αντοχή τοιχοποιίας

- Η υψηλή θλιπτική αντοχή της τοιχοποιίας σε σύγκριση με τα υπόλοιπα μηχανικά της χαρακτηριστικά καθόρισε και τη χρήση της ως κυρίως θλιβόμενου φέροντος δομικού στοιχείου.
- Τόσο η αντοχή όσο και ο τύπος αστοχίας επηρεάζεται έντονα από τη γωνία της θλιπτικής δύναμης ως προς τη διεύθυνση των οριζόντιων αρμών (ανισοτροπία). Στη συνέχεια γίνεται αναφορά στη θλιπτική αντοχή κάθετα στους οριζόντιους αρμούς (f_{wc}).
- Η τοιχοποιία καταπονούμενη σε θλίψη κάθετα στους κύριους οριζόντιους αρμούς αστοχεί συνήθως από εγκάρσια ρηγμάτωση των πλίνθων, γεγονός που οφείλεται στην ανάπτυξη εφελκυστικών τάσεων στις πλίνθους σε εγκάρσιες διευθύνσεις. Οι τάσεις αυτές προκαλούνται από τον συμβιβασμό των μεγάλων εγκάρσιων παραμορφώσεων του κονιάματος των αρμών με τις μικρότερες των πλίνθων που προκαλεί αντίστοιχα εγκάρσια περίσφιξη στο κονίαμα ($E_m < E_b, \nu_m > \nu_b$). Έτσι υπό μονοαξονική θλιπτική φόρτιση της τοιχοποιίας αναπτύσσεται τριαξονική καταπόνηση στις πλίνθους και στο κονίαμα των αρμών.
- Η θλιπτική αντοχή της τοιχοποιίας για τους συνήθεις συνδυασμούς πλίνθων και κονιάματος ($f_{bc} > f_{mc}$) είναι μικρότερη από τη θλιπτική αντοχή των πλίνθων αλλά υπερβαίνει την αντοχή του κονιάματος: $f_{bc} > f_{wc} > f_{mc}$
- Ο Francis [1] υπολόγισε, με τη θεωρία ελαστικότητας ισότροπων υλικών, τις εγκάρσιες τάσεις σ_x, σ_z πλίνθων και κονιάματος αρμών (Σχ. 1.1) εξισώνοντας τις αντίστοιχες εγκάρσιες παραμορφώσεις των δύο υλικών. Στη συνέχεια, θεωρώντας γραμμικό κριτήριο αστοχίας πλίνθου υπό ετερόσημη καταπόνηση κατέληξε στην ακόλουθη έκφραση για τη θλιπτική αντοχή πρίσματος τοιχοποιίας:

$$f_{wc} = f_{bc} \left[1 + \frac{f_{bc}}{f_{bt}} \cdot \frac{\beta \cdot \nu_m - \nu_b}{(1 - \nu_b) + \alpha \cdot \beta \cdot (1 - \nu_m)} \right]^{-1} \quad (1.1)$$

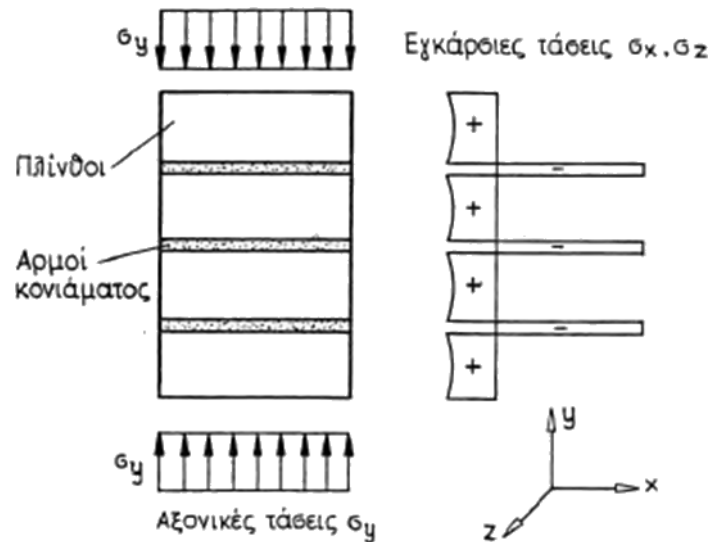
όπου: $\alpha = (t_b : \text{ύψος πλίνθου}) / (t_m : \text{πάχος αρμού})$

$\beta = E_b / E_m$ και

ν_b, ν_m : οι λόγοι Poisson πλίνθου και κονιάματος

Το θεωρητικό μοντέλο του Francis [1] έχει τα ακόλουθα μειονεκτήματα:

- Δέχεται ότι η αστοχία της τοιχοποιίας επέρχεται πάντα από εγκάρσια ρηγμάτωση των πλίνθων
- Δέχεται γραμμικά ελαστική συμπεριφορά των υλικών μέχρι αστοχίας, κάτι που δεν ισχύει, ιδιαίτερα για το περισφιγμένο κονίαμα των αρμών
- Προϋποθέτει τη γνώση των μεγεθών E_b , ν_b , E_m , ν_m

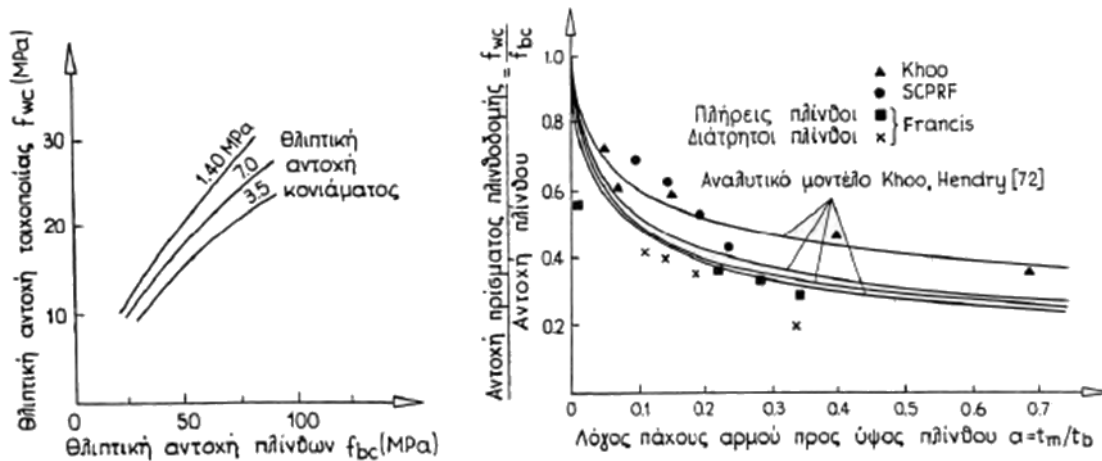


Σχήμα 1.1 Διανομή τάσεων σε πρίσμα τοιχοποιίας υπό θλίψη

- Παράγοντες που επηρεάζουν τη θλιπτική αντοχή της τοιχοποιίας (βλέπε Σχ. 1.2):
 - α. Αντοχή των πλίνθων (f_{bc} , f_{bt}).
 - β. Θλιπτική αντοχή του κονιάματος (f_{mc}).
 - γ. Γεωμετρία δόμησης (πάχος αρμού/ύψος πλίνθου: t_m/t_b).
 - δ. Παραμορφώσεις πλίνθων και κονιάματος (E_b , ν_b , E_m , ν_m).
 - ε. Ποιότητα δόμησης.
- Συνήθειες μέθοδοι προσδιορισμού ή εκτίμησης της θλιπτικής αντοχής τοιχοποιίας:
 - α. Πειραματικά στο εργαστήριο (δύσκολη για υφιστάμενη τοιχοποιία).
 - β. Πειραματικά επί τόπου με τη μέθοδο των επίπεδων γρύλων (*flat jacks*). Η μέθοδος αναπτύχθηκε στην Ιταλία, απαιτείται ειδικός εξοπλισμός, ενώ είναι δύσκολη η βαθμονόμηση των αποτελεσμάτων.

γ. Με συνδυασμό άμεσων δοκιμών και έμμεσων μετρήσεων επί τόπου και στο εργαστήριο (καρότα τοιχοποιίας, δοκίμια επί μέρους υλικών, κρουσιμετρήσεις με ειδικό κρουσίμετρο τοιχοποιών: Συνδυασμός αποτελεσμάτων).

δ. Βιβλιογραφία.



Σχήμα 1.2 Επιρροή μηχανικών χαρακτηριστικών υλικών και γεωμετρικών χαρακτηριστικών δόμησης στη θλιπτική αντοχή τοιχοποιίας

- Από επεξεργασία πειραματικών αποτελεσμάτων προτείνονται στη βιβλιογραφία διάφορες εμπειρικές εκφράσεις για τη θλιπτική αντοχή τοιχοποιίας:

$$f_{wc} = \sqrt{f_{bc}} \text{ (MPa)} \quad (1.2)$$

$$f_{wc} = 0.7 \sqrt{f_{bc}^3 f_{mc}} \quad (1.3)$$

$$f_{wc} = f_{bc} [(4 + 0.1 f_{mc}) / (12 + 5\beta)] - 2.0 \quad (1.4)$$

$$f_{wc} = (1 - 0.8 \sqrt[3]{\alpha}) [f_{mc} + 0.4(f_{bc} - f_{mc})] \quad (1.5)$$

όπου $\alpha = t_m / t_b$ και $\beta = \text{ύψος} / \text{πλάτος τοίχου}$.

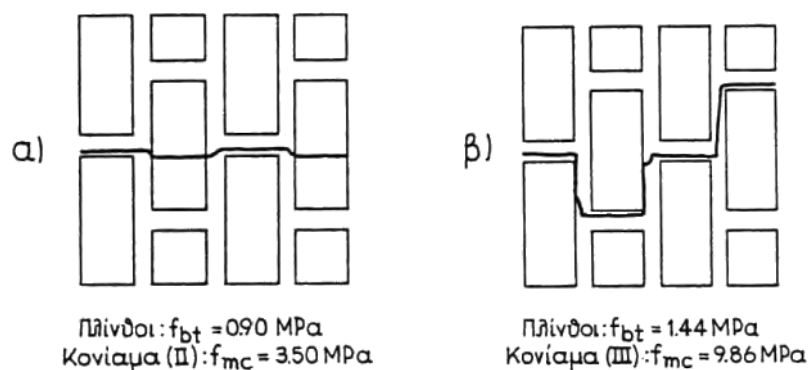
- Ο Ευρωκώδικας 6 [2] συνιστά τον πειραματικό προσδιορισμό της χαρακτηριστικής θλιπτικής αντοχής τοιχοποιίας και προτείνει την ακόλουθη έκφραση:

$$f_{wc} = K f_{bc}^{0.65} f_{mc}^{0.25} \quad (1.6)$$

όπου K : συντελεστής που εξαρτάται από τον τύπο των πλίνθων (υλικό, ποσοστό και διαστάσεις κενών) και τον τύπο δόμησης της τοιχοποιίας. Παίρνει τιμές από 0.40 έως 0.60.

1.3.3 Εφελκυστική αντοχή τοιχοποιίας

- Είναι γενικά πολύ χαμηλότερη της θλιπτικής αντοχής.
- Διαφοροποιείται έντονα από τη γωνία της εφελκυστικής δύναμης ως προς τους οριζόντιους αρμούς (ανισοτροπία).
- Εμφανίζεται μεγάλη διασπορά τιμών (αναξιοπιστία).
- Παράγοντες που επηρεάζουν την εφελκυστική αντοχή τοιχοποιίας :
 - α. Αντοχή αρμού σε αποκόλληση (f_{jt}).
 - β. Εφελκυστική αντοχή κονιάματος (f_{mt}).
 - γ. Συνοχή κονιάματος – πλίνθου (f_{jso}).
- Εφελκυστική αντοχή κάθετα στους οριζόντιους αρμούς (f_{wt}^n): Αποκόλληση αρμών από υπέρβαση της μικρότερης από τις f_{jt} , f_{mt} .
- Εφελκυστική αντοχή παράλληλα στους οριζόντιους αρμούς (f_{wt}^p): Έντονη διαφοροποίηση αντοχών και τύπων αστοχίας (βλέπε Σχ. 1.3).
- Συνήθως η εφελκυστική αντοχή παράλληλα στους οριζόντιους αρμούς είναι μεγαλύτερη από την εφελκυστική αντοχή κάθετα σε αυτούς: $f_{wt}^p > f_{wt}^n$.
- Οι Κανονισμοί κατά κανόνα δεν χρησιμοποιούν την εφελκυστική αντοχή της τοιχοποιίας στο σχεδιασμό (*non tension material*). Αντίθετα, συνήθως προδιαγράφουν την καμπτική αντοχή τοιχοποιίας για φόρτιση κάθετα στο επίπεδό της (σεισμός, άνεμος).



Σχήμα 1.3 Μορφές αστοχίας τοιχοποιίας υπό άμεσο εφελκυσμό παράλληλα προς τους οριζόντιους αρμούς. (α) Ασθενείς πλίνθοι, (β) Ισχυρές πλίνθοι.

1.3.4 Διατμητική αντοχή τοιχοποιίας

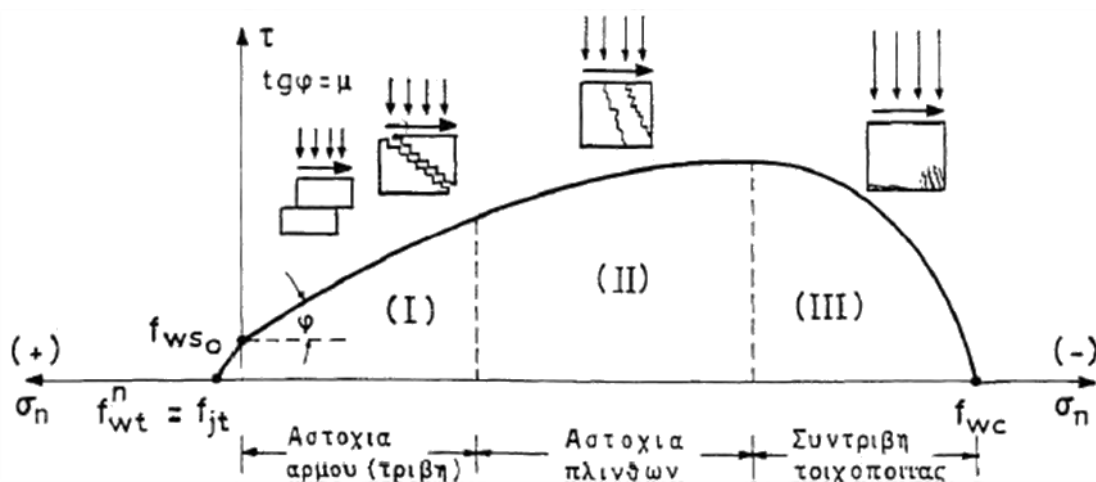
- Καθαρή διάτμηση δεν υπάρχει υπό πραγματικές συνθήκες. Στο επίπεδο των αρμών συνυπάρχουν με τις διατμητικές (τ) και ορθές τάσεις (σ_n) ακόμη και μόνο λόγω του ιδίου βάρους της τοιχοποιίας.
- Αρκετά χρήσιμη για το σχεδιασμό υπό σεισμικά φορτία είναι η περιβάλλουσα αστοχίας τοιχοποιίας υπό συνδυασμό (τ, σ_n), όπως φαίνεται στο Σχ. 1.4. Συγκεκριμένα, στο Σχ. 1.4, παρατηρούμε τα εξής:

α. Χαμηλές τιμές σ_n (περιοχή I) : Αστοχία τριβής – ολίσθησης οριζώντιου αρμού ή κλιμακωτή αποκόλληση και ολίσθηση κατακόρυφων και οριζόντιων αρμών (συνήθης μορφή διατμητικής αστοχίας τοίχων). Αποδεκτό γενικά το γραμμικό κριτήριο αστοχίας Coulomb:

$$\tau_u = f_{ws} = f_{wso} + \mu \sigma_n \quad (1.7)$$

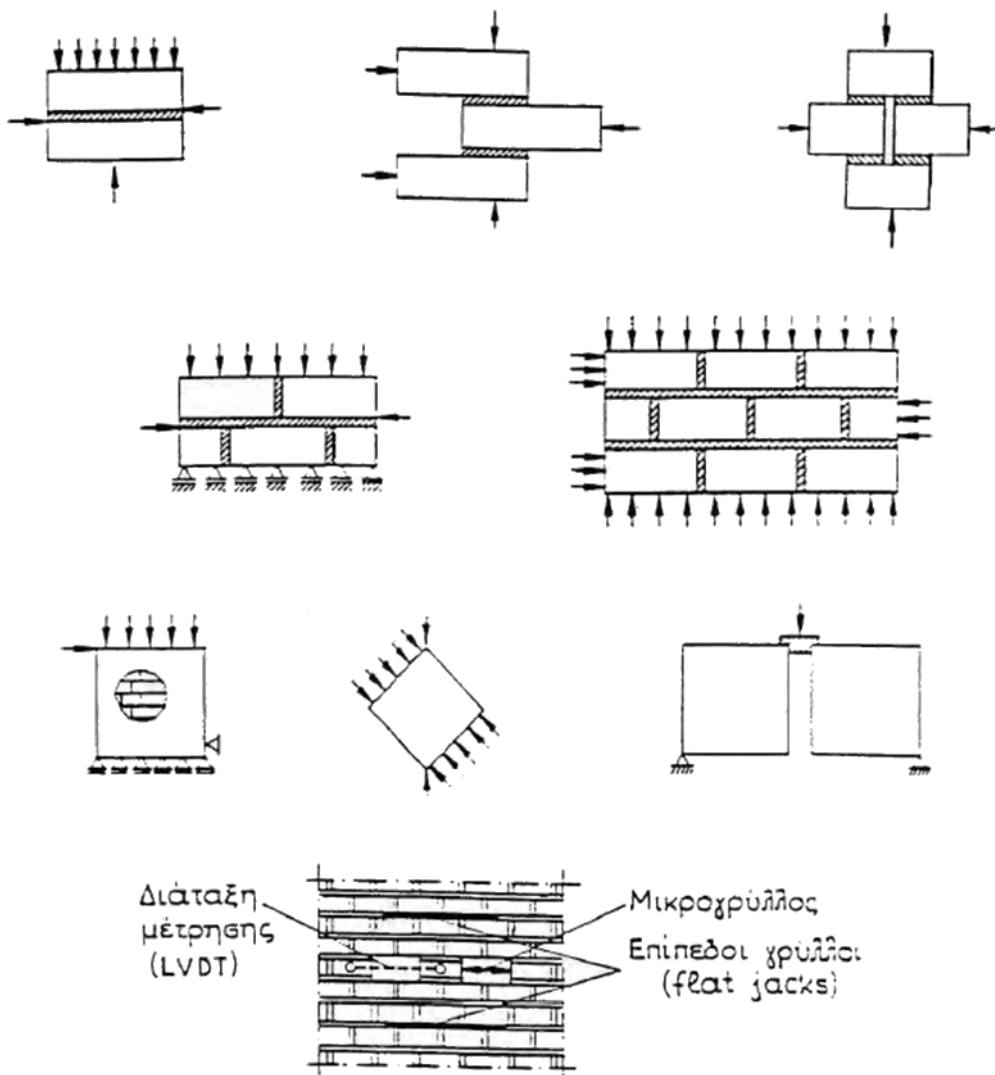
όπου, η θλιπτική σ_n θεωρείται θετική.

- β. Μέσες τιμές σ_n (περιοχή II) : Αστοχία από λοξή ρηγμάτωση που διαπερνά και πλίνθους. Συνήθως εμφανίζεται σε πεσσούς μεταξύ ανοιγμάτων.
- γ. Υψηλές τιμές σ_n (περιοχή III) : Αστοχία από συντριβή θλιβόμενης γωνίας. Αστοχία καμπτικού τύπου η οποία προηγείται της διατμητικής αστοχίας.
- δ. Περιοχή εφελκυστικής ορθής τάσης σ_n : Η περιβάλλουσα αστοχίας είναι σχεδόν ευθεία γραμμή με έντονη κλίση καθώς συνήθως ισχύει $f_{wso} > f_{jt}$.



Σχήμα 1.4 Τυπική μορφή καμπύλης αστοχίας (τ, σ_n) τοιχοποιίας

- Η μορφή της οριακής καμπύλης (τ , σ_n) επηρεάζεται έντονα από τα μηχανικά χαρακτηριστικά πλίνθων, κονιάματος και αρμού, αλλά και από το σχήμα των πλίνθων.
- Στη βιβλιογραφία αναφέρονται τιμές του συντελεστή τριβής (μ) για το αρχικό, σχεδόν ευθύγραμμο, τμήμα της καμπύλης (τ , σ_n) που κυμαίνονται συνήθως από 0.4 έως 0.7. Το τμήμα αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό, διότι αντιστοιχεί στη συνήθη περιοχή των ορθών τάσεων λειτουργίας της τοιχοποιίας.
- Στο Σχ. 1.5 φαίνονται οι συνηθέστερες πειραματικές διατάξεις προσδιορισμού της οριακής καμπύλης (τ , σ_n) τόσο στο εργαστήριο όσο και επί τόπου.



Σχήμα 1.5 Μορφές δοκιμών και πειραματικές διατάξεις προσδιορισμού της οριακής καμπύλης (τ , σ_n) αρμού και τοιχοποιίας

- Από επεξεργασία πειραματικών αποτελεσμάτων προτείνονται στη βιβλιογραφία διάφορες εμπειρικές εκφράσεις για τον αρχικό ευθύγραμμο κλάδο της καμπύλης αστοχίας (τ , σ_n), οι οποίες αποτελούν παραλλαγές της εξίσωσης (1.7). Ο Ευρωκώδικας προτείνει την ακόλουθη σχετικά συντηρητική σχέση:

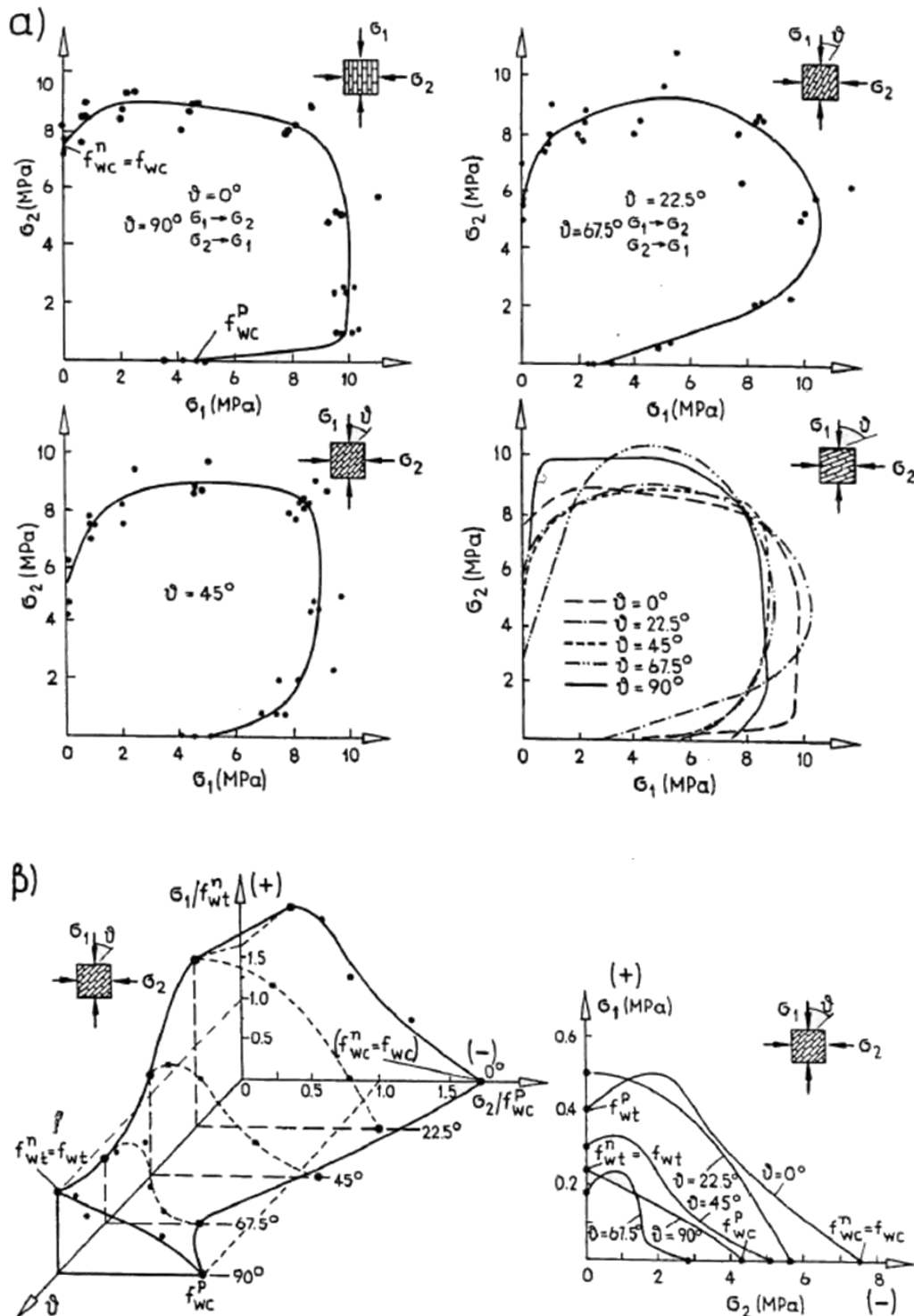
$$f_{ws} = f_{wso} + 0.40\sigma_n \leq 0.065f_{bc} \quad (1.8)$$

όπου η σ_n προκύπτει από το συνδυασμό φόρτισης με το ελάχιστο κατακόρυφο φορτίο. Οι τιμές του f_{wso} παρέχονται για διάφορους συνδυασμούς πλίνθων και κονιαμάτων.

1.3.5 Αντοχή τοιχοποιίας υπό τυχούσα επίπεδη καταπόνηση

- Η τοιχοποιία εμφανίζεται συνήθως στις κατασκευές ως επιφανειακής μορφής φορέας με λειτουργία δίσκου (τοίχοι, πεσσοί). Έτσι, στο σώμα της τοιχοποιίας αναπτύσσεται μια τυχούσα επίπεδη καταπόνηση (σ_x , σ_y , τ ή σ_p , σ_n , τ) που ισοδυναμεί με ένα ζεύγος κύριων ορθών τάσεων (σ_1 , σ_2) υπό τυχούσα γωνία (θ) ως προς τους οριζόντιους αρμούς. Κατά συνέπεια, η απόκριση της τοιχοποιίας επηρεάζεται έντονα από τον ανισότροπο χαρακτήρα της καθώς είναι καθοριστική η διεύθυνση των κύριων αξόνων έντασης ως προς τη διεύθυνση των αρμών (γωνία θ).
- Είναι γνωστό ότι στα δομικά στοιχεία κυριαρχεί η ετερόσημη κύρια διαξονική καταπόνηση ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$). Ενώ όμως σε ένα ισότροπο ψαθυρό υλικό (π.χ. σκυρόδεμα) η ρηγμάτωση υπό ετερόσημη διαξονική καταπόνηση επέρχεται, σε τοπική κλίμακα, κάθετα στην κύρια εφελκυστική τάση, στην τοιχοποιία η αντοχή, ο τύπος αστοχίας και η διεύθυνση των ρηγμάτων διαφοροποιούνται και καθορίζονται τις περισσότερες φορές από τη διεύθυνση και αντοχή των οριζόντιων αρμών.
- Στο Σχ. 1.6 παρουσιάζονται οι περιβάλλουσες αστοχίας τυπικής πλινθοδομής υπό τυχούσα διαξονική καταπόνηση για διάφορες τιμές της γωνίας θ , όπως προέκυψαν από εκτεταμένη πειραματική έρευνα. Σημειώνεται ότι για ένα ισότροπο ψαθυρό υλικό όπως το σκυρόδεμα, η ανάλογη περιβάλλουσα αστοχίας είναι μία μόνο καμπύλη συμμετρική ως προς τη διχοτόμο του συστήματος των αξόνων σ_1 , σ_2 (ανάλογη με την περιβάλλουσα αστοχίας της τοιχοποιίας υπό γωνία $\theta = 45^\circ$: βλέπε Σχ. 1.6). Οι περιβάλλουσες αστοχίας του Σχ. 1.6 αναφέ-

ρονται σε τοιχοποιία συγκεκριμένης γεωμετρίας, πλέξης και αντοχών πλίνθων, κονιάματος και διεπιφάνειας επαφής στους αρμούς. Έχει αποδειχθεί ότι οι περιβάλλουσες αυτές διαφοροποιούνται σημαντικά με τη μεταβολή των παραπάνω παραγόντων.



Σχήμα 1.6 Περιβάλλουσες αστοχίας πλινθοδομής υπό διαξονική καταπόνηση και μεταβλητή κλίση αρμών

- Είναι φανερό ότι η συμπεριφορά της τοιχοποιίας υπό επίπεδη καταπόνηση είναι ένα εξαιρετικά σύνθετο πρόβλημα και ιδιαίτερα σε συνδυασμό με τα υλικά που συνήθως χρησιμοποιεί ο σύγχρονος μηχανικός, δηλαδή σκυρόδεμα και χάλυβα.

1.3.6 Συμπεριφορά άοπλης τοιχοποιίας υπό εναλλασσόμενη σεισμική καταπόνηση

- Ο τύπος της ρηγμάτωσης, η απομένουσα αντοχή μετά τη ρηγμάτωση και η πλαστιμότητα υπό εναλλασσόμενη σεισμική καταπόνηση της άοπλης τοιχοποιίας επηρεάζονται έντονα από τους ακόλουθους παράγοντες:
 - α. Μέγεθος αξονικής φόρτισης σε σχέση με τη θλιπτική αντοχή της τοιχοποιίας.
 - β. Τύπος και αντοχή πλίνθων.
- Τοίχοι με πλήρεις ισχυρές πλίνθους και σχετικά χαμηλό αξονικό φορτίο εμφανίζουν:
 - α. Διαγώνια αποκόλληση – ολίσθηση αρμών κονιάματος.
 - β. Απορρόφηση σεισμικής ενέργειας μέσω μηχανισμού τριβής – ολίσθησης αρμών (ικανοποιητική πλαστιμότητα).
 - γ. Σημαντική απομένουσα φέρουσα ικανότητα μετά τη ρηγμάτωση.
- Τοίχοι με διάτρητες πλίνθους ή και με υψηλό αξονικό φορτίο εμφανίζουν:
 - α. Χιαστί ρηγμάτωση ή και θραύση πλίνθων.
 - β. Ψαθυρό χαρακτήρα αστοχίας (μηδενική σχεδόν πλαστιμότητα).
 - γ. Έντονη απώλεια φέρουσας ικανότητας μετά τη ρηγμάτωση.

1.3.7 Παραμορφώσεις – Μηχανικές σταθερές τοιχοποιίας

- Στο Σχ. 1.7 παρουσιάζονται τυπικές καμπύλες τάσεων – παραμορφώσεων ($\sigma_n - \epsilon$) τοιχοποιίας υπό μονοαξονική σύνθλιψη κάθετα στους οριζόντιους αρμούς.
- Η παραβολική εξίσωση (1.9α) αποδίδει ικανοποιητικά τον ανερχόμενο κλάδο της καμπύλης ($\sigma_n - \epsilon$) και δίνει για την αρχική τιμή του μέτρου ελαστικότητας την τιμή της εξίσωσης (1.9β).

$$(\sigma/\sigma_u) = (\sigma/f_{wc}) = 2(\varepsilon/\varepsilon_u) - (\varepsilon/\varepsilon_u)^2 \quad (1.9\alpha)$$

$$E_{wo} = 2 (\sigma_u/\varepsilon_u) \quad (1.9\beta)$$

- Το μέτρο ελαστικότητας μπορεί να προσδιορισθεί, είτε πειραματικά με υπερηχομετρήσεις, είτε αναλυτικά από την έκφραση (1.10), εφόσον είναι γνωστά τα μέτρα ελαστικότητας πλίνθων (E_b) και κονιάματος (E_m) :

$$E_w = E_w = \frac{E_b E_m (1+a)}{a E_b + E_m} \quad \text{όπου } a = \frac{t_m}{t_b} \quad (1.10)$$

- Στη βιβλιογραφία παρατηρείται μεγάλη διασπορά τιμών για το μέτρο ελαστικότητας και το λόγο του Poisson τοιχοποιίας. Ενδεικτικά αναφέρονται οι ακόλουθες σχέσεις:

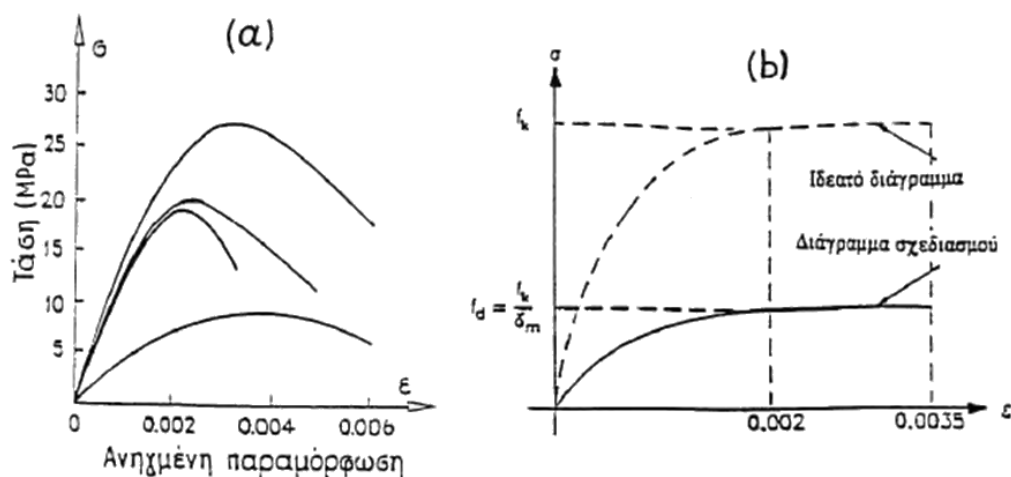
$$E_w = (400 \div 1000) f_{wc} \quad (1.11\alpha)$$

$$E_w = K \cdot E_b \quad (K = 0.40 \div 0.90 \text{ για αύξουσα αντοχή κονιάματος}) \quad (1.11\beta)$$

$$\nu_w = 0.10 \text{ έως } 0.20 \quad (1.11\gamma)$$

- Ο Ευρωκώδικας 6 [2], υπό την προϋπόθεση της ύπαρξης στο σώμα της τοιχοποιίας ισχυρών οριζόντιων διαζωμάτων, δέχεται για το σχεδιασμό με τη μέθοδο οριακής αντοχής, το γνωστό από το σκυρόδεμα παραβολικό διάγραμμα ($\sigma - \varepsilon$) (Σχ. 1.7β) με $E_w = 1000f_{wc}$ και $\nu_w = 0.20$.
- Παρατηρείται σημαντική διαφοροποίηση των καμπυλών ($\sigma - \varepsilon$) και των τιμών E_w και ν_w για μεταβολή της γωνίας μεταξύ της διεύθυνσης φόρτισης και των οριζόντιων αρμών. Ειδικά για τοιχοποιίες με μεγάλο πάχος αρμών, όπως οι πλινθοδομές Ρωμαϊκών και Βυζαντινών μνημείων, η διαφοροποίηση αυτή είναι ιδιαίτερα έντονη ($E_w^n \ll E_w^p$). Το γεγονός αυτό χαρακτηρίζει την τοιχοποιία ως έντονα ορθότροπο υλικό.
- Για το μέτρο διάτμησης (G_w) παρατηρείται στη βιβλιογραφία μεγάλη διασπορά και σχετικά χαμηλές τιμές (της τάξεως του $0.1E_w$ έως $0.2E_w$). Το φαινόμενο αποδίδεται στην επιρροή μικροολισθήσεων στους οριζόντιους αρμούς. Ο Ευρωκώδικας 6 δέχεται τον υπολογισμό του G_w από τα E_w και ν_w , σύμφωνα με τη σχέση (1.12) που χαρακτηρίζει τα ισότροπα υλικά:

$$G_w = \frac{E_w}{2(1+\nu_w)} \cong 0.4E_w \quad (1.12)$$



Σχήμα 1.7 (α) Καμπύλες τάσης-παραμόρφωσης ($\sigma_n - \varepsilon$) τοιχοποιιών από αργιλικούς πλίνθους και (β) Διάγραμμα τάσεων - παραμορφώσεων τοιχοποιίας κατά τον Ευρωκώδικα 6

1.4 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ – ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

Συμπερασματικά από όσα αναφέρθηκαν παραπάνω η τοιχοποιία παρουσιάζει τόσο πλεονεκτήματα, όσο και μειονεκτήματα.

Στα πλεονεκτήματα μπορούν να συμπεριληφθούν τα κάτωθι:

- Χαμηλότερο κόστος συγκριτικά με τις κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα.
- Ευκολότερη προστασία έναντι πυρκαγιάς, θερμοκρασίας και ήχου με τη χρήση των κατάλληλων λιθοσωμάτων.
- Ταχύτητα και ευκολία στην κατασκευή, το οποίο έχει σημασία για την κατασκευή στην ύπαιθρο όπου δεν υπάρχουν οι κατάλληλοι τεχνίτες και ο ανάλογος εξοπλισμός, ενώ η παρουσία του μηχανικού για επίβλεψη είναι συνήθως σπάνια. Υπό αυτές τις συνθήκες, μια κατασκευή από οπλισμένο σκυρόδεμα θα εμφάνιζε μεγάλες κατασκευαστικές δυσκολίες, όπως είναι η σωστή διαμόρφωση κόμβων, που απαιτεί ειδικευμένο προσωπικό και ιδιαίτερα σύνθετη τεχνική.
- Βασικό πλεονέκτημα των κτηρίων από τοιχοποιία πρέπει να θεωρηθεί και η αισθητική τους γιατί τα κτήρια αυτά δένουν άμεσα με το περιβάλλον του τόπου μας.
- Δεν πρέπει να παραλειφθεί και η μεγάλη ανθεκτικότητα της τοιχοποιίας στο πέρασμα του χρόνου.

Ανάμεσα στα μειονεκτήματα της τοιχοποιίας θα μπορούσαν να αναφερθούν τα εξής:

- Η ψαθυρή φύση της, που μπορεί να αρθεί εν μέρη με τη χρήση διαζωμάτων και οπλισμού.
- Η σημαντική μείωση της αντοχής με την ανακύκλιση και η μικρή πλαστικότητα.
- Οι μικρότερες τιμές της θλιπτικής αντοχής, συγκριτικά με τις θλιπτικές αντοχές του οπλισμένου σκυροδέματος.

Κεφάλαιο 2

ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΟΙΧΟΠΛΗΡΩΣΕΩΝ

2.1 ΓΕΝΙΚΑ

Ο ρόλος των τοίχων πλήρωσης στη σεισμική συμπεριφορά των κατασκευών έχει αποτελέσει αντικείμενο αρκετών ερευνών, αφού λόγω του μεγάλου μέρους σεισμικής έντασης που παραλαμβάνουν, οι βλάβες τους παρουσιάζουν αντίστοιχα μεγάλο κόστος, τόσο σε ανθρώπινο όσο και σε οικονομικό επίπεδο.

Από τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών έχει προσδιοριστεί σε μεγάλο βαθμό η ευμενής και η δυσμενής επιρροή των τοιχοπληρώσεων, κάτι που αναγνωρίζουν και οι σύγχρονοι αντισεισμικοί κανονισμοί. Οι θετικές επιδράσεις που έχουν διαπιστωθεί είναι η αύξηση της υπεραντοχής και της πλευρικής δυσκαμψίας των κτιρίων, όπως επίσης και η αύξηση της απορροφώμενης ενέργειας. Από την άλλη πλευρά, στις αρνητικές επιδράσεις των τοίχων πλήρωσης καταγράφονται η εμφάνιση “μαλακού ορόφου” είτε στο ισόγειο είτε σε ενδιάμεσο μη τοιχοπληρωμένο όροφο και η δημιουργία κοντών υποστυλωμάτων.

Η ευμενής επιρροή των τοίχων πλήρωσης καθιστά σαφές ότι η αλληλεπίδραση τους με τα πλαίσια σε περίπτωση ισχυρών εδαφικών κινήσεων είναι ένας από τους σοβαρότερους παράγοντες που επηρεάζουν την αντισεισμική συμπεριφορά των πλαισιακών κατασκευών.

Αντίθετα βέβαια, η δυσμενής επιρροή των τοιχοπληρώσεων που παρατηρείται, η αβεβαιότητα των χαρακτηριστικών τους και η αβεβαιότητα των χαρακτηριστικών της σύνδεσης τους με τα πλαίσια λόγω των αλληλεπιδράσεων στις διεπιφάνειες τοιχοπλήρωσης – πλαισίου δεν επιτρέπουν μια αξιόπιστη πρόβλεψη της συμπεριφοράς του φορέα και καθιστούν την προσομοίωση δύσκολη έως αδύνατη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι τοίχοι πλήρωσης να μην θεωρούνται φέροντα στοιχεία κατά το σχεδιασμό και να παραλείπονται στην ανάληψη σεισμικών δράσεων. Σύμφωνα με τον ΕΑΚ 2000 [3], η ψαθυρότητα τους σε συνδυασμό με την αβέβαιη συμπεριφορά τους υπό ισχυρή και κυκλικού χαρακτήρα σεισμική καταπόνηση, κάνουν αδύνατη τη συνεκτίμηση τους στην ανάληψη σεισμικών φορτιών. Ωστόσο, επιβάλλεται η αντιμετώπιση ενδεχόμενων δυσμενών επιδράσεων τους στο φέροντα οργανισμό.

Καθοριστικός παράγοντας για το κατά πόσο ο ρόλος των τοιχοπληρώσεων είναι θετικός ή αρνητικός στις κατασκευές αποδεικνύεται η κανονικότητα τους σε ύψος και σε κάτοψη. Οι ασυνέχειες για αρχιτεκτονικούς λόγους είναι σχεδόν αναπόφευκτες με αποτέλεσμα να δυσχεραίνουν ακόμα περισσότερο τη δημιουργία μοντέλων προσομοίωσης και τη συνεκτίμηση των τοίχων πλήρωσης στο σχεδιασμό.

2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΤΟΙΧΟΠΛΗΡΩΣΕΩΝ

Η ευμενής ή η δυσμενής επιρροή στη συμπεριφορά – απόκριση μιας κατασκευής, καθορίζεται κυρίως από τη διάταξή τους σε κάτοψη, σε τομή, αλλά και μέσα στα φαντώματα οπλισμένου σκυροδέματος.

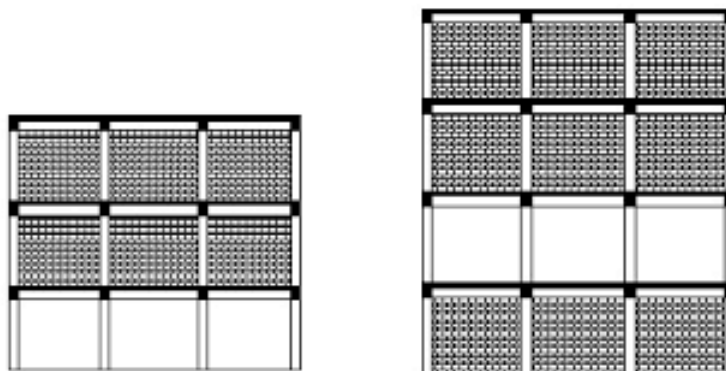
Τοιχοπληρώσεις με ομοιόμορφη κατανομή κατά μήκος της περιμέτρου του κτηρίου και χωρίς ασυνέχειες καθ' ύψος έχουν γενικά ευνοϊκό ρόλο σε σχέση με την αντίσταση του κτηρίου σε σεισμικά φορτία. Η θετική αυτή επιρροή είναι σημαντική κυρίως για πλαισιακούς φορείς οπλισμένου σκυροδέματος σχεδιασμένους με παλαιότερες αντιλήψεις, αφού αυξάνουν την αντοχή τους υπό οριζόντια φορτία. Εκτός από την αντοχή, αυξάνεται και η συνολική πλευρική δυσκαμψία αυτών των φορέων, με αποτέλεσμα να μειώνονται οι μετακινήσεις λόγω σεισμού, άρα και οι ροπές και τέμνουσες δευτέρας τάξεως φαινόμενα (έντονα σε εύκαμπτες πλαισιακές κατασκευές), τα οποία προκαλούν την τελική κατάρρευση υπό σεισμική φόρτιση.

Στην πραγματικότητα όμως ελάχιστοι είναι οι πλαισιακοί φορείς με γεωμετρία που να χαρακτηρίζεται από συμμετρίες και τοιχοπληρώσεις ομοιόμορφα κατανεμημένες σε

κάτοψη και τομή. Στις περισσότερες περιπτώσεις η διάταξη των τοιχοπληρώσεων, αν όχι και η γεωμετρία του φορέα, για διάφορους λόγους (αρχιτεκτονικούς, γωνιακές οικοδομές κ.α.) χαρακτηρίζεται από σημαντική ασυμμετρία και μη κανονικότητα. Τέτοια διάταξη τοιχοπληρώσεων συνήθως οδηγεί σε δυσμενή επιρροή στην απόκριση του φορέα κατά τη σεισμική διέγερση.

2.2.1 Ανομοιόμορφη κατανομή τοιχοπληρώσεων καθ' ύψος

Εξαιρετικά δυσμενής διάταξη είναι εκείνη κατά την οποία οι τοιχοπληρώσεις είναι ανομοιόμορφα κατανεμημένες καθ' ύψος όπως στην περίπτωση του σχήματος (2.1). Τέτοια διάταξη οδηγεί σε πολλές περιπτώσεις στην ανάπτυξη μηχανισμού μαλακού ορόφου.



Σχήμα 2.1 Ανομοιόμορφη διάταξη τοιχοπληρώσεων καθ' ύψος

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, η ύπαρξη της τοιχοπλήρωσης σε έναν όροφο συνεισφέρει σημαντικά στη διατμητική αντοχή του ορόφου, εμποδίζει την ανάπτυξη ανελαστικών παραμορφώσεων του περιβάλλοντος πλαισίου με αποτέλεσμα όλες οι παραμορφώσεις που αναπτύσσει η κατασκευή από το σεισμό να συγκεντρώνονται στον μη τοιχοπληρωμένο όροφο. Έτσι δημιουργείται μηχανισμός με πλαστικές αρθρώσεις στην κορυφή και τη βάση των υποστυλωμάτων του γυμνού ορόφου και συγκέντρωση εκεί όλων των μετακινήσεων της κατασκευής με επακόλουθο την ανάπτυξη φαινομένων δευτέρας τάξεως που οδηγούν σε μερική ή ολική κατάρρευση (Εικόνες 2.1 και 2.2).



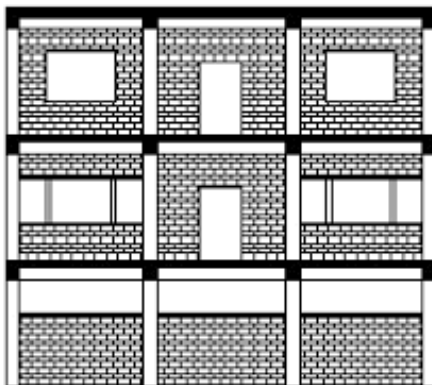
Εικόνα 2.1 Αστοχία μαλακού ορόφου σε πιλοτή, σεισμός Αιγίου, 1995.



Εικόνα 2.2 Απώλεια του 2ου ορόφου, σεισμός Kocaeli, Τουρκία 1999.

Μια επίσης δυσμενής διάταξη των τοιχοπληρώσεων ακόμη και αν αυτές είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στην περίμετρο της κατασκευής, δημιουργείται όταν οι τοιχοπληρώσεις διακόπτονται καθ' ύψος π.χ στη στάθμη της ποδιάς παραθύρων σε όλο το μήκος του φαντώματος ή σε ψηλότερη στάθμη (για λόγους φωτισμού) που συναντάται σε πολλές περιπτώσεις σχολείων (Σχήμα 2.2).

Αποτέλεσμα της διακοπής των τοιχοπληρώσεων καθ' ύψος μέσα σε ένα φάντωμα είναι η δημιουργία κοντών υποστυλωμάτων (τμήμα του υποστυλώματος που δεν έρχεται σε επαφή με τον τοίχο, σχήμα 2.2 φεγγίτης). Τα κοντά υποστυλώματα είναι στοιχεία μικρής λυγηρότητας που κατά τη σεισμική διέγερση της κατασκευής και ειδικά όταν αυτά είναι στον κατώτατο όροφο όπου αναπτύσσεται η μέγιστη σεισμική τέμνουσα, αστοχούν διατμητικά, αναπτύσσοντας διαγώνιες ρωγμές (Εικόνα 2.3).



Σχήμα 2.2 Διακοπή τοιχοπληρώσεων καθ' ύψος ενός φατνώματος



Εικόνα 2.3 Αστοχίες κοντών υποστυλωμάτων, σεισμός Αθήνας 1999

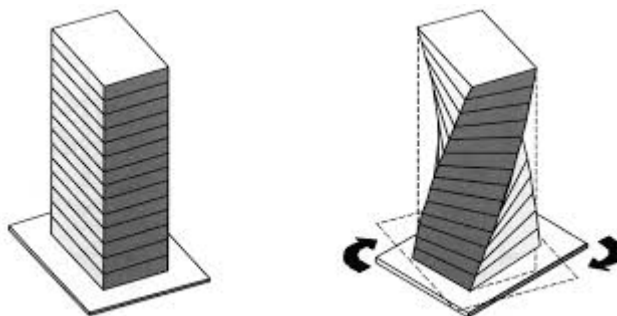
Στιβαρές τοιχοπληρώσεις με μεγάλη αντοχή μπορεί να προκαλέσουν τοπικές αστοχίες στα γειτονικά στοιχεία, όταν περιβάλλονται από σχετικά αδύναμα πλαίσια. Η διαγώνια δύναμη που εισάγει ο τοίχος στο πλαίσιο μπορεί να προκαλέσει διατμητική αστοχία του υποστυλώματος, που συνεχίζεται και στον υπερκείμενο κόμβο. Επίσης, εάν ένα υποστύλωμα είναι πιο αδύναμο από την τοιχοπλήρωση, τότε η ρηγμάτωση που αναπτύσσεται στην τοιχοπλήρωση θα το διαπεράσει με αρκετή ευκολία (Εικόνα 2.4).



Εικόνα 2.4 Αστοχία υποστυλωμάτων λόγω ισχυρών τοιχοπληρώσεων

2.2.2 Ασύμμετρη διάταξη των τοιχοπληρώσεων σε κάτοψη

Η έντονα ανομοιόμορφη κατανομή των τοιχοπληρώσεων σε κάτοψη δημιουργεί ασυμμετρικές που οδηγούν σε εκκεντρότητα μεταξύ του κέντρου μάζας και του ενεργού κέντρου δυσκαμψίας με αποτέλεσμα να αναπτύσσεται στρέψη περί τον κατακόρυφο άξονα της κατασκευής, όταν αυτή υποβάλλεται σε σεισμική διέγερση (Σχήμα 2.3). Όπως αναφέρεται στην βιβλιογραφική αναφορά, επειδή οι τοιχοπληρώσεις συμβάλλουν στη συνολική αντοχή και δυσκαμψία και στις δυο οριζόντιες διευθύνσεις, η ένταση και οι σεισμικές μετακινήσεις και παραμορφώσεις στο τμήμα της κάτοψης με τις λιγότερες τοιχοπληρώσεις δεν ξεπερνούν αυτές, που θα αναπτύσσονταν στο γυμνό δομικό σύστημα από την ίδια σεισμική δράση. Το πρόβλημα είναι αρκετά σημαντικό σε κτίρια με έντονη εκκεντρότητα (λόγω των τοιχοπληρώσεων) σε κάτοψη (γωνιακές οικοδομές).

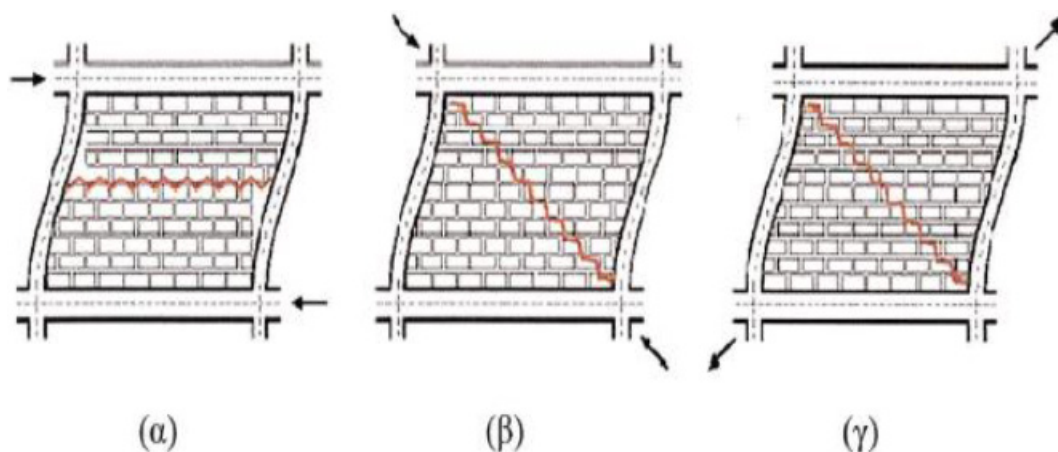


Σχήμα 2.3 Στρέψη κτιρίου περί τον κατακόρυφο άξονα λόγω ασύμμετρης διάταξης των τοιχοπληρώσεων σε κάτοψη

2.3 ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΑΣΤΟΧΙΑΣ ΤΟΙΧΟΠΛΗΡΩΣΕΩΝ

Η συμπεριφορά των τοιχοπληρωμένων πλαισίων υπό πλευρική φόρτιση έχει μελετηθεί από πολλούς ερευνητές μέσα από διάφορες εργασίες και πειράματα. Μερικοί από αυτούς είναι οι Mehrabi [4, 5, 6], Fiorato [7], κ.α.

Όλες οι εργασίες, κατέδειξαν πως η συνολική συμπεριφορά ενός τοιχοπληρωμένου πλαισίου εξαρτάται άμεσα από την αλληλεπίδραση της τοιχοπλήρωσης με το περιβάλλον πλαίσιο. Στις περισσότερες περιπτώσεις η συνολική πλευρική αντίσταση δεν μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα των επιμέρους (άθροισμα αντίστασης πλαισίου και τοιχοπλήρωσης), και αυτό γιατί ο τρόπος με τον οποίο αυτά τα δυο αλληλεπιδρούν, μπορεί να μεταβάλλει σημαντικά το μηχανισμό αντίστασης που αναπτύσσεται από το καθένα ξεχωριστά.



Σχήμα 2.4 Κυριότερες μορφές αστοχίας τοιχοπληρώσεων. (α) διατμητική αστοχία, (β) αστοχία θλιβόμενης διαγωνίου, (γ) αστοχία διαγωνίου λόγω εφελκυσμού

Για χαμηλά επίπεδα φόρτισης ένα τοιχοπληρωμένο πλαίσιο συμπεριφέρεται μονολιθικά, δηλαδή σαν ένα ενιαίο σύνολο, όπου τοιχοπλήρωση και περιβάλλον πλαίσιο αντιστέκονται από κοινού. Όσο το φορτίο αυξάνεται, η τοιχοπλήρωση αρχίζει να αποκολλάται από το πλαίσιο στις δύο απέναντι γωνίες και αναπτύσσεται μηχανισμός θλιβόμενης διαγωνίου ανάμεσα στις δυο γωνίες που βρίσκονται σε επαφή με το πλαίσιο. Τέτοια συμπεριφορά έχει διαπιστωθεί στις περισσότερες μελέτες.

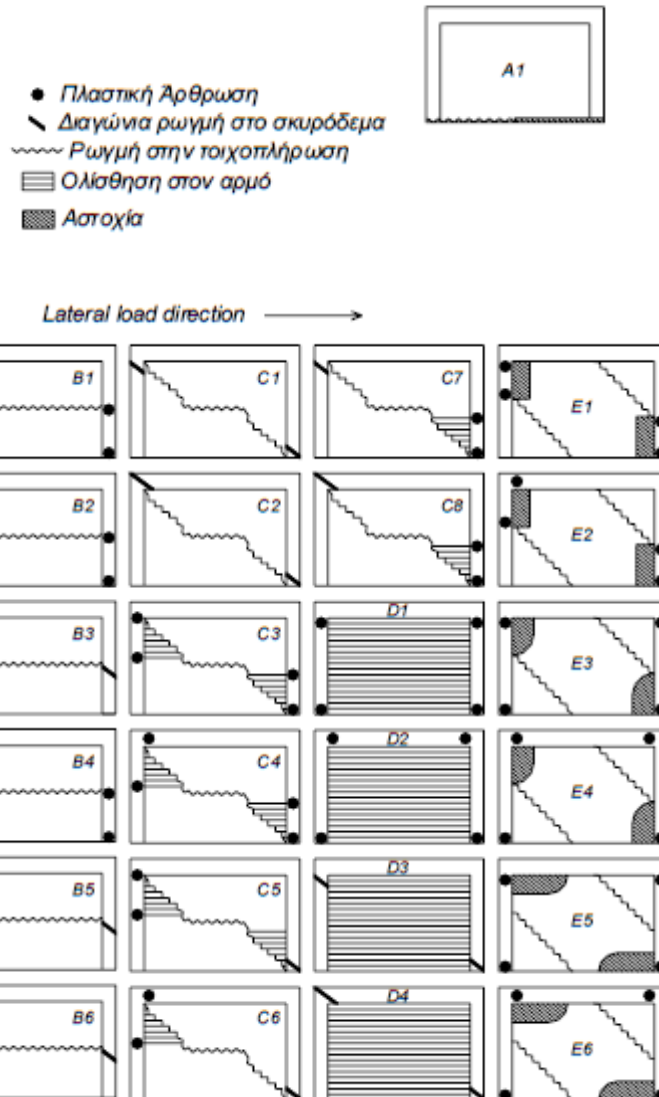
Ο μηχανισμός θλιβόμενης διαγωνίου που αναφέρθηκε παραπάνω είναι πολύ συνηθισμένος αλλά δεν είναι ο μοναδικός. Ο κύριος μηχανισμός αντίστασης εξαρτάται από πολλές παραμέτρους με σημαντικότερη τη συγκριτική στιβαρότητα και αντοχή μεταξύ του περιβάλλοντος πλαισίου και της τοιχοπλήρωσης.

Στη συνέχεια, στο Σχήμα 2.5 παρουσιάζονται οι κυριότεροι μηχανισμοί αστοχίας που έχουν διαπιστωθεί στις διάφορες ερευνητικές εργασίες και πειράματα (Mehrabi [4]).

Ο μηχανισμός αστοχίας **(A)** είναι ένας καθαρά καμπτικός τρόπος αστοχίας στη βάση πλαισίου τοιχοπλήρωσης, όπου αναπτύσσεται εφελκυσμός στο ένα και θλίψη στο άλλο άκρο. Τέτοιος μηχανισμός εμφανίζεται σπάνια και αναπτύσσεται σε χαμηλά επίπεδα φόρτισης όπου δεν υφίσταται διαχωρισμός πλαισίου τοιχοπλήρωσης. Παρουσιάζεται κυρίως σε πλαίσια μεγάλου ύψους (λυγηρά πλαίσια) με χαμηλό ποσοστό διαμήκους οπλισμού στα υποστυλώματα. Το χαμηλό αυτό ποσοστό οδηγεί στην πρόωρη διαρροή του διαμήκους οπλισμού των υποστυλωμάτων που βρίσκονται στην πλευρά της φόρτισης. Τονίζεται πάντως ότι, στις περισσότερες των περιπτώσεων και για συνήθη επίπεδα φόρτισης, υφίσταται αποκόλληση της τοιχοπλήρωσης από το πλαίσιο.

Πιθανοί Μηχανισμοί
Αστοχίας:

- A Καπτική Αστοχία
- B Ρωγμή στο μέσο του ύψους
- C Διαγώνια ρωγμή
- D Οριζόντια ολίσθηση σε αρμό
- E Αστοχία στις γωνίες της τοιχοπλήρωσης



Σχήμα 2.5 Μηχανισμοί αστοχίας τοιχοπληρωμένων πλαισίων

Ο δεύτερος μηχανισμός **(B)** αστοχίας χαρακτηρίζεται από μια οριζόντια ρωγμή στην τοιχοπλήρωση η οποία συνήθως εμφανίζεται στη θέση του αρμού. Ο μηχανισμός αυτός οδηγεί στην εμφάνιση κοντών υποστυλωμάτων. Πλαστικές αρθρώσεις δημιουργούνται στα υποστυλώματα, ενώ είναι συνηθισμένη η περίπτωση κατά την οποία τα υποστυλώματα αστοχούν διατμητικά αναπτύσσοντας διαγώνιες ρωγμές.

Στον τρίτο μηχανισμό (C) αναπτύσσεται στην τοιχοπλήρωση μια διαγώνια ρωγμή η οποία ξεκινάει από τη γωνία που ασκείται το φορτίο, καταλήγει στην απέναντι γωνία, ενώ ταυτόχρονα μπορεί να συνοδεύεται και από ολίσθηση σε ενδιάμεσο αρμό. Στην περίπτωση αυτή η τοιχοπλήρωση λειτουργεί σαν θλιβόμενη διαγώνιος η οποία συνήθως οδηγεί σε ψαθυρή αστοχία των γωνιών του τοίχου και ανάπτυξη πλαστικών αρθρώσεων ή διατμητικών ρωγμών (διατμητικές αστοχίες) στα μέλη οπλισμένου σκυροδέματος.

Ο μηχανισμός (D) είναι η περίπτωση κατά την οποία αναπτύσσονται οριζόντιες ρωγμές στους περισσότερους αρμούς της τοιχοπλήρωσης, αν όχι και σε όλους. Κάτι τέτοιο συμβαίνει όταν η διατμητική αντοχή του κονιάματος είναι πάρα πολύ μικρή. Εφόσον, τα υποστυλώματα δεν αστοχήσουν διατμητικά, ο μηχανισμός αυτός μπορεί να οδηγήσει σε μια πλάστιμη συμπεριφορά του πλαισίου, με υψηλά ποσοστά απόσβεσης σε δυναμική απόκριση.

Ο πέμπτος μηχανισμός (E) αστοχίας αποτελεί επίσης περίπτωση θλιβόμενης διαγωνίου, όπου, όμως, αναπτύσσονται δύο παράλληλες διαγώνιες ρωγμές στον τοίχο. Συχνά αυτός ο μηχανισμός συνοδεύεται από αστοχία στις γωνίες, τα άκρα δηλαδή της θλιβόμενης διαγωνίου, ενώ έχουν παρατηρηθεί και περιπτώσεις, όπου ταυτόχρονα υπήρξαν αστοχίες και στο κέντρο του φανώματος.

Εργασίες του Merhabi [5] και [6] έχουν δείξει ότι σχετικά αδύναμες τοιχοπληρώσεις μπορούν να ενισχύσουν την αντοχή και τη δυσκαμψία σε μη πλάστιμα πλαίσια οπλισμένου σκυροδέματος οδηγώντας σε μια ικανοποιητική συνολική απόκριση σε περίπτωση σεισμού.

Συμπερασματικά, προκύπτει ότι ο μηχανισμός αντίστασης σε πλευρικά φορτία και ο μηχανισμός αστοχίας εξαρτώνται σημαντικά από τα χαρακτηριστικά και τις σχετικές στιβαρότητες των πλαισίων και των τοιχοπληρώσεων. Επίσης, είναι προφανές ότι η αντοχή του χρησιμοποιούμενου κονιάματος παίζει σημαντικό ρόλο, ενώ μια σχετικά ασθενής τοιχοπλήρωση μειώνει τις πιθανότητες αστοχίας των φερόντων στοιχείων οπλισμένου σκυροδέματος, που την περιβάλλουν.

2.4 ΦΟΡΤΙΣΗ ΕΚΤΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Εκτός από τους μηχανισμούς αστοχίας των τοιχοπληρώσεων που οφείλονται σε φόρτιση εντός του επίπεδου τους, υπάρχει και η περίπτωση αστοχίας και εκτός του επιπέδου αυτών. Τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει αρκετές εργασίες για τη μελέτη των

τοιχοπληρώσεων σε φόρτιση εκτός επιπέδου, καθώς σε περίπτωση αστοχίας μπορεί να προκαλέσουν σοβαρές υλικές ζημιές, αλλά και να θέσουν σε κίνδυνο ανθρώπινες ζωές λόγω του μεγάλου βάρους τους (Εικόνα 2.5).



Εικόνα 2.5 Εκτός επιπέδου αστοχία τοιχοπληρώσεων

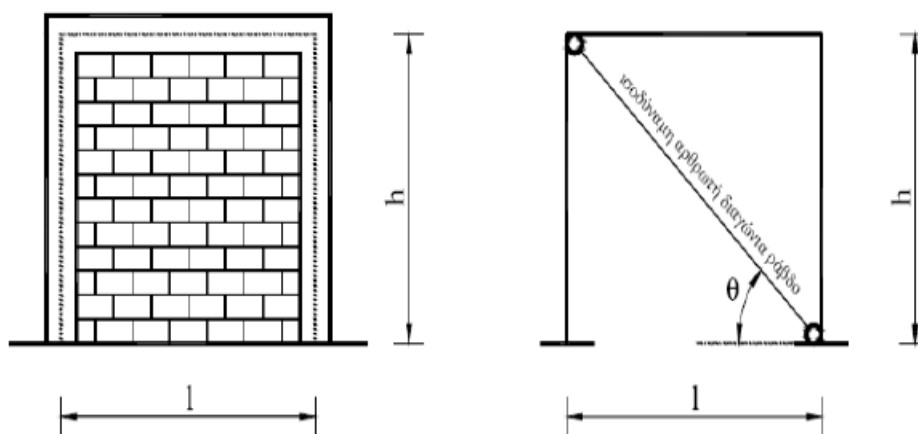
Οι ερευνητικές εργασίες έδειξαν ότι τοιχοπληρώσεις που έχουν αρκετά καλή επαφή με το περιβάλλον πλαίσιο οπλισμένου σκυροδέματος μπορούν να αναπτύξουν σημαντική αντίσταση εκτός επιπέδου, μέσω μηχανισμού τόξου. Η αντίσταση αυτή εξαρτάται άμεσα από το λόγο ύψους προς πάχος τοιχοπλήρωσης (λυγηρότητα τοιχοπλήρωσης, slenderness). Τοιχοπληρώσεις με μικρό λόγο ύψους προς πάχος αναπτύσσουν σημαντική αντίσταση και ο κίνδυνος της αστοχίας τους εκτός επιπέδου είναι μικρός.

Όσο αυξάνονται οι διαστάσεις του φαντώματος αυξάνεται και η λυγηρότητα και έτσι η τοιχοπλήρωση γίνεται πιο εύκαμπτη και πιο ευάλωτη σε φορτία εκτός επιπέδου της. Ένα πείραμα που έγινε σε τοιχοπληρωμένη κατασκευή με σεισμική διέγερση από το Fardis et al. [8], έδειξε ότι, οι τοιχοπληρώσεις που έχουν μεγάλη λυγηρότητα αποκρίθηκαν χωρίς βλάβες σε επιταχύνσεις που έφταναν τα 1.3g έως 1.7g.

2.5 ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΟΙΧΟΠΛΗΡΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΒΑΣΕΙ ΚΑΝΕΠΕ

Οι συνήθεις περιπτώσεις πρακτικής προσομοίωσης των τοιχοπληρώσεων, όπως προτείνονται και υιοθετούνται και από τον κανονισμό επεμβάσεων (ΚΑΝΕΠΕ) [9], είναι δύο:

1. προσομοίωση με τη χρήση θλιβόμενης διαγωνίου, και
2. προσομοίωση με χρήση διατμητικού φαντώματος.



Σχήμα 2.6 Τοιχοπληρωμένο και ισοδύναμο πλαίσιο

Η χρήση των δυο αυτών μοντέλων έχει αποκαλύψει κάτι σημαντικό πρακτικά και αυτό είναι ότι τα αποτελέσματα της εφαρμογής τους δεν είναι ταυτόσημα. Ενώ και τα δυο μοντέλα δίνουν ίδια αποτελέσματα για τις οριζόντιες μετακινήσεις, παρουσιάζονται διαφορές στα αξονικά φορτία των υποστυλωμάτων. Οι διαφορές αυτές, όμως, μειώνονται όσο αυξάνεται ο αριθμός των ορόφων του κτιρίου. Δοκιμή σε μερικώς τοιχοπληρωμένο κτίριο από τους Fardis et al. [8], αποκάλυψε ότι οι αξονικές επιμηκύνσεις δεν διέφεραν σημαντικά από τις αντίστοιχες που μετρήθηκαν στο γυμνό φορέα. Επομένως, δεν φαίνεται να υπήρξε σημαντική διαφοροποίηση στα αξονικά φορτία λόγω της ύπαρξης των τοιχοπληρώσεων.

2.5.1 Μέθοδος θλιβόμενης διαγωνίου

Σε αυτή την περίπτωση η τοιχοπλήρωση εξιδανικεύεται με ένα γραμμικό στοιχείο που δουλεύει μόνο σε θλίψη. Το πάχος του στοιχείου εξαρτάται από το πάχος της τοιχοπλήρωσης, ενώ το πλάτος του εξαρτάται από το μήκος επαφής της τοιχοπλήρωσης με το περιβάλλον πλαίσιο. Όσο αυξάνονται οι οριζόντιες μετακινήσεις τόσο προχωράνε οι βλάβες στις τοιχοπληρώσεις και μειώνεται το πλάτος επαφής. Σύμφωνα με τον κανονισμό επεμβάσεων (ΚΑΝΕΠΕ) [9] το χρησιμοποιούμενο πλάτος της θλιβόμενης διαγωνίου στην ανάλυση, παίρνει τιμές ανάλογα με τη σκοπούμενη στάθμη επιτελεστικότητας ως εξής:

- Σχεδόν πλήρης λειτουργικότητα κατά το σεισμό: $w = 0.2L$
- Άμεση χρήση μετά το σεισμό: $w = 0.15L$

- Προστασία ζωής: $w = 0.1L$
- Αποφυγή οιονεί κατάρρευσης: $w = 0$

Στην τελευταία στάθμη επιτελεστικότητας οι βλάβες στο φέροντα οργανισμό είναι πολύ προχωρημένες, οπότε οι τοιχοπληρώσεις θεωρούνται πλήρως αποδιοργανωμένες και δεν λαμβάνονται υπόψη.

Στην περίπτωση που οι τοιχοπληρώσεις διαθέτουν ανοίγματα ελέγχεται το κατά πόσον η διάταξη των ανοιγμάτων επιτρέπει τη διαμόρφωση λοξών θλιβομένων διαγωνίων και η προσομοίωση προσαρμόζεται κατάλληλα. Εάν δεν γίνει λεπτομερέστερη διερεύνηση, προτείνεται να αμελείται η τοιχοπλήρωση για την περίπτωση ανοιγμάτων κοντά στα άκρα του φατνώματος. Όταν υπάρχει άνοιγμα του οποίου οι διαστάσεις είναι μικρότερες από το 20% των αντίστοιχων διαστάσεων του φατνώματος και αυτό βρίσκεται κοντά στο κέντρο, η επιρροή του στα χαρακτηριστικά της τοιχοπλήρωσης μπορεί, επίσης, να αμεληθεί. Όταν το άνοιγμα αυτό είναι μεγαλύτερο από το 50% του φατνώματος, αγνοείται ολόκληρη η τοιχοπλήρωση. Για διαστάσεις ανοίγματος μεταξύ του 20% και του 50% μπορεί να γίνει γραμμική παρεμβολή για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών του φατνώματος ή χρήση δυο λοξών θλιβομένων διαγωνίων ανά φάτνωμα. Οι θλιπτήρες αυτοί θα ξεκινούν από τα άκρα της θλιβομένης διαγωνίου και θα καταλήγουν στο μέσον της υποκείμενης και της υπερκείμενης δοκού αντίστοιχα. Σε αυτήν την περίπτωση θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η επιρροή των θλιπτήρων στην έναντι τέμνουσας ασφάλεια των δοκών.

2.5.2 Ανάλυση με τη χρήση διατμητικού φατνώματος

Στην περίπτωση που η προσομοίωση γίνεται με τη χρήση διατμητικού φατνώματος, η αντιστοίχιση δυστένειας (EA) – δυστημσίας (GA) θλιβόμενης διαγωνίου - διατμητικού φατνώματος δίδεται από την σχέση:

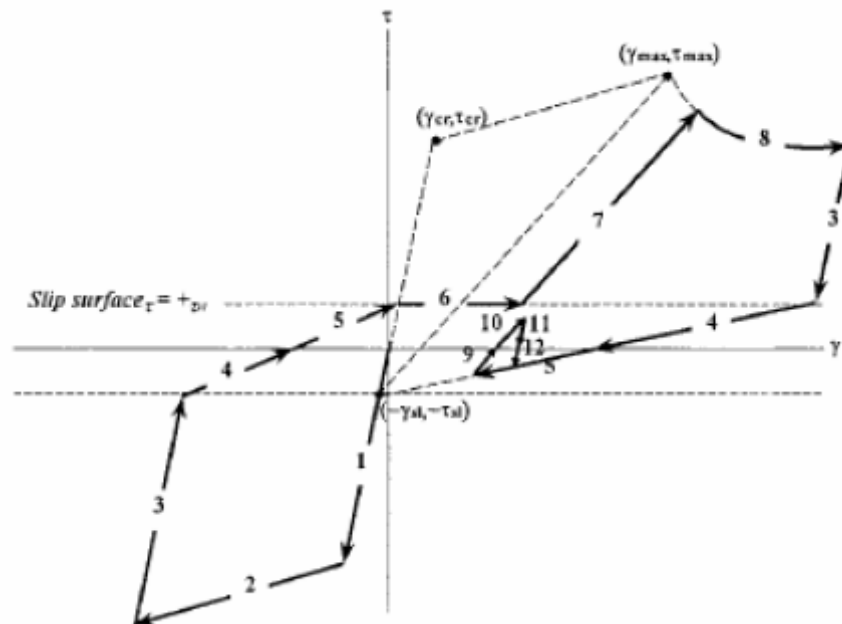
$$E_s A_s = \frac{G_w A_w}{\cos^2 a \sin a}$$

όπου a είναι η γωνία της θλιβομένης διαγωνίου.

Σύμφωνα με τον κανονισμό επεμβάσεων, όταν λαμβάνονται υπόψη οι τοιχοπληρώσεις, θα πρέπει να γίνονται δυο αναλύσεις ώστε να αποτιμώνται τόσο οι θετικές όσο και οι αρνητικές συνέπειες της παρουσίας των τοιχοποιιών. Συγκεκριμένα, αυτές είναι οι εξής:

- Η πρώτη ανάλυση γίνεται θεωρώντας για τα στοιχεία τοιχοπλήρωσης τη δυστένεια ή δυσμησία που αντιστοιχεί στο σημείο του διαγράμματος δύναμης – μετακίνησης της τοιχοπλήρωσης, που αντιστοιχεί στη μέγιστη αντοχή της.
- Η δεύτερη ανάλυση γίνεται θεωρώντας δυστένεια ή δυσμησία που αντιστοιχεί σε σχετικό βέλος ορόφου συμβατό με τις μετακινήσεις του φορέα. Αυτή η διαδικασία απαιτεί επαναλήψεις και διαδοχικές προσεγγίσεις. Απλοποιητικά μπορεί να λαμβάνεται δυσμησία που αντιστοιχεί σε γωνιακή παραμόρφωση 2 έως 3 φορές μεγαλύτερη από την $\gamma(\tau_{\max})$.

Στην περίπτωση δυναμικής ανάλυσης (ελαστική ή ανελαστική) με συνεκτίμηση των τοιχοπληρώσεων, πρέπει να χρησιμοποιείται μοντέλο που να ενσωματώνει κατάλληλα τον καταστατικό νόμο συμπεριφοράς της τοιχοπλήρωσης υπό ανακυκλιζόμενη ένταση. Ένα μοντέλο για τέτοιες αναλύσεις έχει αναπτυχθεί από τους Dymiotis et al. [10], αλλά περιορίζεται σε δυναμικές αναλύσεις επίπεδων φορέων (Drain-2D/90). Ο καταστατικός νόμος αυτού δίνεται στο Σχήμα 2.7. Παρόμοιο μοντέλο αναπτύχθηκε και από τους Fardis et al. [8]. Τα δυο αυτά μοντέλα αναφέρονται σε τοιχοπληρώσεις από οπτοπλινθοδομή, που περιβάλλονται από πλαίσιο οπλισμένου σκυροδέματος.



Σχήμα 2.7 Καταστατικός νόμος για τοιχοπληρώσεις από οπτοπλινθοδομή υπό ανακυκλιζόμενη ένταση (Dymiotis et al. [10], Kappos [11])

Γενικά, τονίζεται ότι οι δυναμικές ανελαστικές αναλύσεις των κατασκευών στο χώρο με συνεκτίμηση και των τοιχοπληρώσεων είναι ιδιαίτερα ευαίσθητες και τα αποτελέσματα τους πρέπει να ελέγχονται. Χρήση πολυπλοκότερων πεπερασμένων στοιχείων περιορίζει το μέγεθος της ανάλυσης και σίγουρα ξεφεύγει από τα όρια της καθημερινής πρακτικής.

2.6 ΕΥΡΩΚΩΔΙΚΑΣ 8

Ο Ευρωκώδικας 8 [12] για το σχεδιασμό νέων κατασκευών οπλισμένου σκυροδέματος περιλαμβάνει διατάξεις για τη συνεκτίμηση της αλληλεπίδρασης των τοιχοπληρώσεων με τους πλαισιακούς φορείς οπλισμένου σκυροδέματος.

Συγκεκριμένα, αν σε κτίριο με πλαισιακό δομικό σύστημα οι τοιχοπληρώσεις προκαλούν έντονη εκκεντρότητα, ο κανονισμός απαιτεί για Κατηγορία Πλαστιμότητας Υψηλή (H) – και συνιστά για Μέση (M) ή Χαμηλή (L) – να συμπεριλαμβάνονται οι τοιχοπληρώσεις στο προσομοίωμα για την ανάλυση της κατασκευής στο χώρο.

Στο προσομοίωμα αυτό οι τοιχοπληρώσεις μπορούν να περιληφθούν ως θλιβόμενες διαγώνιοι των οποίων οι διαστάσεις θα λαμβάνονται κατάλληλα. Προτείνει επίσης ο κανονισμός να γίνεται επιλεκτική αφαίρεση των τοιχοπληρώσεων από ένα ποσοστό (π.χ. του 25%) των τοιχοπληρωμένων φανωμάτων, κυρίως από την πλευρά του κτιρίου με τις λιγότερες τοιχοπληρώσεις και να εξετάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων αυτών.

Εάν η ανομοιομορφία στην κατανομή των τοιχοπληρώσεων σε κάτοψη δεν είναι έντονη, τότε σύμφωνα με τον Ευρωκώδικα 8 η προσομοίωση των τοιχοπληρώσεων για την ανάλυση του δομήματος στο χώρο υποκαθίσταται με διπλασιασμό της τυχηματικής εκκεντρότητας, δηλαδή αυτή γίνεται σε 10% της κάθετης διάστασης του ορόφου σε κάτοψη αντί για το 5%.

Για τη δυσμενή επιρροή των τοιχοπληρώσεων λόγω ανομοιόμορφης κατανομής καθ' ύψος (δημιουργία μαλακού ορόφου, πιλοτή) ο Ευρωκώδικας 8 αυξάνει τη σεισμική ένταση σχεδιασμού των στοιχείων των μη τοιχοπληρωμένων ορόφων ώστε να καλυφθεί το έλλειμμα στη συνολική αντοχή του ορόφου από την παρουσία περισσότερων τοιχοπληρώσεων στον αμέσως επόμενο όροφο. Η αύξηση αυτή γίνεται με πολλαπλασιασμό των εντατικών μεγεθών (αξονικές δυνάμεις, τέμνουσες, ροπές) που προκύπτουν από την ανάλυση για το σεισμό σχεδιασμού επί έναν συντελεστή ο οποίος

ισούται με μονάδα συν το λόγο του ελλείμματος συνολικής διατμητικής αντοχής των τοιχοπληρώσεων του ορόφου ως προς τον ακριβώς από πάνω, δια τη τέμνουσα του ορόφου που προκύπτει από την ανάλυση.

Η προσαύξηση αυτή της έντασης σχεδιασμού χρειάζεται να γίνεται στα κατακόρυφα στοιχεία του λιγότερου τοιχοπληρωμένου ορόφου. Επιβάλλεται στα πλαίσιακά δομικά συστήματα πλαστιμότητας H ενώ καλό θα ήταν να εφαρμόζεται και για τα πλαστιμότητας M και L . Οι διατάξεις αυτές για την προσαύξηση της σεισμικής έντασης δεν ισχύουν όταν το κτίριο διαθέτει τοιχώματα δυσκαμψίας που αναλαμβάνουν τουλάχιστον το 50% της σεισμικής τέμνουσας βάσης στην υπόψη οριζόντια διεύθυνση.

Για εξαιρετικά δυσμενή περίπτωση της ύπαρξης κοντών υποστυλωμάτων και ειδικά στις περιπτώσεις όπου ο φορέας δεν διαθέτει τοιχώματα ο κανονισμός επιβάλλει μια σειρά υπολογιστικών και κατασκευαστικών μέτρων για την αποφυγή της διατμητικής τους αστοχίας. Συγκεκριμένα απαιτεί μέτρα όπως, υπολογισμό ικανοτικής τέμνουσας σχεδιασμού, ανάληψη της σεισμικής τέμνουσας με δισδιαγώνιο οπλισμό όταν το ύψος του κοντού υποστυλώματος είναι μικρότερο από $1.5h_c$ (h_c το πλάτος του υποστυλώματος στο επίπεδο του τοίχου) , τοποθέτηση του οπλισμού κρίσιμων περιοχών σε όλο το ύψος του υποστυλώματος. Επιβάλλει επίσης για τα υποστυλώματα ισογείου τοιχοπληρωμένου πλαισίου να θεωρούνται κρίσιμα σε όλο τους το ύψος ώστε να υπάρχει προστασία έναντι πρόωρης αστοχίας των τοιχοπληρώσεων του ισογείου και μετατροπής του ισογείου σε πιλοτή.

Κεφάλαιο 3

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

3.1 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΜΕΘΟΔΟΥ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Στο τέλος του 19^{ου} αιώνα θεμελιώθηκε πλήρως η μαθηματική θεωρία της ελαστικότητας. Όμως τα προβλήματα στα οποία αυτή μπορούσε να δώσει αναλυτική λύση ήταν πολύ λίγα. Έτσι στις αρχές του 20^{ου} αιώνα το βάρος έπεσε στις προσεγγιστικές μεθόδους. Όμως και αυτές δεν μπορούσαν να απαντήσουν στα περίπλοκα προβλήματα λόγω της έλλειψης υπολογιστικών δυνατοτήτων. Την ίδια εποχή οι ερευνητές επικεντρώθηκαν σε κατασκευές που η μορφή τους έκανε πιο απλό το γενικό πρόβλημα της ελαστικότητας, όπως οι ραβδωτές κατασκευές. Οι ερευνητές στον τομέα αυτόν κατόρθωσαν να βρουν τις σχέσεις εκείνες που συνδέουν τις γενικευμένες μετατοπίσεις στα άκρα των ράβδων με τις αντίστοιχες δυνάμεις στα σημεία αυτά. Η ισορροπία των δυνάμεων που επενεργούν στους κόμβους και η συμβιβαστικότητα των μετατοπίσεων δίνουν ένα σύστημα εξισώσεων που η επίλυσή του παρέχει τη λύση στο πρόβλημα των ραβδωτών κατασκευών.

Το 1941 ο Hrenikoff [13] είχε παρουσιάσει μια πρόδρομη διατύπωση της μεθόδου με την αντικατάσταση ενός επίπεδου ελαστικού μέσου με ένα σύνολο ράβδων και δοκών. Η ιδέα της αντικατάστασης μιας συνεχούς συνάρτησης με συναρτήσεις κατά διαστήματα συνεχείς έχει αναπτυχθεί στην εργασία του Courant [14] το 1943, όπου χρησιμο-

ποιήθηκε ένα σύνολο στοιχείων και η αρχή της ελάχιστης τιμής της συνολικής δυναμικής ενέργειας για να μελετηθεί ένα πρόβλημα στρέψεως κατά St. Venant. Όμως η διατύπωση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων έγινε λίγο καιρό αργότερα.

Το 1944 ο Ιωάννης Αργύρης, ο οποίος εργαζόταν ως ερευνητής στο Royal Aeronautical Society της Βρετανίας, ασχολήθηκε με το πρόβλημα αυτό καθώς όλες οι γνωστές μέθοδοι αναλύσεως δεν μπορούσαν να προσομοιώσουν με αξιοπιστία την κεκλιμένη γεωμετρία των περυγών. Μετά από πολλή προσπάθεια, επινόησε τη χρήση των τριγωνικών στοιχείων και πραγματοποίησε την πρώτη εφαρμογή στους ηλεκτρομηχανικούς υπολογιστές της εποχής με μέγιστη ικανότητα χειρισμού αλγεβρικών συστημάτων μέχρι 64 αγνώστους. Αυτή ήταν η στιγμή της γέννησης της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Δώδεκα χρόνια αργότερα θα ακολουθήσει η συμβολή από την άλλη πλευρά του Ατλαντικού με την εργασία των Turner, Clough, Martin και Topp. [15]

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων στην τυπική της διατύπωση παρουσιάζεται το 1960 σε μία μονογραφία των Αργύρη και Kelsey [16] και στην εργασία του Clough [17]. Από την εποχή εκείνη και μετά, η ανάπτυξη της μεθόδου και η χρησιμοποίησή της για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων του μηχανικού, συμβαδίζει με την τεχνολογία των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Αυτό συμβαίνει γιατί με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων καταλήγουμε σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων που το πλήθος του ταυτίζεται με το πλήθος των βαθμών ελευθερίας του προβλήματος και το οποίο μπορεί να επιλυθεί μόνο με τη βοήθεια H/Y. Η εξέλιξη των H/Y με τις ολοένα μεγαλύτερες δυνατότητες διαχείρισης μεγάλου όγκου δεδομένων, αλλά και με την αύξηση της ταχύτητας εκτελέσεως των αριθμητικών πράξεων, κατέστησε εφικτή την επίλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, σύνθετων προβλημάτων του μηχανικού, τα οποία θεωρούνταν απροσπέλαστα πριν μερικά χρόνια. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αν και η επινόηση και η εφαρμογή της έγινε για την στατική ανάλυση φορέων, έχει καθολικότερη εφαρμογή σε μια μεγαλύτερη κατηγορία προβλημάτων του μηχανικού όπως για παράδειγμα στη ρευστομηχανική, στη μεταφορά θερμότητας, στην ακουστική, στον ηλεκτρομαγνητισμό, στην εμβιομηχανική, κ.λπ.

Από το 1960 έως τις μέρες μας, η βιβλιογραφία στην επιστημονική περιοχή των πεπερασμένων στοιχείων έχει αυξηθεί με γεωμετρική πρόοδο. Πλέον υπάρχει μία πλειάδα έγκυρων διεθνών περιοδικών, στα οποία δημοσιεύονται επιστημονικά άρθρα με αποκλειστικό αντικείμενο τη θεωρία και τις εφαρμογές αυτής της μεθόδου.

Τα πεπερασμένα στοιχεία, αποτελούν επέκταση της μητρικής ανάλυσης των κατασκευών στις μη ραβδωτές, δηλαδή στις ολόσωμες κατασκευές.

3.2 ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, μπορεί να θεωρηθεί ως μία ειδική διατύπωση των μεθόδων Rayleigh-Ritz και σταθμικών υπολοίπων, η οποία όμως έχει το πλεονέκτημα ως προς τις αρχικές διατυπώσεις των μεθόδων αυτών λόγω της μεγαλύτερης ευκολίας με την οποία αντιμετωπίζει πολύπλοκες γεωμετρίες και του ευκολότερου προγραμματισμού της στον ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Η θεμελιώδης αρχή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων βασίζεται στην αντικατάσταση του γεωμετρικά σύνθετου πεδίου του προβλήματος με ένα σύνολο απλών υποπεδίων τα οποία ονομάζονται πεπερασμένα στοιχεία. Έτσι, η προσομοίωση του διώροφου πλαισίου του Σχήματος 3.1, το οποίο αποτελείται από δύο πλάκες, δύο τοιχία, τέσσερα υποστρώματα και οκτώ δοκούς, μπορεί να πραγματοποιηθεί με έναν αριθμό πεπερασμένων στοιχείων πλάκας και τοιχίου για διακριτοποίηση των πλακών και των τοιχίων, αντίστοιχα, ένα αριθμό πεπερασμένων στοιχείων δοκού-στύλου για τα υποστυλώματα του κτιρίου.

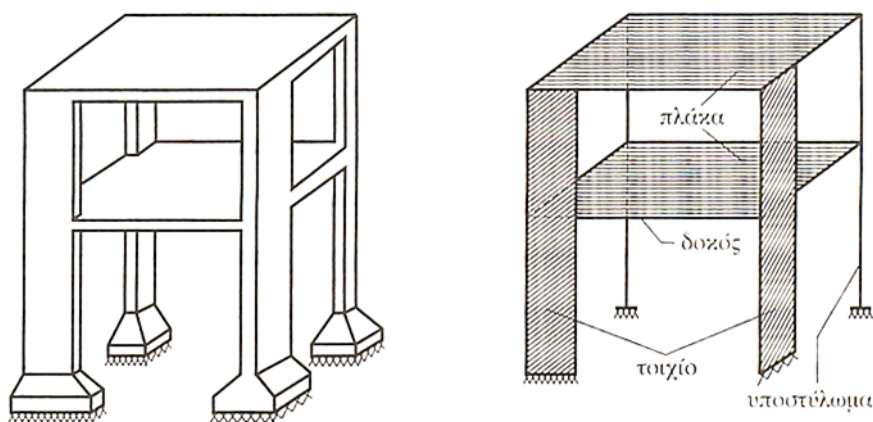
Η άλγεβρα των μητρώων (γραμμική άλγεβρα) έδωσε τα απαραίτητα εργαλεία για τον αποτελεσματικό χειρισμό και την οργάνωση του τεράστιου αριθμού δεδομένων. Όσον αφορά τη στατική των κατασκευών, δεν χρειάστηκε η ανακάλυψη νέων αρχών, απλά η οργάνωση της διαδικασίας επίλυσης με τη βοήθεια της γραμμικής άλγεβρας. Η νέα μέθοδος αποτέλεσε αυτό που ονομάζουμε μητρική ανάλυση των κατασκευών.

Η διαδικασία της επίλυσης ραβδωτών φορέων με τη βοήθεια της μητρικής ανάλυσης των κατασκευών μπορεί να γίνει ουσιαστικά με δύο μοντέλα:

1. Το μοντέλο των μετατοπίσεων (ή ακαμψίας ή ισορροπίας), και
2. Το μοντέλο των δυνάμεων (ή ευκαμψίας ή συμβατότητας).

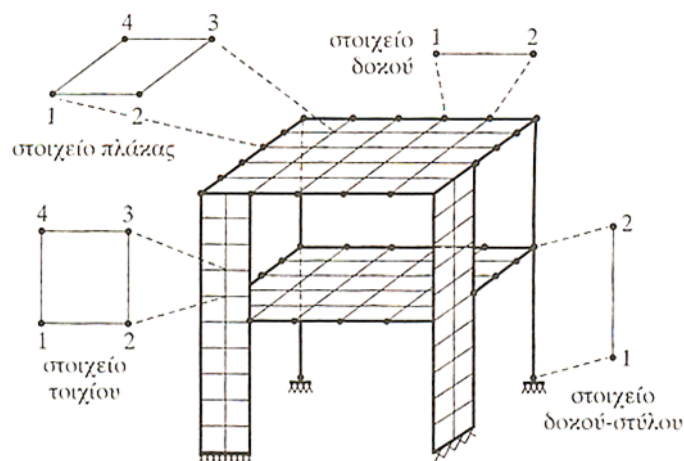
Στο μοντέλο των μετατοπίσεων, οι γενικευμένες δυνάμεις που δρουν στα άκρα κάθε ράβδου μέλους της κατασκευής συνδέονται με τις μετατοπίσεις με τη βοήθεια του μητρώου δυσκαμψίας $[k_e]$ της ράβδου (e). Η ισορροπία αυτών των δυνάμεων σε κάθε κόμβο δίνει το τελικό γραμμικό σύστημα, όπου άγνωστες είναι οι μετατοπίσεις των κόμβων και το δεύτερο μέλος του συστήματος είναι οι εφαρμοσμένες δυνάμεις. Το

μητρώο των συντελεστών των αγνώστων (μετατοπίσεων) είναι το μητρώο δυσκαμψίας $[K]$ της κατασκευής που αποτελεί σύνθεση των επιμέρους ακαμψιών $[k_e]$.



(α) Κατασκευή

(β) Φορέας



(γ) Προσομοίωμα Πεπερασμένων Στοιχείων

Σχήμα 3.1 Προσομοίωση διωρόφου κατασκευής με πεπερασμένα στοιχεία

Την αντίθετη πορεία εφαρμόζουμε στο μοντέλο των δυνάμεων. Εκφράζουμε τις μετατοπίσεις στα άκρα των ράβδων συναρτήσει των γενικευμένων δυνάμεων που δρουν στα άκρα των ράβδων με τη βοήθεια του μητρώου ευκαμψίας $[f^e]$ της ράβδου (e). Οι εξισώσεις ισορροπίας των κόμβων μας επιτρέπουν να εκφράσουμε τις περισσότερες από τις επικόμβιες δυνάμεις συναρτήσει μερικών από αυτές που αποτελούν τις υπερστατικές δυνάμεις του προβλήματος. Η συμβιβαστικότητα των μετατοπίσεων των άκρων των ράβδων που συντρέχουν σε κάθε κόμβο μας δίνει το τελικό γραμμικό σύστημα εξισώ-

σεων, όπου άγνωστες είναι οι υπερστατικές δυνάμεις. Το μητρώο των συντελεστών των αγνώστων είναι το μητρώο ευκαμψίας $[F]$ της κατασκευής.

Πιο δημοφιλές από τα δύο αυτά μοντέλα είναι το μοντέλο των μετατοπίσεων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το μοντέλο των μετατοπίσεων είναι πιο απλό και προσφέρεται καλύτερα για μια αυτόματη εφαρμογή μέσω ενός γενικού προγράμματος ηλεκτρονικού υπολογιστή. Όπως θα δούμε πιο κάτω, η μητρική ανάλυση των κατασκευών και η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων έχουν μίαν αντιστοιχία. Έτσι το μοντέλο των μετατοπίσεων στα πεπερασμένα στοιχεία είναι πάλι πιο δημοφιλές από το μοντέλο δυνάμεων (ή το μικτό μοντέλο). Γι' αυτό θα περιοριστούμε στην περιγραφή του μοντέλου των μετατοπίσεων. Για να γίνει κατανοητή η σύνδεση, στην επόμενη παράγραφο περιλαμβάνουμε κάποια σύντομα στοιχεία της μητρικής ανάλυσης των κατασκευών μέσω του μοντέλου των μετατοπίσεων.

3.3 ΜΗΤΡΩΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

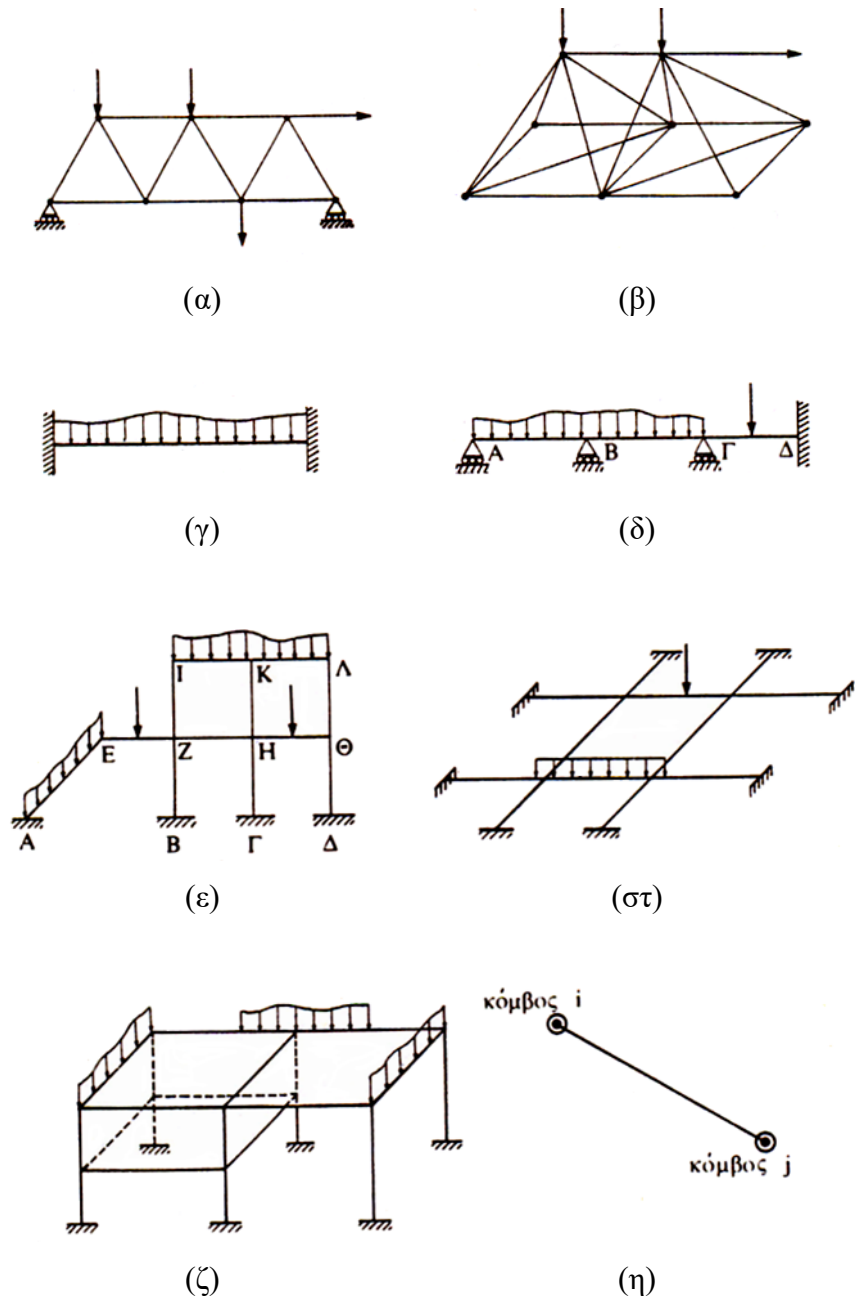
Η διαδικασία της μητρικής ανάλυσης των κατασκευών με το μοντέλο των μετατοπίσεων μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται κυρίως από πέντε βήματα. Τα ίδια περίπου βήματα θα εφαρμόσουμε και στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (μοντέλο μετατοπίσεων). Έτσι, η περιγραφή των βημάτων αυτών έχει ιδιαίτερη σημασία και αυτά παρουσιάζονται στη συνέχεια.

3.3.1 Διακεκριμενοποίηση της κατασκευής

Στο στάδιο αυτό η κατασκευή (Σχήμα 3.2) χωρίζεται σε διακεκριμένα στοιχεία ή μέλη ή ράβδους. Κάθε στοιχείο είναι μια ευθύγραμμη ράβδος δικτύωματος ή μια ευθύγραμμη δοκός (Σχήμα 3.2α, β) και ο χωρισμός γίνεται στα γωνιακά σημεία, στα σημεία σύνδεσης δύο ή περισσότερων ράβδων. Έτσι για παράδειγμα η συνεχής δοκός του Σχήματος 3.2(δ) έχει σημεία χωρισμού των ράβδων τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και αποτελείται από τρεις ράβδους τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ενώ το πλαίσιο του Σχήματος 3.2(ε) από 12 στοιχεία. Τα σημεία στα οποία συνδέονται μεταξύ τους οι ράβδοι λέγονται *κόμβοι*.

Στη φάση αυτή αριθμούνται τα στοιχεία (ράβδοι) και οι κόμβοι. Από το είδος της κατασκευής είναι δυνατό να γνωρίζουμε το βαθμό ελευθερίας κίνησης κάθε κόμβου, δηλαδή τις δυνατότητες μετατόπισης του τυπικού κόμβου. Στο επίπεδο λοιπόν δικτύωμα του

Σχήματος 3.2(α) ο βαθμός ελευθερίας κάθε κόμβου είναι δύο (μετατόπιση κατά x και y), ενώ στο τρισδιάστατο δικτύωμα του Σχήματος 3.2(β) ο βαθμός ελευθερίας κάθε κόμβου τρία (προστίθεται και η δυνατότητα μετατόπισης κατά z). Αντίθετα, στο επίπεδο πλαίσιο που φαίνεται στο Σχήμα 3.2(ε) σε κάθε κόμβο υπάρχει επιπλέον δυνατότητα στροφής, δηλαδή ο βαθμός ελευθερίας του κάθε κόμβου είναι τρία, ενώ στο τρισδιάστατο πλαίσιο του Σχήματος 3.2(ζ) είναι έξι οι βαθμοί ελευθερίας.



Σχήμα 3.2 Διαφορετικοί τύποι φορέων, που αναλύονται με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Γνωρίζοντας τον αριθμό των κόμβων καθώς και τις δυνατότητες μετατόπισης του κάθε κόμβου μπορούμε να βρούμε το βαθμό ελευθερίας κίνησης της κατασκευής, δηλαδή το σύνολο των άγνωστων μετατοπίσεων. Είναι προφανές ότι ανάλογα με το είδος της στήριξης δεσμεύονται και κάποιες δυνατότητες μετατόπισης. Άρα μόνον στη περίπτωση αυτο-ισορροπούμενων συστημάτων (όπου δεν υπάρχουν στηρίξεις) ο βαθμός ελευθερίας κίνησης της κατασκευής είναι το γινόμενο του αριθμού των κόμβων επί του βαθμού ελευθερίας κίνησης του κάθε κόμβου.

3.3.2 Υπολογισμός του μητρώου ακαμψίας του στοιχείου

Στα άκρα μιας ράβδου (e), δηλαδή στους κόμβους της, δρουν οι κομβικές δυνάμεις $[F^e]$. Οι γενικευμένες μετατοπίσεις των κόμβων της ράβδου (e) (δηλαδή μετατοπίσεις και ενδεχόμενα στροφές) συμβολίζονται με $[D^e]$. Οι κομβικές δυνάμεις συνδέονται με τις κομβικές μετατοπίσεις με τη σχέση

$$[F^e] = [k^e][D^e] \quad (3.1)$$

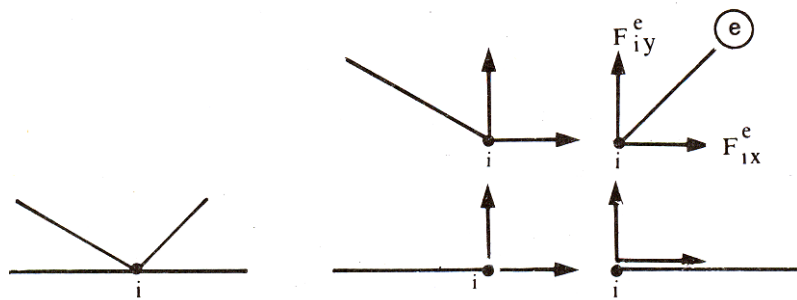
Το μητρώο $[k^e]$ της σχέσης (3.1) ονομάζεται *μητρώο ακαμψίας του στοιχείου e* .

3.3.3 Διαμόρφωση του τελικού συστήματος ακαμψίας

Οι κομβικές δυνάμεις που δρουν σ' ένα κόμβο i πρέπει μαζί με τις εξωτερικά εφαρμοσμένες δυνάμεις να ισορροπούν (Σχήμα 3.3). Η ισορροπία αυτή διατυπωμένη για όλους τους κόμβους του φορέα μας δίνει ένα τελικό σύστημα εξισώσεων που συνδέει τις κομβικές μετατοπίσεις $[\Delta]$ με τις δυνάμεις $[P]$ που δρουν στους μη παγιωμένους κόμβους της κατασκευής (δηλαδή τους κόμβους της κατασκευής που έχουν κάποια ελευθερία κίνησης). Το σύστημα ακαμψίας έχει τη μορφή:

$$[P] = [K][\Delta] \quad (3.2)$$

όπου $[K]$ είναι το μητρώο ακαμψίας όλης της κατασκευής που προέρχεται από τη σύνδεση των επί μέρους ακαμψιών των ράβδων. Η εξίσωση (3.2) μπορεί να προκύψει και με τη βοήθεια ενεργειακών θεωρημάτων όπως την αρχή δυνατών έργων, την αρχή του ελάχιστου της δυναμικής ενέργειας, το πρώτο θεώρημα Castigliano που στην ουσία δεν εκφράζουν τίποτα άλλο παρά την ισορροπία του συνόλου της κατασκευής.



Σχήμα 3.3 Ισορροπία κομβικών δυνάμεων σε κόμβο μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων

3.3.4 Επίλυση του συστήματος ακαμψίας

Η επίλυση του συστήματος (3.2) είναι μια απλή τυποποιημένη διαδικασία και όλα τα υπολογιστικά κέντρα διαθέτουν μια ποικιλία προγραμμάτων. Για την επίλυση του συστήματος (3.2) μπορούμε να επωφεληθούμε από κάποιες ιδιότητες του μητρώου ακαμψίας $[K]$. Έτσι το μητρώο $[K]$ είναι συμμετρικό, θετικά ορισμένο, αραιό (πολλά από τα στοιχεία του είναι μηδέν), οπότε και με κατάλληλη αρίθμηση των κόμβων τα μη μηδενικά στοιχεία συγκεντρώνονται σε μια σχετικά στενή λωρίδα γύρω από την κύρια διαγώνιο (μητρώο λωρίδας).

3.3.5 Υπολογισμός εντατικών μεγεθών και παραμορφωσιακών μεγεθών

Από τη στιγμή που επιλυθεί το σύστημα (3.2) και υπολογισθούν οι κομβικές μετατοπίσεις είναι πολύ απλό να προχωρήσουμε στον υπολογισμό των εντατικών μεγεθών (αξονικές, τέμνουσες, δυνάμεις, ροπές) και παραμορφωσιακών μεγεθών (μετατοπίσεις, στροφές) στο εσωτερικό κάθε στοιχείου. Η διαδικασία είναι ανάλογη με αυτή που μας παρέχει τη σχέση (3.1).

3.4 ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Υπάρχουν πολλές οικογένειες πεπερασμένων στοιχείων, αλλά στην παρούσα εργασία θα γίνει μια εντελώς εγκυκλοπαιδική και ονομαστική αναφορά σε αυτές. Εκτενέστερη ανάλυση θα γίνει στα πεπερασμένα στοιχεία επίπεδης έντασης, μια και αυτά θα χρησιμοποιηθούν για την επίλυση τοιχοποιίας.

- α. Στην οικογένεια των μονοδιάστατων στοιχείων ανήκουν, το τετραγωνικό στοιχείο και το κυβικό στοιχείο.
- β. Στην οικογένεια των δισδιάστατων στοιχείων ανήκουν, τα ορθογωνικά στοιχεία και τα τριγωνικά στοιχεία (τρίγωνο Pascal).
- γ. Στην οικογένεια των ραβδωτών πεπερασμένων στοιχείων ανήκουν, το στοιχείο δικτυώματος και το στοιχείο δοκού επιπέδου πλαισίου.
- δ. Στην οικογένεια των στοιχείων τρισδιάστατης ελαστικότητας ανήκουν, το εξαεδρικό ορθογωνικό στοιχείο και το τετραεδρικό στοιχείο.

Μια πολύ πληθωρική οικογένεια πεπερασμένων στοιχείων είναι και αυτή των ισοπαραμετρικών στοιχείων δικτυώματος, επίπεδης, τρισδιάστατης και αξονοσυμμετρικής ελαστικότητας. Μια μικρότερη κατηγορία είναι αυτή των πεπερασμένων στοιχείων αξονοσυμμετρικής ελαστικότητας.

3.5 ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μία αριθμητική προσεγγιστική μέθοδος επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων και συνεπώς χρειάζεται κάποια κριτήρια ελέγχου της ποιότητας των αποτελεσμάτων, δεδομένου ότι η ακριβής αναλυτική λύση του προβλήματος δεν είναι εφικτή. Στην περίπτωση ανάλυσης των κατασκευών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ακολουθούνται τα εξής στάδια:

- (1) Μετάβαση από το **φυσικό πρόβλημα** που είναι η **κατασκευή**, στο **μαθηματικό προσομοίωμα**, δηλαδή τον **φορέα**. Κατά το στάδιο αυτό γίνεται η εξιδανίκευση της κατασκευής ως προς τη μορφή και τη δομητική λειτουργία των μελών της. Γίνεται ταξινόμηση των μελών σε ράβδους δικτυώματος ή δοκού, σε διδιάστατα μέλη τοιχίων, δίσκων ή πλακών, σε κελύφη και σε τρισδιάστατα μέλη. Καθορίζονται οι ιδιότητες των υλικών των μελών της κατασκευής καθώς και η συμπεριφορά τους κατά τη φόρτιση της κατασκευής (γραμμικώς ελαστικά, απολύτως πλαστικά, ανελαστικά, κ.λπ.) Προσδιορίζονται τα φορτία που φορτίζουν την κατασκευή και οι συνοριακές συνθήκες (εξιδανίκευση της θεμελίωσης, δεσμευμένες μετατοπίσεις, κ.λπ.). Το μαθηματικό προσομοίωμα διέπεται από τις

κυρίαρχες διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας και τις συνοριακές συνθήκες που χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά των μελών του φορέα.

- (2) Μετάβαση από το μαθηματικό προσομοίωμα στο **προσομοίωμα των πεπερασμένων στοιχείων**. Κατά το στάδιο αυτό γίνεται η επιλογή των πεπερασμένων στοιχείων για την προσφορότερη προσομοίωση των μελών του φορέα. Μορφώνεται το δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων για όλα τα μέλη του φορέα. Υπολογίζονται τα μητρώα στιβαρότητας και οι ισοδύναμες δράσεις των στοιχείων και μορφώνεται η τελική μητρική εξίσωση ισορροπίας του φορέα.
- (3) Μετάβαση από το προσομοίωμα των πεπερασμένων στοιχείων στο **υπολογιστικό προσομοίωμα**. Το στάδιο αυτό περιλαμβάνει την αριθμητική επεξεργασία του προσομοιώματος των πεπερασμένων στοιχείων από τον ηλεκτρονικό υπολογιστή. Υπολογίζεται αριθμητικά το καθολικό μητρώο στιβαρότητας και το καθολικό διάνυσμα των ισοδύναμων δράσεων. Ακολουθεί η επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας και ο υπολογισμός των τάσεων και εντατικών μεγεθών.

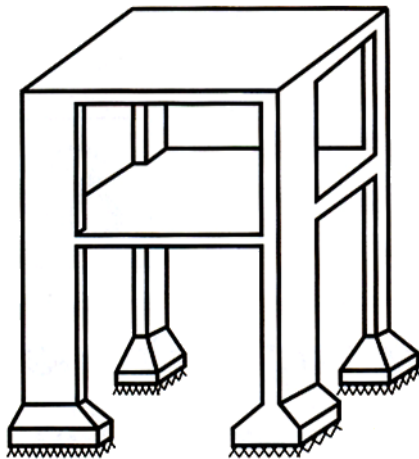
Συνοπτικά λοιπόν τα στάδια προσομοίωσης είναι:

- Στάδιο 1: από την *Κατασκευή* μορφώνεται προσομοίωμα του *Φορέα*
- Στάδιο 2: από τον *Φορέα* σχηματίζεται *Προσομοίωμα Πεπερασμένων Στοιχείων*
- Στάδιο 3: από το *Προσομοίωμα Πεπερασμένων Στοιχείων* φτιάχνεται το *Υπολογιστικό Μοντέλο*

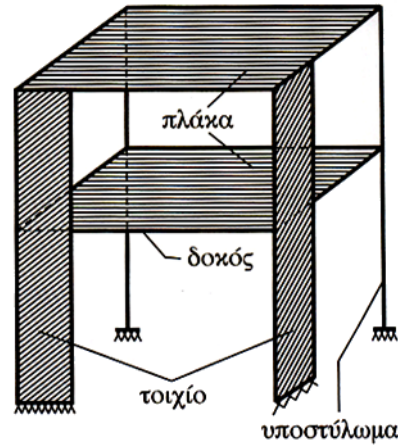
Στο Σχήμα 3.4 παρουσιάζεται μια σχηματική παράσταση των τριών προσομοιωμάτων και των τριών σταδίων που ακολουθούνται κατά την ανάλυση κατασκευών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Σε κάθε στάδιο υπάρχει ο κίνδυνος παρείσφρησης σφαλμάτων, τα οποία ανάλογα με τη σοβαρότητα τους μπορεί να επηρεάσουν σημαντικά την αξιοπιστία της ανάλυσης. Τα σφάλματα αυτά διακρίνονται σε:

- (α) **σφάλματα προσομοίωσης**, τα οποία επηρεάζονται από τον βαθμό της πιστότητας του φορέα προς την κατασκευή,
- (β) **σφάλματα διακριτοποίησης**, που εξαρτώνται από τον τύπο και την πυκνότητα του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων,

(γ) **σφάλματα αριθμητικά**, τα οποία οφείλονται στην πεπερασμένη ακρίβεια με την οποία εκτελούνται οι πράξεις από τον ηλεκτρονικό υπολογιστή και τα οποία είναι δυνατό να αλλοιώσουν σημαντικά τα τελικά αποτελέσματα.

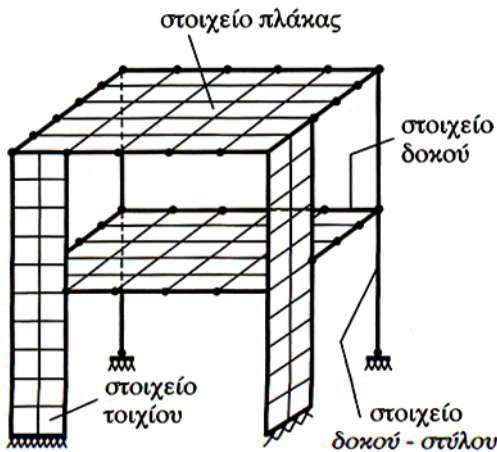


(i) Κατασκευή



Διαφορικές εξισώσεις:
 $Du-f=0$
 $Bu-g=0$ (συνοριακές συνθήκες)

(ii) Φορέας, μαθηματικό προσομοίωμα



$$[k^{(m)}] \{d^{(m)}\} = \{r^{(m)}\}$$

(iii) Προσομοίωμα πεπερασμένων στοιχείων

- $[K] \{D\} = \{R\}$
- Υπολογισμός: $\{D\}, \{\sigma^{(m)}\}$
- Διαγράμματα εντατικών μεγεθών

(iv) Υπολογιστικό προσομοίωμα φορέα

Σχήμα 3.4 Μετάβαση από το φυσικό πρόβλημα (κατασκευή), στο προσομοίωμα των πεπερασμένων στοιχείων

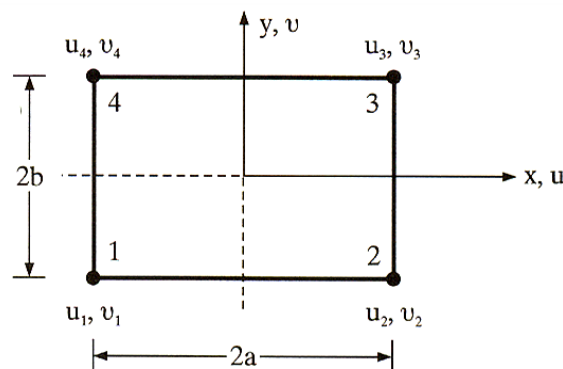
Στον παρακάτω πίνακα παρατίθενται τα σφάλματα τα οποία είναι δυνατόν να υπεισέλθουν κατά την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

Πίνακας 3.1 Σφάλματα κατά την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων	
Σφάλματα προσομοίωσης	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Προσομοίωση μελών του φορέα (δοκοί, πλάκες, τοιχία, κελύφη, κ.λπ.) ▪ Επιλογή συνοριακών συνθηκών ▪ Προσομοίωση φορτίων
Σφάλματα διακριτοποίησης	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Επιλογή πεπερασμένων στοιχείων ▪ Μορφή δικτύου πεπερασμένων στοιχείων ▪ Αριθμητική ολοκλήρωση μητρώου δυσκαμψίας, διανύσματος ισοδύναμων δράσεων ▪ Μη γραμμικές παραδοχές κινηματικών συνθηκών και καταστατικών σχέσεων
Αριθμητικά σφάλματα	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Σφάλματα αποκοπής κατά τη μόρφωση των εξισώσεων ▪ Σφάλματα στρογγύλευσης κατά την επίλυση των εξισώσεων

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ – ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

4.1 ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ – ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΚΟΜΒΩΝ

Στο Σχήμα 4.1 φαίνεται ένα ορθογωνικό στοιχείο τεσσάρων κόμβων στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων x και y . Ο προσανατολισμός του τοπικού συστήματος συντεταγμένων ταυτίζεται με τις διευθύνσεις των πλευρών, ενώ η αρχή των αξόνων μπορεί να τοποθετηθεί και σε οποιοδήποτε άλλο σημείο του επιπέδου xy χωρίς να επηρεασθούν οι ιδιότητες του στοιχείου.



Σχήμα 4.1 Ορθογωνικό στοιχείο τεσσάρων κόμβων

Το στοιχείο έχει πλάτος $2a$ και ύψος $2b$, οι δε κόμβοι του αριθμούνται αριστερόστροφα και οι μετατοπίσεις τους συμβολίζονται με (u_1, v_1) , (u_2, v_2) , (u_3, v_3) και (u_4, v_4) , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1.

4.1.1 Συναρτήσεις σχήματος

Το πεδίο των μετατοπίσεων ορίζεται από γραμμικά πολυώνυμα ως προς x και y αφού δύο είναι οι επικόμβιοι βαθμοί ελευθερίας για κάθε συνιστώσα της μετατόπισης σε κάθε πλευρά του στοιχείου. Κατά συνέπεια οι πολυωνυμικές σχέσεις που ορίζουν τις μετατοπίσεις u, v σε κάθε σημείο $P(x, y)$ του στοιχείου έχουν τη μορφή

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ v = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Ο υπολογισμός των γενικευμένων συντεταγμένων $\{\alpha\}$ επιτυγχάνεται με την τοποθέτηση του σημείου $P(x, y)$ κυκλικά τους κόμβους 1, 2, 3 και 4. Το αποτέλεσμα σε μητρική μορφή δίνεται από τη σχέση

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & -b & ab \\ 1 & a & -b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & -b & -ab \\ 1 & a & b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & -a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & b & -ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix}$$

ή

$$\{d\} = [A]\{\alpha\} \quad (4.3)$$

Η λύση για τις γενικευμένες συντεταγμένες $\{\alpha\}$ δίνεται από τη σχέση

$$\{\alpha\} = [A]^{-1}\{d\}$$

ή

$$\{a\} = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} ab & 0 & ab & 0 & ab & 0 & ab & 0 \\ -b & 0 & b & 0 & b & 0 & -b & 0 \\ -a & 0 & -a & 0 & a & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & ab & 0 & ab & 0 & ab & 0 & ab \\ 0 & -b & 0 & b & 0 & b & 0 & -b \\ 1 & -a & 0 & -a & 0 & a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \{d\} \quad (4.4)$$

Με την αντικατάσταση της σχέσης (4.4) στη σχέση (4.2) ορίζεται το πεδίο των μετατοπίσεων συναρτήσει των επικόμβιων μετατοπίσεων και έτσι προκύπτουν οι συναρτήσεις σχήματος του στοιχείου:

$$\{u\} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} [A]^{-1} \{d\} \quad (4.5)$$

ή

$$\{u\} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \{d\} \quad (4.6)$$

Οι συναρτήσεις σχήματος N_i ($i = 1,2,3,4$) προκύπτουν με την εκτέλεση των πράξεων στην εξίσωση (4.5) και δίνονται από τις σχέσεις

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ N_2 &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ N_3 &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ N_4 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων σχήματος δίδονται γραφικά στο Σχήμα 4.2, από το οποίο μαζί με τις σχέσεις (4.6) συνάγεται ότι η κατανομή της N_i εντός του στοιχείου δίνει τη μετατόπιση $u(x,y)$ ή $v(x,y)$ εντός του στοιχείου, όταν $u_i = 1$ ή $v_i = 1$ και $u_j = 0$ ή $v_j = 0$ για $i \neq j$. Επίσης ισχύει η σχέση

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1 \quad (4.8)$$

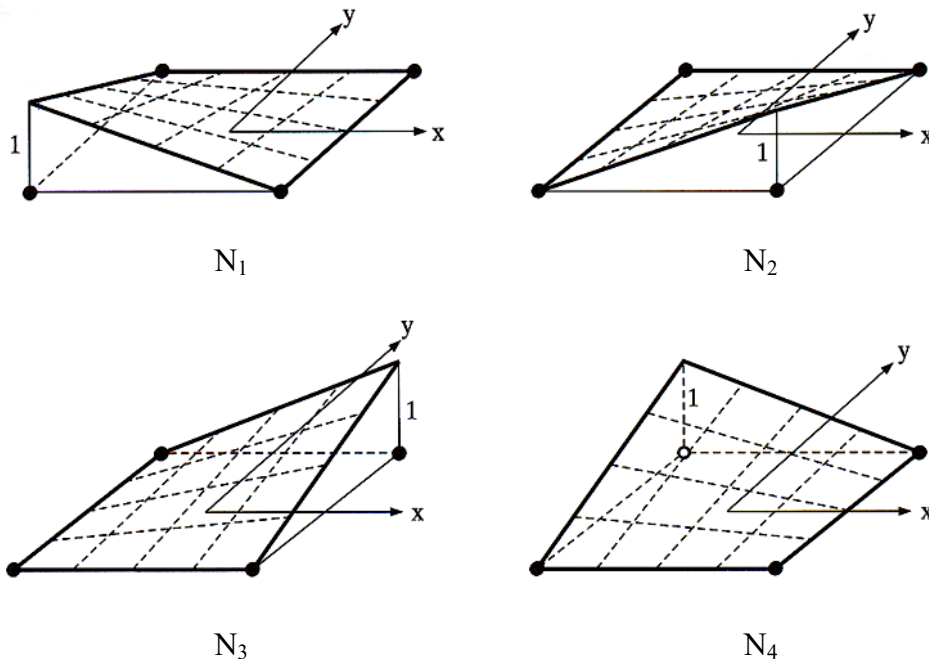
Οι συναρτήσεις σχήματος μπορούν να προκύψουν απευθείας κάνοντας χρήση των πολωνύμων παρεμβολής Lagrange. Για την περίπτωση της γραμμικής παρεμβολής

μεταξύ δυο σημείων $x_1 = -a, x_2 = +a$ ($n = 2$) τα πολυώνυμα Lagrange εκφράζονται από τις σχέσεις

$$\left. \begin{aligned} L_1(x) &= \frac{a-x}{2a} \\ L_2(x) &= \frac{a+x}{2a} \end{aligned} \right\} \quad (4.9\alpha)$$

και μεταξύ των σημείων $y_1 = -b, y_2 = +b$ από τις σχέσεις

$$\left. \begin{aligned} L_1(y) &= \frac{b-y}{2b} \\ L_2(y) &= \frac{b+y}{2b} \end{aligned} \right\} \quad (4.9\beta)$$



Σχήμα 4.2 Συναρτήσεις σχήματος ορθογωνικού τετρακομβικού στοιχείου.

Επομένως, η κατανομή μιας συνάρτησης φ κατά μήκος των πλευρών 1-4 και 2-3 του στοιχείου ορίζεται με βάση τα πολυώνυμα της σχέσης (4.9β) ως:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{14} &= \frac{b-y}{2b} \varphi_1 + \frac{b+y}{2b} \varphi_4 \\ \varphi_{23} &= \frac{b-y}{2b} \varphi_2 + \frac{b+y}{2b} \varphi_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Εάν τώρα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (4.10) για την κατανομή κατά μήκος ευθύγραμμου τμήματος παράλληλου προς τον άξονα x και με άκρα επί των πλευρών 1-2 και 4-3 παίρνουμε τη σχέση

$$\varphi = \frac{a-x}{2a} \varphi_{14} + \frac{a+x}{2a} \varphi_{23} \quad (4.11)$$

και με αντικατάσταση των σχέσεων (4.10) στη σχέση (4.11) προκύπτει η σχέση

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & \frac{(a-x)(b-y)}{4ab} \varphi_1 + \frac{(a+x)(b-y)}{4ab} \varphi_2 + \frac{(a+x)(b+y)}{4ab} \varphi_3 \\ & + \frac{(a-x)(b+y)}{4ab} \varphi_4 \end{aligned}$$

ή

$$\varphi(x, y) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

από την οποία προκύπτουν ίδιες συναρτήσεις σχήματος με εκείνες των σχέσεων (4.7).

Στις σχέσεις (4.12) μπορούμε επίσης να καταλήξουμε με τον απευθείας συνδυασμό των πολυωνύμων Lagrange $L_i(x)$ και $L_i(y)$ ($i = 1, 2$) σε σχέση με τους τέσσερις κόμβους του στοιχείου:

$$\left. \begin{aligned} N_1(x, y) = L_1(x)L_1(y) &= \frac{(a-x)(b-y)}{4ab} \\ N_2(x, y) = L_2(x)L_1(y) &= \frac{(a+x)(b-y)}{4ab} \\ N_3(x, y) = L_2(x)L_2(y) &= \frac{(a+x)(b+y)}{4ab} \\ N_4(x, y) = L_1(x)L_2(y) &= \frac{(a-x)(b+y)}{4ab} \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Το ορθογωνικό στοιχείο τεσσάρων κόμβων είναι ένα διγραμμικό στοιχείο, επειδή οι συναρτήσεις σχήματος αυτού προέρχονται από το γινόμενο δύο γραμμικών, ως προς x και y , πολυωνύμων παρεμβολής. Στη βιβλιογραφία, όμως, αναφέρονται χάρην απλότητας και ως γραμμικό ορθογωνικό στοιχείο επίπεδης έντασης – παραμόρφωσης.

4.1.2 Μητρώο παραμόρφωσης

Οι σχέσεις των ανοιγμένων παραμορφώσεων – μετατοπίσεων για την περίπτωση της επίπεδης έντασης – παραμόρφωσης, εκφράζονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.14)$$

και σε συνδυασμό με τη σχέση (4.6) δίδουν

$$\frac{\partial u}{\partial x} = N_{1,x}u_1 + N_{2,x}u_2 + N_{3,x}u_3 + N_{4,x}u_4 \quad (4.15\alpha)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N_{1,y}v_1 + N_{2,y}v_2 + N_{3,y}v_3 + N_{4,y}v_4 \quad (4.15\beta)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = & N_{1,y}u_1 + N_{2,y}u_2 + N_{3,y}u_3 + N_{4,y}u_4 + N_{1,x}v_1 \\ & + N_{2,x}v_2 + N_{3,x}v_3 + N_{4,x}v_4 \end{aligned} \quad (4.15\gamma)$$

ή

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

ή

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \quad (4.16)$$

οπότε υπολογίζοντας τις παραγώγους των συναρτήσεων σχήματος

$$\left. \begin{aligned} N_{1,x} &= \frac{y-b}{4ab}, & N_{1,y} &= \frac{x-a}{4ab} \\ N_{2,x} &= \frac{-y+b}{4ab}, & N_{2,y} &= \frac{-x-a}{4ab} \\ N_{3,x} &= \frac{y+b}{4ab}, & N_{3,y} &= \frac{x+a}{4ab} \\ N_{4,x} &= \frac{-y-b}{4ab}, & N_{4,y} &= \frac{-x+a}{4ab} \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

το μητρώο παραμόρφωσης $[B]$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$[B] = \frac{1}{4ab} \times \begin{bmatrix} y-b & 0 & -y+b & 0 & y+b & 0 & -y-b & 0 \\ 0 & x-a & 0 & -x-a & 0 & x+a & 0 & -x-a \\ x-a & y-b & -x-a & -y+b & x+a & y+b & -x+a & -y-b \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

4.1.3 Μητρώο στιβαρότητας

Το μητρώο στιβαρότητας του ορθογωνικού στοιχείου τεσσάρων κόμβων επίπεδης έντασης-παραμόρφωσης υπολογίζεται από τη γενική έκφραση

$$[k]_{(8 \times 8)} = \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dV_e \quad (4.19\alpha)$$

ή

$$[k] = t \int_{y=-b}^{+b} \int_{x=-a}^{+a} [B]^T [E] [B] dx dy \quad (4.19\beta)$$

όπου t είναι το πάχος του στοιχείου το οποίο θεωρήθηκε σταθερό.

Το μητρώο παραμόρφωσης $[B_e]$ δίδεται από τη σχέση (4.18), ενώ το μητρώο ελαστικότητας $[E]$ προκύπτει από τη σχέση $\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}$, ανάλογα με το αν πρόκειται για πρόβλημα επίπεδης έντασης ή επίπεδης παραμόρφωσης. Το μητρώο ελαστικότητας για συνθήκες επίπεδης έντασης δίνεται από τη σχέση

$$[E] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

ενώ στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης τα E^* , ν^* της ανωτέρω εξίσωσης πρέπει να αντικατασταθούν με τα E^* , ν^* των σχέσεων

$$E^* = \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad \text{και} \quad \nu^* = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (4.21)$$

διαμορφώνοντας έτσι το μητρώο ελαστικότητας ως

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Το ολοκλήρωμα της σχέσης (4.19β) για το μητρώο ελαστικότητας της εξίσωσης (4.20), δίνει το μητρώο στιβαρότητας ορθογωνικού στοιχείου για την περίπτωση της επίπεδης έντασης, που έχει την παρακάτω μορφή

$$[k] = \frac{Et}{12(1-\nu^2)} \times$$

u_1	v_2	u_2	v_2	
$4r^{-1} + 4\rho r$				
μ	$4r + 4\rho r^{-1}$			
$-4r^{-1} + 2\rho r$	λ	$4r^{-1} + 4\rho r$		
$-\lambda$	$2r - 4\rho r^{-1}$	$-\mu$	$4r + 4\rho r^{-1}$	
$-2r^{-1} - 2\rho r$	$-\mu$	$2r^{-1} - 4\rho r$	λ	...
$-\mu$	$-2r - 2\rho r^{-1}$	$-\lambda$	$-4r + 2\rho r^{-1}$	
$2r^{-1} - 4\rho r$	$-\lambda$	$-2r^{-1} - 2\rho r$	μ	
λ	$-4r + 2\rho r^{-1}$	μ	$-2r - 2\rho r^{-1}$	
u_3	v_3	u_4	v_4	
				(συμμετρικό)
...	$4r^{-1} + 4\rho r$			
	μ	$4r + 4\rho r^{-1}$		
	$-4r^{-1} + 2\rho r$	λ	$4r^{-1} + 4\rho r$	
	$-\lambda$	$2r - 4\rho r^{-1}$	$-\mu$	$4r + 4\rho r^{-1}$

(4.23)

Όπου:

$$r = \frac{a}{b}, \rho = \frac{1-\nu}{2}, \mu = \frac{3(1+\nu)}{2}, \lambda = \frac{3(1-3\nu)}{2}$$

4.1.4 Μητρώο τάσεων

Το μητρώο των τάσεων [S] προκύπτει από τη σχέση τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων $\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}$ και συνδέει το διάνυσμα των τάσεων με τις επικόμβιες μετακι-

νήσεις του στοιχείου. Για την περίπτωση του ορθογωνικού στοιχείου τεσσάρων κόμβων το μητρώο των τάσεων δίνεται από τη σχέση

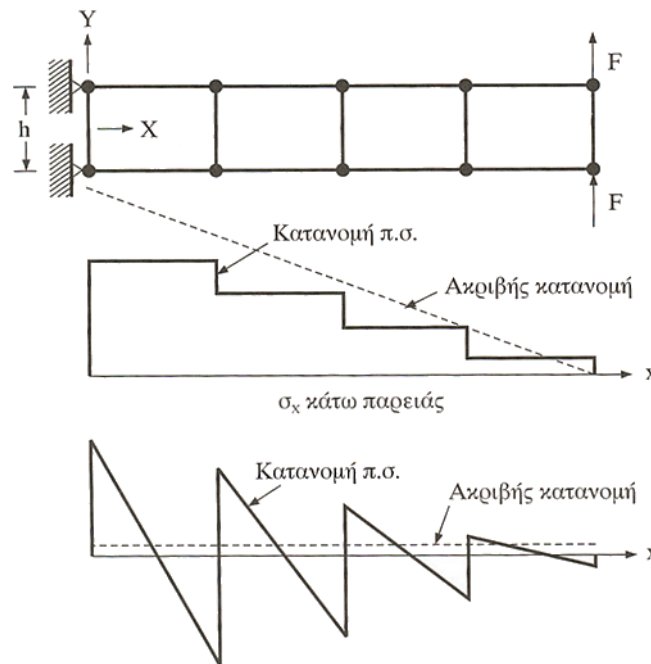
$$\{\sigma\} = [E][B]\{d\} \tag{4.24\alpha}$$

ή

$$\{\sigma\}_{(3 \times 1)} = \frac{[S]}{(3 \times 8)} \frac{[d]}{(8 \times 1)} \tag{4.24\beta}$$

όπου

$$[S] = \frac{E}{4ab(1 - \nu^2)} \times \begin{bmatrix} y - b & \nu(x - a) & b - y & -\nu(a + x) & b + y & \nu(a + x) & -b - y & \nu(a - x) \\ \nu(y - b) & x - a & \nu(b - y) & -a - x & \nu(b + y) & a + x & -\nu(b + y) & a - x \\ \rho(x - a) & \rho(y - b) & -\rho(a + x) & \rho(b - y) & \rho(a + x) & \rho(b + y) & \rho(a - x) & -\rho(b + y) \end{bmatrix} \tag{4.25}$$



Σχήμα 4.3 Προσομοίωση προβόλου με πεπερασμένα στοιχεία (κατανομή τάσεων τ_{xy} και σ_x)

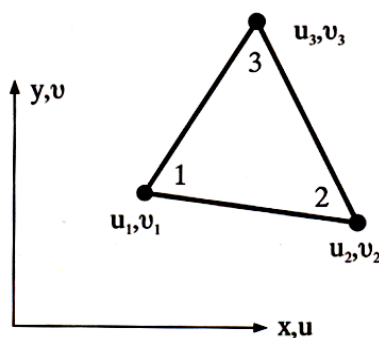
Παρατηρούμε στη σχέση (4.18) ότι η ϵ_x μεταβάλλεται γραμμικά μόνο ως προς y και παραμένει σταθερή ως προς x , ενώ η ϵ_y μεταβάλλεται γραμμικά μόνο ως προς x και παραμένει σταθερή ως προς y . Αυτή η κατανομή των ανηγμένων παραμορφώσεων εντός του στοιχείου συντελεί στη μειωμένη ακρίβεια προσομοίωσης του προβόλου με

το αραιό δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων του Σχήματος 4.3 και την ακραία συγκεντρωμένη φόρτιση όπου η αξονική παραμόρφωση μεταβάλλεται γραμμικά κατά μήκος του άξονα x . Στο Σχήμα 4.3 παρουσιάζεται μία ποιοτική κατανομή των τάσεων σ_x και τ_{xy} κατά μήκος του προβόλου.

Επίσης το στοιχείο αυτό υστερεί στην προσομοίωση εντατικών καταστάσεων καθαρής κάμψης παρά το γεγονός ότι η αξονική παραμόρφωση μεταβάλλεται γραμμικά ως προς y . Η αδυναμία του στοιχείου να διατηρήσει τις ορθές γωνίες στους κόμβους του κατά την παραμόρφωση σε καθαρή κάμψη έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση διατμητικών τάσεων τ_{xy} στο στοιχείο. Στην περίπτωση αυτή οι τάσεις τ_{xy} μηδενίζονται μόνο στον άξονα του στοιχείου ($y = 0$) ενώ θα έπρεπε να είναι μηδενικές για $y \neq 0$.

4.2 ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ – ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΤΡΙΩΝ ΚΟΜΒΩΝ

Τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία χρησιμοποιούνται ευρύτατα για την ανάλυση φορέων με συνθήκες επίπεδης έντασης ή επίπεδης παραμόρφωσης. Ο βασικότερος λόγος της χρησιμοποίησής τους είναι η δυνατότητα που παρέχουν ικανοποιητικής προσομοίωσης φορέων με πολύπλοκη γεωμετρία, σε αντίθεση με τα ορθογωνικά στοιχεία τα οποία διαθέτουν ανάλογη ευχέρεια προσομοίωσης.



Σχήμα 4.4 Τριγωνικό στοιχείο έντασης - παραμόρφωσης τριών κόμβων

Στο Σχήμα 4.4 φαίνεται ένα τριγωνικό στοιχείο τριών κόμβων στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων το οποίο είναι ανεξάρτητο από τη γεωμετρία και τον προσανατολισμό του στοιχείου. Για το λόγο αυτό θεωρούμε ότι το τοπικό σύστημα ταυτίζεται με το καθολικό σύστημα συντεταγμένων.

4.2.1 Συναρτήσεις σχήματος

Το πεδίο των μετατοπίσεων σε κάθε σημείο $P(x,y)$ του στοιχείου ορίζεται από γραμμικά πολυώνυμα ως προς x και y της μορφής

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2x + a_3y \\ v = a_4 + a_5x + a_6y \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Ο υπολογισμός των γενικευμένων συντεταγμένων $\{a\}$ προκύπτει με την τοποθέτηση του σημείου $P(x,y)$ κυκλικά στους κόμβους 1, 2 και 3:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}$$

ή

$$\{d\} = [A]\{a\} \quad (4.28)$$

Ο υπολογισμός του αντιστρόφου μητρώου $[A]^{-1}$ μπορεί να γίνει αναλυτικά με την παρατήρηση ότι αν αλλάξουμε τη σειρά των επικόμβιων μετατοπίσεων, η σχέση (4.28) μετασχηματίζεται στη σχέση

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

από την οποία εάν υπολογίσουμε το αντίστροφο του υπομητρώου (3×3) της σχέσης (4.29) μπορούμε στη συνέχεια να υπολογίσουμε άμεσα το $[A]^{-1}$. Εύκολα προκύπτει ότι:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

όπου

$$\beta_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \gamma_1 = -\begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} \quad (4.31)$$

ενώ οι άλλοι συντελεστές β_2 έως β_3 προκύπτουν με κυκλική εναλλαγή των δεικτών με τη σειρά 1, 2, 3. Επίσης ισχύει η σχέση

$$2A_e = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \quad (4.32)$$

όπου A_e είναι η επιφάνεια του τριγώνου 1-2-3.

Επομένως η σχέση (4.29) εάν λυθεί ως προς $\{a\}$ θα δώσει

$$\{a\} = [A]^{-1}\{d\}$$

ή

$$\{a\} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3 & 0 \\ \delta_1 & 0 & \delta_2 & 0 & \delta_3 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3 \\ 0 & \delta_1 & 0 & \delta_2 & 0 & \delta_3 \end{bmatrix} \{d\} \quad (4.33)$$

Η αντικατάσταση του $\{a\}$ στη σχέση (4.27) θα οδηγήσει στον υπολογισμό των συναρτήσεων σχήματος:

$$\{u\} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} [A]^{-1}\{d\} \quad (4.34)$$

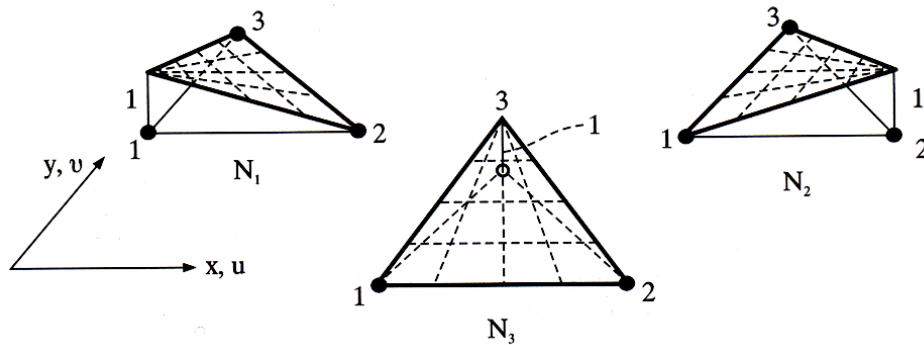
ή

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

όπου

$$N_i = \frac{1}{2A_e} (\beta_i + x\gamma_i + y\delta_i) \quad (i = 1,2,3) \quad (4.36)$$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων σχήματος του τριγωνικού αυτού στοιχείου, παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.5.



Σχήμα 4.5 Συναρτήσεις σχήματος τριγωνικού στοιχείου τριών κόμβων

4.2.2 Μητρώο παραμόρφωσης

Το μητρώο παραμορφώσεως προκύπτει από τις σχέσεις των ανηγμένων παραμορφώσεων

$$\frac{\partial u}{\partial x} = N_{1,x}u_1 + N_{2,x}u_2 + N_{3,x}u_3 \quad (4.37\alpha)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N_{1,y}v_1 + N_{2,y}v_2 + N_{3,y}v_3 \quad (4.37\beta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = N_{1,y}u_1 + N_{2,y}u_2 + N_{3,y}u_3 + N_{1,x}v_1 + N_{2,x}v_2 + N_{3,x}v_3 \quad (4.37\gamma)$$

Οι σχέσεις (4.37) γράφονται σε μητρική μορφή ως εξής

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} \end{bmatrix} [d] \quad (4.38)$$

ή

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \quad (4.39)$$

Το μητρώο παραμορφώσεως εκφράζεται αναλυτικά από τη σχέση

$$[B] = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 & \delta_2 & 0 & \delta_3 \\ \delta_1 & \gamma_1 & \delta_2 & \gamma_2 & \delta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

όπου τα γ_i, δ_i δίνονται από τις σχέσεις (4.31).

Παρατηρούμε στη σχέση (4.40) ότι τα στοιχεία του μητρώου παραμορφώσεως είναι σταθερές ποσότητες μη εξαρτώμενες από τις συντεταγμένες x και y . Για τον λόγο αυτό το στοιχείο ονομάζεται τριγωνικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης.

4.2.3 Μητρώο στιβαρότητας

Το μητρώο στιβαρότητας του τριγωνικού στοιχείου σταθερής παραμόρφωσης μπορεί τώρα να υπολογισθεί από τη σχέση

$$[k]_{(6 \times 6)} = \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dV_e \quad (4.41)$$

ή

$$[k] = \int_{A_e} t [B]^T [E] [B] dx dy \quad (4.42)$$

όπου t αντιστοιχεί στο πάχος του στοιχείου.

Το μητρώο στιβαρότητας υπολογίζεται αναλυτικά για την περίπτωση του σταθερού πάχους σε όλη την επιφάνεια του τριγώνου και δίνεται από τις σχέσεις

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (4.43\alpha)$$

όπου k_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) είναι υπομητρώα (2×2) με τους εξής όρους

$$k_{ij} = \frac{Et}{4A_e(1-v^2)} \begin{bmatrix} \gamma_i \gamma_j + \frac{1-v}{2} \delta_i \delta_j & v \gamma_i \delta_j + \frac{1-v}{2} \delta_i \gamma_j \\ v \delta_i \gamma_j + \frac{1-v}{2} \gamma_i \delta_j & \delta_i \delta_j + \frac{1-v}{2} \gamma_i \gamma_j \end{bmatrix} \quad (4.43\beta)$$

Το μητρώο στιβαρότητας για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης προκύπτει από τις ίδιες εξισώσεις εάν σε αυτές αντικατασταθούν οι ελαστικές σταθερές των σχέσεων (4.21).

Στην περίπτωση που το πάχος του στοιχείου δεν είναι σταθερό μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μεταβολή εντός του στοιχείου εκφράζεται από τις συναρτήσεις παρεμβολής N_1, N_2, N_3 όπως θεωρήσαμε και για τις μετατοπίσεις

$$t(x, y) = N_1(x, y)t_1 + N_2(x, y)t_2 + N_3(x, y)t_3 \quad (4.44)$$

όπου t_i ($i = 1, 2, 3$) είναι το πάχος του στοιχείου στους αντίστοιχους κόμβους και N_i είναι οι συναρτήσεις σχήματος των σχέσεων (4.35). Αυτή η αντιμετώπιση του μεταβλητού πάχους για το συγκεκριμένο στοιχείο είναι μάλλον εξεζητημένη δεδομένου ότι σπάνια χρησιμοποιούνται τριγωνικά στοιχεία σταθερής παραμόρφωσης με μεγάλη επιφάνεια. Πρακτική αντιμετώπιση του μεταβλητού πάχους είναι να το θεωρήσουμε σταθερό και ίσο με τον μέσο όρο των παχών που αντιστοιχούν στους κόμβους του στοιχείου

$$t = \frac{(t_1 + t_2 + t_3)}{3}$$

4.2.4 Μητρώο τάσεων

Το μητρώο των τάσεων υπολογίζεται από τη σχέση $[S] = [E][B]$ η οποία για το συγκεκριμένο στοιχείο έχει τη μορφή

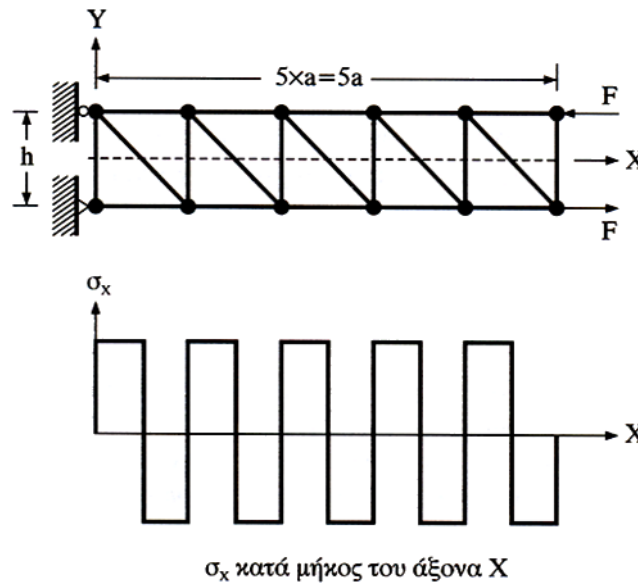
$$[S] = \frac{E}{2A_e(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} \gamma_1 & -\nu\delta_1 & \gamma_2 & \nu\delta_2 & \gamma_3 & \nu\delta_3 \\ \nu\gamma_1 & \delta_1 & \nu\gamma_2 & \delta_2 & -\nu\gamma_3 & \delta_3 \\ \kappa\delta_1 & \kappa\gamma_1 & \kappa\delta_2 & \kappa\gamma_2 & \kappa\delta_3 & \kappa\gamma_3 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

όπου: $\kappa = (1 - \nu)/2$.

Παρατηρούμε ότι οι τάσεις εντός του στοιχείου, όπως άλλωστε αναμενόταν, είναι σταθερές.

Το τριγωνικό στοιχείο σταθερής τάσης δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε περιοχή με μικρή μεταβολή των τάσεων. Στο παράδειγμα του Σχήματος 4.6 παρατηρούμε ότι το στοιχείο αυτό αδυνατεί να προσομοιώσει αποτελεσματικά την κατανομή των τάσεων καθ' ύψος της δοκού που υποβάλλεται σε καθαρή κάμψη. Η αριθμητική τάση που προκύπτει είναι τέσσερις φορές μικρότερη της αναλυτικής τάσης. Παρά την αδυναμία

αυτή το στοιχείο σταθερής τάσης προσεγγίζει τα σωστά αποτελέσματα με την πύκνωση του δικτύου.



Σχήμα 4.6 Ποιοτική κατανομή τάσεων κατά τον άξονα x προβόλου με τριγωνικά στοιχεία σταθερής έντασης.

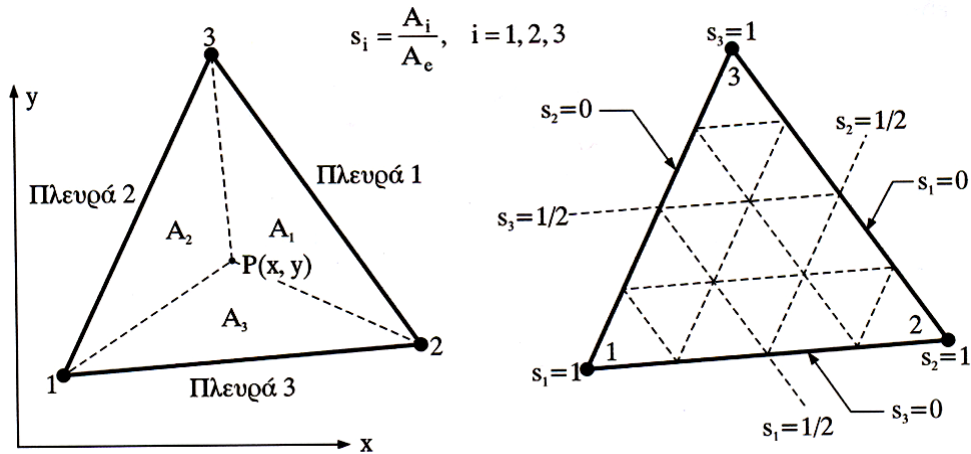
4.3 ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΤΡΙΩΝ ΚΟΜΒΩΝ ΣΕ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

4.3.1 Συναρτήσεις σχήματος

Το μητρώο στιβαρότητας των τριγωνικών στοιχείων είναι δυνατό να διατυπωθεί με κομψότερο τρόπο κάνοντας χρήση των επιφανειακών συντεταγμένων αντί των καρτεσιανών. Οι επιφανειακές συντεταγμένες ορίζονται με σύστημα αναφοράς το στοιχείο και τη γεωμετρία του. Στο Σχήμα 4.7 φαίνονται οι επιφανειακές συντεταγμένες s_1 , s_2 , και s_3 του τριγώνου, οι οποίες ονομάζονται και *φυσικές συντεταγμένες* ή *τριγωνικές συντεταγμένες*.

Οι επιφανειακές συντεταγμένες του σημείου $P(x,y)$ ενός τριγώνου ορίζονται από τους λόγους των εμβαδών A_1 , A_2 , A_3 των επιμέρους τριγώνων προς το εμβαδό ολικό A_e του τριγωνικού στοιχείου:

$$s_1 = \frac{A_1}{A_e}, \quad s_2 = \frac{A_2}{A_e}, \quad s_3 = \frac{A_3}{A_e} \quad (4.46)$$



Σχήμα 4.7 Επιφανειακές συντεταγμένες τριγωνικού στοιχείου

Οι επιφανειακές συντεταγμένες ικανοποιούν τη συνθήκη

$$s_1 + s_2 + s_3 = 1 \tag{4.47}$$

Ενώ το κέντρο βάρους του τριγώνου βρίσκεται στη θέση

$$s_1 = s_2 = s_3 = \frac{1}{3}$$

Από τη σχέση (4.32) προκύπτει η επιφάνεια A_1 δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) - x(y_3 - y_2) + y(x_3 - x_2)] \end{aligned} \tag{4.48}$$

Ενώ οι επιφάνειες A_2, A_3 δίνονται από τη σχέση (4.48) με κυκλική εναλλαγή των δεικτών. Οι εκφράσεις (4.48) δίνουν και τη σχέση μεταξύ των καρτεσιανών συντεταγμένων x, y και των επιφανειακών συντεταγμένων s_1, s_2 , και s_3 . Οι σχέσεις αυτές είναι γραμμικές και έχουν τη μορφή

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} (x_2 y_3 - x_3 y_2) & (y_2 - y_3) & (x_3 - x_2) \\ (x_3 y_1 - x_1 y_3) & (y_3 - y_1) & (x_1 - x_3) \\ (x_1 y_2 - x_2 y_1) & (y_1 - y_2) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \tag{4.49}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η αντίστροφη σχέση της (4.49) γράφεται

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

η οποία εκφράζει τη γραμμική σχέση μεταξύ των x , y και των s_1 , s_2 , s_3 , όπου η επιφάνεια του τριγώνου δίδεται από τη σχέση

$$A_e = \frac{1}{2} \det[A] \quad (4.51)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το πεδίο των μετατοπίσεων, που εκφράζεται με τη γραμμική σχέση (4.26), προκύπτει συναρτήσει των επιφανειακών συντεταγμένων από τη σχέση

$$\begin{cases} u = a'_1 s_1 + a'_2 s_2 + a'_3 s_3 \\ v = a'_4 s_1 + a'_5 s_2 + a'_6 s_3 \end{cases}$$

ή

$$\{u\} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_1 & s_2 & s_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ a'_4 \\ a'_5 \\ a'_6 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Οι σχέσεις (4.52) μετασχηματίζονται, με τις κατάλληλες αντικαταστάσεις, στις σχέσεις

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ a'_4 \\ a'_5 \\ a'_6 \end{bmatrix}$$

ή

$$\{d\} = [A'] \{\alpha'\} \quad (4.53)$$

και συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.53) και (4.52) παίρνουμε

$$\{u\} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_1 & s_2 & s_3 \end{bmatrix} [A']^{-1} \{d\} \quad (4.54)$$

στην οποία

$$[A']^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Η σχέση (4.54) λόγω της (4.55) γράφεται ως εξής

$$\{u\} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & s_2 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & s_2 & 0 & s_3 \end{bmatrix} \{d\} \quad (4.56)$$

από την οποία προκύπτει, δυνάμει της (4.35), ότι οι επιφανειακές συντεταγμένες ταυτίζονται με τις συναρτήσεις σχήματος της καρτεσιανής θεώρησης του στοιχείου.

Συνεπώς

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= s_1 \\ N_2 &= s_2 \\ N_3 &= s_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.57)$$

4.3.2 Μητρώο παραμόρφωσης

Το μητρώο παραμορφώσεως δίνεται από τη σχέση (4.38). Οι παράγωγοι των N_i ως προς x, y θα πρέπει τώρα να υπολογιστούν ως προς τις επιφανειακές συντεταγμένες s_1, s_2, s_3 αφού το πεδίο των μετατοπίσεων και οι συναρτήσεις σχήματος έχουν εκφραστεί συναρτήσει των τριγωνικών συντεταγμένων. Έτσι έχουμε

$$N_{i,x} = N_{i,s_1} \frac{\partial s_1}{\partial x} + N_{i,s_2} \frac{\partial s_2}{\partial x} + N_{i,s_3} \frac{\partial s_3}{\partial x} \quad (4.58)$$

η οποία λόγω των σχέσεων (4.57) απλοποιείται στη σχέση

$$N_{i,x} = \frac{\partial s_i}{\partial x} \quad (4.59)$$

ενώ αντίστοιχα προκύπτει η σχέση

$$N_{i,y} = \frac{\partial s_i}{\partial y} \quad (4.60)$$

Επομένως το μητρώο παραμορφώσεως $[B]$ εκφράζεται, δυνάμει της (4.49) και της (4.56), από τη σχέση

$$[B] = \frac{1}{2A_e} \times \begin{bmatrix} (y_2 - y_3) & 0 & (y_3 - y_1) & 0 & (y_1 - y_2) & 0 \\ 0 & (x_3 - x_2) & 0 & (x_1 - x_3) & 0 & (x_2 - x_1) \\ (x_3 - x_2) & (y_2 - y_3) & (x_1 - x_3) & (y_3 - y_1) & (x_2 - x_1) & (y_1 - y_2) \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

Το οποίο όπως βλέπουμε ταυτίζεται με το μητρώο του $[B]$ της σχέσης (4.40).

4.3.3 Μητρώο στιβαρότητας

Το μητρώο στιβαρότητας του τριγωνικού στοιχείου σταθερής παραμόρφωσης υπολογίζεται σε επιφανειακές συντεταγμένες από τη σχέση (4.42) (βλ. σχέσεις 4.43) και ταυτίζεται με το μητρώο στιβαρότητας που προέκυψε με χρήση των συναρτήσεων σχήματος σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Κεφάλαιο 5

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

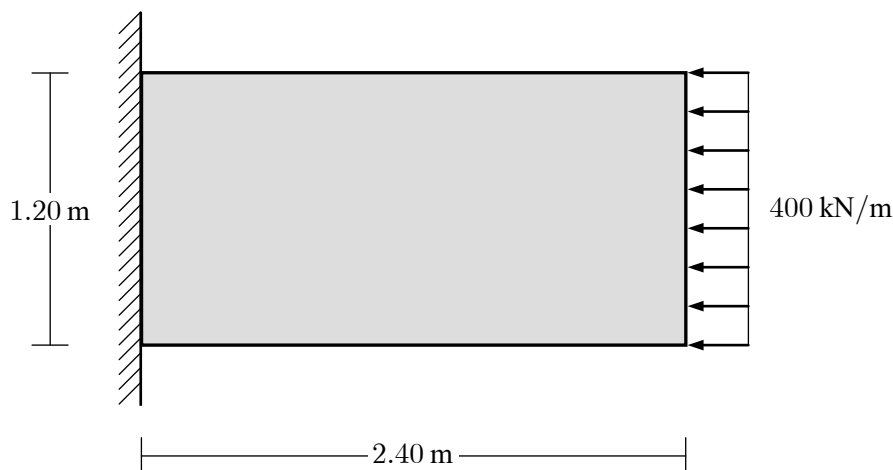
Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, όπως παρουσιάστηκε ανωτέρω και σε συνδυασμό με τη λογική της μεθόδου της άμεσης στιβαρότητας, προγραμματίστηκε σε γλώσσα MatLab. Το πρόγραμμα απαιτεί κατ' αρχήν διακριτοποίηση του επίπεδου τοίχου σε πεπερασμένα στοιχεία (γραμμικά τριγωνικά ή τετραπλευρικά), ο οποίος μπορεί να γίνει αυτόματα σε περιπτώσεις ορθογωνικών χωρίων, στην συνέχεια εισαγωγή δεδομένων που αφορούν τις σταθερές του υλικού, την εξωτερική συνοριακή φόρτιση και τις δεδομένες μετατοπίσεις. Στη περίπτωση που τα πεπερασμένα στοιχεία δεν παράγονται αυτόματα, η γεωμετρία του φορέα εισάγεται μέσω των συντεταγμένων όλων των κόμβων του αριθμητικού προσομοιώματος και του πίνακα αντιστοίχισης πεπερασμένων στοιχείων και κόμβων.

Το πρόγραμμα υπολογίζει τα μητρώα στιβαρότητας όλων των πεπερασμένων στοιχείων και μορφώνει το ολικό μητρώο στιβαρότητας της κατασκευής. Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψη την δεδομένη εξωτερική φόρτιση και μετατοπίσεις (στηρίξεις) στα ελεύθερα σύνορα του τοίχου, επιλύει το σύστημα των εξισώσεων και υπολογίζει τις άγνωστες ποσότητες, οι οποίες είναι οι συνιστώσες των μετατοπίσεων και οι συνοριακές τάσεις, σε εκείνους τους κόμβους όπου αυτά δεν είναι προκαθορισμένα. Τέλος, προσδιορίζει τις τρεις συνιστώσες των τάσεων σε εσωτερικά σημεία του κάθε πεπερασμένου στοιχείου (στο κέντρο του στοιχείου για τις περιπτώσεις γραμμικών τετραπλευ-

ρικών ή τριγωνικών). Αναλυτική παρουσίαση των αρχείων δεδομένων και αποτελεσμάτων του προγράμματος γίνεται στο Παράδειγμα 1 (παράγραφος 5.1).

5.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΟΣ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΟΣ ΤΟΙΧΟΣ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΘΛΙΠΤΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ

Το πρώτο παράδειγμα που μελετάται είναι τοίχος ορθογωνικού σχήματος, ο οποίος είναι πακτωμένος στην αριστερή του πλευρά και καταπονείται με ομοιόμορφα κατανεμημένο θλιπτικό φορτίο στην δεξιά του πλευρά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.1. Το πάχος του είναι $t = 0.10 \text{ m}$.



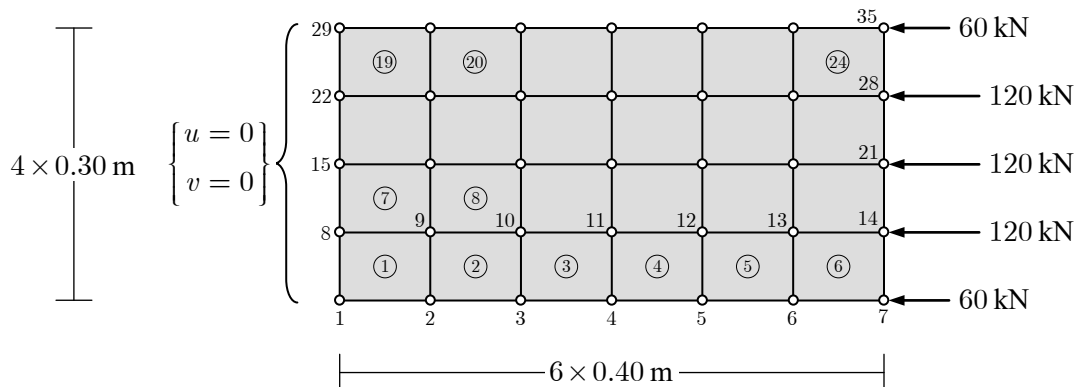
Σχήμα 5.1 Γεωμετρία, στήριξη και φόρτιση ορθογωνικού τοίχου του Παραδείγματος 1.

Το υλικό του φορέα είναι εποξικός γραφίτης (graphite-epoxy) με ελαστικές σταθερές

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = 1.4 \times 10^8 \text{ kN/m}^2, \quad E_2 = 0.9 \times 10^7 \text{ kN/m}^2 \\ \nu_{12} = 0.30, \quad G_{12} = 0.7 \times 10^7 \text{ kN/m}^2 \end{array} \right\} \quad (5.1)$$

Ο τοίχος διακριτοποιείται σε γραμμικά τετραπλευρικά πεπερασμένα στοιχεία. Χωρίζεται σε έξι (6) στοιχεία κατά την οριζόντια διεύθυνση και σε τέσσερα (4) κατά την κατακόρυφη διεύθυνση. Το πλάτος κάθε στοιχείου ορίζεται 0.40 m , ενώ το ύψος του είναι 0.30 m . Ο χωρισμός του τοίχου σε πεπερασμένα στοιχεία, η αρίθμηση των στοιχείων και των κόμβων, ο προσδιορισμός των συντεταγμένων των κόμβων, καθώς και η αντιστοίχιση των στοιχείων με τους κόμβους γίνονται αυτόματα από το πρόγραμμα,

όπως παρουσιάζεται και στο Πίνακα 5.1 του αρχείου των δεδομένων του προβλήματος. Το αριθμητικό προσομοίωμα (μοντέλο) του τοίχου δίνεται στο Σχήμα 5.2.



Σχήμα 5.2 Ο ορθογωνικός τοίχος του Παραδείγματος 1 διακριτοποιημένος σε 24 γραμμικά τετραπλευρικά στοιχεία.

Τα επικόμβια φορτία υπολογίζονται για κάθε στοιχείο από τις σχέσεις των τάσεων του κεφαλαίου 4 σε συνδυασμό με τις συναρτήσεις σχήματος, που είναι και ο γενικός τρόπος προσδιορισμού στην περίπτωση συνοριακού κατανεμημένου φορτίου. Ένας απλούστερος τρόπος για την συγκεκριμένη περίπτωση γεωμετρίας και φόρτισης είναι να ισομοιαστεί το κατανεμημένο στη πλευρά του στοιχείου φορτίο στους δύο κόμβους της πλευράς αυτής. Δηλαδή, η συνολική δύναμη είναι $0.30 \text{ m} \times 400 \text{ kN/m} = 120 \text{ kN}$ στην κάθε πλευρά και συνεπώς η δύναμη που παραλαμβάνει ο κάθε κόμβος από το στοιχείο είναι το μισό της συνολικής, 60 kN . Οι ακραίοι κόμβοι με αριθμό 7 και 35 θα έχουν επικόμβια δύναμη 60 kN , ενώ οι ενδιάμεσοι με αριθμούς 14, 21 και 28 θα έχουν επικόμβια δύναμη 120 kN εφόσον σε αυτούς επαλληλίζονται οι δυνάμεις που προέρχονται από τα δύο παρακείμενα στοιχεία. Οι δυνάμεις σε όλους τους κόμβους της δεξιάς πλευράς φαίνονται στο Σχήμα 5.2.

Τα αποτελέσματα με τη μορφή, ακριβώς, που εμφανίζονται στο αρχείο αποτελεσμάτων του προγράμματος, δίνονται στο Πίνακα 5.2. Σε αυτά περιλαμβάνονται οι δύο συνιστώσες των μετατοπίσεων σε όλους τους κόμβους του μοντέλου και οι τρεις τάσεις στο κέντρο κάθε ορθογωνικού πεπερασμένου στοιχείου.

Ο συγκεκριμένος τοίχος μελετήθηκε επίσης και για την περίπτωση αντίθετου προσανατολισμού του ορθότροπου υλικού. Δηλαδή, για την περίπτωση που η διεύθυνση “1” του

υλικού ταυτίζεται με τον άξονα y αντί του x και οι ελαστικές σταθερές παίρνουν τότε τις τιμές

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = 0.9 \times 10^7 \text{ kN/m}^2, \quad E_2 = 1.4 \times 10^8 \text{ kN/m}^2 \\ \nu_{12} = 0.30 \frac{E_1}{E_2} = 0.0193, \quad G_{12} = 0.7 \times 10^7 \text{ kN/m}^2 \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

Για προσανατολισμό του υλικού με $E_1 = 1.4 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ (Εξ. 5.1) η μέγιστη μετατόπιση κατά την οριζόντια διεύθυνση εμφανίζεται στους κόμβους της δεξιάς πλευράς, δηλαδή τους 7, 14, 21, 35 και η τιμή της είναι $u_{\max} = -6.8588 \times 10^{-5} \text{ m}$, ενώ η μέγιστη κατακόρυφη μετατόπιση παρουσιάζεται στο κόμβο 7 και με αντίθετη φορά είναι ίδια στον κόμβο 35, έχοντας τιμή $v_{\max} = -5.2428 \times 10^{-6} \text{ m}$.

Για προσανατολισμό του υλικού με $E_1 = 0.9 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ (Εξ. 5.2) η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση βρίσκεται πάλι στους κόμβους της δεξιάς πλευράς, δηλαδή τους 7, 14, 21, 35 και έχει τιμή $u_{\max} = -1.0663 \times 10^{-3} \text{ m}$, ενώ η μέγιστη κατακόρυφη μετατόπιση παρουσιάζεται στο κόμβο 2 και με αντίθετη φορά επίσης στον κόμβο 30, έχοντας τιμή $v_{\max} = -6.0755 \times 10^{-6} \text{ m}$. Συνεπώς, σε αυτή τη περίπτωση, η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση είναι 15.5 φορές μεγαλύτερη από την πρώτη, ενώ οι κατακόρυφες δεν εμφανίζουν τόσο μεγάλες διαφορές.

Πίνακας 5.1 Αρχείο δεδομένων Παραδείγματος 1

Αρχείο Δεδομένων	Παρατηρήσεις
'Παράδειγμα πτυχιακής: εφελκυσμός, graphite-epoxy'	Τίτλος του παραδείγματος
1, 4	Αυτόματος χωρισμός σε πεπερασμένα στοιχεία (1), τετραπλευρικό στοιχείο με 4 κόμβους (γραμμικό)
6, 4 0.40 0.40 0.40 0.40 0.40 0.40 0.30 0.30 0.30 0.30	Χωρισμός του ορθογωνικού τοίχου σε 6 τμήματα κατά τη διεύθυνση x και σε 4 τμήματα κατά τη διεύθυνση y . Τα μήκη των 6 τμημάτων κατά x (0.40 το καθένα) και των 4 κατά y (0.30 το καθένα).
0.10 0. 0.	Το πάχος του τοίχου (0.10), οι μαζικές δυνάμεις κατά τις διευθύνσεις x και y .
1.4E8 0.9E7 0.30 0.7E7	Οι σταθερές του υλικού E_1 , E_2 , ν_{12} και G_{12}

10 1 1 0. 1 2 0. 8 1 0. 8 2 0. 15 1 0. 15 2 0. 22 1 0. 22 2 0. 29 1 0. 29 2 0.	Αριθμός γνωστών συνιστωσών των μετατοπίσεων (συνολικά 10, δηλαδή 2 για κάθε ένα από τους 5 κόμβους της πάκτωσης). Δεδομένα με πρώτο τον αριθμό του κόμβου, μετά τη διεύθυνση της δεδομένης μετατόπισης, 1 για τη διεύθυνση x και 2 για την διεύθυνση y , και τέλος τη τιμή της γνωστής μετατόπισης. Συνολικά 10 γραμμές και σε όλες η μετατόπιση λόγω πάκτωσης είναι μηδέν.
5 7 1 -60. 14 1 -120. 21 1 -120. 28 1 -120. 35 1 -60.	Αριθμός γνωστών μη μηδενικών συνιστωσών των επικόμβιων δυνάμεων (συνολικά 5, δηλαδή 1 για κάθε ένα από τους 5 κόμβους του δεξιού άκρου του τοίχου). Δεδομένα με πρώτο τον αριθμό του κόμβου, μετά τη διεύθυνση της δεδομένης μετατόπισης, που είναι 1 για δυνάμεις κατά τη διεύθυνση x , και τέλος η τιμή της γνωστής δύναμης στον κάθε κόμβο (5 γραμμές συνολικά).

Πίνακας 5.2 Αρχείο αποτελεσμάτων Παραδείγματος 1

Παράδειγμα πτυχιακής-εφελκυσμός, graphite-epoxy

Plane stress problem.

Element type : 4-node linear quadrilateral elements

Number of elements : 24

Number of nodes in the F.E. mesh : 35

Number of nodes per element : 4

Number of degrees of freedom per node : 2

Coordinates of the global nodes:

1 : (0.00000E+00, 0.00000E+00)	2 : (4.00000E-01, 0.00000E+00)
3 : (8.00000E-01, 0.00000E+00)	4 : (1.20000E+00, 0.00000E+00)
5 : (1.60000E+00, 0.00000E+00)	6 : (2.00000E+00, 0.00000E+00)
7 : (2.40000E+00, 0.00000E+00)	8 : (0.00000E+00, 3.00000E-01)
9 : (4.00000E-01, 3.00000E-01)	10 : (8.00000E-01, 3.00000E-01)
11 : (1.20000E+00, 3.00000E-01)	12 : (1.60000E+00, 3.00000E-01)
13 : (2.00000E+00, 3.00000E-01)	14 : (2.40000E+00, 3.00000E-01)

15 :	(0.00000E+00, 6.00000E-01)	16 :	(4.00000E-01, 6.00000E-01)
17 :	(8.00000E-01, 6.00000E-01)	18 :	(1.20000E+00, 6.00000E-01)
19 :	(1.60000E+00, 6.00000E-01)	20 :	(2.00000E+00, 6.00000E-01)
21 :	(2.40000E+00, 6.00000E-01)	22 :	(0.00000E+00, 9.00000E-01)
23 :	(4.00000E-01, 9.00000E-01)	24 :	(8.00000E-01, 9.00000E-01)
25 :	(1.20000E+00, 9.00000E-01)	26 :	(1.60000E+00, 9.00000E-01)
27 :	(2.00000E+00, 9.00000E-01)	28 :	(2.40000E+00, 9.00000E-01)
29 :	(0.00000E+00, 1.20000E+00)	30 :	(4.00000E-01, 1.20000E+00)
31 :	(8.00000E-01, 1.20000E+00)	32 :	(1.20000E+00, 1.20000E+00)
33 :	(1.60000E+00, 1.20000E+00)	34 :	(2.00000E+00, 1.20000E+00)
35 :	(2.40000E+00, 1.20000E+00)		

Boolean (connectivity) matrix :

<u>Element</u>	<u>#1</u>	<u>#2</u>	<u>#3</u>	<u>#4</u>
1 :	1	2	9	8
2 :	2	3	10	9
3 :	3	4	11	10
4 :	4	5	12	11
5 :	5	6	13	12
6 :	6	7	14	13
7 :	8	9	16	15
8 :	9	10	17	16
9 :	10	11	18	17
10 :	11	12	19	18
11 :	12	13	20	19
12 :	13	14	21	20
13 :	15	16	23	22
14 :	16	17	24	23
15 :	17	18	25	24
16 :	18	19	26	25
17 :	19	20	27	26
18 :	20	21	28	27
19 :	22	23	30	29
20 :	23	24	31	30
21 :	24	25	32	31
22 :	25	26	33	32
23 :	26	27	34	33
24 :	27	28	35	34

Material properties and loading of the plane body :

Thickness = 1.0000000E-01

E1 = 1.4000000E+08 E2 = 9.0000000E+06

G12 = 7.0000000E+06 Pois.(12) = 3.0000000E-01

Distributed load : $f_x = 0.0000000E+00$, $f_y = 0.0000000E+00$ **Specified primary degrees of freedom (10) :**

1 2 15 16 29 30 43 44 57 58

Values of the specified primary degrees of freedom :

0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00

0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00

0.0000000E+00 0.0000000E+00

Specified nonzero secondary degrees of freedom (5) :

13 27 41 55 69

Values of the specified secondary degrees of freedom :

-6.0000000E+01 -1.2000000E+02 -1.2000000E+02 -1.2000000E+02

-6.0000000E+01

Node	X - coord.	Y - coord.	U - displ.	V - displ.
1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	4.00000E-01	0.00000E+00	-1.1681184E-05	-4.0110741E-06
3	8.00000E-01	0.00000E+00	-2.3041734E-05	-4.8502732E-06
4	1.20000E+00	0.00000E+00	-3.4383915E-05	-5.1208091E-06
5	1.60000E+00	0.00000E+00	-4.5758805E-05	-5.1686974E-06
6	2.00000E+00	0.00000E+00	-5.7164488E-05	-5.1842938E-06
7	2.40000E+00	0.00000E+00	-6.8588205E-05	-5.2428161E-06
8	0.00000E+00	3.00000E-01	0.0000000E+00	0.0000000E+00
9	4.00000E-01	3.00000E-01	-1.1280381E-05	-1.6096955E-06
10	8.00000E-01	3.00000E-01	-2.2745883E-05	-2.3829836E-06
11	1.20000E+00	3.00000E-01	-3.4205962E-05	-2.5544152E-06
12	1.60000E+00	3.00000E-01	-4.5650944E-05	-2.5923216E-06
13	2.00000E+00	3.00000E-01	-5.7084904E-05	-2.6012342E-06
14	2.40000E+00	3.00000E-01	-6.8514935E-05	-2.6466139E-06
15	0.00000E+00	6.00000E-01	0.0000000E+00	0.0000000E+00

16	4.00000E-01	6.00000E-01	-1.1310993E-05	4.0763461E-21
17	8.00000E-01	6.00000E-01	-2.2697097E-05	1.0058516E-21
18	1.20000E+00	6.00000E-01	-3.4140951E-05	-1.3234890E-20
19	1.60000E+00	6.00000E-01	-4.5590480E-05	-3.4887170E-20
20	2.00000E+00	6.00000E-01	-5.7032893E-05	-5.1563131E-20
21	2.40000E+00	6.00000E-01	-6.8467035E-05	-1.1921989E-19
22	0.00000E+00	9.00000E-01	0.0000000E+00	0.0000000E+00
23	4.00000E-01	9.00000E-01	-1.1280381E-05	1.6096955E-06
24	8.00000E-01	9.00000E-01	-2.2745883E-05	2.3829836E-06
25	1.20000E+00	9.00000E-01	-3.4205962E-05	2.5544152E-06
26	1.60000E+00	9.00000E-01	-4.5650944E-05	2.5923216E-06
27	2.00000E+00	9.00000E-01	-5.7084904E-05	2.6012342E-06
28	2.40000E+00	9.00000E-01	-6.8514935E-05	2.6466139E-06
29	0.00000E+00	1.20000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
30	4.00000E-01	1.20000E+00	-1.1681184E-05	4.0110741E-06
31	8.00000E-01	1.20000E+00	-2.3041734E-05	4.8502732E-06
32	1.20000E+00	1.20000E+00	-3.4383915E-05	5.1208091E-06
33	1.60000E+00	1.20000E+00	-4.5758805E-05	5.1686974E-06
34	2.00000E+00	1.20000E+00	-5.7164488E-05	5.1842938E-06
35	2.40000E+00	1.20000E+00	-6.8588205E-05	5.2428161E-06

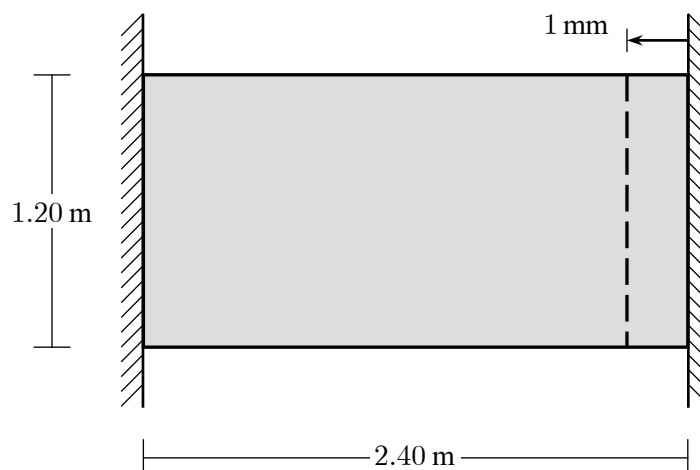
Elem.	X - coord.	Y - coord.	Sigma- xx	Sigma- yy	Sigma- xy
1	2.0000E-01	1.5000E-01	-4.0307885E+03	-4.1715956E+01	-4.4505699E+01
2	6.0000E-01	1.5000E-01	-3.9957686E+03	-4.0312253E+00	-5.9816294E+00
3	1.0000E+00	1.5000E-01	-3.9908338E+03	-1.4608272E+00	1.6604962E+00
4	1.4000E+00	1.5000E-01	-3.9934400E+03	1.2520280E-01	2.5837832E+00
5	1.8000E+00	1.5000E-01	-3.9968447E+03	3.0952770E-01	1.9724068E+00
6	2.2000E+00	1.5000E-01	-3.9992377E+03	5.6077168E-01	8.7415513E-01
7	2.0000E-01	4.5000E-01	-3.9692114E+03	-5.2403645E+01	-1.4441975E+01
8	6.0000E-01	4.5000E-01	-4.0042314E+03	-1.7334277E+01	-6.5542390E+00
9	1.0000E+00	4.5000E-01	-4.0091661E+03	-3.2586505E+00	-1.7239448E-01
10	1.4000E+00	4.5000E-01	-4.0065599E+03	-6.8317900E-02	1.1321920E+00
11	1.8000E+00	4.5000E-01	-4.0031553E+03	6.9962752E-01	1.2342166E+00
12	2.2000E+00	4.5000E-01	-4.0007622E+03	1.5601633E+00	7.6855705E-01
13	2.0000E-01	7.5000E-01	-3.9692114E+03	-5.2403645E+01	1.4441975E+01
14	6.0000E-01	7.5000E-01	-4.0042314E+03	-1.7334277E+01	6.5542390E+00
15	1.0000E+00	7.5000E-01	-4.0091661E+03	-3.2586505E+00	1.7239448E-01
16	1.4000E+00	7.5000E-01	-4.0065599E+03	-6.8317900E-02	-1.1321920E+00

17	1.8000E+00	7.5000E-01	-4.0031553E+03	6.9962752E-01	-1.2342166E+00
18	2.2000E+00	7.5000E-01	-4.0007622E+03	1.5601633E+00	-7.6855705E-01
19	2.0000E-01	1.0500E+00	-4.0307885E+03	-4.1715956E+01	4.4505699E+01
20	6.0000E-01	1.0500E+00	-3.9957686E+03	-4.0312253E+00	5.9816294E+00
21	1.0000E+00	1.0500E+00	-3.9908338E+03	-1.4608272E+00	-1.6604962E+00
22	1.4000E+00	1.0500E+00	-3.9934400E+03	1.2520280E-01	-2.5837832E+00
23	1.8000E+00	1.0500E+00	-3.9968447E+03	3.0952770E-01	-1.9724068E+00
24	2.2000E+00	1.0500E+00	-3.9992377E+03	5.6077168E-01	-8.7415513E-01

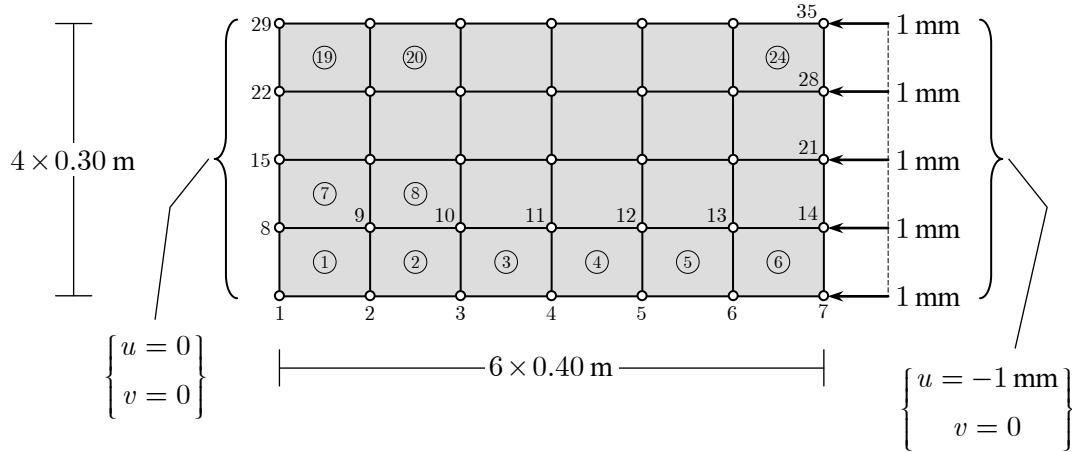
The stress components have units (F/L/L).

5.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΟΣ ΤΟΙΧΟΣ ΜΕ ΕΠΙΒΕΒΛΗΜΕΝΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ ΣΤΗΡΙΞΕΩΝ

Ο τοίχος που μελετάται στο παράδειγμα αυτό έχει την ίδια γεωμετρία και πάχος με εκείνον του πρώτου παραδείγματος. Η ένταση στην περίπτωση αυτή προκαλείται από ομοιόμορφη οριζόντια μετατόπιση της δεξιάς στήριξης του κατά 1 mm, όπως φαίνεται και στο Σχ. 5.3. Η διακριτοποίηση σε πεπερασμένα στοιχεία παραμένει ίδια με αυτή του πρώτου παραδείγματος και δίνεται στο Σχ. 5.4.



Σχήμα 5.3 Γεωμετρία, στήριξη και φόρτιση του ορθογωνικού τοίχου του Παραδείγματος 2.



Σχήμα 5.4 Διακριτοποίηση του ορθογωνικού τοίχου του Παραδείγματος 2 σε 24 γραμμικά τετραπλευρικά στοιχεία.

Ο τοίχος αναλύθηκε για δύο περιπτώσεις υλικών, το σκυρόδεμα που είναι ισότροπο και έχει ελαστικές σταθερές

$$E_1 = E_2 = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2, \quad \nu_{12} = 0.25, \quad G_{12} = 8.4 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 \quad (5.3)$$

και εποξικό γραφίτη (graphite-epoxy), που είναι ανισότροπο υλικό με ελαστικές σταθερές, που δίνονται στις Εξ. (5.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = 1.4 \times 10^8 \text{ kN/m}^2, \quad E_2 = 0.9 \times 10^7 \text{ kN/m}^2 \\ \nu_{12} = 0.30, \quad G_{12} = 0.7 \times 10^7 \text{ kN/m}^2 \end{array} \right\} \quad (5.4)$$

Η μέγιστη μετατόπιση στην κατακόρυφη διεύθυνση εμφανίζεται και για τις δύο περιπτώσεις υλικών στον κόμβο 4, ενώ ίδια μετατόπιση αλλά με αντίθετο πρόσημο έχει και ο κόμβος 32. Η τιμή αυτή για το σκυρόδεμα είναι $v_{\max} = -6.5437 \times 10^{-5} \text{ m}$ και για τον εποξικό γραφίτη $v_{\max} = -7.4740 \times 10^{-5} \text{ m}$. Αναφορικά με τις τάσεις που αναπτύσσονται στο τοίχωμα, η ορθή τάση σ_x βρέθηκε για τα δύο υλικά σχεδόν ομοιόμορφη στο εσωτερικό του φορέα και με τιμές

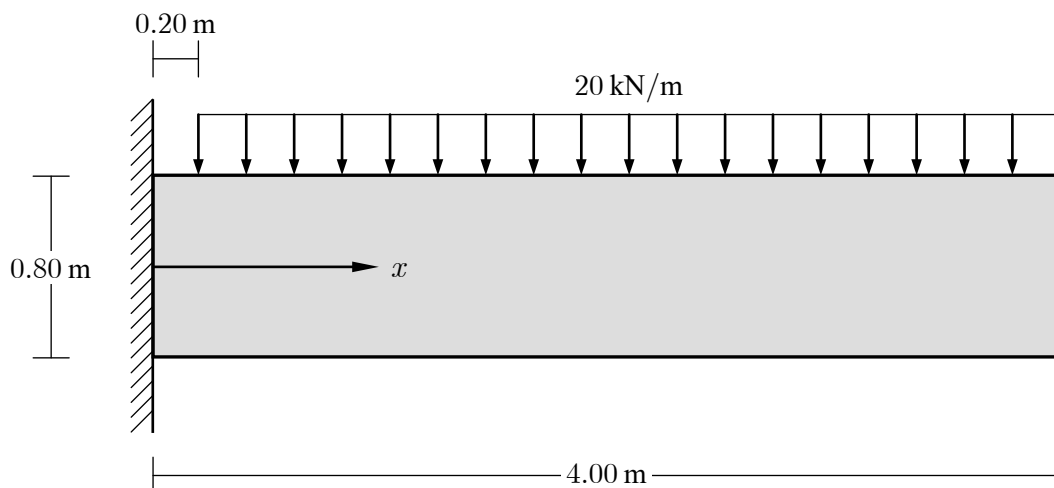
σκυρόδεμα: $\sigma_x = -9.045 \times 10^3 \text{ kN/m}^2 = -9.045 \text{ MPa}$

και εποξικός γραφίτης: $\sigma_x = -5.880 \times 10^4 \text{ kN/m}^2 = -58.80 \text{ MPa}$.

5.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3: ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΟΛΟΥ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ

Αναλύεται τοίχος ορθογωνικού σχήματος, ο οποίος είναι πακτωμένος στο ένα άκρο του και ελεύθερος στο υπόλοιπο σύνορό του. Ο τοίχος είναι κατασκευασμένος από σκυρόδεμα, δηλαδή ισότροπο υλικό με ελαστικές σταθερές αυτές της Εξ. 5.3. Η δοκός χαρακτηρίζεται ως υψίκορμος έχοντας πάχος $t = 0.10 \text{ m}$ και στην άνω πλευρά της φορτίζεται με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο 20.0 kN/m .

Ο φορέας διακριτοποιείται σε 80 γραμμικά τετραπλευρικά πεπερασμένα στοιχεία και έχει 105 κόμβους. Επιλύθηκε με πρόγραμμα ανάλυσης επίπεδων δίσκων (τοιχωμάτων) σε MatLab και βάσει των μετατοπίσεων που προέκυψαν σχεδιάστηκε η παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα στην οποία, όμως, για να φανούν καλύτερα οι μετατοπίσεις, αυτές έχουν αποτυπωθεί πολλαπλασιασμένες επί 40 (Σχ. 5.7).



Σχήμα 5.5 Γεωμετρία, στήριξη και φόρτιση του ορθογωνικού τοίχου του Παραδείγματος 3.

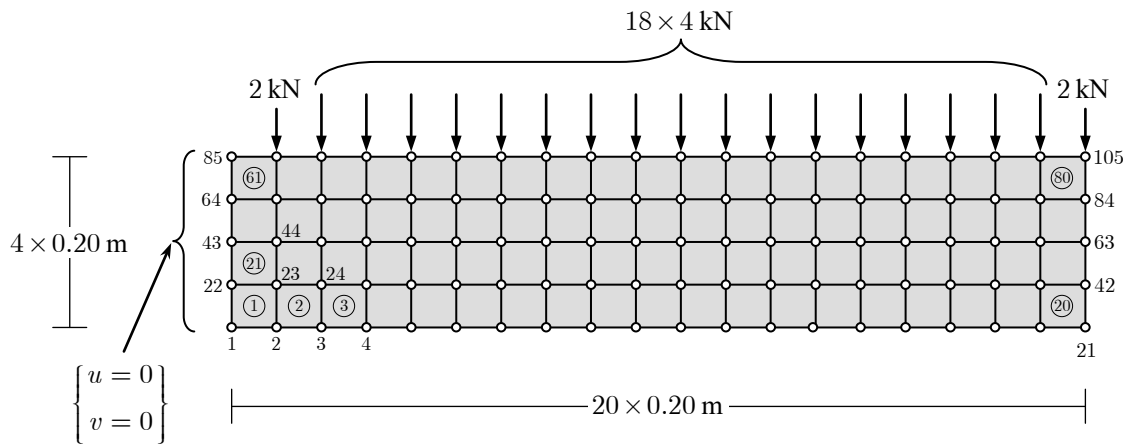
Η μέγιστη μετατόπιση εμφανίζεται στο ελεύθερο άκρο, στη δεξιά πλευρά, όπου όλοι οι κόμβοι (21, 42, 63, 84, 105) έχουν περίπου την ίδια κατακόρυφη μετατόπιση και είναι $v_{\max} = -7.19 \text{ cm}$. Η παραμόρφωση του ορθογωνικού τοίχου δίνεται στο Σχ. 5.7, όπου όλες οι μετατοπίσεις έχουν αποτυπωθεί στο γράφημα πολλαπλασιασμένες επί 40.

Οι μετατοπίσεις κατά μήκος του διαμήκη κεντρικού άξονα του τοίχου υπολογίστηκαν, επίσης, μέσω της ελαστικής γραμμής θεωρώντας το τοίχο ως δοκό. Η εξίσωση της καμπτικής ροπής κατά μήκος του άξονα είναι

$$M(x) = -159.6 + 76x - 10 \langle x - 0.2 \rangle^2 \quad (5.5)$$

και η εξίσωση της ελαστικής γραμμής θα προκύψει από την εξίσωση

$$-EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = M(x) = -159.6 + 76x - 10 \langle x - 0.2 \rangle^2 \quad (5.6)$$



Σχήμα 5.6 Ο ορθογωνικός τοίχος του Παραδείγματος 3 διακριτοποιημένος σε 80 γραμμικά τετραπλευρικά στοιχεία.

Η ανωτέρω διαφορική εξίσωση συνοδεύεται από κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στις στηρίξεις του φορέα, οι οποίες πρέπει να εκφράζουν τη μηδενική βύθιση και τη μηδενική στροφή στην πάκτωση

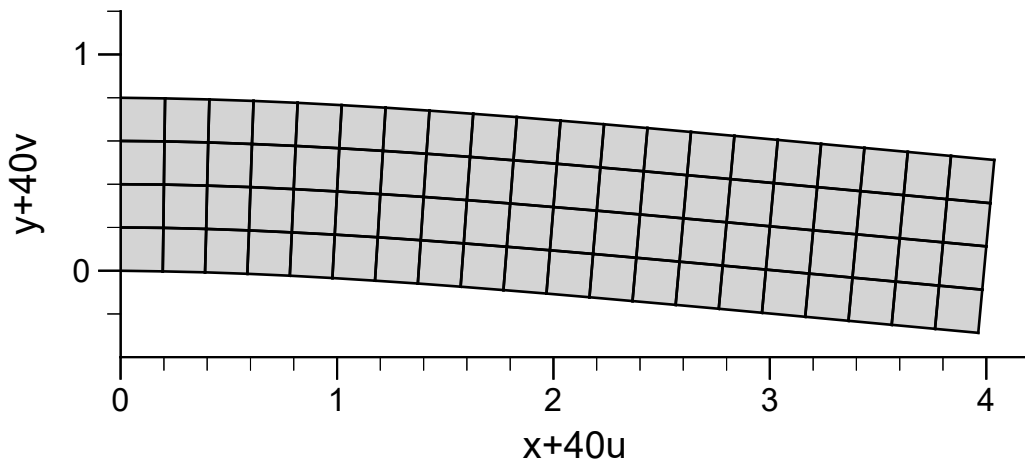
$$w(0) = 0, \quad \left[\frac{dw}{dx} \right]_{x=0} = 0 \quad (5.7)$$

Η σχέση (5.6) μετά από δύο ολοκληρώσεις παίρνει τη μορφή

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left(79.8 x^2 - \frac{38}{3} x^3 + \frac{5}{6} \langle x - 0.2 \rangle^4 \right) \quad (5.8)$$

όπου $E = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ και $I = \frac{0.10 \times 0.80^3}{12} \text{ m}^4$.

Σύμφωνα με την εξίσωση (5.8), η βύθιση στο άκρο της υψίκορμου δοκού ($x = 4.0 \text{ m}$), βρίσκεται $w_{\max} = 7.14 \text{ cm}$.



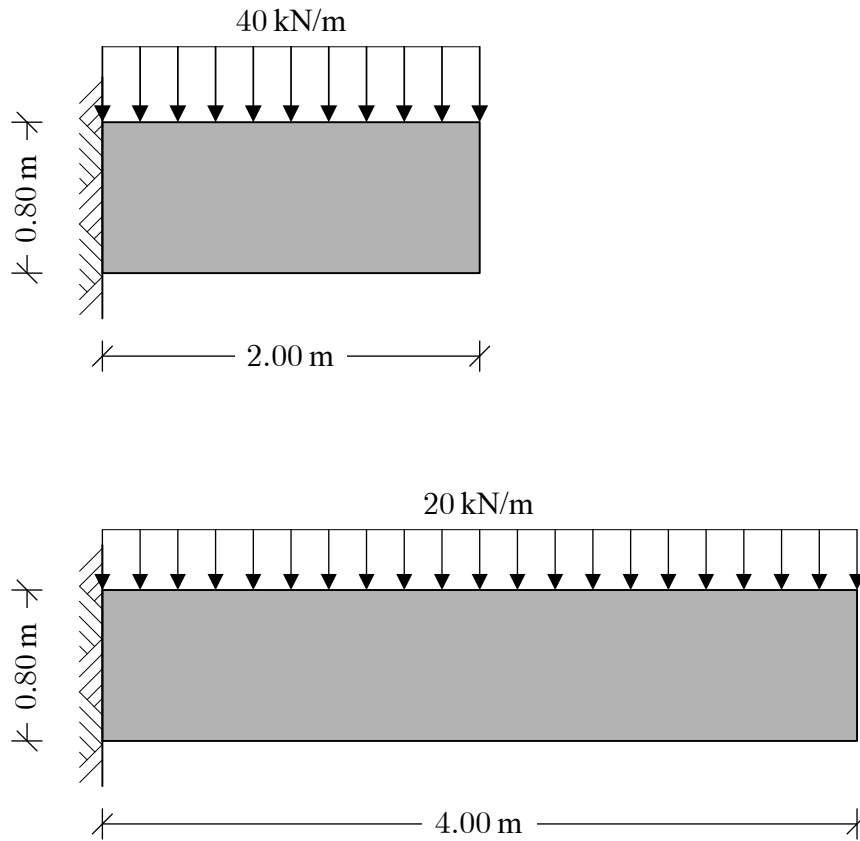
Σχήμα 5.7 Παραμόρφωση του ορθογωνικού τοίχου του Παραδείγματος 3 με πολλαπλασιαστή των μετατοπίσεων 40.

5.4 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4: ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΟΝΤΟΥ ΠΡΟΒΟΛΟΥ ΩΣ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΦΟΡΕΑ

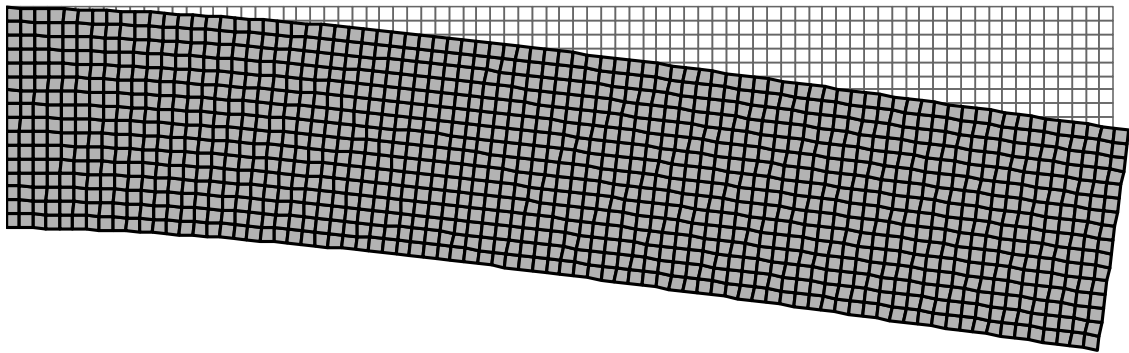
Στο παράδειγμα αυτό μελετάται ο πρόβολος του προηγούμενου παραδείγματος συγκριτικά με πρόβολο, που έχει το ίδιο ύψος $h = 0.80 \text{ m}$, το ίδιο πάχος $t = 0.10 \text{ m}$, φέρει το ίδιο συνολικό φορτίο, αλλά έχει το μισό μήκος, δηλαδή $L = 2.00 \text{ m}$ (Σχ. 5.8). Το κατανεμημένο φορτίο λοιπόν στην περίπτωση αυτή θα είναι $q = 40 \text{ kN/m}$ κατανεμημένο στην άνω πλευρά του προβόλου. Ένας τέτοιος φορέας ονομάζεται κοντός πρόβολος γιατί ο λόγος του ύψους προς το μήκος του δεν είναι πλέον μικρός. Το υλικό κατασκευής είναι ισότροπο σκυρόδεμα με ελαστικές σταθερές:

$$E_1 = E_2 = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2, \quad \nu_{12} = 0.25, \quad G_{12} = 8.4 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 \quad (5.9)$$

Σε αυτή την περίπτωση ο μακρύς πρόβολος χωρίζεται σε 1280 πεπερασμένα γραμμικά τετραπλευρικά στοιχεία και έχει 1377 κόμβους, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.9, ενώ ο κοντός πρόβολος χωρίζεται σε 640 πεπερασμένα γραμμικά τετραπλευρικά στοιχεία και έχει 697 κόμβους, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.10. Οι δύο φορείς επιλύονται με το πρόγραμμα σε MatLab και προσδιορίζονται οι μετατοπίσεις σε όλους τους κόμβους και οι τάσεις στο εσωτερικό των γραμμικών στοιχείων. Σημειώνεται ότι οι άγνωστες μετατοπίσεις των κόμβων της πρώτης περίπτωσης υπολογίζονται από την επίλυση συστήματος 2754 εξισώσεων, ενώ της δεύτερης από την επίλυση 1394 εξισώσεων.



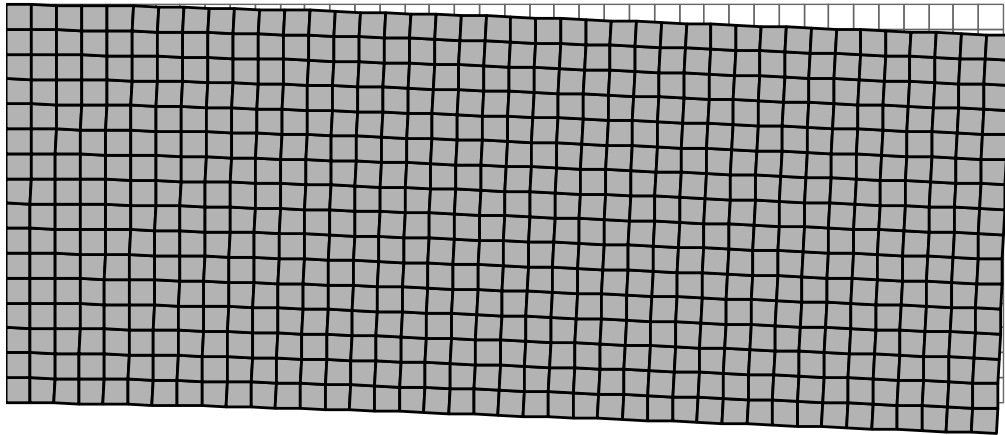
Σχήμα 5.8 Γεωμετρία και φόρτιση των προβόλων του Παραδείγματος 4.



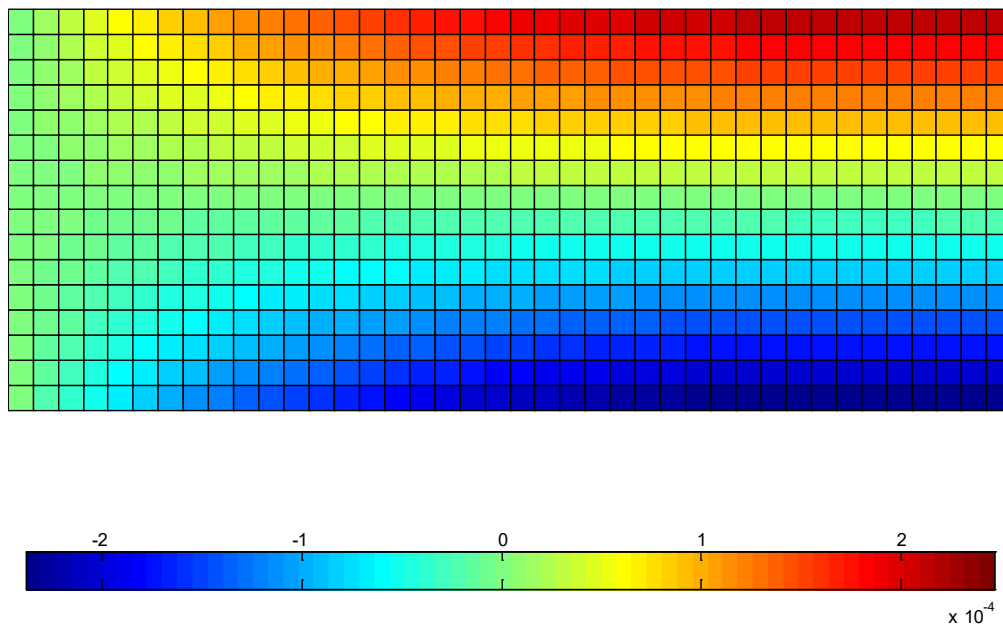
Σχήμα 5.9 Διακριτοποίηση του μακρού προβόλου σε 1280 γραμμικά τετραπλευρικά στοιχεία. Παραμορφωμένη κατάσταση με μέγιστη μετατόπιση $w = -7.41$ mm στο άκρο $x = 4.00$ m (σχεδίαση με πολλαπλασιαστή μετατοπίσεων 60).

Στο Σχήμα 5.11, παρουσιάζεται γραφικά η μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης u σε όλο το χωρίο του κοντού προβόλου (μονάδες m). Η μπλε ζώνη δηλώνει την οριζόντια βράχυνση, ενώ η κόκκινη τον εφελκυσμό. Η εικόνα αυτή δείχνει ξεκάθαρα πως καταπονείται από κάμψη μία δοκός, όπου οι άνω ίνες εφελκύνονται, οι κάτω θλίβονται

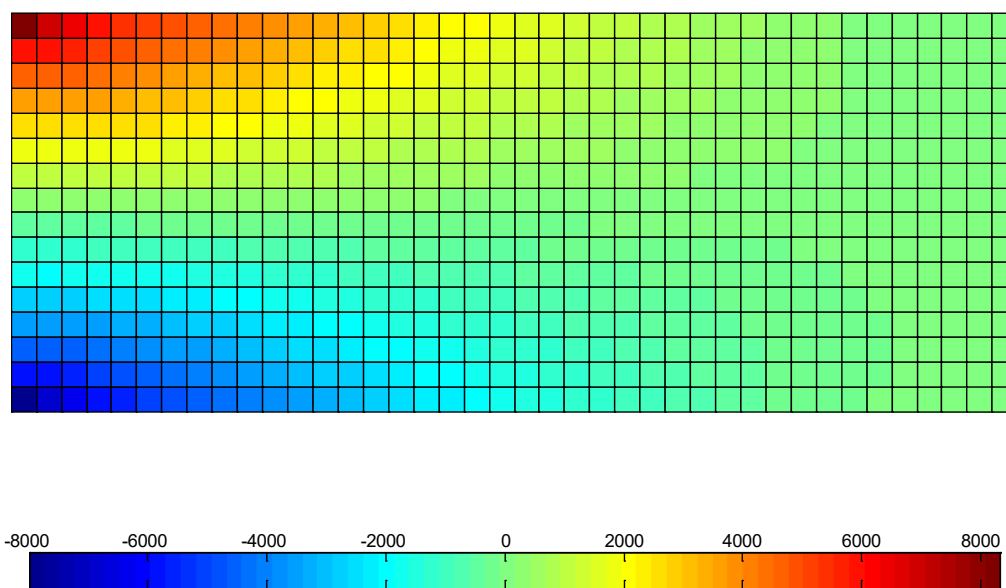
και ο ουδέτερος άξονας παραμένει απαραμόρφωτος. Τέλος, τα Σχήματα 5.12 και 5.13 δίνουν αντίστοιχα την κατανομή των ορθών τάσεων σ_{xx} και των διατμητικών τάσεων τ_{xy} σε ολόκληρη την επιφάνεια του κοντού προβόλου του Σχήματος 5.8.



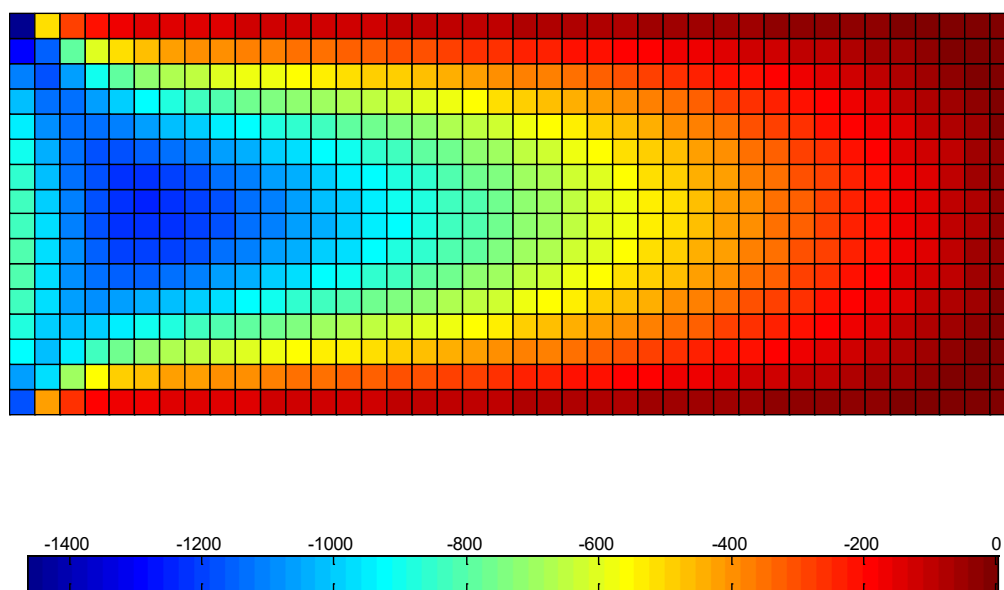
Σχήμα 5.10 Διακριτοποίηση του κοντού προβόλου σε 640 γραμμικά τετραπλευρικά στοιχεία. Παραμορφωμένη κατάσταση με μέγιστη μετατόπιση $w = -1.03 \text{ mm}$ στο άκρο $x = 2.00 \text{ m}$ (σχεδίαση με πολλαπλασιαστική μετατοπίσεων 60).



Σχήμα 5.11 Μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης u (m) σε όλη την επιφάνεια του κοντού προβόλου του Παραδείγματος 4.



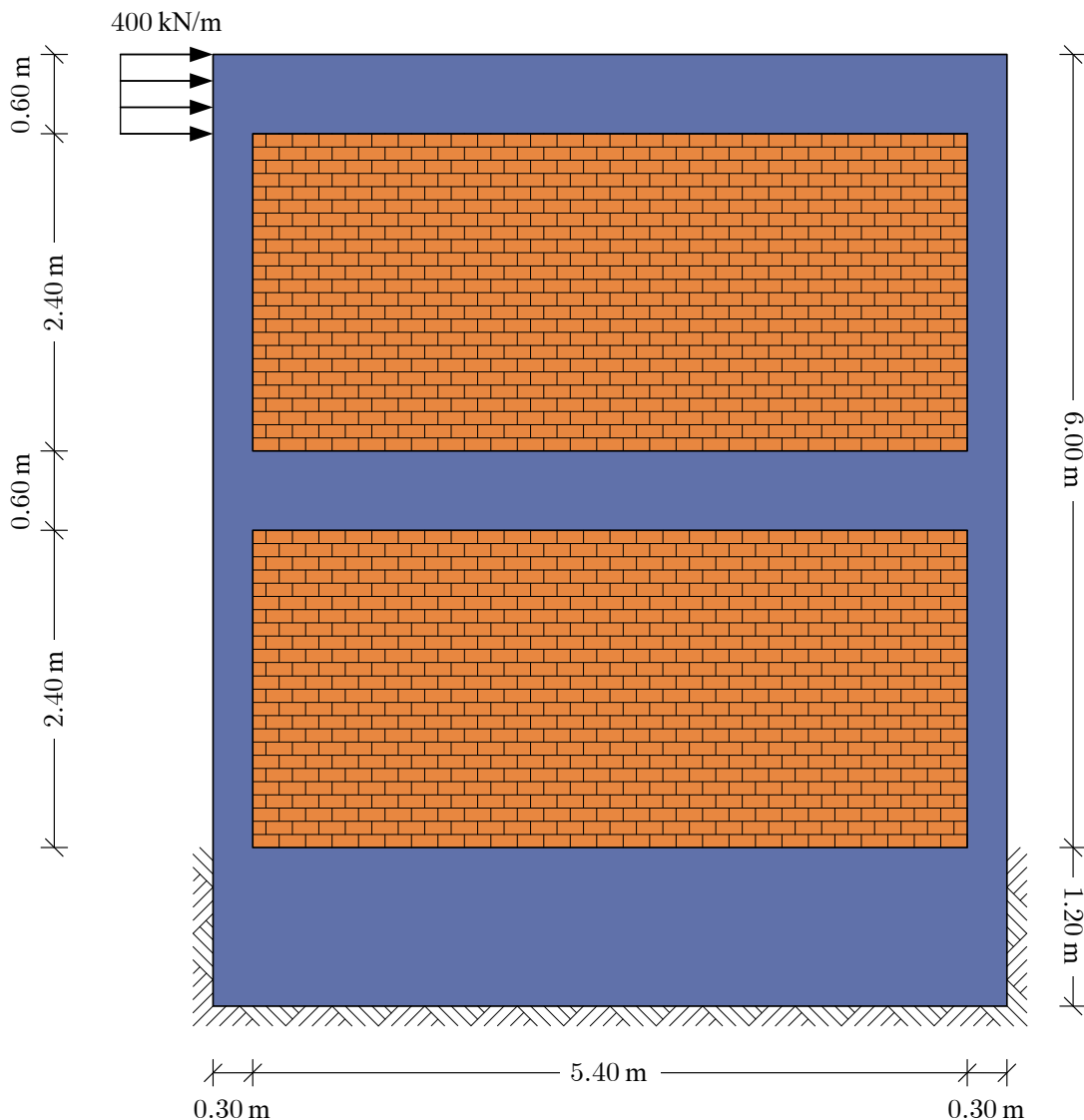
Σχήμα 5.12 Κατανομή της ορθής τάσης σ_{xx} (kN/m²) σε όλη την επιφάνεια του κοντού προβόλου του Παραδείγματος 4.



Σχήμα 5.13 Κατανομή της διατμητικής τάσης τ_{xy} (kN/m²) σε όλη την επιφάνεια του κοντού προβόλου του Παραδείγματος 4.

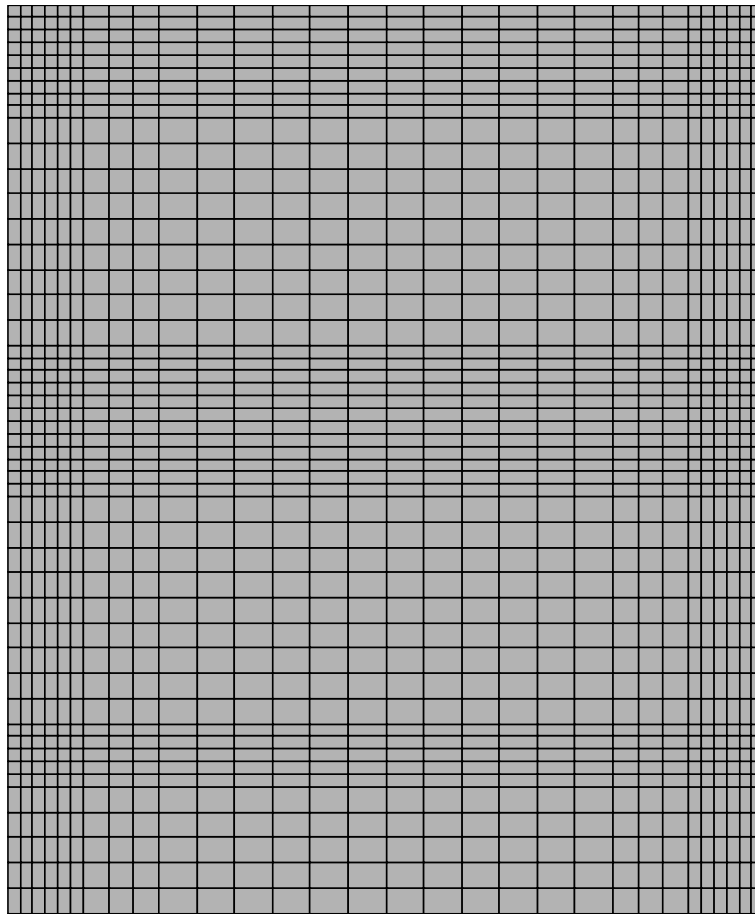
5.5 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5: ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΩΡΟΦΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΟΙΧΟΥΣ ΠΛΗΡΩΣΕΩΣ

Στο παρόν παράδειγμα αναλύεται διώροφο πλαίσιο κατασκευασμένο από σκυρόδεμα (Σχ. 5.14), το οποίο φορτίζεται με διατμητικό κατανεμημένο φορτίο στη κορυφή του υποστυλώματος του πρώτου ορόφου. Εξετάζονται τρεις διαφορετικές καταστάσεις για το πλαίσιο. Πρώτη είναι εκείνη χωρίς την παρουσία τοίχων πληρώσεως (οπτοπλινθοδομή) στα δύο ανοίγματα, δεύτερη εκείνη με τοίχο πληρώσεως μόνο στο πάνω άνοιγμα (πρώτο όροφο) και τρίτη εκείνη με τοίχους και στα δύο ανοίγματά του (ισόγειο και πρώτο όροφο).



Σχήμα 5.14 Γεωμετρία, στήριξη και φόρτιση διωρόφου πλαισίου από σκυρόδεμα με τοίχους πληρώσεως (Παράδειγμα 5).

Κάθε μια από τις περιπτώσεις αυτές επιλύεται με το πρόγραμμα σε MatLab και προσδιορίζεται πλήρως η παραμόρφωση του σύνθετου φορέα. Το βασικό προσομοίωμα με πεπερασμένα στοιχεία φαίνεται στο Σχ. 5.15 και αποτελείται από 1470 γραμμικά τετραπλευρικά στοιχεία και 1550 κόμβους. Με δεδομένο ότι κάθε κόμβος έχει δύο βαθμούς ελευθερίας κίνησης, προκύπτει σύστημα 3100 εξισώσεων με άγνωστες τις μετατοπίσεις στις δύο διευθύνσεις των κόμβων του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 5.15 Διακριτοποίηση του τοιχοπληρωμένου πλαισιωτού φορέα σε 1470 γραμμικά τετραπλευρικά στοιχεία και 1550 κόμβους.

Τα υλικά κατασκευής του πλαισίου είναι ισότροπο σκυρόδεμα και τούβλα με ελαστικές σταθερές:

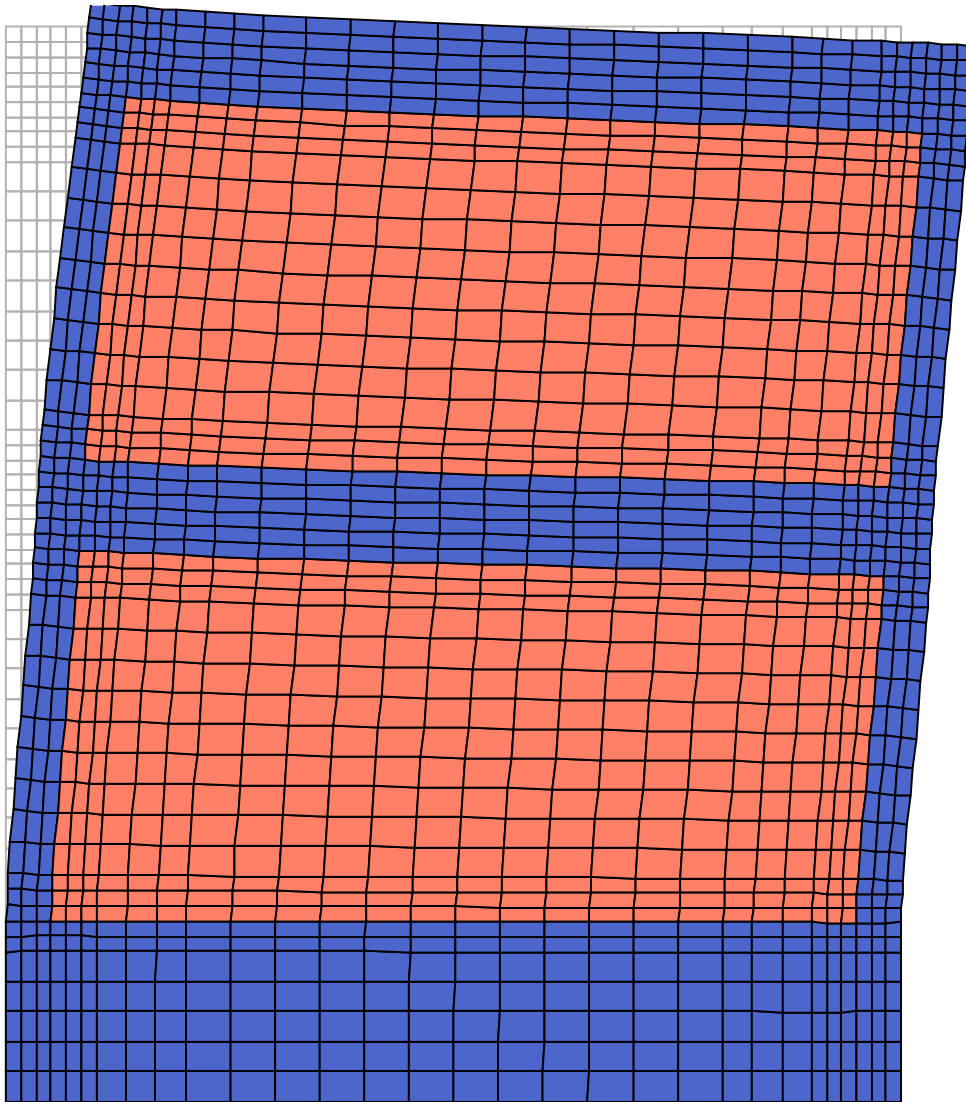
$$E_1^f = E_2^f = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2, \quad \nu_{12}^f = 0.200,$$

$$G_{12}^f = 8.750 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 \quad (5.10)$$

$$E_1^w = E_2^w = 4.2 \times 10^6 \text{ kN/m}^2, \quad \nu_{12}^w = 0.075,$$

$$G_{12}^w = 1.9535 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 \quad (5.11)$$

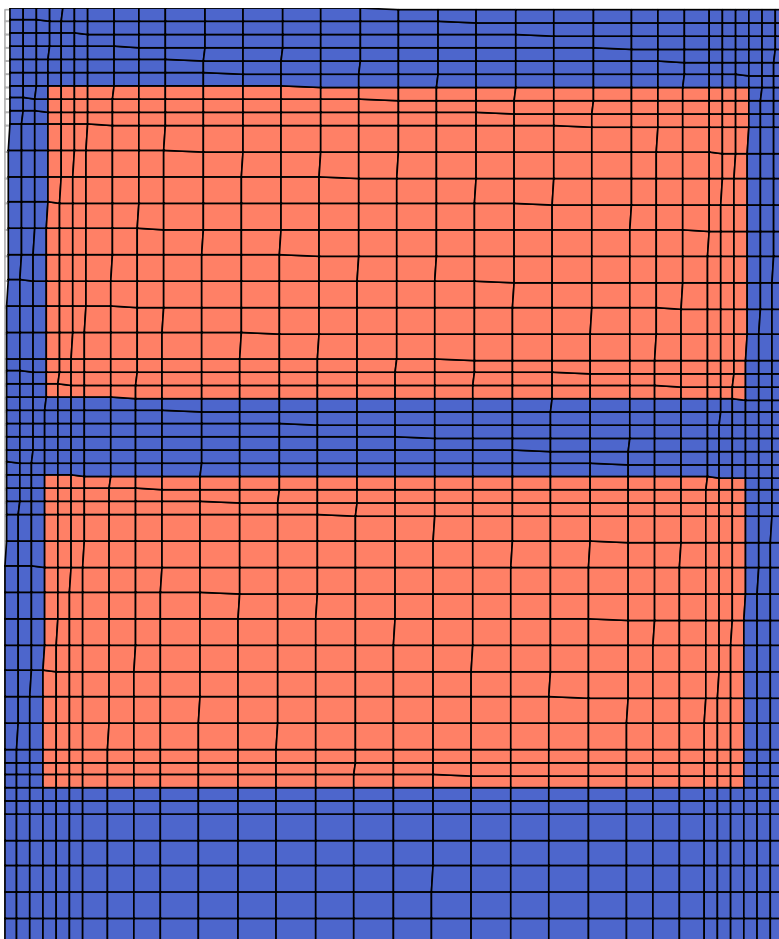
Το πλαίσιο έχει πάχος $t_f = 0.40 \text{ m}$ και οι τοίχοι $t_w = 0.20 \text{ m}$.



Σχήμα 5.16 Παραμόρφωση πλαισίου ενισχυμένου και με τους δύο τοίχους. Μέγιστη οριζόντια μετατόπιση $u = 0.936 \text{ mm}$ στη θέση $x = 0.00 \text{ m}$ και $y = 7.20 \text{ m}$ (σχεδίαση με πολλαπλασιαστές μετατοπίσεων 600)

Το Σχήμα 5.16 δείχνει την παραμόρφωση του πλαισίου όταν αυτό είναι ενισχυμένο με τοίχους και στα δύο ανοίγματά του. Η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση για το διατμητικό

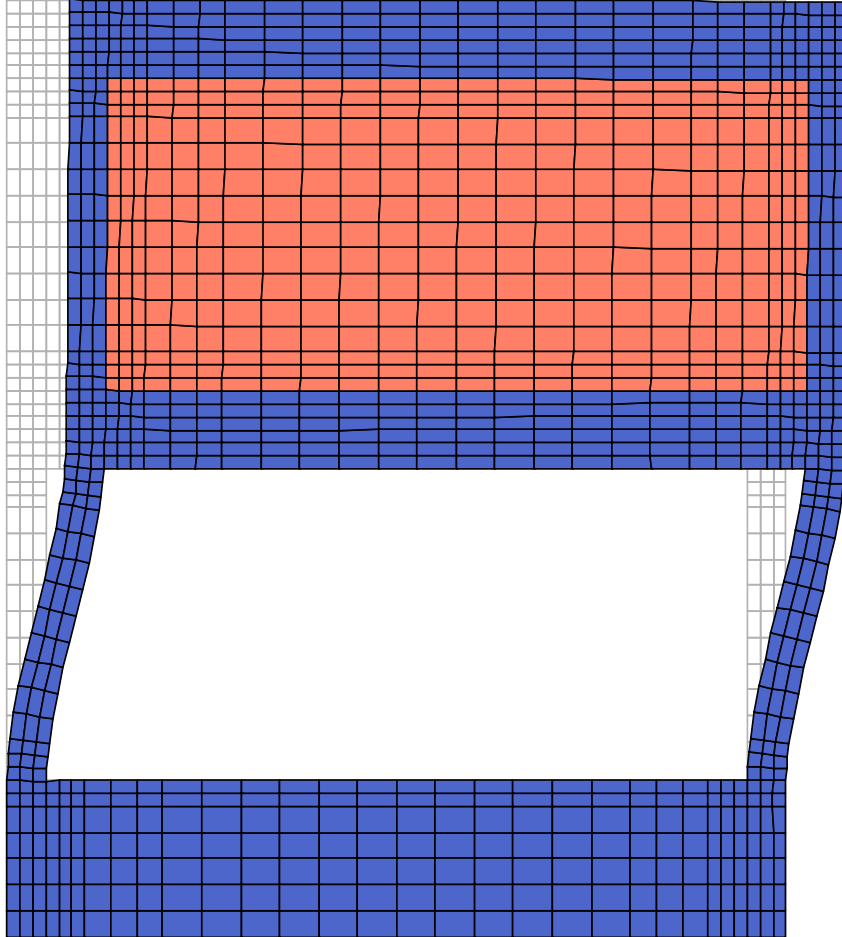
φορτίο του Σχ. 5.14 εμφανίζεται στην κορυφή της αριστερής παρειάς ($x = 0.00\text{ m}$ και $y = 7.20\text{ m}$) και είναι $u = 0.936\text{ mm}$. Για καλύτερη απεικόνιση της παραμόρφωσης του φορέα οι τιμές των παραμορφώσεων έχουν πολλαπλασιαστεί με 600.



Σχήμα 5.17 Παραμόρφωση του πλαισίου με τους δύο τοίχους πληρώσεως. Μέγιστη οριζόντια μετατόπιση $u = 0.936\text{ mm}$ στη θέση $x = 0.00\text{ m}$ και $y = 7.20\text{ m}$
(σχεδίαση με πολλαπλασιαστική μετατοπίσεων 50)

Τα Σχήματα 5.17, 5.18 και 5.19 παρουσιάζουν την παραμόρφωση του πλαισίου για τις τρεις προαναφερθείσες καταστάσεις σε σχέση με την ύπαρξη ή μη τοίχων πληρώσεως στα ανοίγματά του. Η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση για όλες αυτές τις περιπτώσεις εμφανίζεται στην άνω-αριστερή γωνία ($x = 0.00\text{ m}$ και $y = 7.20\text{ m}$). Η τιμή αυτής για τοίχους και στα δύο ανοίγματα (Σχ. 5.17) είναι $u = 0.936\text{ mm}$, ενώ για τοίχο πληρώσεως στο άνω μόνο άνοιγμα (Σχ. 5.18) είναι $u = 9.70\text{ mm}$. Τέλος, η τιμή της μέγιστης

οριζόντιας μετατόπισης όταν δεν υπάρχει τοιχοποιία στα δύο ανοίγματα του πλαισίου (Σχ. 5.19) είναι $u = 25.40 \text{ mm}$.

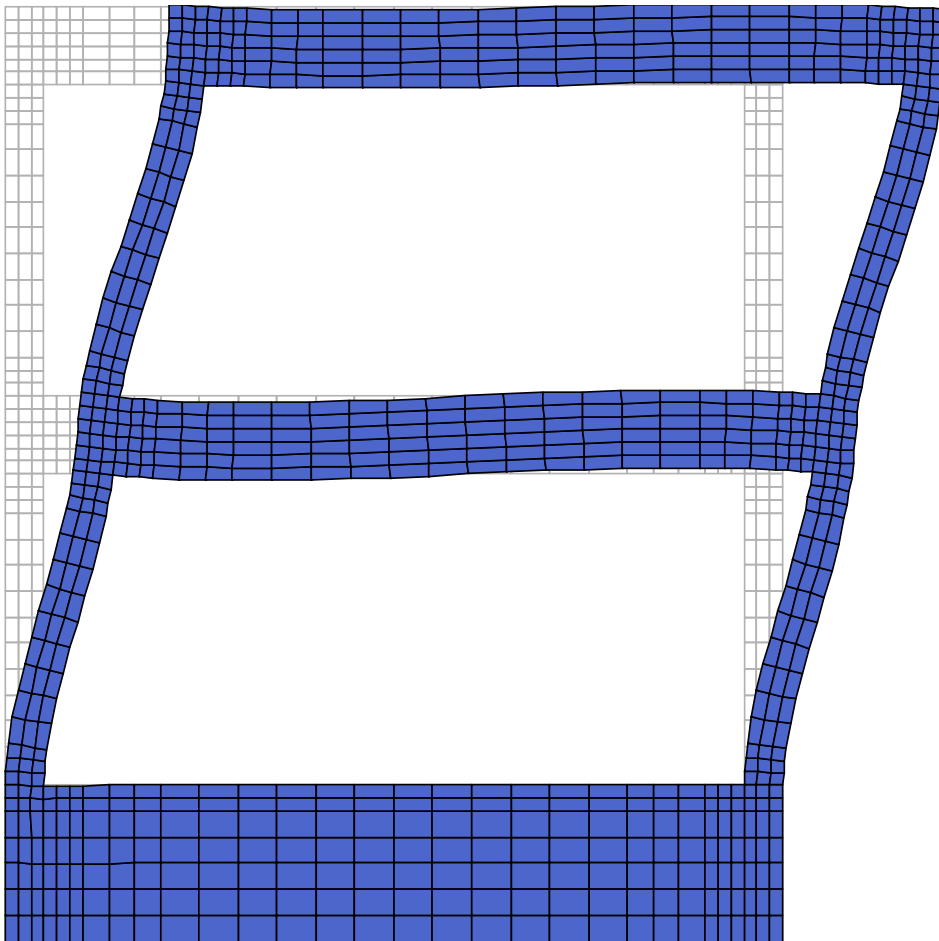


Σχήμα 5.18 Παραμόρφωση του πλαισίου με τοίχο πλήρωσεως μόνο στο άνω άνοιγμα.

Μέγιστη οριζόντια μετατόπιση $u = 9.70 \text{ mm}$ στη θέση $x = 0.00 \text{ m}$ και $y = 7.20 \text{ m}$ (σχεδίαση με πολλαπλασιαστή μετατοπίσεων 50).

Αξίζει να σημειωθεί ότι μεταξύ της κατάστασης με τοιχοπληρωμένα τα δύο ανοίγματα, όπου η ενίσχυση του πλαισίου είναι η μέγιστη δυνατή και της κατάστασης με τοίχο πλήρωσεως μόνο στο πάνω άνοιγμα και κενό το κάτω, η μετατόπιση δεκαπλασιάζεται στη δεύτερη. Δηλαδή, η παρουσία τοίχου πλήρωσεως στο κάτω άνοιγμα (ισόγειο) δεκαπλασιάζει, περίπου, τη στιβαρότητα του πλαισίου. Σύγκριση της κατάστασης όπου υπάρχει τοίχος πλήρωσεως μόνο στο άνω άνοιγμα με την κατάσταση χωρίς κανένα τοίχο πλήρωσεως, αποκαλύπτει ότι η παρουσία του άνω μόνο τοίχου προσφέρει υπερδι-

πλασιασμό (2.6 φορές περίπου) της στιβαρότητας του φορέα ή, αλλιώς, ότι στο πλαίσιο με καμία τοιχοπλήρωση η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση είναι 2.6 φορές μεγαλύτερη αυτής με τοίχο πλήρωσεως μόνο στο άνω άνοιγμα. Εάν, μάλιστα, συγκριθούν οι δύο περιπτώσεις, του πλαισίου με τους δύο τοίχους και αυτής χωρίς κανένα τοίχο, διαπιστώνεται μετατόπιση είκοσι πέντε και πλέον φορές μεγαλύτερη για το πλαίσιο με κενά τα ανοίγματα.



Σχήμα 5.19 Παραμόρφωση του πλαισίου χωρίς τοίχους πλήρωσεως. Μέγιστη οριζόντια μετατόπιση $u = 25.40 \text{ mm}$ στη θέση $x = 0.00 \text{ m}$ και $y = 7.20 \text{ m}$ (σχεδίαση με πολλαπλασιαστή μετατοπίσεων 50).

Βιβλιογραφία

1. Francis, A.J., Horman, C.B. and Jerems, L.E., “The effect of Joint Thickness and other factors on the Compressive Strength of Brickwork,” *Proc. of the 2nd Inter. Brick – Masonry Conf.*, G. Britain, pp. 31-37, 2009.
2. Ευρωκώδικας 6, *Σχεδιασμός Κατασκευών από Τοιχοποιία*, Έκδοση Τ.Ε.Ε., 1995.
3. Ε.Α.Κ 2000, *Ελληνικός Αντισεισμικός Κανονισμός*.
4. Shing, P., and Mehrabi, A., “Behaviour and analysis of masonry infilled frames,” *Progress in Structural Engineering Materials*, Vol. 4, pp. 320-321, 2002
5. Mehrabi, A.B., Shing, P.B., Schuller, M.P., and Noland, J.L., “Performance of Masonry–Infilled R/C Frames under In-Plane Lateral Loads,” *Report No. CU/Sr-94-6*, Dept. of Civil, Environmental, and Architectural Engineering, University of Colorado, Boulder, CO, 1994.
6. Mehrabi, A.B., Shing, P.B., Schuller, M.P., and Noland, J.L., “Experimental Evaluation of Masonry-Infilled R/C Frames,” *Journal of Structural Engineering*, Vol. 122, No. 3, pp. 228-237, 1996.
7. A.E., Fiorato, M.A., Sozen, and W. L., Gamble, “An Investigation of the Interaction of Reinforced Concrete Frames with Masonry Filler Walls,” *Illinois Univ Urbana Dept of Civil Engineering*, 1970.
8. M. N., Fardis, S. N., Bousias, G. Franchioni, and T. B., Panagiotakos, “Seismic response and design of R/C structures with plan-eccentric masonry infills,” *Earthquake Engineering Structural Dynamics*, Vol. 28, pp. 173-191, 1999.

9. ΚΑΝ.ΕΠΕ., *Κανονισμός Επεμβάσεων – Σχέδιο 2*, Οργανισμός Αντισεισμικής Προστασίας, Αθήνα, 2006.
10. Dymiotis Christina, Kappos Andreas J., Chryssanthopoulos Marios K., “Seismic Reliability of masonry-infilled frames,” *Journal of structural engineering*, Vol. 127, No. 3, March 2001.
11. Κάππος Ι. Ανδρέας, “Ο ρόλος των τοιχοπληρώσεων: Μύθοι και πραγματικότητα”, Άρθρο, Τεχνικές σελίδες, *Περιοδικό Κτίριο*, Τεύχος 166, Νοέμβριος 2004.
12. Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance, Stage 64 CEN, Part 1: *General rules, seismic actions and rules for buildings*.
13. Hrenikoff, A., “Solution of Problems in Elasticity by the Framework Method,” *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, Vol. 8, pp. 169-175, 1941.
14. Courant, R., “Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 49, pp. 1-43, 1943.
15. Turner, M. J., Clough, R.W., Martin, H. C., and Topp, L. J., “Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures,” *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 23, No. 9, pp. 805-823, 1956.
16. Argyris, J. H., and S. Kelsey, *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworth Scientific Publications, London, 1960.
17. Clough, R. W., “The Finite Element Method in Plane Stress Analysis,” *Journal of Structural Division, ASCE, Proc. 2d Conf. Electronic Computation*, pp. 345-378, 1960.
18. Πανεπιστήμιο Πατρών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, *Τελική Έκθεση Ερευνητικού Προγράμματος με τίτλο: Σεισμική Συμπεριφορά & Σχεδιασμός Κτιρίων από Φέρουσα Τοιχοποιία και Τοιχοπληρωμένων Πλαισίων Οπλισμένου Σκυροδέματος*, Μέρος Β', Προς Ευρωπαϊκό Κέντρο Πρόγνωσης και Πρόληψης Σεισμών / Οργανισμό Αντισεισμικού Σχεδιασμού και Προστασίας, Πάτρα, Αύγουστος 1995.
19. Ιγνατάκης, Χ., “Μηχανική της τοιχοποιίας – Σύνθεση φέροντος οργανισμού – Απόκριση και τυπολογία βλαβών υπό κατακόρυφα και σεισμικά φορτία”, *Σεμινάριο Μικρής Διάρκειας, Κατασκευές από Φέρουσα Τοιχοποιία, Κανονισμός –*

- Βλάβες – Αποκατάσταση, 1^η Διάλεξη, Τ.Ε.Ε, Τμήμα Κεντρικής Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη, Βέροια, Ιανουάριος - Φεβρουάριος 2004,*
20. Σταματάκος, Π, “Ο ρόλος των τοιχοπληρώσεων στη Σεισμική Συμπεριφορά Κτιρίων από Οπλισμένο Σκυρόδεμα”, *14^ο Φοιτητικό συνέδριο Επισκευές Κατασκευών*, Πάτρα, Φεβρουάριος 2008.
21. Αντωνόπουλος, Θ., “Συμπεριφορά των Τοιχοπληρώσεων στις Κατασκευές Οπλισμένου Σκυροδέματος”, *12^ο Φοιτητικό Συνέδριο: Επισκευές Κατασκευών*, Πάτρα, Φεβρουάριος 2006.
22. Κόκκινος, Τ., “Ανάλυση Τοιχοποιίας με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων”, *Σημειώσεις για το μάθημα Επιφανειακοί Φορείς – Εφαρμογές Πεπερασμένων Στοιχείων*, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Σχολή Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής, Αθήνα, 2019.
23. Παπαδρακάκης, Μ., *Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων*, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα, 2001.
24. Τσαμασφύρος, Γ. Ι. και Θεοδοκόγλου, Ε. Ε, *Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων I*, Αθήνα, 2000.
25. Τάσιος, Θ. Π., *Η Μηχανική της Τοιχοποιίας*, Εργαστήριο Ωπλισμένου Σκυροδέματος, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1992.
26. Καραντώνη Φυλλίτσα Β., *Κατασκευές από Τοιχοποιία, Σχεδιασμός και επισκευές*, 2004.
27. Παπαϊωάννου Κυρ., *Η Τεχνολογία της Τοιχοποιίας*, 1998.
28. Tomazevic Miha, *Αντισεισμικός Σχεδιασμός Κτιρίων από Τοιχοποιίες*, 2004.
29. Katsikadelis, J. T., Kokkinos, F. T., “Analysis of composite shear walls with interface separation, friction and slip using BEM”, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 30, No. 13 (1993) 1825-1848.
30. Katsikadelis, J. T., Kokkinos, F. T., “Static and dynamic analysis of composite shear walls by the boundary element method”, *Acta Mechanica*, Vol. 68 (1987) 231-250.
31. Βιντζηλαίου, Ε., “Η επιρροή των Οπλισμένων Τοιχοπληρώσεων στην Σεισμική Συμπεριφορά των Κτιρίων Ω.Σ.”, *14^ο Συνέδριο Σκυροδέματος*, 2003.

32. Μαργαρώνης Δ., “Οι τοίχοι πληρώσεως στις κατασκευές οπλισμένου σκυροδέματος”, *13^ο Φοιτητικό Συνέδριο: Επισκευές Κατασκευών*, 2007.
33. Κακαλέτσης, Δ. Ι., Φαββατά, Μ. Ι. και Καραγιάννης, Χ. Γ., “Αντοχή σε οριζόντια φόρτιση τοιχοπληρωμένων πλαισίων Ω/Σ με ανοίγματα”, *15^ο Συνέδριο Σκυροδέματος*, 2006.