



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗΣ

Διπλωματική Εργασία

Κβαντική Πληροφορική & Κβαντικοί υπολογιστές

Συγγραφέας

Άγγελος Φούντας

ΑΜ: 15116

Επιβλέπων

Ιωάννης Κανδαράκης

Αθήνα, Ιούλιος 2021



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗΣ

Κβαντική Πληροφορική & Κβαντικοί υπολογιστές

Μέλη Εξεταστικής Επιτροπής συμπεριλαμβανομένου και του Εισηγητή

Η διπλωματική εργασία εξετάστηκε επιτυχώς από την κάτωθι Εξεταστική Επιτροπή:

Α/α	ΟΝΟΜΑ ΕΠΩΝΥΜΟ	ΒΑΘΜΙΔΑ/ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΨΗΦΙΑΚΗ ΥΠΟΓΡΑΦΗ
1	Κανδαράκης Ιωάννης	Ομότιμος Καθηγητής	
2	Καλόβας Νεκτάριος	Αναπληρωτής Καθηγητής	
3	Μιχαήλ Χρήστος	Επίκουρος Καθηγητής	


ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο κάτωθι υπογεγραμμένος Φούντας Άγγελος του Αθανασίου με αριθμό μητρώου 15116 φοιτητής του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής του Τμήματος Μηχανικών Βιοιατρικής δηλώνω υπεύθυνα ότι:

«Είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, οι όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε ακριβώς είτε παραφρασμένες, αναφέρονται στο σύνολό τους, με πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία έχει συγγραφεί από μένα αποκλειστικά και αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου, όσο και του Ιδρύματος.

Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του διπλώματός μου».

Ο Δηλών

A photograph of a handwritten signature in blue ink on a piece of lined paper. The signature is stylized and appears to be 'Α. Φούντας'.

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	6
SUMMARY.....	7
KEY WORDS.....	7
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	8
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ^Ο : ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ.....	9
1.1 Το θέμα της Κβαντικής Πληροφορικής & Ιστορική Εξέλιξη	9
1.2 Κβαντική Πληροφορική και Κβαντική Μηχανική	14
1.2.1 Πρώτη Περίοδος Κβαντικής Θεώρησης.....	14
1.2.2 Δεύτερη Περίοδος Κβαντικής Θεώρησης.....	15
1.2.3 Τρίτη Περίοδος Κβαντικής Θεώρησης.....	16
1.3 Από την Κβαντική Μηχανική στην Κβαντική Πληροφορική	17
1.3.1 Νεότερη Περίοδος Κβαντικής Θεώρησης και Εμφάνιση της Κβαντικής Πληροφορικής	18
1.4 Βασικές Αρχές Κβαντικής Θεωρίας	20
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ^Ο : ΚΒΑΝΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ	38
2.1 Έννοια του Κβαντικού Υπολογιστή	39
2.1.1 Πώς Υλοποιείται Ένας Κβαντικός Υπολογιστής.....	39
2.2 Δομή & Λειτουργία Κβαντικών Υπολογιστών	40
2.3 Κβαντικές Πύλες	46
2.3.1. Η κβαντική πύλη εφαρμοσμένη ως τελεστής σε ενιαίο qubit.	49
Πύλη Hadamard	49
Πύλη NOT.....	50
Πύλη Pauli Y	53

Z –Πύλη Pauli	54
Πύλη μετατόπισης φάσης (Phase Shift Gate).....	56
Διαχειριστής ταυτότητας.....	58
Πύλη T (T- Gate).....	60
2.3.2. Η κβαντική δρώντας σε δύο qubits.	61
Πύλη Εναλλαγής	61
Ελεγχόμενη πύλη NOT (πύλη CNOT).....	64
Κατασκευή καταστάσεων Bell (Bell States).....	67
Πύλη T CNOT.....	68
Πύλη G (G-Gate).....	72
2.3.3 Κβαντικές Πύλες δρούν σε 3 qubit.....	73
Πύλη Toffoli (CCNOT).....	73
2.4 Πλεονεκτήματα & Εφαρμογές Κβαντικών Υπολογιστών	80
2.5 Κβαντική Διόρθωση Σφαλμάτων.....	80
2.5.1 Δυαδική Αντιστροφή	80
2.5.2 Αποσυνοχή	81
2.5.3 Κλασικοί Υπολογιστές	82
2.5.4 Κβαντικοί Υπολογιστές.....	83
2.6 Κβαντικοί Υπολογισμοί.....	85
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ⁰ – ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΒΑΝΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ & ΟΙ ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ ΤΟΥΣ.....	87
3.1 Κατασκευή Κβαντικών Υπολογιστών	87
3.1.1 Πυρηνικός Μαγνητικός Συντονισμός (NMR).....	87
3.1.2 Κοιλότητες Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής (QED).....	90
3.1.3 Μοριακοί Υπολογιστές.....	92
3.1.4 Παγίδες Ιόντων	94

3.2	Η Προοπτική των Κβαντικών Υπολογιστών	97
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ^ο – ΚΒΑΝΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ.....	98
4.1	Η Αρχή της Υπέρθεσης	98
4.2	Η Αρχή της Μέτρησης.....	101
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ^ο – ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ	102
5.1	Προσέγγιση της Κβαντικής Θεωρίας στη Ψυχολογία.....	102
5.2	Η Έννοια της Κβαντικής Κατάστασης	103
	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	105
	ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	106
	ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	110

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρακάτω εργασία έχει ως θέμα την Κβαντική Πληροφορική και τους Κβαντικούς Υπολογιστές. Αρχικά στο πρώτο κεφάλαιο, θα μιλήσουμε για την Κβαντική Πληροφορική. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά θα κάνουμε μια ιστορική αναδρομή για το θέμα της Κβαντικής Πληροφορικής. Έπειτα, θα μιλήσουμε για την Κβαντική Πληροφορική και την Κβαντική Μηχανική και πως τέθηκαν τα θεμέλια της Κβαντικής Πληροφορικής. Θα αναλύσουμε το πέρασμα από τη Κβαντική Μηχανική στην Κβαντική Θεωρία Πληροφόρησης, όπου εκεί κλείνει και το κεφάλαιό μας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας, θα μιλήσουμε για τους Κβαντικούς Υπολογιστές. Στο πρώτο υπόκεφάλαιο, θα μιλήσουμε για την έννοια του Κβαντικού Υπολογιστή και στη συνέχεια για τη δομή και την λειτουργία των Κβαντικών Υπολογιστών. Θα εξηγήσουμε τι σημαίνει Κβαντική Πύλη αλλά και ποια είναι τα πλεονεκτήματα του Κβαντικού Υπολογιστή έναντι του κλασικού. Κλείνοντας το κεφάλαιο, θα αναφερθούμε στην Κβαντική Διόρθωση Σφαλμάτων.

Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας μας, θα αναλύσουμε την προσέγγιση της θεωρίας. Πιο συγκεκριμένα, θα γίνει σαφής η προσέγγιση της θεωρίας της Κβαντικής Πληροφορικής αλλά και η σχέση της θεωρίας της Κβαντικής Πληροφορικής και Κβαντικής Μηχανικής.

Κλείνοντας την εργασία θα εξάγουμε κάποια γενικά συμπεράσματα.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Κβαντικοί Υπολογιστές – Κβαντική Μηχανική – Κβαντικές Πύλες

SUMMARY

The following work is on Quantum Informatics and Quantum Computers. First in the first chapter, we will talk about quantum computing. More specifically, we will first make a historical review of the subject of quantum computing. Next, we will talk about quantum computing and quantum mechanics and how the foundations of quantum computing were laid. We will analyze the transition from quantum mechanics to quantum information theory, where our chapter ends.

In the second chapter of the work, we will talk about quantum computers. In the first subchapter, we will talk about the concept of the quantum computer and then about the structure and operation of quantum computers. We will explain what a quantum gate means but also what are the advantages of the quantum computer over the classic one. Closing the chapter, we will talk about quantum error correction.

In the third and last chapter of our work, we will analyze the theory approach. More specifically, the approach of the theory of quantum computing will become clear, but also the relationship between the theory of quantum computing and quantum mechanics.

Closing the paper, we will draw some general conclusions.

KEY WORDS

Quantum Computers - Quantum Mechanics - Quantum Gates

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρακάτω εργασία με θέμα την Κβαντική Μηχανική και τους Κβαντικούς Υπολογιστές, στοχεύει να ενημερώσει τον αναγνώστη γύρω από το συγκεκριμένο θέμα. Η ιστορική αναδρομή που γίνεται μέσα στην εργασία, ο αναγνώστης μαθαίνει για όλη την προέλευση και την εξέλιξη της Κβαντικής Μηχανικής και πως οδηγηθήκαμε στην Κβαντική Θεωρία Πληροφορίας.

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η μελέτη του κβαντικού μοντέλου υπολογισμού από τη σκοπιά των κβαντικών γλωσσών προγραμματισμού. Ο κβαντικός προγραμματισμός εξ αιτίας των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών που ενσωματώνει είναι πολύ ισχυρός αλλά ταυτόχρονα και δύσχρηστος. Στην κατεύθυνση αυτή γίνεται μία προσπάθεια εξομάλυνσης των δυσκολιών μέσω της εισαγωγής ενός κβαντικού τελεστή ο οποίος αντλεί στοιχεία από τον κλασικό παράλληλο προγραμματισμό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^Ο : ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

1.1 Το θέμα της Κβαντικής Πληροφορικής & Ιστορική Εξέλιξη

Η Κβαντική Μηχανική έχει βαρυσήμαντο ρόλο στην σύγχρονη επιστήμη, καθώς εκτός από πηγή φιλοσοφικής έμπνευσης, αποτελεί μία από τις σημαντικότερες επιστημονικές επιτεύξεις. Οι βάσεις της σύγχρονης επιστήμης της Φυσικής και της Μηχανικής, τέθηκαν τον 17^ο αιώνα από τον Ισαάκ Νεύτωνα, με το έργο του *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, το 1686. Η θεωρία της σχετικότητας του Albert Einstein στις αρχές του 20^{ου} αιώνα (1905-1916), επέκτεινε την Κλασική Μηχανική για τα σώματα τα οποία κινούνται με μεγάλες ταχύτητες και έθεσε τα θεμέλια της θεωρίας της βαρύτητας. Επιπροσθέτως, η ηλεκτρομαγνητική θεωρία του James Clerk Maxwell, καθώς και η Κβαντική Θεωρία του Max Planck το 1900, αποτέλεσαν σταθμούς της Φυσικής επιστήμης.

Η Κβαντική Μηχανική αποτελεί επανάσταση στο χώρο της Φυσικής, καθώς αποτελεί μια θεωρία που άλλαξε τον τρόπο με τον οποίο σκεπτόμαστε και αντιλαμβανόμαστε τη φύση. Ούτως ή άλλως, η ίδια η Κβαντική Μηχανική περιλαμβάνει σχεδόν κάθε φυσικό τομέα και τα αποτελέσματα τα οποία βασίζονται σε προβλέψεις της επιστήμης αυτής είναι εντυπωσιακά κοντά στην πραγματικότητα. Ολόκληρη η μελέτη του μικρόκοσμου, ατόμων και μορίων, αλλά και οι διάφορες μορφές της ύλης, ακόμη και η δομή του πυρήνα και των νουκλεονίων ή των φυσικών σωματιδίων γενικότερα, βασίζεται στην Κβαντική Μηχανική. Η εφαρμογή της Κβαντικής Μηχανικής έχει πάρει μεγάλες διαστάσεις και βρίσκει πλέον εφαρμογή και σε ευρύτατους τομείς της τεχνολογίας. Στα τέλη του 20^{ου} αιώνα και στις αρχές του 21^{ου}, κάνει την εμφάνισή της η Κβαντική Θεωρία Πληροφορίας, η οποία βρίσκει εφαρμογή στους Κβαντικούς Υπολογιστές (Dirac, 1935).

Ακόμη και από την εποχή του Ισαάκ Νεύτωνα, η Κλασική Μηχανική εμφάνιζε γρήγορη

ανάπτυξη. Πράγμα καθόλου μη αναμενόμενο, καθώς οι εφαρμογές της Κλασικής Μηχανικής έχουν μεγάλη δυναμική. Η θεωρία, μαζί με τους νόμους και τις έννοιές της, μπορούσαν και μπορούν να εξηγήσουν ένα ευρύ φάσμα πειραματικών δεδομένων και αποτελεσμάτων, δίνοντας την ψευδαίσθηση για μια πιθανή ερμηνεία για το οτιδήποτε. Υπήρχε ακόμη και η εντύπωση πως δεν υπάρχουν περιθώρια βελτίωσης της θεωρίας στο μέλλον καθώς ήταν ήδη εκπληκτικά ικανοποιητική.

Ο Νεύτωνας τον 17^ο αιώνα υποστήριξε πως αν γνωρίζουμε τις αρχικές παραμέτρους ενός φυσικού συστήματος αλλά κι αν γνωρίζουμε τους βασικούς νόμους της κλασικής Μηχανικής μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια την θέση και την εξέλιξή του στον χωρόχρονο. Η θεωρία αυτή του Νεύτωνα, οδήγησε πολλούς ερευνητές να προσαρμόσουν τις θεωρίες και τις θεωρήσεις των πειραματικών δεδομένων. Στη δύση του 18^{ου} αιώνα, ο Piere Laplace, υποστήριξε πως εάν γνωρίζαμε μια συγκεκριμένη στιγμή τις κινήσεις των φυσικών όντων, τότεθα γνωρίζαμε και τις κινήσεις σωματιδίων κάθε μεγέθους. Σύμφωνα με τον ίδιο τον Piere Laplace, «τίποτα δεν θα ήταν αβέβαιο για τη φύση και το μέλλον θα ήταν ορατό» (Θεοδωρόπουλος Μ., 1992).

Στα τέλη του 20^{ου} αιώνα, δημιουργήθηκε η ανάγκη τα νέα πειραματικά δεδομένα που αδυνατούσε να εξηγήσει η Κλασική Μηχανική, να τα ερμηνεύσει η Κβαντική Μηχανική. Πλέον, η κλασική Ηλεκτροδυναμική είναι ανεπαρκής για να εξηγήσει την σταθερότητα της δομής των ατόμων και μορίων, η οποία οφείλεται στις καθορισμένες φυσικές και χημικές τους ιδιότητες. Σύμφωνα με την κλασική προσέγγιση, τα θετικά και τα αρνητικά σωματίδια, τα οποία συνιστούν ένα μόριο, βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους, αποκτούν επιτάχυνση και εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Ως αποτέλεσμα, πρέπει να χάνουν ενέργεια και άρα να αλλάζει η κατάσταση του συστήματος. Αυτό το

γεγονός, βρίσκεται σε αντίθεση με την σταθερότητα των μορίων που παρατηρείται.

Η κλασική προσέγγιση, αδυνατεί επίσης να ερμηνεύσει την περιοδική κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου, όπως για παράδειγμα την κίνηση ενός ηλεκτρονίου στο άτομο. Λόγω της ακτινοβολίας που εκπέμπεται, το σωματίδιο αναμένεται να χάνει συνεχώς ενέργεια και το πλάτος της ταλάντωσής του, να παρουσιάζει σταθερή μείωση. Με τον τρόπο αυτό, η κίνησή του παύει να είναι περιοδική και το φάσμα του συνεχές. Σε όλα αυτά, η Κλασική Μηχανική αδυνατεί να δώσει ερμηνείες. Εάν πάλι ένα ατομικό σύστημα διαταραχθεί με κάποιο τρόπο και αφηθεί έπειτα ελεύθερο, σύμφωνα με την κλασική θεωρία οι ταλαντώσεις των σωματιδίων θα γράψουν στο φασματοσκόπιο συγκεκριμένες συχνότητες.

Ο Walther Nernst (1910) ορμώμενος από την σύγκρουσή της κλασικής θεωρίας με τα πειραματικά δεδομένα τα οποία αφορούσαν τις προβλέψεις για την ακτινοβολία και τις ειδικές θερμότητες, έθεσε μια πρωτότυπη αναδιατύπωση των θεμελίων της κινητικής θεωρίας της ύλης, σε σχέση με το πως είχε διατυπωθεί και ήταν γνωστή ως τότε.

Συγκεκριμένα ανέφερε:

«Όπως έχουν ιδιαίτερα δείξει ο Planck και ο Einstein, αυτές οι αντιφάσεις σχετικά με τη συνεισφορά των εσωτερικών βαθμών ελευθερίας, μηδενίζονται όταν περιορίσει κανείς τις κινήσεις των ηλεκτρονίων και των ατόμων γύρω από τις θέσεις ισορροπίας τους (το δόγμα των κβάντων ενέργειας). Αλλά αυτή η αντίληψη είναι τόσο ξένη προς τις εξισώσεις κίνησης που χρησιμοποιούνταν πριν, ώστε η αποδοχή της θα πρέπει αναμφίβολα να συνοδευτεί από μια αναθεώρηση της θεμελιώδους μας διαίσθησης» (Θ.Μ. Χρηστίδης, 1997).

Όσον αφορά στη γέννηση της Κβαντικής Θεωρίας Πληροφορίας, σχετίζεται άμεσα με την

επιστήμη της Φυσικής. Όπως αναφέρουν οι D.Deutsch και A.Ekert «η πληροφορία είναι Φυσική και κάθε επεξεργασία της πληροφορίας διεξάγεται πάντα με όρους Φυσικής. Μια δήλωση που μπορεί να ακούγεται αθώα, αλλά όμως οι συνέπειές της είναι κάθε άλλο παρά προφανείς. Τα τελευταία χρόνια έχει λάβει χώρα μια έκρηξη θεωρητικών και πειραματικών καινοτομιών, οι οποίες, σύμφωνα με τους ερευνητές που τις ανακάλυψαν, δημιουργούν με διακριτό τρόπο μια νέα θεμελιώδη επιστήμη, την Κβαντική Θεωρία Πληροφορίας» (David Deutsch and Arthur Ekert, 1993).

Ο Gordon Moore το 1965, θέσπισε τον νόμο του Moore, ο οποίος έως και σήμερα έχει αποδειχθεί έγκυρος. Υποστήριξε πως ο αριθμός των τρανζίστορ στα ολοκληρωμένα κυκλώματα των υπολογιστών διπλασιάζεται ανά 18 μήνες. Σύντομα όμως η ισχύς αυτής της θεωρίας θα πάψει να ισχύει, καθώς ήδη κατασκευάζεται ένα τρανζίστορ από υλικά πάχους μόλις 3 ατόμων.

Η συνεχής σμίκρυνση των κυκλωμάτων άρα και αύξηση της μνήμης, προκαλεί ήδη προβλήματα υψηλής θερμοκρασίας, ενώ δεν μπορεί να αποφευχθεί ακόμη και μικρή χρονοκαθυστέρηση κατά την κίνηση των αρνητικά φορτισμένων σωματιδίων από τον έναν διακόπτη στον άλλον. Αναμένεται λοιπόν να χρησιμοποιηθούν τα ίδια τα άτομα και τα μόρια για να εκτελέσουν τις ηλεκτρονικές λειτουργίες μνήμης και επεξεργασίας πληροφορίας στους Κβαντικούς Υπολογιστές (Gribbin John, 2002).

Την δεκαετία του 1980, οι Paul Benioff, Richard Feynman και David Deutsch κατέληξαν στο ότι αντί να προβληματίζονται για το ότι η προσομοίωση κβαντικών συστημάτων παρουσιάζει προβλήματα, να κατασκευαστούν υπολογιστές από κβαντικά συστήματα (Styer F. Daniel, 2000).

Ο Feynman στο συνέδριο του M.I.T. το 1981, διατύπωσε τη θέση του, να κατασκευαστεί

δηλαδή ένας υπολογιστής από κβαντομηχανικά στοιχεία και να υπακούει στους νόμους της Κβαντομηχανικής. Συγκεκριμένα, τοποθετήθηκε ως εξής: «Μπορείτε να προσομοιώσετε την Κβαντική Μηχανική με ένα νέο είδος υπολογιστή, με έναν Κβαντικό Υπολογιστή; Δεν πρόκειται για μια μηχανή Turing, αλλά για μια μηχανή διαφορετικού είδους». Οι μηχανές Turing χρησιμοποιήθηκαν ως ένα είδος επιστημονικής στενογραφίας, πάνω στις οποίες βασίζεται κάθε συμβατικός υπολογιστής.

Ο υπολογιστής ο οποίος θα βασιζόταν στην Κβαντομηχανική θα αποτελούσε επανάσταση καθώς θα ήταν ένα είδος μηχανής ικανό να εκτελεί υπολογισμούς οι οποίοι θα ήταν αδύνατοι για τους κλασικούς υπολογιστές. Οι Κβαντικοί Υπολογιστές σύμφωνα με τον Feynman θα μπορούν να εκτελούν ταχύτερα υπολογισμούς, αλλά ακόμη θα μπορούν να εκτελούν μια πληθώρα υπολογισμών που οι κλασικές μηχανές Turing δεν μπορούν (Hey Tony and Walters Patrick, 2005).

Η ιδέα αυτή χρειάστηκε περίπου 10 έτη για να προκύψουν τα πρώτα πειραματικά αποτελέσματα, καθώς αρχικά έπρεπε με κάθε τρόπο να «στρωθεί». Τη δεκαετία του 1990 αναπτύχθηκε η Κβαντική Θεωρία, βασιζόμενη στο ότι η κβαντική διεμπλοκή (σύζευξη ή εναγκαλισμός) μπορεί να αξιοποιηθεί ως ένα μέσο επικοινωνίας για την επεξεργασία των πληροφοριών, οι οποίες σε ένα κλασικό συνηθισμένο κόσμο δεν ήταν εφικτές. Ο Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger ταυτοποίησε την κβαντική διεμπλοκή (σύζευξη) ως «εκείνο το χαρακτηριστικό γνώρισμά της Κβαντικής Θεωρίας, που επιφέρει συνολική απόκλιση από τις κλασικές γραμμές σκέψης». Δημιουργήθηκε λοιπόν η ανάγκη να εφαρμοστούν οι ιδέες της Πληροφορικής στη Κβαντική Υπολογιστική (Jeffrey Bub 2008).

1.2 Κβαντική Πληροφορική και Κβαντική Μηχανική

Η Κβαντική Θεωρία παίρνει μορφή στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, καθώς οι φυσικοί προσπαθούσαν να εξηγήσουν μια πληθώρα πειραματικών δεδομένων τα οποία παρέμεναν ανερμήνευτα με την κλασική Φυσική. Τα θεμέλια τέθηκαν στη δεκαετία 1920 – 1930, και ακόμη πιο συγκεκριμένα το 1925 – 1927. Συνεπώς υπάρχουν διάφορες περιόδους της Κβαντικής Θεωρίας και των Κβαντικών Υπολογιστών. Πιο συγκεκριμένα θα δούμε παρακάτω.

1.2.1 Πρώτη Περίοδος Κβαντικής Θεώρησης

Όπως είδαμε και στην ενότητα 1.1, ο Max Planck θεωρείται εισηγητής της νέας Κβαντικής Θεωρίας. Η έρευνά του γύρω από το φάσμα της θερμικής ακτινοβολίας ενός μέλανος σώματος δεν σχετιζόταν άμεσα με την Κβαντική Μηχανική ή τα θεμέλιά της, χωρίς όμως αυτό να τον εμποδίζει να εισάγει πρώτος την έννοια της κβάντωσης στον μικρόκοσμο. Είχε καταφέρει να βρει μια σχέση εμπειρική, η οποία θα έλυσε το πρόβλημα του απειρισμού της ολικής ενέργειας ακτινοβολίας. Θεώρησε λοιπόν, πως η ύλη η οποία απορροφούσε την ακτινοβολία, συμπεριφέρεται ως ένα σύνολο ταλαντωτών, οι οποίοι εκπέμπουν σε μια συγκεκριμένη συχνότητα f και των οποίων η ενέργεια είναι σε δεδομένη στιγμή πολλαπλάσιο της hf (Μιχαήλ Ελ. Γρυπαίου, 1972).

Ο Einstein το 1905 για τη περίπτωση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου, επέκτεινε και προώθησε τη θεωρία του Planck, καθώς κι εκείνος αντιμετώπιζε προβλήματα ερμηνείας με τη βοήθεια της Κλασικής Φυσικής. Ο Einstein θεώρησε το φως ως αποτελούμενο από πακέτα ενέργειας (κβάντα) και όχι ως κύμα ή σωματίδιο. Το φως έχει ταυτόχρονα και σωματιδιακές ιδιότητες και ιδιότητες κυματικές. Γεγονός το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την κλασική θεωρία, όπου αναφερόταν ξεκάθαρα ότι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία

είναι μόνο κυματικής φύσεως (Τραχανάς Στέφανος,2002).

1.2.2 Δεύτερη Περίοδος Κβαντικής Θεώρησης

Στην περίοδο αυτή ερμηνεύτηκε το φάσμα των ατόμων, τα προτεινόμενα μοντέλα ατομικής δομής και η εφαρμογή της Κβαντικής Θεωρίας και σε άλλα φυσικά μεγέθη. Τα φάσματα δεν μπορούσαν να ερμηνευτούν εύκολα με την κλασική Φυσική, ιδιαιτέρως όσον αφορά τα πολύπλοκα άτομα ή τα άτομα που προτάθηκαν από τον Rutherford και τον Thomson. Το μοντέλο του πρώτου δεν ήταν συμβατό με την κλασική Φυσική, καθώς θα έπρεπε το άτομο να οδηγείται σε αστάθεια. Για τα ηλεκτρόνια θεωρούσε πως, λόγω της κίνησής τους γύρω από τον πυρήνα, θα έπρεπε να εκπέμπουν ακτινοβολία με μια συνεχώς μεταβαλλόμενη συχνότητα.

Η θεωρία του Bohr το 1913 έρχεται να φέρει την επανάσταση, καθώς θεωρούσε πως λόγω της κίνησης των ηλεκτρονίων γύρω από τον πυρήνα έχουμε εκπομπή ή απορρόφηση ακτινοβολίας, ενέργειας με την μορφή φωτονίου μόνο όταν το ηλεκτρόνιο μεταβαίνει από μια ενεργειακή στάθμη σε μία άλλη. Οι Hertz και Franck το 1914 επιβεβαίωσαν την θεωρία αυτή. Η θεωρία του Niels Bohr απέκτησε διαστάσεις και ανάλυση και στο πεδίο της Αναλυτικής Μηχανικής.

Ο W. Pauli το 1925 συμβάλλει ως θεωρητικός φυσικός στην υποστηρικτική της σταθερότητας των ατόμων, και εισήγαγε την απαγορευτική αρχή. Ο Uhlenbleck και ο Goudsmit εισάγουν την έννοια του spin (ιδιοπεριστροφή) για το ηλεκτρόνιο. Το spin έδωσε νέο αριθμό κβάντωσης, πράγμα το οποίο θεωρήθηκε απαραίτητο για την απαγορευτική αρχή του Pauli. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται το πέρασμα στην Κβαντική Μηχανική (Βαγιονάκης, 1970).

1.2.3 Τρίτη Περίοδος Κβαντικής Θεώρησης

Η Κυματομηχανική αναδείκνυε τον κυματικό και τον σωματιδιακό χαρακτήρα των ακτινών X, γεγονός που επαληθεύτηκε από τα αποτελέσματα του Compton το 1923. Ορμώμενος από αυτό, ο Luis De Broglie προτείνει τη σχέση $p=h/c$ για να συνδέσει τις δύο ιδιότητες. Οι Davisson και Gremmer επαληθεύουν με πειραματικά αποτελέσματα με τη σκέδαση ηλεκτρονίων πάνω σε έναν κρύσταλλο ότι οι κυματικές ιδιότητες φαίνονται να συνδέονται με τα ηλεκτρόνια. Το 1925 ο W. Heisenberg πρότεινε να απορριφθεί η κλασική πεποίθηση πως τα φυσικά μεγέθη μπορούν να μετρηθούν με απόλυτη ακρίβεια στον μακρόκοσμο (Μπιτσάκης Εντύχιος, 1979).

Ο Heisenberg έθεσε μια μαθηματική δομή για την Κβαντική Θεωρία, την οποία και ονόμασε θεωρία πινάκων, όπου μαθηματικοί πίνακες αντιστοιχούν σε φυσικά μεγέθη. Την νέα σχέση σύνδεσης την έδωσαν ο Born, ο Heisenberg και ο Jordan, ενώ ο Pauli ανέδειξε το κατά πόσο ήταν συμβατή με τα έως τότε γνωστά κβαντικά φαινόμενα. Το 1928 ο Dirac έδωσε τη δική του θεώρηση για την Κβαντική Μηχανική και διατύπωσε την εξίσωση για το ηλεκτρόνιο. Πώς δηλαδή το spin λειτουργεί. Το 1926 ο Bohr εισάγει την πιθανότητα ως δομικό στοιχείο της θεωρίας, ότι δηλαδή το τετράγωνο ενός πλάτους πιθανότητας παριστάνεται από μια κυματοσυνάρτηση, ερμηνεύοντας το κύμα του Schrödinger ως κύμα πιθανότητας. Τέλος, ο Bohr και οι συνεργάτες του ανέπτυξαν την θεωρία της κβαντικής μέτρησης. Η Κβαντική Μηχανική ως θεωρία, ολοκληρώθηκε το 1925 – 1927.

1.3 Από την Κβαντική Μηχανική στην Κβαντική Πληροφορική

Το θέμα της Κβαντικής Πληροφορικής συγκεντρώνει ιδέες από την κλασική θεωρία πληροφοριών, την επιστήμη των υπολογιστών και την κβαντική Φυσική. Έχει επομένως θεμελιωδώς σημαντικό ρόλο στην επιστήμη της Φυσικής.

Ωστόσο, η μαθηματική επεξεργασία πληροφοριών, είναι αρκετά πρόσφατη, που χρονολογείται από τα μέσα του 20ού αιώνα. Αυτό σημαίνει ότι η πλήρης σημασία των πληροφοριών ως βασικής έννοιας στη Φυσική ανακαλύπτεται μόνο τώρα. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα στην Κβαντική Μηχανική.

Η θεωρία της Κβαντικής Πληροφορίας και της Πληροφορικής δίνει αυτήν τη σημασία σε σταθερή βάση και έχει οδηγήσει σε μερικές βαθιές και συναρπαστικές νέες γνώσεις για τον φυσικό κόσμο. Μεταξύ αυτών είναι η χρήση κβαντικών καταστάσεων για την ασφαλή μετάδοση κλασικών πληροφοριών (κβαντική κρυπτογραφία), η χρήση κβαντικής εμπλοκής για την αξιόπιστη μετάδοση κβαντικών καταστάσεων (τηλεμεταφορά), η δυνατότητα διατήρησης της κβαντικής συνοχής παρουσία μη αναστρέψιμων διαδικασιών θορύβου (διόρθωση κβαντικού σφάλματος) και τη χρήση ελεγχόμενης κβαντικής εξέλιξης για αποτελεσματικό υπολογισμό (κβαντικός υπολογισμός). Το κοινό θέμα όλων αυτών των πληροφοριών είναι η χρήση της κβαντικής εμπλοκής ως υπολογιστικός πόρος.

Αποδεικνύεται ότι η Θεωρία της Πληροφορίας και η Κβαντική Μηχανική ταιριάζουν πολύ καλά. Ο παγκόσμιος Κβαντικός Υπολογιστής (QC) μπορεί να περιγραφεί με βάση την αρχή Church-Turing ως ένα μοντέλο υπολογισμού δικτύου. Υπάρχουν λοιπόν αλγόριθμοι που αναδεικνύουν αυτές τις λειτουργίες.

Τέτοιοι αλγόριθμοι αποδεικνύουν ότι ένα QC με αρκετά ακριβή κατασκευή δεν είναι μόνο ουσιαστικά διαφορετικό από οποιονδήποτε υπολογιστή που μπορεί να χειριστεί μόνο

κλασικές πληροφορίες, αλλά ότι μπορεί να υπολογίσει μια μικρή κατηγορία λειτουργιών με μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα. Αυτό σημαίνει ότι ορισμένες σημαντικές υπολογιστικές εργασίες είναι αδύνατες για οποιαδήποτε συσκευή εκτός από ένα QC.

Η δημιουργία ενός καθολικού QC είναι πολύ πέρα από τις δυνατότητες της τρέχουσας τεχνολογίας. Ωστόσο, οι αρχές της Κβαντικής Πληροφορικής μπορούν να δοκιμαστούν σε μικρότερες συσκευές. Στην πραγματικότητα τέτοια πειράματα είναι τόσο δύσκολα που φαινόταν πιθανότατα πρόσφατα ότι ένα πρακτικά χρήσιμο QC (που απαιτεί, ας πούμε, 1000 qubit) αποκλείστηκε στην πραγματικότητα από εκτιμήσεις πειραματικής ανακρίβειας και την αναπόφευκτη σύζευξη μεταξύ οποιουδήποτε συστήματος και του περιβάλλοντός του.

Ωστόσο, ένα περαιτέρω θεμελιώδες μέρος της Κβαντικής Πληροφορικής παρέχει μια λύση σε αυτό το αδιέξοδο. Αυτή είναι η Διόρθωση Κβαντικών Σφαλμάτων (QEC). Η εξέλιξη του QC περιορίζεται σε έναν προσεκτικά επιλεγμένο υποχώρο του χώρου Hilbert. Τα σφάλματα είναι σχεδόν βέβαιο ότι προκαλούν την αποχώρηση από αυτόν τον χώρο.

Αυτό επιτυγχάνει το φαινομενικά αδύνατο, δεδομένου ότι ο υπολογισμός διατηρεί την κβαντική συνοχή παρόλο που κατά τη διάρκεια της πορείας του όλα τα qubit στον υπολογιστή θα έχουν χαλαρώσει αυθόρμητα πολλές φορές (Steane, A., 1998).

1.3.1 Νεότερη Περίοδος Κβαντικής Θεώρησης και Εμφάνιση της Κβαντικής Πληροφορικής

Το παράδοξο των Einstein, Podolsky, Rosen (EPR) διατυπώνεται το 1935. Ήταν ένα νοητικό πείραμα με σκοπό τον έλεγχο της πληρότητας ή μη της Κβαντικής Μηχανικής ως θεωρία. Κύριο θέμα ενδιαφέροντος από την νέα αυτή επιστήμη, αποτελεί η Κβαντική Θεωρία Πληροφορίας.

Η Κβαντική Θεωρία Πληροφορίας αποτελεί την «μελέτη της πληροφορίας, όπως η κλασική πληροφορία, η συνεκτική, η Κβαντική Πληροφορία και η σύζευξη, εντός της Κβαντικής Μηχανικής». Απλούστερα, αποτελεί μια προσπάθεια γενίκευσης της θεωρίας της κλασικής πληροφορίας στον κβαντικό κόσμο, με απώτερο σκοπό να δώσει απάντηση στο τι συμβαίνει εάν αποθηκεύεται πληροφορία σε μια κατάσταση ενός κβαντικού συστήματος (Nielsen Michael Aaron, 1998).

Ακόμη κι αν η κβαντική υπολογιστική βρίσκεται ακόμη σε πρώιμα στάδια εξέλιξης, έχουν ήδη υπάρξει πειράματα όπου υπολογιστικές λειτουργίες εκτελέστηκαν πάνω σε έναν πολύ μικρό αριθμό κβαντοδουφίων (Τραχανάς Στέφανος,2002). Έως το 2012 είχαν σχεδιαστεί Κβαντικοί Υπολογιστές με σχετικά λίγα (128 σε αριθμό) κβαντοδουφία. Για να δίνει αποτέλεσμα ένας Κβαντικός Υπολογιστής θα πρέπει να αποτρέψουμε την αποσυννοχή για αρκετό χρονικό διάστημα της τάξεως s ή ms , προκειμένου οι υπολογισμοί που θα προκύψουν να είναι χρήσιμοι.

Ο Charles Bennett, πρωτοπόρος ερευνητής της Κβαντικής Πληροφορικής, έκανε τον εξής παραλληλισμό: «Στην Κλασική Φυσική τα δεδομένα μοιάζουν με τις πληροφορίες που αντλούμε από ένα βιβλίο. Τα δεδομένα από τα πειραματικά μικροσκοπικά φυσικά συστήματα μοιάζουν περισσότερο με τις πληροφορίες που αντλούμε από ένα όνειρο. Σίγουρα κάθε όνειρο έχει κάποιο νόημα,, αν όμως προσπαθήσετε να διηγηθείτε το όνειρο σε κάποιον άλλον, σίγουρα δεν θα μπορείτε να το θυμηθείτε όπως ακριβώς το θυμόσασταν πριν το διηγηθείτε» (John Gribbin,2002).

1.4 Βασικές Αρχές Κβαντικής Θεωρίας

Οι βασικές αρχές της Κβαντικής Θεωρίας (Αντωνιάδης Ιωάννης, 1977):

1. Η κβαντική κατάσταση ενός κλειστού κβαντικού συστήματος (π.χ. στοιχειώδες σωματίο όπως το ηλεκτρόνιο) περιγράφεται από ένα διάνυσμα μέσα σε διανυσματικό χώρο H στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών C . Στο χώρο αυτό, που ονομάζεται χώρος Hilbert, ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ δύο διανυσμάτων ψ, χ ως συνάρτηση από το $H \times H \rightarrow C$:

$$\langle \chi | \psi \rangle = (\chi | \psi^T) \quad (1.1)$$

όπου το t δηλώνει ερμιτιανό ανάστροφο

2. Σε κάθε φυσικό μέγεθος αντιστοιχεί και ένας γραμμικός μετασχηματισμός στο χώρο Hilbert. Συμβολίζεται συνήθως με κεφαλαίο γράμμα και «καπελάκι» (π.χ. \hat{A}).

Ο γραμμικός τελεστής που αντιστοιχεί σε φυσικά μεγέθη πρέπει να είναι ερμιτιανός τελεστής, δηλ. να ισχύει:

$$\hat{A}^T = \hat{A} \quad (1.2)$$

Ο λόγος γι' αυτό είναι ότι μόνο οι ερμιτιανοί τελεστές έχουν πραγματικές ιδιότητες κάτι που είναι απαραίτητη προϋπόθεση για ένα φυσικό μέγεθος.

3. Το αποτέλεσμα μίας μοναδικής μέτρησης ενός φυσικού μεγέθους A σε ένα κβαντικό σύστημα που βρίσκεται σε μία κατάσταση ψ μπορεί να είναι μόνο μία από τις ιδιοτιμές του αντίστοιχου γραμμικού τελεστή A του φυσικού μεγέθους.

Αμέσως μετά τη μέτρηση το κβαντικό σύστημα καταρρέει σε μία νέα κατάσταση η οποία είναι το αντίστοιχο διάνυσμα του γραμμικού τελεστή. Για να βρούμε τις ιδιοτιμές και τα διανύσματα του A λύνουμε την εξίσωση:

$$A | \psi \rangle = \lambda | \psi \rangle$$

Όπου λ οι ιδιοτιμές και ψ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Η Κβαντική Υπέρθωση είναι μια θεμελιώδης αρχή της Κβαντικής Μηχανικής. Δηλώνει ότι, όπως και τα κύματα της Κλασικής Φυσικής, μπορούν να προστεθούν δύο (ή περισσότερες) κβαντικές καταστάσεις ("υπέρθωση") και το αποτέλεσμα θα είναι μια άλλη έγκυρη κβαντική κατάσταση και αντιστρόφως, ότι κάθε κβαντική κατάσταση μπορεί να αναπαρασταθεί ως άθροισμα δύο ή περισσότερων άλλων διακριτών καταστάσεων. Μαθηματικά, αναφέρεται σε μια ιδιότητα λύσεων στην εξίσωση Schrödinger. Δεδομένου ότι η εξίσωση Schrödinger είναι γραμμική, οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός λύσεων θα είναι επίσης λύση. Η εξίσωση Schrödinger είναι η εξής:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) \right] \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

ή

$$\hat{H}\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\hat{H}|\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle \quad (1.3).$$

όπου H είναι ο τελεστής της Χαμιλτονιανής (Hamiltonian) του συστήματος που εξετάζουμε, i η φανταστική μονάδα, t ο χρόνος, r η θέση στο τρισδιάστατο Ευκλείδιο χώρο και \hbar η σταθερά του Πλανκ.

Ένα παράδειγμα μιας φυσικώς παρατηρήσιμης εκδήλωσης της κυματομορφής των κβαντικών συστημάτων είναι οι κορυφές συμβολής που προκύπτουν από μια δέσμη ηλεκτρονίων στο γνωστό πείραμα της διπλής σχισμής. Το αποτύπωμα του φαινομένου (π.χ. σε μια φθορίζουσα οθόνη ή σε κάποιο πέτασμα) είναι πολύ παρόμοιο με αυτό που λαμβάνεται με περίθλαση κλασικών κυμάτων.

Η αρχή της κβαντικής υπέρθεσης δηλώνει ότι εάν ένα φυσικό σύστημα μπορεί να είναι σε μία από τις πολλές διαμορφώσεις - διευθετήσεις σωματιδίων ή πεδίων - τότε η πιο γενική κατάσταση είναι ένας συνδυασμός όλων αυτών των δυνατοτήτων, όπου το ποσό σε κάθε διαμόρφωση καθορίζεται από ένα σύμπλεγμα αριθμών.

Για παράδειγμα, εάν υπάρχουν δύο διαμορφώσεις με ετικέτα 0 και 1, η πιο γενική κατάσταση θα ήταν:

$$c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle \quad (1.4)$$

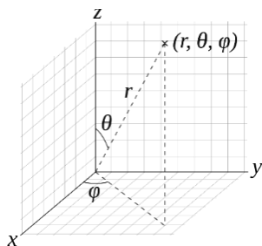
όπου οι συντελεστές είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Τέλος, η Κβαντική Διεμπλοκή είναι ένα φυσικό φαινόμενο που συμβαίνει όταν μια ομάδα σωματιδίων δημιουργείται, αλληλεπιδρά ή μοιράζεται τη χωρική εγγύτητα με τέτοιο τρόπο ώστε η κβαντική κατάσταση κάθε σωματιδίου της ομάδας να μην μπορεί να περιγραφεί ανεξάρτητα από την κατάσταση των άλλων, ακόμα και όταν τα σωματίδια χωρίζονται από μεγάλη απόσταση. Το θέμα της Κβαντικής Διεμπλοκής βρίσκεται στο επίκεντρο της ανισότητας μεταξύ της Κλασικής και της Κβαντικής Φυσικής: η Διεμπλοκή είναι ένα κύριο χαρακτηριστικό της Κβαντικής Μηχανικής που λείπει από την Κλασική Μηχανική. Μετρήσεις φυσικών ιδιοτήτων όπως η θέση, η ορμή, το σπιν και η πόλωση που πραγματοποιούνται σε διεμπλεγμένα σωματίδια μπορεί, σε ορισμένες περιπτώσεις, να βρεθούν ότι είναι απόλυτα συσχετισμένες. Για παράδειγμα, εάν δημιουργηθεί ένα ζεύγος διεμπλεγμένων σωματιδίων, και ένα σωματίδιο βρέθηκε να περιστρέφεται δεξιόστροφα σε έναν πρώτο άξονα, τότε η περιστροφή του άλλου σωματιδίου, μετρούμενη στον ίδιο άξονα, βρίσκεται αριστερόστροφα. Ωστόσο, αυτή η συμπεριφορά δημιουργεί φαινομενικά παράδοξα αποτελέσματα: κάθε μέτρηση των ιδιοτήτων ενός σωματιδίου οδηγεί σε κατάρρευση αυτού του σωματιδίου και αλλάζει την αρχική κβαντική κατάσταση. Με τα

διεμπλεγμένα σωματίδια, τέτοιες μετρήσεις επηρεάζουν το σύστημα στο σύνολό του.

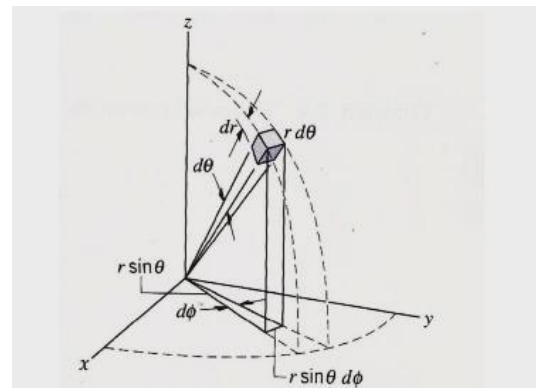
Στην Κβαντομηχανική θεωρία δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη μελέτη των τελεστών στροφορμής στρεφομένων σωματιδίων.

Κατ' αρχήν η ανάλυση των στροφορμών γίνεται θεωρώντας κεντρικά δυναμικά πεδία, δηλαδή πεδία όπου η δυναμική ενέργεια είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης (ακτίνας) από το κέντρο του πεδίου. Στην περίπτωση αυτή η μελέτη μέσω της εξίσωσης Schrodinger διευκολύνεται εάν εκφρασθεί σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) και χωρισθεί σε ανεξάρτητες εξισώσεις.



$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \\y &= r \sin \theta \sin \varphi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

Εικόνα 1.1: Wikipedia και Α. Κώνστα (1)



Σχήμα 4.1 Μετάβαση από καρτεσιανές σε σφαιρικές συντεταγμένες. θ είναι η γωνία της r με τον άξονα z , και φ η γωνία της προβολής της r , πάνω στο επίπεδο xy , με τον άξονα x .

Μπορεί να αποδειχθεί ότι ύστερα από αλγεβρικούς μετασχηματισμούς η εξίσωση Schrodinger (σε τρεις διαστάσεις και ανεξάρτητη από το χρόνο) μπορεί να γραφεί σε σφαιρικές συντεταγμένες, με την ακόλουθη μορφή:

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \left[\left(\frac{r}{R} \frac{d^2(rR)}{dt^2} \right) - \frac{1}{Y} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \left(\sin \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right) \right] = E - V(r)$$

(1.5).

Όπου έχει θεωρηθεί ότι η

$$\psi(x, y, z) = \psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r)Y(\vartheta, \varphi) \quad (1.6).$$

Η παραπάνω μορφή της εξίσωσης Schrodinger μπορεί να διασπασθεί σε δύο διαφορετικές εξισώσεις εκ των οποίων η πρώτη εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή r (γιαυτό έγινε η αλλαγή στο σύμβολο της παραγώγου d αντί ∂) και η δεύτερη μόνο από τις μεταβλητές ϑ, φ . Αν ισχύει αυτό, δηλαδή αν οι δύο προκύπτουσες εξισώσεις εξαρτώνται από διαφορετικές μεταβλητές και τα δύο σκέλη της αρχικής εξίσωσης είναι ίσα, τότε οι δύο επί μέρους εξισώσεις μπορεί να τεθεί ότι είναι ίσες με μια σταθερά π.χ. λ .

$$\left[-\frac{1}{Y} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \left(\sin \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right) \right] = \lambda \quad (1.7).$$

και

$$-\left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \left(\sin \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right) = \hat{J}Y = \lambda Y \quad (1.8).$$

Όπου \hat{J} είναι ένας τελεστής και λ οι ιδιοτιμές του.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) \right) + \hat{J} \right] + V(r) \right] \psi(r, \vartheta, \varphi) = E\psi(r, \vartheta, \varphi)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2} + V_{nuc}(r) \right] \Psi_{n,l,m}(r, \vartheta, \varphi) = E_n \Psi_{n,l,m}(r, \vartheta, \varphi)$$

(1.9).

Οι τελεστές της στροφορμής έχουν την ιδιότητα ότι οι συνιστώσες τους δεν μετατίθενται μεταξύ τους. Η σχέση μετάθεσης δύο τελεστών δίνεται από την παρακάτω εξίσωση

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (1.10).$$

Εάν οι τελεστές μετατίθενται τότε η ανωτέρω σχέση είναι ίση με μηδέν. Στην Κβαντική θεωρία αυτό σημαίνει ότι τα αντίστοιχα παρατηρήσιμα είναι δυνατόν να μετρηθούν συγχρόνως χωρίς η μία μέτρηση να επηρεάζει το αποτέλεσμα της άλλης.

Ο τελεστής και οι συνιστώσες ενός σπιν I είναι:

(Σημείωση: χρησιμοποιούνται πυρηνικά σπιν αντί σπιν ηλεκτρονίων)

$$\hat{I} = -i\hbar \vec{r} \times \vec{\nabla} = - \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.11).$$

Και από αυτόν προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\hat{I}_x &= -i \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\
\hat{I}_y &= -i \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
\hat{I}_z &= -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)
\end{aligned}
\tag{1.12}.$$

Η κυκλική μετάθεση αυτών δίνει:

$$\begin{aligned}
[\hat{I}_x, \hat{I}_y] &= i\hat{I}_z \\
[\hat{I}_y, \hat{I}_z] &= i\hat{I}_x \\
[\hat{I}_z, \hat{I}_x] &= i\hat{I}_y
\end{aligned}
\tag{1.13}.$$

Επίσης μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$\begin{aligned}
[\hat{I}_x, \hat{I}^2] &= 0 \\
[\hat{I}_y, \hat{I}^2] &= 0 \\
[\hat{I}_z, \hat{I}^2] &= 0
\end{aligned}
\tag{1.14}.$$

Και

$$\hat{I}^2 = \hat{I}_x^2 + \hat{I}_y^2 + \hat{I}_z^2
\tag{1.15}.$$

Δηλαδή ο τελεστής \hat{I}^2 μετατίθεται με τους συνιστώντες τελεστές $\hat{I}_x, \hat{I}_y, \hat{I}_z$ κατά τους άξονες x, y, z . Άρα μπορούν να προσδιορισθούν ανεξάρτητα πειραματικά. Επομένως ο \hat{I}^2 μπορεί να προσδιορισθεί ανεξάρτητα από τον \hat{I}_x κλπ

Αν οι τελεστές παρασταθούν με τη μορφή αλγεβρικής μήτρας, τότε οι σχέσεις γράφονται

$$\begin{aligned}
[(I_x), (I_y)] &= i(I_z) \\
[(I_y), (I_z)] &= i(I_x) \\
[(I_z), (I_x)] &= i(I_y)
\end{aligned} \quad (1.16).$$

Όπου οι παρενθέσεις υποδηλώνουν μήτρες τελεστών.

Με απλή αλγεβρική επεξεργασία μπορεί να δειχθεί ότι οι μήτρες των τελεστών I_x, I_y, I_z είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned}
(I_z) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
(I_x) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
(I_y) &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \quad (1.17).$$

Οι μήτρες αυτές ονομάζονται **μήτρες Pauli**

Αν οι τελεστές των συνιστωσών γραφούν σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned}
\hat{I}_x &= -i\hbar \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cot \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\
\hat{I}_y &= -i\hbar \left(\cot \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cot \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\
\hat{I}_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}
\end{aligned} \quad (1.18).$$

Και αν χρησιμοποιηθεί το άθροισμα

$$\hat{I}^2 = \hat{I}_x^2 + \hat{I}_y^2 + \hat{I}_z^2 \quad (1.19).$$

Μετά από αλγεβρική επεξεργασία προκύπτει:

$$\hat{I}^2 Y = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right) = \hbar^2 \hat{J} Y = \hbar^2 \lambda Y \quad (1.20).$$

Όπου J είναι ένας τελεστής που εμπεριέχει το γωνιακό σκέλος της εξίσωσης Schrodinger που αναφέρθηκε προηγουμένως (δηλαδή το σκέλος που εξαρτάται μόνο από τις γωνίες). Από αυτή τη σχέση φαίνεται ότι το γωνιακό σκέλος της εξίσωσης, εκφράζει το τετράγωνο του τελεστή στροφορμής I .

Αν θεωρηθεί ότι η συνάρτηση Y μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων

$$Y(\vartheta, \varphi) = \Phi(\varphi)\Theta(\vartheta) \quad (1.21).$$

Με βάση αυτή τη θεώρηση το γωνιακό σκέλος της εξίσωσης Schrodinger μπορεί να αποδειχθεί ότι γράφεται με την ακόλουθη μορφή

$$\frac{1}{\Theta(\vartheta)} \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta(\vartheta)}{d\vartheta} \right) + \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -\lambda \sin^2 \vartheta \quad (1.22).$$

Η οποία μπορεί να διαχωρισθεί σε δύο εξισώσεις, μία με τη μεταβλητή θ μόνο και μία άλλη με τη μεταβλητή φ μόνο. Από αυτές τις εξισώσεις, ύστερα από μακρά αλγεβρική και διαφορική επεξεργασία προκύπτουν οι σχέσεις που αφορούν στους τελεστές I και I_z και στις ιδιοτιμές τους, που αναφέρονται αμέσως στη συνέχεια

Πολύ συχνά για τη μελέτη των στροφορμών επιλέγεται ο τελεστής I_z (για λόγους που συνδέονται με πειραματικούς προσδιορισμούς). Για τον τελεστή αυτόν προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση ιδιοτιμών:

$$\hat{I}_z Y(\vartheta, \varphi) = m_l \hbar Y(\vartheta, \varphi)$$

ή

$$\hat{I}_z |I, m_l\rangle = m_l |I, m_l\rangle \quad (1.23).$$

Όπου $|I, m_l\rangle$ είναι συμβολισμός Dirac που χρησιμοποιείται για την κυματοσυνάρτηση Y και m_l είναι ιδιοτιμές, που προηγουμένως έχουν αναφερθεί ως τιμές του μαγνητικού κβαντικού αριθμού. I είναι ο κβαντικός αριθμός του σπιν.

Για την εύρεση της προηγούμενης εξίσωσης ιδιοτιμών του I_z έχει χρησιμοποιηθεί η ακόλουθη αρχική διαφορική εξίσωση (σκέλος της Schrodinger που εξαρτάται από τη γωνία φ)

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = \mu, \quad \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = \mu \Phi(\varphi) \quad (1.24).$$

Η συνάρτηση Φ είναι περιοδική με περίοδο 2π . Μπορεί να αποδειχθεί ότι για να ισχύουν τα παραπάνω (η μορφή της εξίσωσης και η συνθήκες περιοδικότητας) θα πρέπει οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης να έχουν την ακόλουθη μορφή

$$\Phi_{m_l}(\varphi) = A \exp[i\sqrt{\mu}\varphi] + B \exp[-i\sqrt{\mu}\varphi], \quad \Phi_{m_l}(\varphi) = A \exp(im_l\varphi) \quad (1.25).$$

όπου $\mu = -m^2$ και $m = 0, \pm 1, \pm 2,$

Επίσης για τον **ολικό τελεστή γωνιακής στροφορμής** προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση ιδιοτιμών:

$$\hat{I}^2 Y(\vartheta, \varphi) = I(I+1)\hbar Y(\vartheta, \varphi) \quad (1.26).$$

και αντίστοιχα με συμβολισμό Dirac

$$\hat{I}^2 |I, m_I\rangle = I(I+1) |I, m_I\rangle \quad (1.27).$$

I είναι οι τιμές του κβαντικού αριθμού του σπιν. Εδώ έχει χρησιμοποιηθεί η αρχική εξίσωση που εξαρτάται και από τις δύο γωνίες, στην οποία το σκέλος που εξαρτάται από τη γωνία φ έχει αντικατασταθεί με τη σταθερά $-m^2$.

$$\frac{1}{\Theta(\vartheta)} \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta(\vartheta)}{d\vartheta} \right) - m^2 = -\lambda \sin^2 \vartheta \quad (1.28).$$

Συνήθως για την αναπαράσταση των τελεστών σε μορφή μήτρας, ορίζονται δύο τελεστές που ονομάζονται **τελεστές μετατόπισης** (shift operators), ως εξής:

$$\hat{I}^+ = \hat{I}_x + i\hat{I}_y, \quad \hat{I}^- = \hat{I}_x - i\hat{I}_y \quad (1.29).$$

Επίσης ονομάζονται και **τελεστές ανύψωσης** και **υποβιβασμού** (raising and lowering operators). Οι τελεστές αυτοί επιδρούν στις κυματοσυναρτήσεις $|I, m_I\rangle$ με τον ακόλουθο τρόπο

$$\hat{I}^+ |I, m_I\rangle = [I(I+1) - m_I(m_I+1)]^{1/2} |I, m_I+1\rangle$$

$$\hat{I}^- |I, m_I\rangle = [I(I+1) - m_I(m_I-1)]^{1/2} |I, m_I-1\rangle \quad (1.30).$$

Δηλαδή ο τελεστής με το (+) προκαλεί αύξηση του κβαντικού αριθμού m_I κατά 1, ενώ αυτός με το (-) προκαλεί μείωση κατά 1. Ο κβαντικός αριθμός I παραμένει αναλλοίωτος. Σε κάθε περίπτωση παρουσιάζεται μεταβολή της κβαντικής κατάστασης που ορίζεται από τον αριθμό m_I . Δηλαδή οι τελεστές αυτοί μεταβάλουν τις καταστάσεις που αντιστοιχούν στον μαγνητικό κβαντικό αριθμό και οι οποίες ονομάζονται **ιδιοκαταστάσεις Zeeman** (Zeeman eigenstates).

Η κβαντική κατάσταση κάθε πυρήνα με πυρηνικό σπιν I μπορεί να παρασταθεί με ένα συνδυασμό (υπέρθηση) $2I+1$ διαφορετικών καταστάσεων Zeeman (δηλαδή διαφορετικών τιμών τιμών m_I).

$I=1/2$, οι οποίοι έχουν δύο ιδιοκαταστάσεις Zeeman (δηλαδή δύο τιμές για τον m_I).

Όπως προαναφέρθηκε η κατάσταση ενός κβαντικού συστήματος εκφράζεται από ένα καταστατικό διάνυσμα ket , που συμβολίζεται με $|\Psi\rangle$. Στην περίπτωση που εξετάστηκε προηγουμένως αναφέρθηκαν δύο ιδιοκαταστάσεις Zeeman που μπορούν να θεωρηθούν ως καταστατικά διανύσματα τα $|\alpha\rangle$ και $|\beta\rangle$. Οι αντίστοιχες κβαντικές καταστάσεις χαρακτηρίζονται καθαρές καταστάσεις. Όταν υπάρχει ένα σύνολο (ensemble) από πολλά σωματίδια (π.χ. 10^{20} πρωτόνια), εκτός μαγνητικού πεδίου και χωρίς να υπάρχει μεταξύ τους αλληλεπίδραση, κάθε ένα από αυτά βρίσκεται σε διαφορετική κατάσταση ως προς τον προσανατολισμό του σπιν. Κάποια από αυτά θα βρίσκονται σε κατάσταση κοντά στην $|\alpha\rangle$ κάποια άλλα κοντά στην $|\beta\rangle$ και πάρα πολλά άλλα θα βρίσκονται σε ενδιάμεσες

καταστάσεις. Πρόκειται δηλαδή για πολύ μεγάλο αριθμό καταστάσεων που δημιουργούν ένα μίγμα που χαρακτηρίζεται ως **υπέρθωση καταστάσεων** (superposition of states).

Η υπέρθεση αυτή μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$|\Psi\rangle = c_\alpha|\alpha\rangle + c_\beta|\beta\rangle \quad (1.31).$$

Όπου οι συντελεστές c_α , c_β είναι μιγαδικοί χρονικά εξαρτώμενοι συντελεστές, που εκφράζουν πιθανότητες, για τους οποίους ισχύει

$$|c_\alpha|^2 + |c_\beta|^2 = 1 \quad (1.32).$$

Κάθε ξεχωριστό σπιν μπορεί να περιγράφεται από μια κυματοσυνάρτηση Ψ όπως η προηγούμενη, που αποτελεί μίγμα (υπέρθωση) των δύο καθαρών καταστάσεων $|\alpha\rangle$ και $|\beta\rangle$ με αντίστοιχες πιθανότητες $|c_\alpha|^2$ και $|c_\beta|^2$ αντίστοιχα για κάθε μία καθαρή κατάσταση.

Οι συντελεστές c_α , c_β έχουν άθροισμα τετραγώνων των απόλυτων τιμών τους ίσο με 1.

Οι κυματοσυναρτήσεις $|\alpha\rangle$ και $|\beta\rangle$ είναι ιδιοσυναρτήσεις της Χαμιλτονιανής και του τελεστή I_z , αλλά δεν είναι ιδιοσυναρτήσεις των τελεστών I_x , I_y

Σε γενικότερες περιπτώσεις που ο αριθμός N των καθαρών ενεργειακών καταστάσεων είναι μεγάλος, η συνθήκη υπέρθεσης γράφεται

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^N c_j |\psi_j\rangle \quad (1.33).$$

Όπου ψ_j είναι οι ιδιοσυναρτήσεις (καταστατικά ιδιοδιανύσματα) των καθαρών καταστάσεων και για τους συντελεστές c_j ισχύει ότι και για την προηγούμενη περίπτωση.

Όταν, σε συνθήκες παρουσίας τόσο πολλών σωματιδίων, απαιτείται να γίνουν υπολογισμοί μακροσκοπικών μεγεθών, η διαδικασία είναι πολύπλοκη εκτός αν δεν χρειάζεται να γίνουν υπολογισμοί για κάθε περίπτωση ξεχωριστά. Κάτι τέτοιο μπορεί να επιτευχθεί με τη μέθοδο του **τελεστή πυκνότητας** (density operator). Ο τελεστής πυκνότητας εκφράζει την κβαντική κατάσταση ενός συνόλου σωματιδίων (σπιν) χωρίς να αναφέρεται σε κάθε ξεχωριστό σπιν και έχει τη μορφή

$$\hat{\rho} = \sum_j c_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \quad (1.34).$$

Η ψ_j αντιστοιχεί σε καθαρή κατάσταση Zeeman με πιθανότητα p_j . Το άθροισμα αντιστοιχεί σε υπέρθεση πολλών καθαρών καταστάσεων.

Για μία μοναδική καθαρή κατάσταση $|\psi_j\rangle$ ο τελεστής πυκνότητας γράφεται:

$$\hat{\rho} = |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \quad (1.35).$$

Το γινόμενο των κυματοσυναρτήσεων bra επί ket είναι εξωγενές γινόμενο (outer product)

Η μεθοδολογία του τελεστή πυκνότητας χρησιμοποιεί τις ιδιότητες της αναμενομένης τιμής ενός τελεστή. Η αναμενομένη τιμή (που αναφέρθηκε και προηγουμένως) εκφράζει το μέσο αποτέλεσμα πάρα πολλών παρατηρήσεων. Τυπικά παρέχεται από τη σχέση.

$$\langle \psi | \hat{T} | \psi \rangle = \int dx \psi^*(x) \hat{T} \psi(x) \quad (1.36).$$

Οι συναρτήσεις της υπέρθεσης και των καθαρών καταστάσεων Zeeman μπορούν να γραφούν ως ket με τη μορφή πίνακα στήλης με τον ακόλουθο τρόπο:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_\alpha \\ c_\beta \end{pmatrix} \quad |\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\beta\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.37).$$

το αντίστοιχο διάνυσμα bra της ψ μπορεί να γραφεί με τη μορφή του συζυγούς μιγαδικού του

$$\langle \psi | = |\psi\rangle^\dagger = (c_\alpha^*, c_\beta^*) \quad (1.38).$$

Δηλαδή το ket μετατρέπεται σε πίνακα σειράς που περιέχει τους συζυγείς μιγαδικούς των συντελεστών c . Επίσης η συνθήκη κανονικοποίησης γράφεται

$$\langle \psi | \psi \rangle = (c_\alpha^*, c_\beta^*) \begin{pmatrix} c_\alpha \\ c_\beta \end{pmatrix} = c_\alpha^* c_\alpha + c_\beta^* c_\beta = |c_\alpha|^2 + |c_\beta|^2 = 1 \quad (1.39).$$

Με βάση τα προαναφερθέντα η αναμενομένη τιμή του τελεστή T γράφεται (σύμφωνα και με τους ορισμούς της Κβαντομηχανικής):

$$\langle \psi^* | \hat{T} | \psi \rangle = (c_\alpha^* \ c_\beta^*) \begin{pmatrix} T_{\alpha\alpha} & T_{\alpha\beta} \\ T_{\beta\alpha} & T_{\beta\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\alpha \\ c_\beta \end{pmatrix} = c_\alpha^* c_\alpha T_{\alpha\alpha} + c_\alpha^* c_\beta T_{\alpha\beta} + c_\beta^* c_\alpha T_{\beta\alpha} + c_\beta^* c_\beta T_{\beta\beta} \quad (1.40).$$

Χρησιμοποιώντας την έννοια του **ίχνους ενός πίνακα** Tr (trace) (που είναι το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του) αποδεικνύεται ότι η αναμενομένη τιμή είναι ισοδύναμη

με το ίχνος. Δηλαδή γενικά ισχύει

$$\langle \psi^* | \hat{T} | \psi \rangle = \text{Tr} [| \psi \rangle \langle \psi | \hat{T}]$$

όπου

$$| \psi \rangle \langle \psi | = \begin{pmatrix} c_\alpha \\ c_\beta \end{pmatrix} (c_\alpha^*, c_\beta^*) = \begin{pmatrix} c_\alpha c_\alpha^* & c_\alpha c_\beta^* \\ c_\beta c_\alpha^* & c_\beta c_\beta^* \end{pmatrix} \quad (1.41).$$

Συγκεκριμένα στην περίπτωση πολλών καθαρών καταστάσεων Zeeman (ψ_j) η σχέση αναμενομένης τιμής και ίχνους γράφεται

$$\langle \psi^* | \hat{T} | \psi \rangle = \sum_j c_j \langle \psi_j | \hat{T} | \psi_j \rangle = \sum_j c_j \text{Tr} [| \psi_j \rangle \langle \psi_j | \hat{T}] = \sum_j \text{Tr} [c_j | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \hat{T}]$$

και

$$\sum_j \text{Tr} [c_j | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \hat{T}] = \text{Tr} \left[\sum_j [c_j | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \hat{T}] \right] = \text{Tr} [\hat{\rho} \hat{T}] \quad (1.42).$$

Όπου ρ είναι η λεγόμενη **μήτρα πυκνότητας** (density matrix), η οποία αποτελεί και αναπαράσταση με μορφή μήτρας του τελεστή πυκνότητας

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{\alpha\alpha} & \rho_{\alpha\beta} \\ \rho_{\beta\alpha} & \rho_{\beta\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{c_\alpha c_\alpha^*} & \overline{c_\alpha c_\beta^*} \\ \overline{c_\beta c_\alpha^*} & \overline{c_\beta c_\beta^*} \end{pmatrix}$$

Όπου η μήτρα πυκνότητας γράφεται (με παύλες επάνω στα σύμβολα) έτσι ώστε τα

στοιχεία της να αποτελούν μέσες τιμές επάνω στο σύνολο όλων των σπιν. Τα διαγώνια στοιχεία της μήτρας $\rho_{\alpha\alpha}$ και $\rho_{\beta\beta}$ αντιστοιχούν σε μέσες τιμές **πληθυσμών** των καθαρών καταστάσεων $|\alpha\rangle$ και $|\beta\rangle$ (δηλαδή υψηλής και χαμηλής ενέργειας) ενώ τα στοιχεία $\rho_{\alpha\beta}$, $\rho_{\beta\alpha}$ αντιστοιχούν σε **καταστάσεις συνοχής** (coherence). Οι καταστάσεις συνοχής αντιστοιχούν σε καταστάσεις στις οποίες τα σπιν έχουν προσανατολισμό κάθετο στο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.

Με βάση τη μήτρα και τον τελεστή πυκνότητας που αφορά μεγάλους αριθμούς σπιν, διαμορφώνεται μια χαρακτηριστική και πολύ χρήσιμη, για το φαινόμενο του Πυρηνικού Μαγνητικού Συντονισμού, εξίσωση της Κβαντικής Μηχανικής που είναι η **εξίσωση Liouville – von Neumann**. Αυτή περιγράφει τη χρονική εξέλιξη της κβαντικής κατάσταση του συνόλου των σπιν (αντίστοιχη της χρονικά εξαρτώμενης εξίσωσης Schrodinger).

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] = \frac{i}{\hbar} (\hat{\rho}\hat{H} - \hat{H}\hat{\rho}) \quad (1.43).$$

Όπου οι αγκύλες εκφράζουν μεταθέτη

Εάν θεωρηθεί η απλή σχέση:

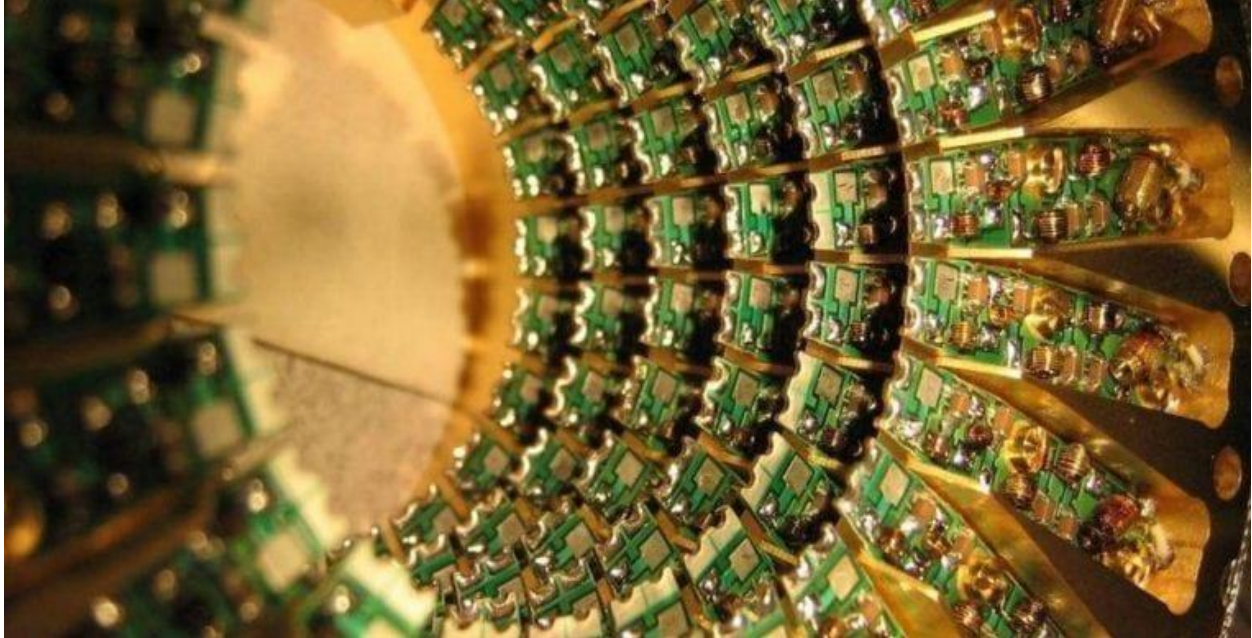
$$\hat{\rho} = |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \quad (1.44).$$

Τότε με παραγωγή λαμβάνεται

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = \frac{\partial}{\partial t} [|\psi_j\rangle\langle\psi_j|] = \left[\frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle \right] \langle\psi| + |\psi\rangle \frac{\partial}{\partial t} \langle\psi|$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = \frac{-i}{\hbar} \hat{H} |\psi_j\rangle\langle\psi_j| + \frac{i}{\hbar} |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \hat{H} = \frac{-i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (1.45).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^Ο : ΚΒΑΝΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ



Εικόνα 2.1: Κβαντικός Υπολογιστής

Πηγή: <https://iotpractitioner.com/quantum-computing-series-part-7-quantum-computer/>

2.1 Έννοια του Κβαντικού Υπολογιστή

Όπως είδαμε και το προηγούμενο κεφάλαιο, η ιδέα για τη δημιουργία ενός κβαντικού υπολογιστή διατυπώθηκε την δεκαετία του 1980. Πρωτοπόροι ήταν οι Feynman, Deutsch που διαπίστωσαν πως οι κλασικοί υπολογιστές δεν έδιναν λύσεις σε βασικά προβλήματα και είχαν περιορισμένο χρόνο και μνήμη για συγκεκριμένες λειτουργίες (Abbas Edalat,2003).

Ο Feynman προσπάθησε πρώτος να λύσει το θέμα αυτό. Δημιούργησε ένα πρότυπο δείχνοντας πως η κβαντική οπτική θα μπορούσε να γίνει εργαλείο για υπολογισμούς. Συνεπώς, ένας ερευνητής φυσικός θα μπορούσε να εκτελέσει πειράματα κβαντικής Φυσικής μέσω ενός κβαντικού εργαλείου (Di Vincenzo D.P.,et al.,2000).

2.1.1 Πώς Υλοποιείται Ένας Κβαντικός Υπολογιστής

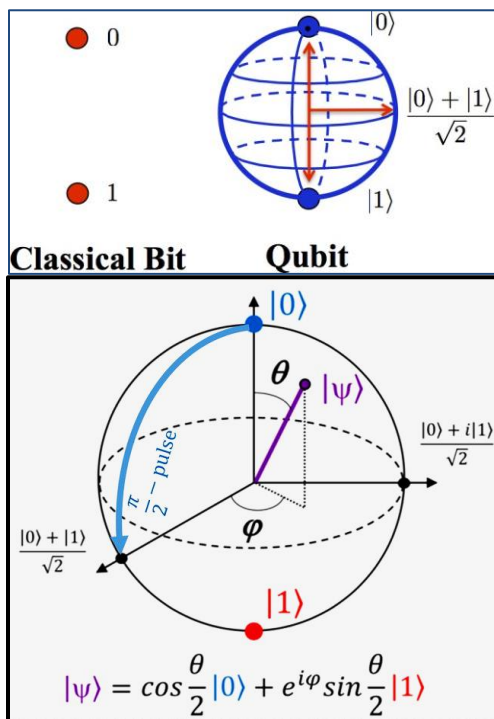
Στους κλασικούς υπολογιστές η πληροφορία μεταφράζεται σε υπολογιστικά δεδομένα μέσω bits. Αυτά, μέσω λογικών πυλών αλλάζουν μορφή ούτως ώστε να παράγουν ένα τελικό αποτέλεσμα. Με έναν αντίστοιχο τρόπο, ένας Κβαντικός Υπολογιστής χρησιμοποιεί Κβαντικές Πύλες για να μετασχηματίσει τα qubits σε ένα ή σε ζεύγος αυτών. Εάν οι Κβαντικές Πύλες τοποθετηθούν σε συγκεκριμένη σειρά / ακολουθία, τότε ο Κβαντικός Υπολογιστής μπορεί να μετασχηματίσει περίπλοκα σχήματα qubits σε μια σειρά από αυτά, περνώντας από μια αρχική κατάσταση σε μια τελική. Τα qubits μετριοούνται στην τελική τους μορφή και δίνουν ένα αντίστοιχο υπολογιστικό αποτέλεσμα. Η ομοιότητα μεταξύ Κλασικού και Κβαντικού Υπολογιστή, όσον αφορά στον υπολογισμό, μπορεί θεωρητικά να οδηγήσει στο συμπέρασμα πως υπάρχει η δυνατότητα ένας Κλασικός Υπολογιστής να προσομοιωθεί όπως ένας κβαντικός. Το αντίστροφο σενάριο όμως, δηλαδή η προσομοίωση ενός Κβαντικού Υπολογιστή από έναν Κλασικό, είναι ένα

πρόβλημα με υπολογιστικές δυσκολίες, καθώς οι συσχετισμοί μεταξύ κβαντικών κομματιών διαφέρουν ποιοτικά σε σχέση με των κλασικών (Di Vincenzo D.P., et al., 2000).

2.2 Δομή & Λειτουργία Κβαντικών Υπολογιστών

Ένας κλασικός υπολογιστής έχει μνήμη η οποία αποτελείται από bits (διφύδια), όπου κάθε ένα από αυτά παίρνει τιμή 1 ή 0. Ο Κβαντικός Υπολογιστής έχει ακολουθία qubits. Ένα μοναδικό bit μπορεί να πάρει την τιμή 1 ή 0, όπως επίσης συνδυασμό γραμμικής επαλληλίας των τιμών αυτών. Έτσι, μπορεί να απεικονίσει άπειρο αριθμό καταστάσεων. Ο Κβαντικός Υπολογιστής λειτουργεί με ακολουθία διφυδίων, που καλούνται Κβαντικές Λογικές Πύλες. Κάθε προετοιμασία ή επεξεργασία των qubits θα πρέπει να πραγματοποιείται μέσω μοναδιαίων μετασχηματισμών, αφού πρόκειται για κβαντικά συστήματα, για τα οποία ισχύει αυτή η συνθήκη.

Οι Κβαντικές Πύλες ορίζονται ως μοναδιαίοι τελεστές και πραγματοποιούν καθορισμένες μοναδιαίες πράξεις πάνω σε συγκεκριμένα qubits σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Οι Κβαντικές Πύλες θα πρέπει να είναι αντιστρεπτές – σε αντίθεση με τις πύλες των κλασικών υπολογιστών -, συνεπώς θα πρέπει να έχουν τον ίδιο αριθμό πυλών εισόδου και εξόδου. Επίσης πρέπει να μπορούν να επανακτούν το σύστημα εισόδου όταν είναι γνωστό μόνο το σύστημα εξόδου (Χατζησάββας Κωνσταντίνος, 2006).



Εικόνα 2.2: Bit και Qubit

Πηγή: <https://quantumcomputing.stackexchange.com/questions/4693/polarization-and-qubit-information>

https://www.researchgate.net/publication/284259345_Quantum_optics_with_artificial_atoms/figures?lo=1

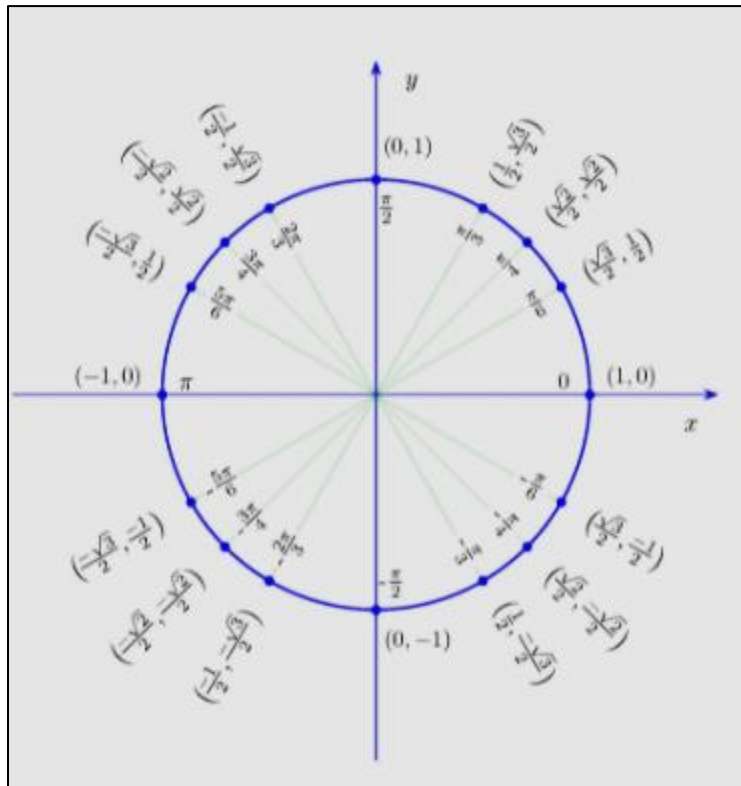
Εξετάζοντας την περίπτωση μιας κβαντικής κατάστασης:

$$|\psi\rangle = c_0 \cdot |0\rangle + c_1 \cdot |1\rangle. \quad (2.1).$$

Χρησιμοποιώντας την πολική αναπαράσταση ενός μιγαδικού αριθμού, έχουμε τις ακόλουθες δύο ισοδύναμες αναπαραστάσεις:

$$c_0 = r_0 e^{j\varphi_0} \quad \text{και} \quad c_1 = r_1 e^{j\varphi_1}$$

Όπου r_0 , r_1 είναι τα πλάτη και φ_0 το φ_1 οι γωνίες. Έτσι, κάθε μεμονωμένος αριθμός c_i μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν φανταστικό κύκλο μονάδας.



Εικόνα 2.3: Τριγωνομετρικός κύκλος μονάδας.

Πηγή: <http://users.sch.gr/perigian/wordpress/?p=1045>

Έτσι, δεδομένου ότι έχουμε δύο συστατικά c_i , μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι έχουμε 4 άγνωστα (2 φάσεις και 2 πλάτη) που προσδιορίζουν μοναδικά τα συστατικά. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, η εξίσωσή μας μπορεί να ξαναγραφεί ως:

$$|\psi\rangle = r_0 e^{j\varphi_0} \cdot |0\rangle + r_1 e^{j\varphi_1} \cdot |1\rangle \quad (2.2).$$

Ωστόσο, στην περίπτωση των κβαντικών δυαδικών ψηφίων, γνωρίζουμε ότι μια κβαντική κατάσταση δεν αλλάζει εάν πολλαπλασιάσουμε με οποιονδήποτε αριθμό. Τότε, η (ισοδύναμη) κατάστασή μας είναι:

$$e^{-j\varphi_0} \cdot |\psi\rangle = e^{-j\varphi_0} \cdot (r_0 e^{j\varphi_0} \cdot |\mathbf{0}\rangle + r_1 e^{j\varphi_1} \cdot |\mathbf{1}\rangle) = r_0 \cdot |\mathbf{0}\rangle + r_1 e^{j(\varphi_1 - \varphi_0)} \cdot |\mathbf{1}\rangle$$

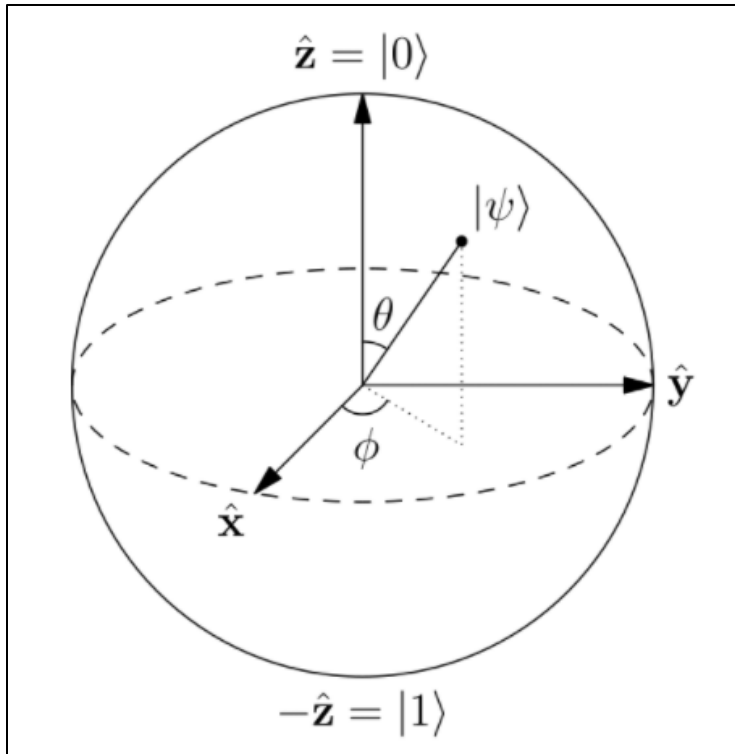
(2.3).

Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση γωνίας της παραπάνω ισότητας λαμβάνουμε την ισοδύναμη αναπαράσταση $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \cos \theta \cdot |\mathbf{0}\rangle + e^{j\varphi} \sin \theta \cdot |\mathbf{1}\rangle. \quad (2.4).$$

Μια διαφορετική ερμηνεία των παραπάνω είναι ότι ενδιαφερόμαστε μόνο για τη σχετική φάση μεταξύ των δύο καταστάσεων και όχι για την πραγματική τους φάση.

Το παραπάνω αποτέλεσμα στην αναπαράσταση της σφαίρας του Bloch, πήρε το όνομά του από τον Felix Bloch. Αυτή η αναπαράσταση είναι μια μονάδα όπου στο βόρειο και νότιο πόλο βρίσκονται δύο ομάδες. Αυτή η παράσταση έχει μια ωραία γεωμετρική προοπτική:



Εικόνα 2.4: Σφαίρα Bloch.

Πηγή: https://www.google.gr/search?q=%CF%83%CF%86%CE%B1%CE%B9%CF%81%CE%B1+bohr&sxsrf=ALeKk03nUNjfNCwnnKJFUrrGiF2O96_8uw:1627480071229&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ved=2ahUKEwj_0Jjc84XyAhUl4sKHVGkB6oQ_AUoAXoECAEQAw&biw=1920&bih=969#imgrc=jCFPXZvO-iejLM

Η σφαίρα Bloch έχει την ακόλουθη ερμηνεία: Οι πόλοι αντιπροσωπεύουν τα κλασικά bits, (χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $|0\rangle$ και $|1\rangle$). Ωστόσο, ενώ αυτές είναι οι μόνες δυνατές καταστάσεις για την κλασική αναπαράσταση bit. Τα κβαντικά bit καλύπτουν ολόκληρη τη σφαίρα και έτσι, υπάρχουν πολύ περισσότερες πληροφορίες σε αυτά. Η σφαίρα Bloch το απεικονίζει αυτό.

Όταν μετράται το qubit, όπως έχουμε ήδη συζητήσει, καταρρέει σε έναν από τους δύο πόλους. Ποιο πόλο εξαρτάται ακριβώς από ποια κατεύθυνση δείχνει το βέλος στην αναπαράσταση Bloch: Εάν το βέλος είναι πιο κοντά στον βόρειο πόλο, υπάρχει

μεγαλύτερη πιθανότητα να καταρρεύσει σε αυτόν τον πόλο. παρομοίως για τον νότιο πόλο. Παρατηρήστε ότι αυτό εισάγει την έννοια της πιθανότητας στη σφαίρα Bloch: η γωνία θ του βέλους με τους κατακόρυφους άξονες αντιστοιχεί σε αυτήν την πιθανότητα. Εάν το βέλος τυχαίνει να δείχνει ακριβώς στον ισημερινό, υπάρχει πιθανότητα 50-50 να καταρρεύσει σε οποιονδήποτε από τους δύο πόλους.

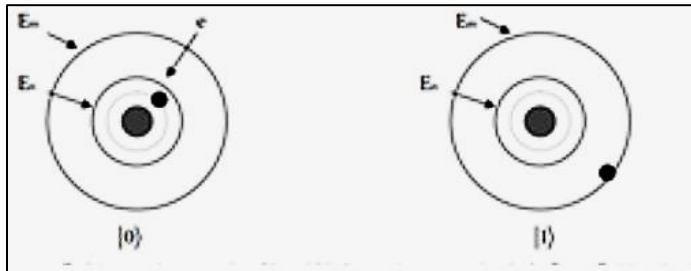
Από την άλλη πλευρά, στην περιστροφή ενός διανύσματος ο άξονας z οδηγεί σε αλλαγή φάσης και δεν επηρεάζει σε ποια κατάσταση θα καταρρεύσει το βέλος, όταν το μετρήσουμε. Αυτή η περιστροφή επιτυγχάνεται με την αλλαγή της μεταβλητής φ .

Μέχρι στιγμής, μιλήσαμε για τελεστές που «διατηρούν την ενέργεια» του συστήματος. Ένας διαφορετικός τρόπος για να δούμε αυτούς τους τελεστές, είναι οι μετασχηματισμοί διανυσμάτων (εδώ, περιορίζουμε την προσοχή μας σε ένα σύστημα qubit) πάνω από τη σφαίρα Bloch. Οι πίνακες X , Y και Z Pauli (και οι συνδυασμοί τους) είναι ακριβώς οι πίνακες που περιστρέφουν / αναστρέφουν τις αναπαραστάσεις στη σφαίρα.

Αυτοί οι πίνακες έχουν ως αποτέλεσμα να περιστρέφονται σε 180 μοίρες στους αντίστοιχους άξονες. Έτσι προκύπτουν τα εξής:

$$\begin{aligned}
 R_x(\xi) &= \cos \frac{\xi}{2} \cdot I - j \sin \frac{\xi}{2} \cdot X = \begin{bmatrix} \cos \frac{\xi}{2} & -j \sin \frac{\xi}{2} \\ -j \sin \frac{\xi}{2} & \cos \frac{\xi}{2} \end{bmatrix}, \\
 R_y(\xi) &= \cos \frac{\xi}{2} \cdot I - j \sin \frac{\xi}{2} \cdot Y = \begin{bmatrix} \cos \frac{\xi}{2} & -\sin \frac{\xi}{2} \\ \sin \frac{\xi}{2} & \cos \frac{\xi}{2} \end{bmatrix}, \\
 R_z(\xi) &= \cos \frac{\xi}{2} \cdot I - j \sin \frac{\xi}{2} \cdot Z = \begin{bmatrix} e^{-j\frac{\xi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{j\frac{\xi}{2}} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{2.5}.$$

Αυτά περιστρέφουν την τρέχουσα κατάσταση στους αντίστοιχους άξονες κατά ξ μοίρες.



Εικόνα 2.5: Αναπαράσταση ενός qubit από δυο διακριτά ενεργειακά επίπεδα σε ένα άτομο.

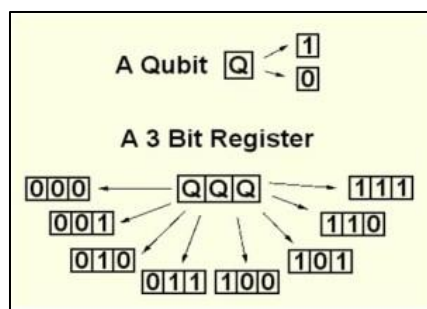
(Kockum & Nori, 2019)

2.3 Κβαντικές Πύλες

Οι κλασικοί υπολογιστές αποτελούνται από αγωγούς και λογικές πύλες οι οποίες συγκροτούν κυκλώματα. Οι αγωγοί μεταφέρουν την πληροφορία με τη μορφή τάσης ή ρεύματος από πύλη σε πύλη. Οι λογικές πύλες επεξεργάζονται και μετατρέπουν την πληροφορία που έρχεται στην είσοδό τους σύμφωνα με τον πίνακα αληθείας τους.

Οι λογικές πύλες στους κλασικούς υπολογιστές είναι φυσικά συστήματα κατασκευασμένα από πυρίτιο και αποτελούνται από τρανζίστορ. Στους Κβαντικούς Υπολογιστές οι Κβαντικές Πύλες αντιπροσωπεύουν δράσεις που ασκούνται σε qubits ή σε κβαντικούς καταχωρητές. Οι δράσεις στα κβαντικά συστήματα αντιπροσωπεύονται από τελεστές οι οποίοι περιγράφονται από πίνακες.

Μία άλλη σημαντική διαφορά είναι ότι η πληροφορία δεν διέρχεται μέσα από τις Κβαντικές Πύλες. Η πληροφορία βρίσκεται αποθηκευμένη σε qubits ή σε κβαντικούς καταχωρητές και παραμένει εκεί. Στους Κβαντικούς Υπολογιστές το κάθε qubit χαρακτηρίζεται από υπέρθεση της κατάστασης $|0\rangle$ και $|1\rangle$.



Εικόνα 2.6: Qubits

Πηγή: <https://www.csc.com.gr/%CE%BA%CE%B2%CE%B1%CE%BD%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8C%CF%82-%CF%85%CF%80%CE%BF%CE%BB%CE%BF%CE%B3%CE%B9%CF%83%CF%84%CE%AE%CF%82-%CE%BA%CF%8D%CF%81%CE%B9%CE%B1-%CE%BC%CE%AD%CF%81%CE%B7/>

Η Κβαντική Πύλη θα είναι ένα είδος κυκλώματος, το οποίο πραγματοποιεί πράξεις σε qubits για κάποιο χρονικό διάστημα, ενώ σε αντίθεση με τις κλασικές, είναι πάντα αντιστρεπτές, άρα θα έχουν τον ίδιο αριθμό εισόδων και εξόδων.

Παρακάτω αναφέρονται μόνο ονομαστικά οι βασικές Κβαντικές Πύλες ενώ στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η λειτουργία της κάθε πύλης αναλυτικά (Καραφυλλίδης 2005):

- i. Κβαντική Πύλη Αδράνειας.
- ii. Κβαντική Πύλη Μετατόπισης Φάσης
- iii. Κβαντική Πύλη Hadamard
- iv. Κβαντική Πύλη Ελεγχόμενης Άρνησης (CNOT)
- v. Κβαντική Πύλη Ελεγχόμενης Μετατόπισης Φάσης
- vi. Κβαντική Πύλη Διπλά Ελεγχόμενης Άρνησης (CCNOT)
- vii. Κβαντική Πύλη Fredkin

Αναλυτικότερα, στον κβαντικό υπολογισμό εκτελούμε ενιαίες λειτουργίες (υπό μορφή τελεστή) σε μια διάταξη των qubits. Αυτές οι λειτουργίες ονομάζονται πύλες. Όταν πρόκειται να κατασκευασθεί ένας κβαντικός υπολογιστής, κατασκευάζονται τα qubits, τα

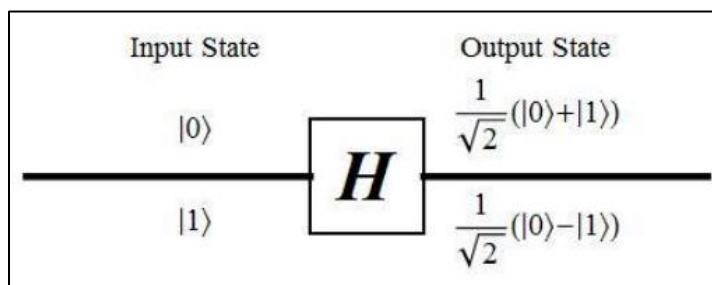
στοιχεία που αποθηκεύουν πληροφορίες, χρησιμοποιώντας κάποιες φυσικές ιδιότητες καθώς και ένα άλλο σημαντικό μέρος στο οποίο γίνεται η τέλεση των πράξεων... για να εκτελούμε τις πληροφορίες. Δηλαδή, η εύρεση ενός καλού τρόπου για την αποθήκευση πληροφοριών και την ανάγνωσή τους δεν θα ήταν αρκετή – πρέπει να περάσουν από τις πύλες. Έτσι, για κάθε qubit, θα θέλαμε να οικοδομήσουμε μια λογική διαδικασία εκτέλεσης λειτουργιών σε αυτό (Quantum Computing, 2021).

Οι κβαντικές πύλες είναι τελεστές που μεταφέρουν ένα κβαντικό σύστημα από τη μία κατάσταση στην άλλη. Σύμφωνα με την αρχή της Κβαντικής Μηχανικής οι τελεστές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στον κβαντικό υπολογισμό είναι μοναδιαίοι (unitary) και αντιπροσωπεύονται ως πίνακες που ισχύουν για μια αυθαίρετη κβαντική κατάσταση (qubit) (Rastegari & Nabi, n.d.). Επίσης, ένα κβαντικό κύκλωμα αποτελείται από μονές κβαντικές πύλες και πύλη CNOT (Nielsen & CHaung, 2010).

Υπάρχουν πολλοί τρόποι για την αναπαράσταση των στοιχείων του κβαντικού υπολογιστή (π.χ. Quantum gates, qubits). Επίσης, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τα πακέτα Mathematica, όπως: QDENSITY (Diaz et al, 2006), για να προσομοιώσει το μέρος του κβαντικού υπολογιστή.

2.3.1. Η κβαντική πύλη εφαρμοσμένη ως τελεστής σε ενιαίο qubit.

Πύλη Hadamard



Εικόνα 2.7: Το σύμβολο της κβαντικής πύλης Hadamard.

Πηγή: <https://eclass.upatras.gr/modules/document/file.php/EE742/Open%20Courses/17.QuantumGates.pdf>

Η πύλη Hadamard (Chow, 2010) μπορεί να προσομοιώσει τον μη ντετερμινιστικό υπολογισμό. Πρόκειται για μια πύλη ενός qubit που μπορεί να κατασκευάσει ορισμένες συγκροτημένες καταστάσεις από βασικές καταστάσεις είναι ως

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad (2.6).$$

Ο πίνακας αλήθειας έχει ως εξής:

Πίνακας αλήθειας για την πύλη Hadamard

Είσοδος	Έξοδος
0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle + 1\rangle)$
1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle - 1\rangle)$

Πίνακας 1-2: Πίνακας αληθείας Hadamard.

Στο σχήμα μπορούμε να δούμε την κατάσταση του qubit μετά τη δράση του τελεστή Hadamard.

Η πύλη Hadamard μπορεί να περιγραφεί από τον ακόλουθο τελεστή (Rosner, 2011):

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{\sqrt{2}} = (|0\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (1 \ 0) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (0 \ 1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes (1 \ 0) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes (0 \ 1) \right) \\
 &= cc \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x + \sigma_z) \quad (2.7).$$

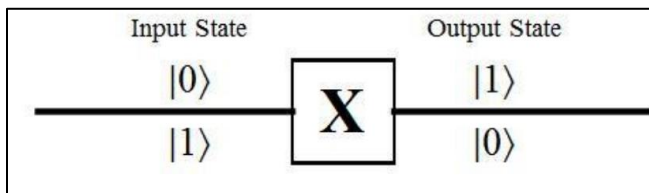
Στη συνέχεια αναφέρονται μερικές ιδιότητες της πύλης Hadamard

$$H^2 = 1, H\sigma_x H = \sigma_z, \quad H \equiv \text{Hermitian Matrix}$$



Πύλη NOT

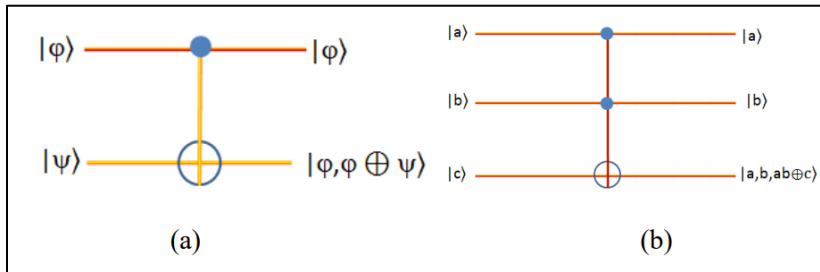
Η πύλη Pauli X (Pauli X- Gate (NOT gate) (Chow, 2010) είναι ένας άλλος τελεστής με δυνατότητα αναστροφής ενός qubit που είναι η πιο σημαντική κβαντική πύλη. Γραφικά αντιπροσωπεύεται από:



Εικόνα 2.8: Το σύμβολο της κβαντικής πύλης Pauli-X.

Πηγή: <https://eclass.upatras.gr/modules/document/file.php/EE742/Open%20Courses/17.QuantumGates.pdf>

Συμμετέχει στην κατασκευή άλλων κβαντικών πυλών όπως η πύλη Controlled-NOT (CNOT) (Preethika & Skinner, 2007), η οποία είναι μια κβαντική πύλη δύο qubit και η πύλη Control-Control-NOT (Toffoli), η οποία είναι ένας τελεστής τριών qubit:

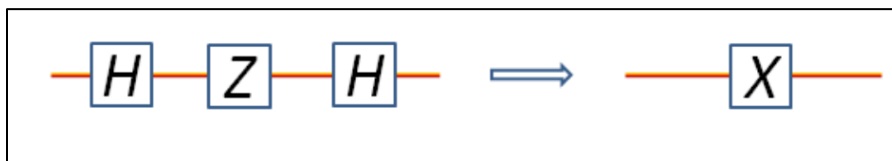


Η πύλη NOT συμμετέχει στην κατασκευή, α) πύλη CNOT. β) Πύλη Toffoli.

Η πύλη που αναπαρίστανται ως πρώτος πίνακας Pauli, μπορεί να ληφθεί από τον παρακάτω τελεστή:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.8}.$$

Το αποτέλεσμα ενός κυκλώματος πυλών (Hadamard gate Z πύλη \rightarrow Hadamard) είναι μια πύλη NOT:

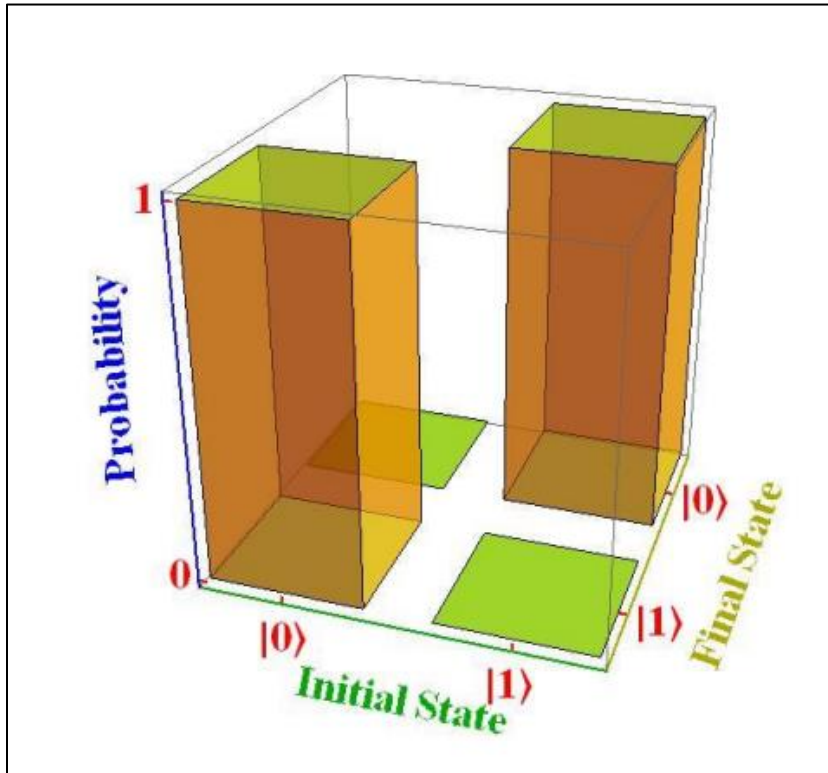


Όταν εφαρμόζεται σε μια κατάσταση υπέρθεσης, κατά τη διάρκεια της δράσης του, το πλάτος πιθανότητας αναστρέφεται $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \rightarrow \beta |0\rangle + \alpha |1\rangle$ ή με τη μορφή μήτρας έχουμε:

$$\sigma_x \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Και αντιστρόφως

$$\sigma_x \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$



Εικόνα 2.9: Αναπαράσταση γραφήματος 3 διαστάσεων με βάση ενός qubit σε λειτουργία πύλης NOT GATE.

Πηγή:https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/216/7/%CE%9A%CE%92%CE%91%CE%9D%CE%A4%CE%99%CE%9A%CE%97_%CE%A5%CE%A0%CE%9F%CE%9B%CE%9F%CE%93%CE%99%CE%A3%CE%A4%CE%99%CE%9A%CE%97_144.pdf

Το γράφημα ράβδων (3 διαστάσεις), αντιπροσωπεύει την πιθανότητα εκτίμησης των καταστάσεων βάσης ενός qubit λόγω της λειτουργίας NOT Gate.

Τώρα, δίνουμε ένα παράδειγμα με βασικές καταστάσεις $|0\rangle$ και $|1\rangle$. Με την επενέργεια σ_x σε καθένα από αυτά παίρνουμε (Ragestari & Nabi, n.d.):

$$\sigma_x |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

$$\sigma_x |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \quad (2.9).$$

Υπάρχουν ορισμένες ιδιότητες της πύλης NOT ως εξής (Quantum Future, 2021):

$$\langle 0 | \sigma_x | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 1 | \sigma_x | 1 \rangle = 0$$

$$\sigma_x \cdot \sigma_x = I$$

Κατά συνέπεια, ο πίνακας αλήθειας για μονό-κβαντική πύλη NOT δίνεται στον πίνακα:

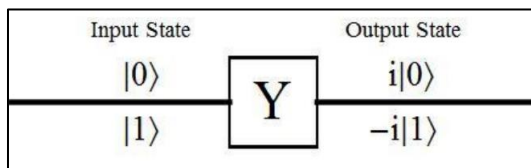
Πίνακας αλήθειας για την πύλη Pauli X

Είσοδος	Έξοδος
$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$	$\beta 0\rangle + \alpha 1\rangle$
0	1
1	0

Πίνακας 2-2: Πίνακας αληθείας Pauli-X.

Πύλη Pauli Y

Η Pauli Y-Gate (Rosner & Fermi, 2011) είναι ένας άλλος τελεστής μήτρας (matrix) Pauli, ο οποίος αντιπροσωπεύεται γραφικά από το σχήμα



Εικόνα 2.10: Το σύμβολο της κβαντικής πύλης Pauli-Y.

Πηγή: <https://eclass.upatras.gr/modules/document/file.php/EE742/Open%20Courses/17.QuantumGates.pdf>

Επίσης, ο πίνακας μπορεί να ληφθεί από τον τελεστή:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= (|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|)e^{i\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \otimes (0 \quad -i) + \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \otimes (i \quad 0) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Όταν εφαρμόζεται σε μια κατάσταση υπέρθεσης, κατά τη διάρκεια της δράσης του, το πλάτος πιθανότητας αναστρέφεται $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ σε $\beta |0\rangle + i\alpha |1\rangle$ ή με τη μορφή μήτρας έχουμε:

$$\sigma_y \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\beta \\ i\alpha \end{pmatrix} \text{ and } \textit{vise versa} \sigma_y \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\alpha \\ i\beta \end{pmatrix} \tag{2.11}.$$

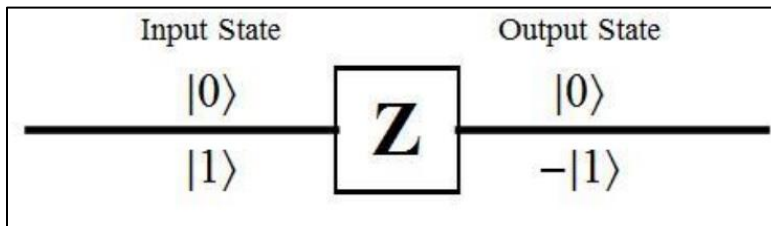
Πίνακας αλήθειας για Pauli Y - πύλη

Είσοδος	Έξοδος
$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$	$-i\beta 0\rangle + i\alpha 1\rangle$
$ 0\rangle$	$i 1\rangle$
$ 1\rangle$	$-i 0\rangle$

Πίνακας 2-3: Πίνακας αληθείας Pauli-Y.

Z - Πύλη Pauli

Ο τρίτος και ο τελευταίος πίνακας Pauli είναι η πύλη Z (Z - Gate) (Chow, 2010), που γραφικά αντιπροσωπεύεται από το σχήμα:



Εικόνα 2.11: Το σύμβολο της κβαντικής πύλης Pauli-Z.

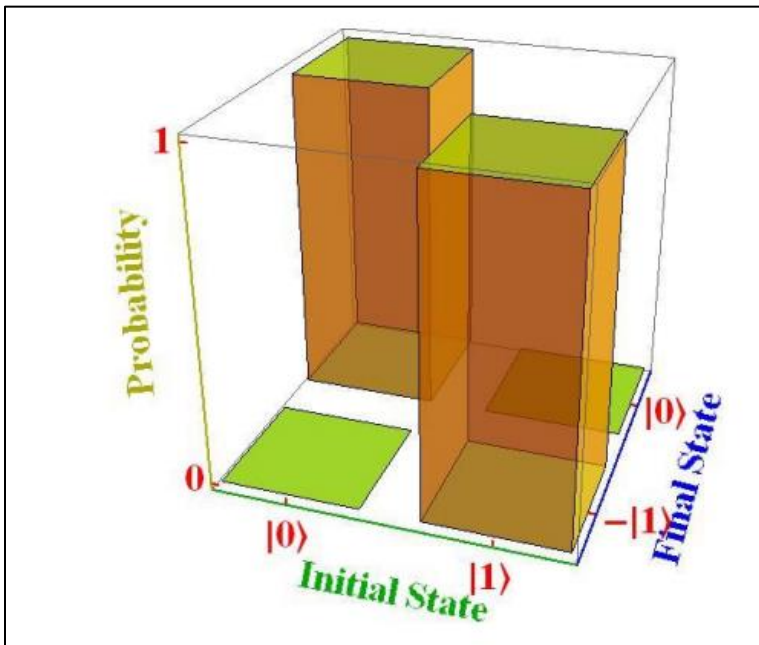
Πηγή: <https://eclass.upatras.gr/modules/document/file.php/EE742/Open%20Courses/17.QuantumGates.pdf>

Και μπορεί κανείς να πάρει τον πίνακα της πύλης χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο τελεστή που αποτελείται από καταστάσεις βάσης ($|0\rangle$ και $|1\rangle$) (Rosner & Fermi, 2011):

$$\begin{aligned}\sigma_z &= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes (1 \ 0) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (0 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.12}.$$

Η ενέργεια υπέρθεσης σε ένα qubit είναι:

$$\sigma_z(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)\tag{2.13}.$$



Εικόνα 2.12: Αναπαράσταση γραφήματος 3 διαστάσεων με βάση ενός qubit σε λειτουργία πύλης Pauli-Z.

Πηγή: https://eclass.upatras.gr/modules/course_metadata/opencourses.php?fc=15

Το γράφημα ράβδων (3 διαστάσεις), αντιπροσωπεύει την πιθανότητα μετάβασης καταστάσεων βάσης ενός qubit λόγω της λειτουργίας πύλης Pauli-Z.

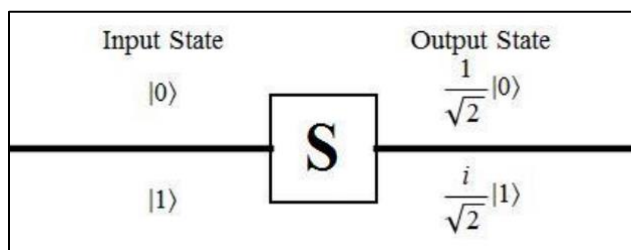
Ο πίνακας αλήθειας που αποτελείται από όλες τις πιθανές εισόδους και εξόδους εμφανίζεται στον πίνακα:

Είσοδος	Έξοδος
$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$	$\alpha 0\rangle - \beta 1\rangle$
0	0
1	-1

Πίνακας 2-4: Πίνακας αληθείας Pauli-Z.

Πύλη μετατόπισης φάσης (Phase Shift Gate)

Το γραφικό σύμβολο για την πύλη μετατόπισης φάσης (Phase Shift Gate) (Chow, 2010) έχει σχήμα με γραμμή και τετράγωνο που φέρει την ετικέτα "S":



Εικόνα 2.13: Το σύμβολο της κβαντικής πύλης μετατόπισης φάσης.

Πηγή:https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/216/7/%CE%9A%CE%92%CE%91%CE%9D%CE%A4%CE%99%CE%9A%CE%97_%CE%A5%CE%A0%CE%9F%CE%9B%CE%9F%CE%93%CE%99%CE%A3%CE%A4%CE%99%CE%9A%CE%97_144.pdf

Η γενική μορφή της πύλης μετατόπισης φάσης είναι ως ο παρακάτω πίνακας

(Tsampardoukas, 2011):

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \quad (2.14).$$

Η ενέργεια στις καταστάσεις βάσεων ($|0\rangle$ και $|1\rangle$) αλλάζει μόνο την $|1\rangle$ κατάσταση κατά μια φάση ($e^{i\theta}$) όπως μπορούμε να δούμε:

$$|0\rangle \rightarrow |0\rangle \ \& \ |1\rangle \rightarrow e^{i\theta}|1\rangle \quad (2.15)$$

Και η δράση του σε ένα ενιαίο qubit σε υπέρθεση γίνεται:

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow \alpha|0\rangle + \beta e^{i\theta} |1\rangle \quad (2.16).$$

Η πραγματοποίηση έγινε με το πείραμα Quantum electrodynamics (QED) :

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Όπως μπορούμε να δούμε, είναι μια χωρική μορφή του τελεστή μετατόπισης φάσης, και λαμβάνεται όταν ($\theta = \pi / 2, 5\pi / 2, 9\pi / 2 \dots$ κ.λπ.).

Παρακάτω παρουσιάζεται ο πίνακας αλήθειας για κάθε κβαντική πληροφορία εισόδου και εξόδου με τη μορφή ενός qubit:

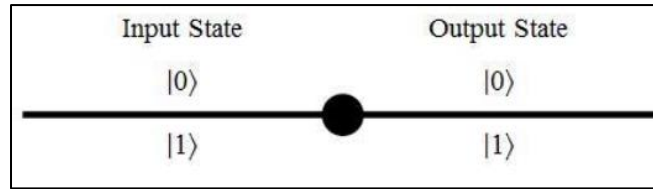
Πίνακας αλήθειας για Phase shift gate

Είσοδος	Έξοδος
$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$	$\alpha 0\rangle + \beta e^{i\theta} 1\rangle$
0	$\frac{1}{\sqrt{2}} 0\rangle$
1	$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\theta} 1\rangle$

Πίνακας 2-5: Πίνακας αληθείας μετατόπισης φάσης.

Διαχειριστής ταυτότητας

Γραφικά αντιπροσωπεύεται στο σχήμα:



Εικόνα 2.14: Αντιπροσώπευση του διαχειριστή ταυτότητας.

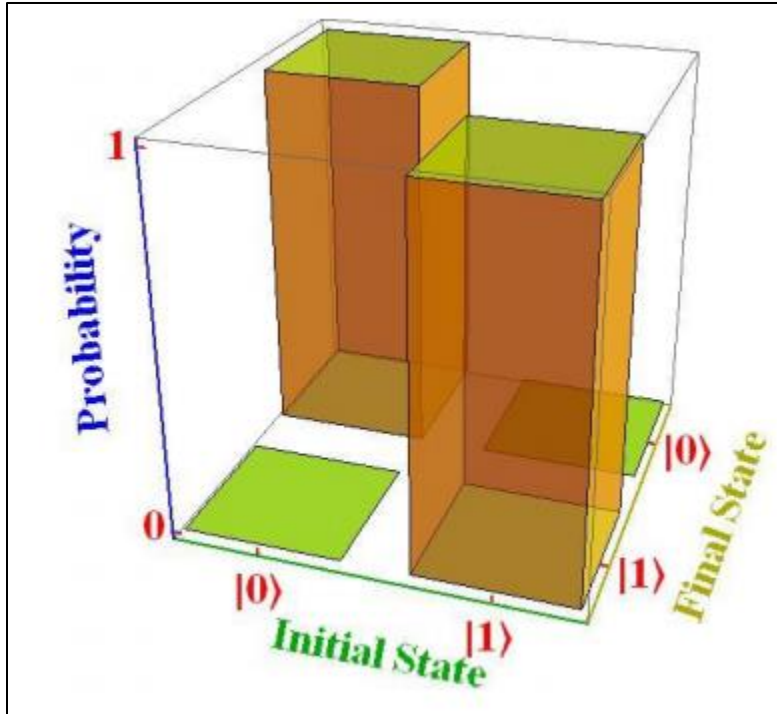
Πηγή: https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/216/7/%CE%9ACE%92CE%91CE%9DCE%A4CE%99CE%9ACE%97_%CE%A5CE%A0CE%9FCE%9BCE%9FCE%93CE%99CE%A3CE%A4CE%99CE%9ACE%97_144.pdf

Ο τελεστής για ένα (2x2) πίνακα ταυτότητας αντιπροσωπεύεται στην εξίσωση:

$$\begin{aligned}\sigma_0 = I &= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.17}.$$

Όταν εφαρμόζεται σε μια κατάσταση υπέρθεσης, κατά τη διάρκεια της δράσης της, η κατάσταση του qubit, παραμένει σταθερή.

Το γράφημα ράβδων (3 διαστάσεις), αντιπροσωπεύει τη λειτουργία μήτρας ταυτότητας 2×2 .



Εικόνα 2.15: Αναπαράσταση γραφήματος 3 διαστάσεων με βάση τη λειτουργία μήτρας 2×2 .

Πηγή: https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/216/7/%CE%9A%CE%92%CE%91%CE%9D%CE%A4%CE%99%CE%9A%CE%97_%CE%A5%CE%A0%CE%9F%CE%9B%CE%9F%CE%93%CE%99%CE%A3%CE%A4%CE%99%CE%9A%CE%97_144.pdf

Ο πίνακας αλήθειας για τον τελεστή ταυτότητας (2×2) με μία είσοδο και μία έξοδο έχει δοθεί ως ο παρακάτω πίνακας:

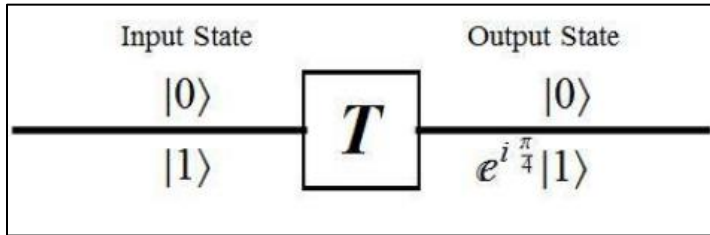
Πίνακας αλήθειας για την ταυτότητα

Είσοδος	Έξοδος
$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$	$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$
0	0
1	1

Πίνακας 2-6: Πίνακας αληθείας διαχειριστή ταυτότητας.

Πύλη T (T- Gate)

Γραφικό σχήμα της πύλης T (T – Gate) που αντιπροσωπεύεται από το σχήμα:



Εικόνα 2.16: Το σύμβολο της κβαντικής πύλης T.

Πηγή: https://eclass.upatras.gr/modules/course_metadata/opencourses.php?fc=15

Τώρα, χρησιμοποιώντας τις καταστάσεις κβαντικής υπολογιστικής βάσης ($|0\rangle$ και $|1\rangle$) μπορούμε να κατασκευάσουμε την αναπαράσταση μήτρας της πύλης:

$$T = |0\rangle\langle 0| + e^{i\frac{\pi}{4}}|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \quad (2.18).$$

Το τετράγωνο της πύλης T είναι ίσο με την πύλη φάσης ($T = \sqrt{S}$).

Ο πίνακας αλήθειας που μας δείχνει τη δράση του τελεστή στις καταστάσεις εισόδου για να πάρει μια νέα κατάσταση ως έξοδο, περιλαμβάνεται στον πίνακα

Είσοδος	Έξοδος
$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$	$\alpha 0\rangle + \beta e^{i\frac{\pi}{4}} 1\rangle$
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
$ 1\rangle$	$e^{i\frac{\pi}{4}} 1\rangle$

Πίνακας 2-7: Πίνακας αληθείας πύλης T.

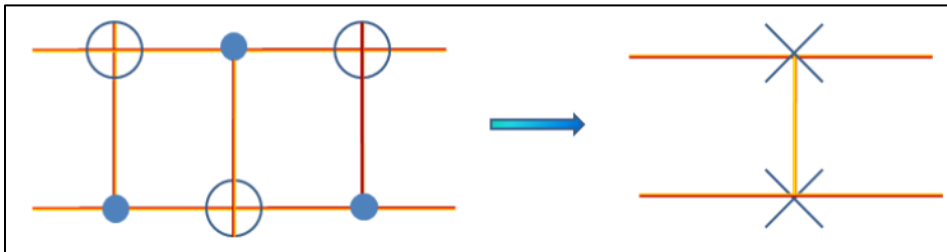
2.3.2. Η κβαντική δρώντας σε δύο qubits.

Πύλη Εναλλαγής

Η πύλη εναλλαγής, εναλλάσσει δύο qubits. Όσον αφορά τη βάση $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$, αναπαρίσταται από την ακόλουθη μήτρα (O'Brien, 2007):

Input State	Output State
$ 00\rangle$	$ 00\rangle$
$ 01\rangle$	$ 10\rangle$
$ 10\rangle$	$ 01\rangle$
$ 11\rangle$	$ 11\rangle$

Επίσης, το γραφικό σύμβολο της πύλης εναλλαγής είναι όπως φαίνεται παρακάτω:



Και η αναπαράσταση του πίνακα είναι

$$U_{AWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Μπορούμε να αποδείξουμε την εξίσωση ως εξής:

$$\begin{aligned} U_{AWAP} &= |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 11| \\ &= |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.19).$$

Όταν εφαρμόζεται σε δύο qubit με παρόμοια κατάσταση βάσης ($|11\rangle$ ή $|00\rangle$), δεν αλλάζει, διαφορετικά η πύλη ως τελεστής ανταλλάσσει 0 έως 1. (Tsampardoukas, 2011).

Εμφανίζεται ως εξής:

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle, \quad |01\rangle \rightarrow |10\rangle, \quad |10\rangle \rightarrow |01\rangle, \quad |11\rangle \rightarrow |11\rangle \quad (2.20).$$

Και για δύο qubit στην υπέρθεση έχουμε:

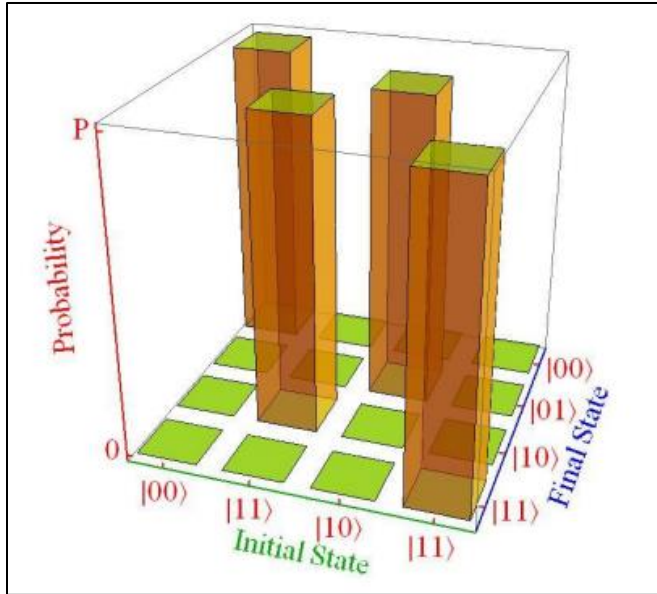
$$\alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle \rightarrow \alpha|00\rangle + \gamma|01\rangle + \beta|10\rangle + \delta|11\rangle \quad (2.21).$$

Η οποιαδήποτε κατάσταση:

$$\text{SWAP} (\gamma|01\rangle + \xi|10\rangle) = \text{SWAP} \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ \xi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix} = \xi|01\rangle + \gamma|10\rangle$$

$$\text{SWAP} (\gamma|00\rangle + \xi|11\rangle) = \text{SWAP} \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ 0 \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ 0 \\ \xi \end{pmatrix} = \gamma|00\rangle + \xi|11\rangle$$

Το γράφημα ράβδων (3 διαστάσεις), αντιπροσωπεύει την πιθανότητα εκτίμησης των καταστάσεων βάσης δύο qubit λόγω της λειτουργίας SWAP Gate.



Εικόνα 2.17: Αναπαράσταση γραφήματος 3 διαστάσεων με βάση τη λειτουργία SWAP GATE.

Πηγή: https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/216/7/%CE%9A%CE%92%CE%91%CE%9D%CE%A4%CE%99%CE%9A%CE%97_%CE%A5%CE%A0%CE%9F%CE%9B%CE%9F%CE%93%CE%99%CE%A3%CE%A4%CE%99%CE%9A%CE%97_144.pdf

Επομένως, ο πίνακας αλήθειας δημιουργείται ως εξής:

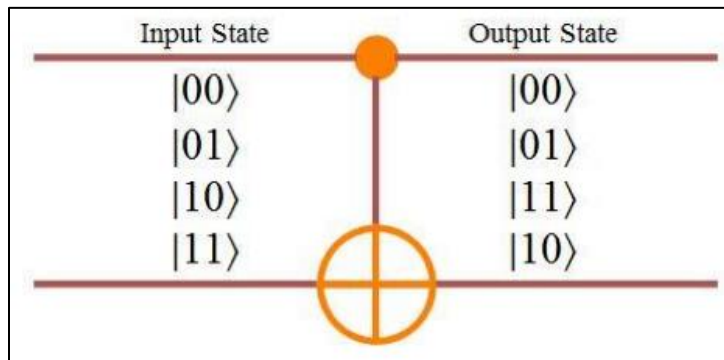
Είσοδος		Έξοδος	
Q1	Q2	Q1	Q2
0>	0>	0>	0>
0>	1>	1>	0>
1>	0>	0>	1>
1>	1>	1>	1>

Πίνακας 2-8: Πίνακας αληθείας Εναλλαγής.

Ελεγχόμενη πύλη NOT (πύλη CNOT)

Η πύλη C-NOT (Tsampardoukas, 2011) είναι μια από τις καθολικές κβαντικές πύλες (Nagy & Akl, 2006). Ο Barenco έδειξε (το 1995) ότι οποιαδήποτε κβαντική πύλη πολλαπλών qubit αποτελείται από την καθολική πύλη CNOT (Mikio et al, 2004) είναι παρόμοια με την κλασική πύλη NAND. Γραφικά αντιπροσωπεύεται από το σχήμα:

Ελεγχόμενη πύλη NOT (πύλη CNOT)



Εικόνα 2.18: Αναπαράσταση ελεγχόμενης πύλης NOT.

Πηγή: https://eclass.upatras.gr/modules/course_metadata/opencourses.php?fc=15

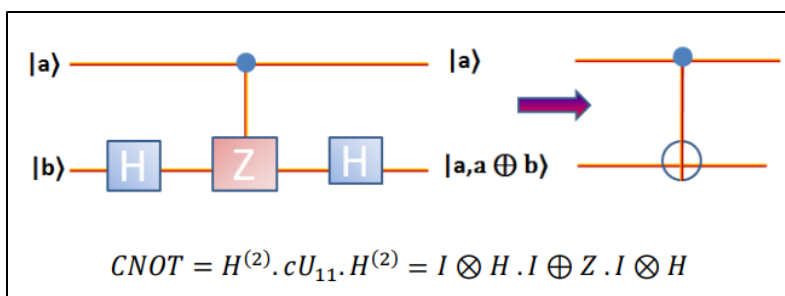
Κάθε λειτουργία n-qubit μπορεί να κατασκευαστεί με συνδυασμό αυτής της πύλης (Kumar, 2007).

Εδώ δίνουμε δύο μεθόδους για την απόκτηση του τελεστή matrix της πύλης CNOT, χρησιμοποιώντας το Wolfram Mathematica και χειροκίνητα:

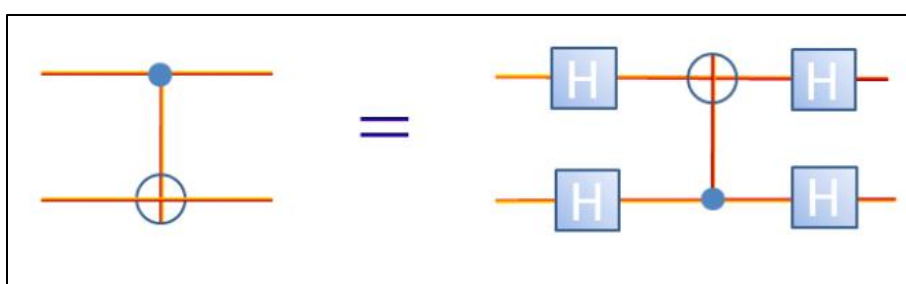
α) Η αναπαράσταση του πίνακα μπορεί να ληφθεί από τον ακόλουθο τελεστή:

$$U_{CNOT} = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

β) Η πύλη C-Not μπορεί να κατασκευαστεί από συγκεκριμένη πύλη CPhase (Chow, 2010) (Πύλη Hadamard \rightarrow πύλη δύο qubit \rightarrow πύλη Hadamard) (Garelli & Kusmaresev, 2005)



Η θέση του στόχου και των ελεγχόμενων qubit του CNOT μπορούν να ανταλλάσσονται μεταξύ τους όταν το συνδέουμε με το H και στα δύο qubit:



Εικόνα 2.19: Σύνδεση πύλης CNOT με πύλη Hadamard.

Πηγή: https://eclass.upatras.gr/modules/course_metadata/opencourses.php?fc=15

Μία από τις προϋποθέσεις για έναν τελεστή είναι να είναι μία από την καθολική κβαντική πύλη με ενιαία ειδίκευση. Επομένως, θέλουμε να ελέγξουμε εάν ο πίνακας CNOT είναι ενιαίος πίνακας ή όχι:

$$\begin{aligned}
 CNOT.CNOT &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Identity Matrix} \Rightarrow \text{Unitary Matrix}
 \end{aligned}$$

Τώρα, ενεργώντας σε βασικές καταστάσεις, μπορούμε να δούμε ότι το δεύτερο αποτέλεσμα qubit είναι συμβατό με το αποτέλεσμα μιας κλασικής πύλης XOR (Tsampardoukas, 2011)

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle, \quad |01\rangle \rightarrow |01\rangle, \quad |10\rangle \rightarrow |11\rangle, \quad |11\rangle \rightarrow |10\rangle$$

Η γενική μορφή της δράσης της έχει ως εξής:

$$CNOT |a, b\rangle = |a, a \otimes b\rangle$$

Όπου $a, b \in \{0,1\}$

Λεπτομέρεια: αλλάζει $|10\rangle$ με $|11\rangle$ και αντίστροφα (Nagy & Akl, 2010). Με άλλα λόγια, η πρώτη είσοδος μπορεί να δράσει στη δεύτερη και να την αναστρέψει εάν η τιμή της είναι 1 (Ragestari & Nabi, n.d.).

Απόδειξη:

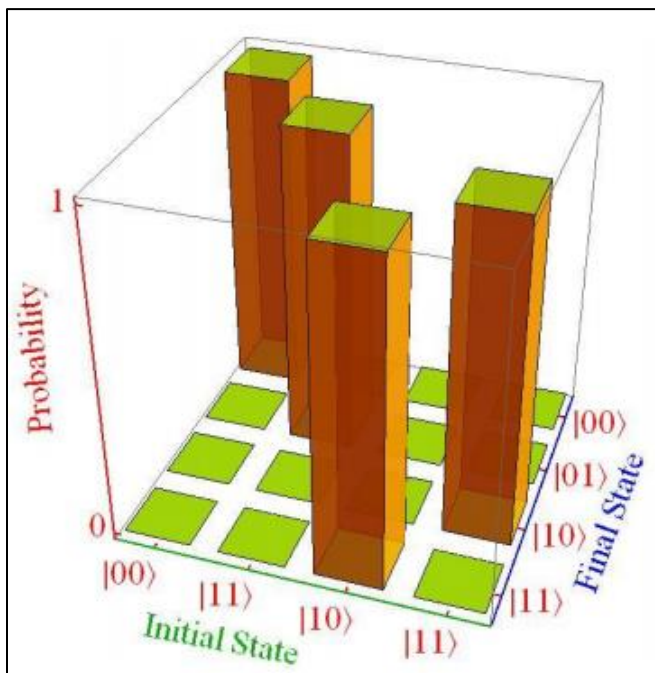
Όταν τα πρώτα qubits βρίσκονται σε 0 καταστάσεις, το δεύτερο μετά την ενεργοποίηση της πύλης CNOT δεν αλλάζει:

Για παράδειγμα, έχουμε δύο qubits σε υπέρθεση και επίσης αναστρέφουν το ένα το άλλο:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \xi|1\rangle + \gamma|0\rangle = \xi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \xi \end{pmatrix} \quad \& \quad |\Phi\rangle = \gamma|1\rangle + \xi|0\rangle \\ &= \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2.22).

Το γράφημα ράβδων (3 διαστάσεις), αντιπροσωπεύει την πιθανότητα εκτίμησης των καταστάσεων βάσης δύο qubit λόγω της λειτουργίας πύλης CNOT.



Εικόνα 2.20: Αναπαράσταση γραφήματος 3 διαστάσεων με βάση τη λειτουργία της πύλης CNOT.

Πηγή: https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/216/7/%CE%9A%CE%92%CE%91%CE%9D%CE%A4%CE%99%CE%9A%CE%97_%CE%A5%CE%A0%CE%9F%CE%9B%CE%9F%CE%93%CE%99%CE%A3%CE%A4%CE%99%CE%9A%CE%97_144.pdf

Ας υποθέσουμε, για μια πύλη CNOT δύο qubit, η κατάσταση $|0\rangle$ ως το πρώτο qubit και η κατάσταση $|\Psi\rangle$ στο δεύτερο ($|0, \Psi\rangle$):

$$\begin{aligned}
 |0\rangle \otimes |\Psi\rangle &= |0\rangle \otimes (\xi|1\rangle + \gamma|0\rangle) = \xi|0,1\rangle + \gamma|0,0\rangle \\
 &= \xi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \xi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας την πύλη CNOT, λαμβάνουμε:

$$CNOT |0, \Psi\rangle = CNOT \begin{pmatrix} \gamma \\ \xi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \xi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0, \Psi\rangle$$

Όπως μπορούμε να δούμε η κατάσταση $|0, \Psi\rangle$ παραμένει σταθερή χωρίς καμία αλλαγή.

Ο πίνακας αλήθειας για αυτήν την καθολική κβαντική πύλη έχει ως εξής:

Είσοδος		Έξοδος	
Control	Target	Control	Target
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0

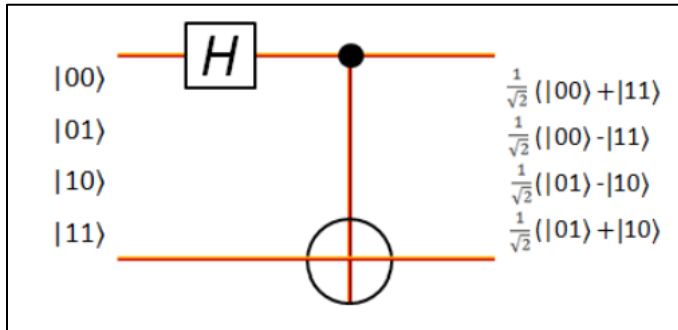
Πίνακας 2-9: Πίνακας αληθείας ελεγχόμενης πύλης NOT.

Κατασκευή καταστάσεων Bell (Bell States)

Μπορούμε να κατασκευάσουμε τις εμπλεγμένες καταστάσεις Bell:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \text{ and } \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \quad (2.23).$$

χρησιμοποιώντας μια πύλη Hadamard που βρίσκεται στην πρώτη κατάσταση qubit και την πύλη CNOT στην επόμενη από αυτήν:



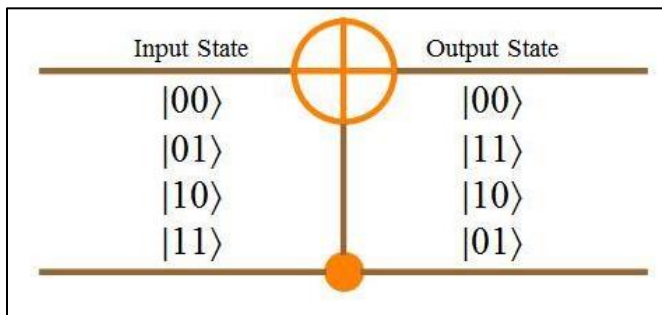
Εικόνα 2.21: Αναπαράσταση κατασκευής καταστάσεων Bell States.

Πηγή: https://eclass.upatras.gr/modules/course_metadata/opencourses.php?fc=15

Πύλη TCNOT

Η πύλη TCNOT (Knill et al, 2002) είναι μια άλλη ενιαία κβαντική πύλη που φαίνεται γραφικά στο σχήμα, η θέση του ελέγχου και του στόχου ανταλλάσσονται μεταξύ τους (ο στόχος βρίσκεται στην πρώτη και ελεγχόμενη κβαντική πύλη στο δεύτερο):

Πύλη TCNOT.



Εικόνα 2.22: Αναπαράσταση πύλης TCNOT.

Πηγή: https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/216/7/%CE%9A%CE%92%CE%91%CE%9D%CE%A4%CE%99%CE%9A%CE%97_%CE%A5%CE%A0%CE%9F%CE%9B%CE%9F%CE%93%CE%99%CE%A3%CE%A4%CE

Η συνοχή της δομής είναι ίση με την πύλη CNOT αλλά, επειδή το στοιχείο του έχει διαφορετική θέση, οπότε η δράση του είναι διαφορετική.

$$TCNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Κάποιος μπορεί να βρει την αναπαράσταση μήτρας της πύλης TCNOT, ακολουθώντας μαθηματικούς τρόπους:

1- Το πρώτο έχει ως εξής:

$$U_{CNOT} = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 11| + |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 01| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

2- Η πύλη TCNOT παρόμοια με την πύλη CNOT μπορεί να κατασκευαστεί από συγκεκριμένη πύλη CPhase:

(Πύλη Hadamard → πύλη δύο_qubit → πύλη Hadamard)

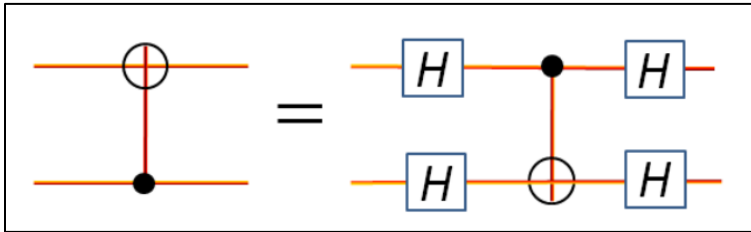
$CNOT = H^{(1)} \cdot cU_{11} \cdot H^{(1)} = H \otimes I \cdot I \oplus Z \cdot H \otimes I$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.24).$$

Η θέση του στόχου και των ελεγχόμενων qubit του TCNOT μπορούν επίσης να ανταλλάσσονται μεταξύ τους όταν το συνδέουμε με το H και στα δύο qubits:



Σε γενικές γραμμές, η δράση, παρόμοια με την πύλη CNOT, κάνει μια αλλαγή στην έξοδο κβαντικής πύλης στόχου και το δεύτερο qubit, ελεγχόμενη κβαντική πύλη, χωρίς αλλαγή. Αλλά, λόγω των διαφορών στη θέση των εξαρτημάτων, οι έξοδοι θα είναι διαφορετικές από την πύλη CNOT:

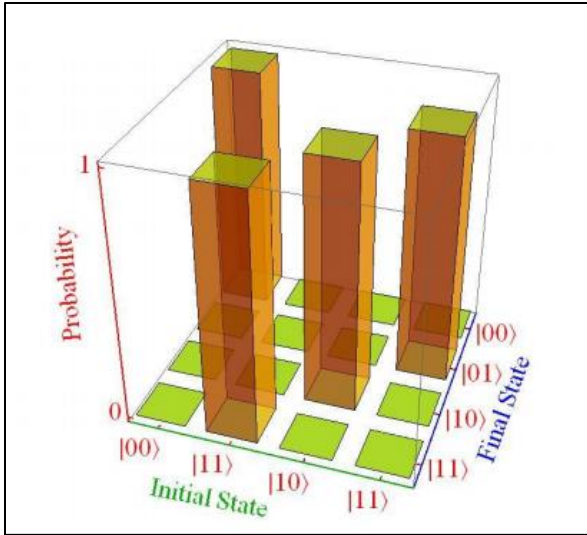
$$TCNOT|a, b\rangle = |a \otimes b, b\rangle, \text{ where } a, b \in \{0,1\}$$

$$\begin{aligned} TCNOT|00\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |00\rangle \\ TCNOT|01\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |11\rangle \\ TCNOT|10\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |10\rangle \\ TCNOT|11\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |01\rangle \end{aligned}$$

(2.25).

Από τα αποτελέσματα, μπορούμε να καταλάβουμε ότι η κβαντική πύλη αναστρέφει το πρώτο qubit όταν η δεύτερη βρίσκεται στην κατάσταση $|1\rangle$.

Το γράφημα ράβδων (3 διαστάσεις), αντιπροσωπεύει την πιθανότητα εκτίμησης των καταστάσεων βάσης δύο qubit λόγω της λειτουργίας πύλης TCNOT.



Εικόνα 2.23: Αναπαράσταση γραφήματος 3 διαστάσεων με βάση τη λειτουργία της πύλης TCNOT.

Πηγή: <https://eclass.upatras.gr/courses/EE742/>

Όπως και η άλλη κβαντική πύλη, η πύλη TCNOT για να είναι χρήσιμη στον κβαντικό υπολογισμό πρέπει να περάσει την ενιαία κατάσταση:

$$\begin{aligned}
 TCNOT.TCNOT &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \text{Identity Matrix} \Rightarrow \text{Unitary matrix}
 \end{aligned}
 \tag{2.26}.$$

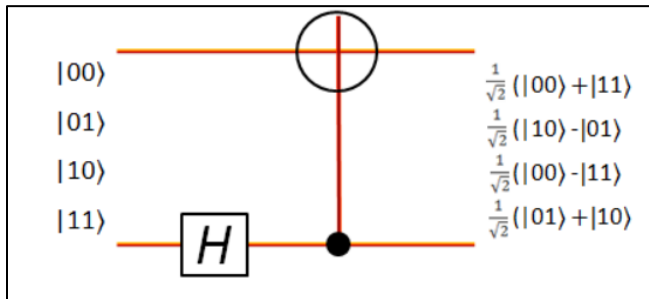
Ο πίνακας αλήθειας για αυτήν την καθολική κβαντική πύλη εμφανίζεται στον παρακάτω πίνακα:

Πύλη TCNOT.

Είσοδος		Έξοδος	
Target	Control	Target	Control
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	1

Πίνακας 2-10: Πίνακας αληθείας πύλης TCNOT.

Σε παρόμοια με την πύλη CNOT μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μαζί την πύλη TCNOT και την πύλη Hadamard για να δημιουργήσουμε καταστάσεις Bell. Παρακάτω παρουσιάζεται το σχήμα του κυκλώματος στο οποίο εμφανίζεται η θέση του συστατικού και η μαθηματική μέθοδος:



Εικόνα 2.24: Δημιουργία κατάστασης Bell με την χρήση πύλης TCNOT και πύλη Hadamard.

Πύλη G (G-Gate)

Η πύλη G (G-Gate) (Garelli & Kusmartsev, 2005) αποτελεί μια άλλη κβαντική κατάσταση δύο qubit η οποία εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 G &= |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + e^{i\theta}(|11\rangle\langle 11|) \\
 &= |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0| + e^{i\theta}(|1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1|) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \quad (2.27).
 \end{aligned}$$

Επίσης, το όνομα της πύλης αλλάζει σε π πύλη. Λαμβάνοντας την τιμή ($\pm \pi$) αντί του θ . Όταν αυτή η κβαντική πύλη ενεργεί σε κάθε κατάσταση κβαντικών βάσεων δύο qubit, αφήνει την κατάσταση χωρίς αλλαγή, απλά η $|11\rangle$ αλλάζει σε $e^{i\theta} |11\rangle$:

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle, |01\rangle \rightarrow |01\rangle, |10\rangle \rightarrow |10\rangle, |11\rangle \rightarrow e^{i\theta}|11\rangle$$

Σε γενικές γραμμές, η δράση του στη βάση αναφέρει:

$$|00\rangle \rightarrow e^{i\varphi_{00}}|00\rangle, |01\rangle \rightarrow e^{i\varphi_{01}}|01\rangle, |10\rangle \rightarrow e^{i\varphi_{10}}|10\rangle, |11\rangle \rightarrow e^{i\varphi_{11}}|11\rangle$$

όπου:

$$\varphi_{00}, \varphi_{01}, \varphi_{10} = 0 \text{ \& } \varphi_{11} = \pm\pi$$

Τέλος, ο πίνακας αλήθειας του G-gate λαμβάνεται ως ο πίνακας:

G-Gate (π-πύλη).

Είσοδος		Έξοδος	
0⟩	0⟩	0⟩	0⟩
0⟩	1⟩	0⟩	1⟩
1⟩	0⟩	1⟩	0⟩
1⟩	1⟩	1⟩	1⟩

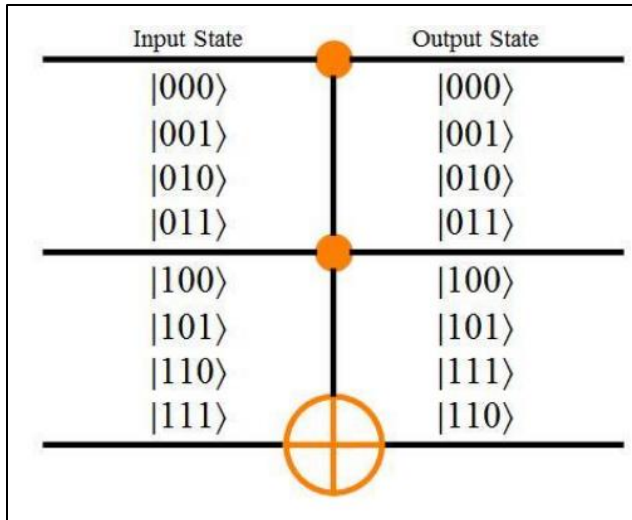
Πίνακας 2-11: Πίνακας αληθείας πύλης G-gate.

2.3.3 Κβαντικές Πύλες που δρουν σε 3 qubit.

Πύλη Toffoli (CCNOT)

Έχει τρεις εισόδους και τρεις εξόδους, δύο από αυτές είναι ελεγχόμενα qubit χωρίς καμία χειραγώγηση στην κατάσταση εισόδου και η άλλη είναι στόχος που αναστρέφεται από τα άλλα qubits εάν και τα δύο έχουν οριστεί |1⟩ και εάν ένα ή και τα δύο είναι |0⟩ μένει μόνο (Berthiaume, n.d.). Γραφικά αντιπροσωπεύεται από το σχήμα:

Πύλη Toffoli (CCNOT).



Εικόνα 2.25: Αναπαράσταση πύλης Toffoli.

Πηγή:<https://eclass.upatras.gr/modules/document/index.php?course=EE742&openDir=/550968288idn>

Η αναπαράσταση μήτρας μπορεί να παραχθεί από τον ακόλουθο τελεστή (Tsampardoukas, 2011):

$$\begin{aligned}
Toffoli &= |000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011| + |100\rangle\langle 100| \\
&\quad + |101\rangle\langle 101| + |110\rangle\langle 111| + |111\rangle\langle 110| \\
&= |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| \\
&\quad \otimes |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \\
&\quad \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| \\
&\quad \otimes |1\rangle\langle 0|
\end{aligned}$$

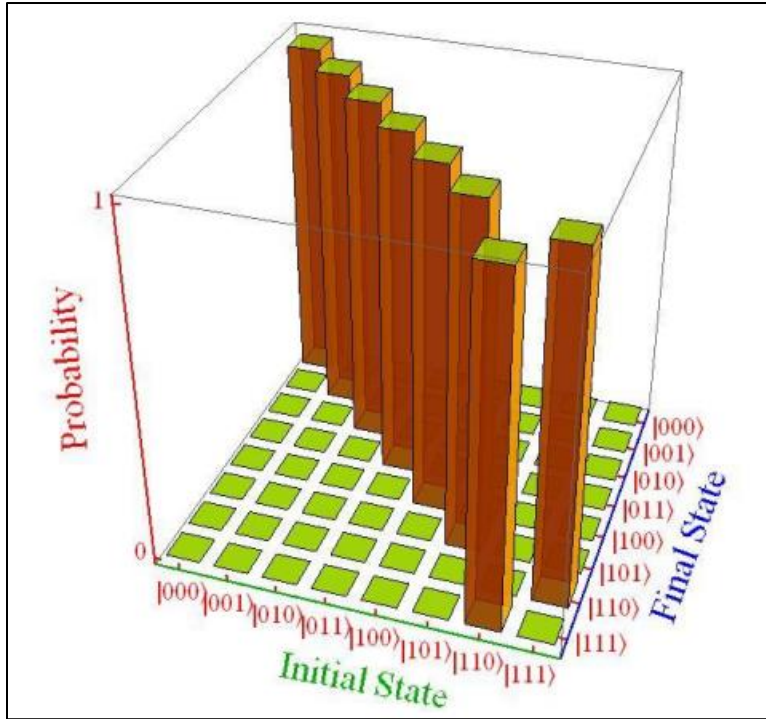
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Η πύλη CCNOT (Toffoli) τελεί το τρίτο qubit σε κατάσταση qubit τριών εισόδων, όταν τα δύο πρώτα qubit βρίσκονται σε 1 κατάσταση, εκείνη τη στιγμή ο τελεστής γυρίζει το τρίτο, όπως μπορούμε να δούμε στα παρακάτω:

$$\begin{aligned}
|000\rangle &\rightarrow |000\rangle, & |001\rangle &\rightarrow |001\rangle, & |010\rangle &\rightarrow |010\rangle, & |011\rangle &\rightarrow |011\rangle, \\
|100\rangle &\rightarrow |100\rangle, & |101\rangle &\rightarrow |101\rangle, & |110\rangle &\rightarrow |111\rangle, & |111\rangle &\rightarrow |110\rangle
\end{aligned}$$

Λεπτομέρεια: ανταλλάσσεται $|110\rangle$ με $|111\rangle$ και αντίστροφα.

Το γράφημα ράβδων (3 διαστάσεις), αντιπροσωπεύει την πιθανότητα εκτίμησης των καταστάσεων βάσης τριών qubit λόγω της λειτουργίας της πύλης Toffoli.



Εικόνα 2.26: Αναπαράσταση γραφήματος 3 διαστάσεων με βάση τη λειτουργία της πύλης Toffoli.

Πηγή: <https://eclass.upatras.gr/modules/document/index.php?course=EE742&openDir=/550968288idn>

Ο πίνακας Αλήθεια για την πύλη Controlled-Controlled-NOT είναι όπως ο πίνακας:

Πύλη Toffoli (CCNOT)

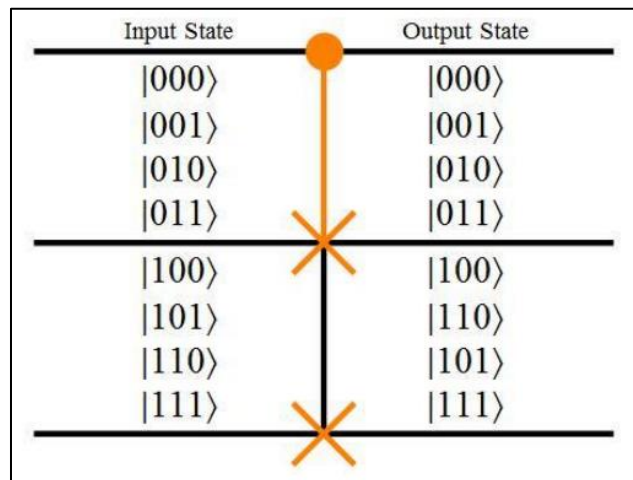
Είσοδος			Έξοδος		
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0

Πίνακας 2-12: Πίνακας αληθείας πύλης Toffoli.

Πύλη Fredkin (Πύλη CSWAP)

Το επιπλέον qubit χρησιμοποιείται σαν έλεγχος για την λειτουργία της εναλλαγής, δηλαδή όταν είναι στην κατάσταση $|1\rangle$, τα δύο qubits στόχοι εναλλάσσουν καταστάσεις. Συμβολίζεται με Fred ή CSWAP και περιγράφεται από το μητρώο:

$$CSWAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Εικόνα 2.27: Αναπαράσταση πύλης Fredkin.

Η τελική κβαντική πύλη που εξετάζεται εδώ, είναι η κβαντική πύλη Fredkin, η οποία έχει τρεις εισόδους και τρεις εξόδους. Η αναπαράσταση του πίνακα είναι (Tsampardoukas, 2011):

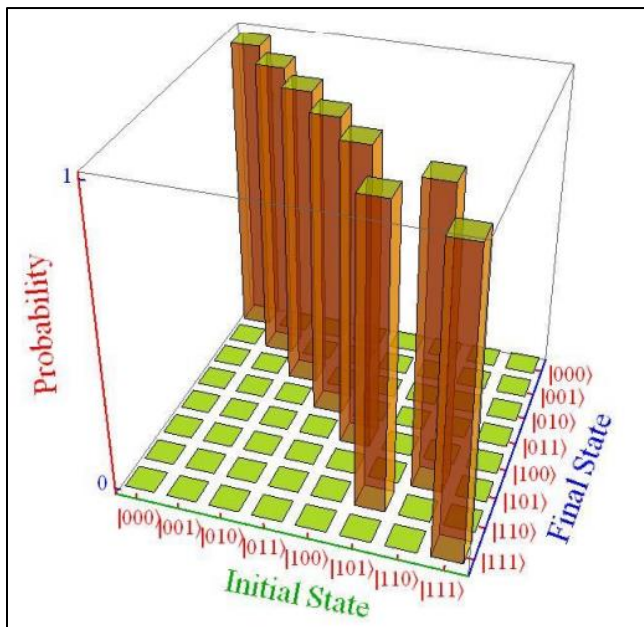
$$\begin{aligned}
\text{Fredkin} &= |000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011| \\
&\quad + |100\rangle\langle 100| + |101\rangle\langle 110| + |110\rangle\langle 101| + |111\rangle\langle 111| \\
&= |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 0| \\
&\quad \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1| \\
&\quad \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \\
&\quad \otimes |1\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1|
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Λεπτομέρεια: Η δράση του στα qubit γίνεται ανταλλαγή $|101\rangle$ με $|110\rangle$ και αντίστροφα:

$$\begin{aligned}
|000\rangle &\rightarrow |000\rangle, |001\rangle \rightarrow |001\rangle, |010\rangle \rightarrow |010\rangle, |011\rangle \rightarrow |011\rangle, \\
|100\rangle &\rightarrow |100\rangle, |101\rangle \rightarrow |110\rangle, |110\rangle \rightarrow |101\rangle, |111\rangle \rightarrow |111\rangle
\end{aligned}$$

Το γράφημα ράβδων (τρεις διαστάσεις), αντιπροσωπεύει την πιθανότητα εκτίμησης των καταστάσεων βάσης τριών qubit, λόγω της λειτουργίας του Fredkin Gate.



Εικόνα 2.28: Αναπαράσταση γραφήματος 3 διαστάσεων με βάση τη λειτουργία της πύλης Fredkin Gate.

Πηγή:<https://eclass.upatras.gr/modules/document/index.php?course=EE742&openDir=/550968288idn>

Ο πίνακας αλήθειας για την κβαντική πύλη Fredkin είναι όπως ο πίνακας:

Πύλη Fredkin (Πύλη CSWAP).

Είσοδος			Έξοδος		
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Πίνακας 2-13: Πίνακας αληθείας πύλης Fredkin.

2.4 Πλεονεκτήματα & Εφαρμογές Κβαντικών Υπολογιστών

Σε σχέση με τους κλασικούς υπολογιστές, οι κβαντικοί διαθέτουν τα εξής πλεονεκτήματα (Grover L.K. 1998) :

- ✓ Μεγαλύτερη ταχύτητα.
- ✓ Μεγάλη μνήμη.
- ✓ Δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων υπολογιστικά δύσκολων.

2.5 Κβαντική Διόρθωση Σφαλμάτων

Η διόρθωση σφαλμάτων είναι απαραίτητη για τους Κβαντικούς Υπολογιστές επειδή τα συστήματα αλληλοεπιδρούν με το περιβάλλον. Αυτή η αλληλεπίδραση, όπως ειπώθηκε, μπορεί να οδηγήσει σε κατάρρευση του συστήματος και η ύπαρξη μηχανισμών για τη διόρθωσή τους για τα σφάλματα είναι απαραίτητη. Υπάρχουν δύο τύποι σφαλμάτων που μπορεί να εισαγάγει το περιβάλλον σύστημα. Η δυαδική αντιστροφή και η αποσυνοχή (discorrelation).

2.5.1 Δυαδική Αντιστροφή

Αν υποθέσουμε πως το σύστημά μας αποτελείται από ένα qubit, ένα σφάλμα μπορεί να προκύψει όμοια με ένα σφάλμα σε έναν κλασικό υπολογιστή. Αυτό το σφάλμα είναι της δυαδικής αντιστροφής.

Με τη βοήθεια κλασικών κωδικών διόρθωσης, μπορούμε να διορθώσουμε το λάθος, όπως για παράδειγμα ένας κλασικός κώδικας επανάληψης. Η δυαδική αντιστροφή είναι μια πράξη αντιστρεπτή όσον αφορά τα qubits για αυτό μπορεί και να διορθωθεί (Sarovar M., Milburn G.J. 2005)

Παράδειγμα :

$$a|0\rangle + b|1\rangle \text{ σε } a|1\rangle + b|0\rangle \quad (2.28).$$

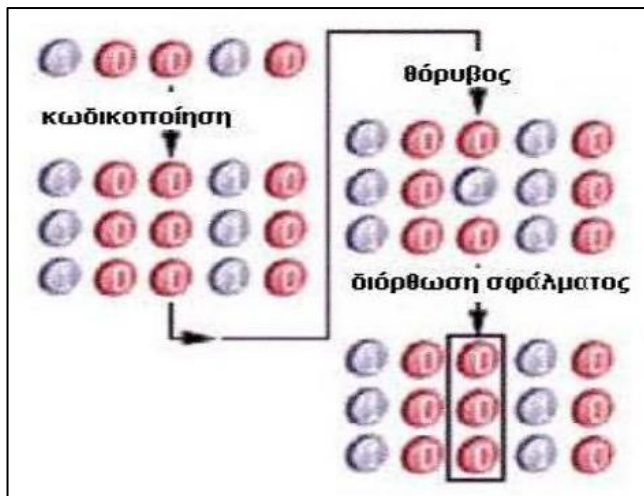
2.5.2 Αποσυνοχή

Το φαινόμενο του συσχετισμού των κβαντικών καταστάσεων, μπορεί να οδηγήσει σε σφάλματα ενός κβαντικού υπολογιστή. Η συσχέτιση έχει μελετηθεί εκτενώς στα κβαντικά οπτικά στο πλαίσιο της επικοινωνίας, δηλαδή ως μέσο για την τυχειότητα μεταξύ δύο μερών. Σε αυτό το πλαίσιο, η αποσυνοχή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μοιραστεί τη μοναδική τυχειότητα μεταξύ των μερών, συμπληρωματικά με τα συμβατικά πρωτόκολλα κβαντικής επικοινωνίας. Κάθε αλληλεπίδραση του κβαντικού υπολογιστή με το περιβάλλον, ακόμη κι αν δεν είναι θελημένη, οδηγεί στην κατάρρευση του συστήματος. Αυτό αντιστοιχεί με μέτρηση του υπολογιστή, η οποία είναι μια διαδικασία μη αντιστρέψιμη.

Αν το σύστημα είναι σε αρχική κατάσταση και ένα δεύτερο qubit μετρηθεί, το σύστημα καταρρέει. Χάνεται με αυτόν τον τρόπο, ο οποίος όπως είπαμε είναι μη αντιστρέψιμος, η πληροφορία που έχει αποθηκευτεί. Η επαναφορά ενός συστήματος που έχει καταρρεύσει είναι οριακά αδύνατη, κάνοντας την επίλυση του προβλήματος εξαιρετικά δύσκολη διεργασία (Sarovar M., Milburn G.J. 2005).

2.5.3 Κλασικοί Υπολογιστές

Σε έναν κλασικό υπολογιστή, για να περιοριστούν τα σφάλματα κάθε bit κωδικοποιείται με μια τριπλέτα όμοιων bit. Αν ένας θόρυβος αντιστρέψει ένα bit, το σφάλμα μπορεί να διορθωθεί εάν επιδιορθώσουμε το μεμονωμένο bit της τριπλέτας.



Εικόνα 2.29: Διόρθωση στους κλασικούς υπολογιστές

Πηγή: <http://physics4u.gr/blog/2012/01/21/%CE%AE-%CE%AF-%CF%8C/>

2.5.4 Κβαντικοί Υπολογιστές

Σχετικά με τους Κβαντικούς Υπολογιστές, φαίνεται αρχικά σχεδόν αδύνατο να αναπτυχθούν κώδικες για την διόρθωση κβαντικών σφαλμάτων. Αυτό συμβαίνει διότι η Κβαντική Μηχανική μας απαγορεύει να γνωρίζουμε με βεβαιότητα την άγνωστη κατάσταση ενός κβαντικού αντικειμένου.

Συνεπώς, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κώδικα της τριπλέτας όπως στους κλασικούς υπολογιστές. Δεν μπορούμε να εξετάσουμε κάθε αντίγραφο qubit χωρίς να καταστραφούν όλα τα αντίγραφα κατά την διάρκεια της εξέτασης αυτής.

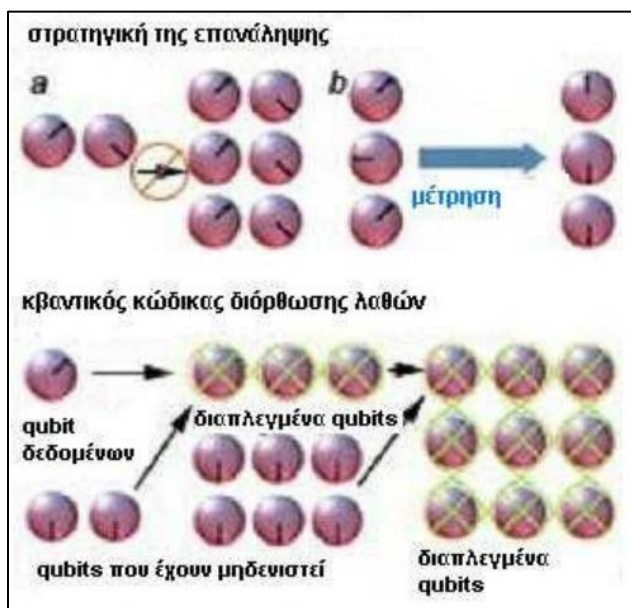
Ακόμη δυσκολότερο, είναι να δημιουργήσουμε αντίγραφα στην αρχική κατάσταση. Η Κβαντομηχανική απαγορεύει το να παρθεί ένα άγνωστο qubit και να φτιάξουμε ένα αξιόπιστο αντίγραφό του. Είναι το ίδιο αδύνατο με τη κλωνοποίηση.

Στις αρχές της δεκαετίας του 1990, διάφοροι ερευνητές υποστήριξαν πως η κβαντική διόρθωση σφαλμάτων κρίνεται αναγκαία για τους Κβαντικούς Υπολογιστές. Όμως, οι κλασικοί κώδικες δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν στον κόσμο της κβάντωσης. Κατάφεραν να αποδείξουν πως μπορούμε να διορθώσουμε τα κβαντικά σφάλματα χωρίς να γνωρίζουμε σε καμία περίπτωση τις καταστάσεις των qubits.

Κάθε τιμή παριστάνεται με ένα σύνολο qubits, όπως ακριβώς και με τον κώδικα της τριπλέτας. Αυτά (τα qubits) περνούν μέσα από ένα κύκλωμα, το οποίο αναγνωρίζει επιτυχώς ένα σφάλμα σε κάποιο qubit χωρίς όμως να «βλέπει» τις πραγματικές καταστάσεις (Chiaverini J., et al.2004).

Η προστασία των κβαντικών καταστάσεων από την αταξία, έγινε δυνατή όταν συνδυάστηκαν ιδέες από την πληροφορική και την Κβαντομηχανική. Η Διόρθωση Κβαντικών Σφαλμάτων έχει οδηγήσει σε πολλαπλές νέες επαναστατικές ιδέες.

Για παράδειγμα μπορούμε να προστατεύσουμε κβαντικά συστήματα από τον θόρυβο. Έτσι, κάποια φυσικά συστήματα μπορούν να έχουν ένα φυσικό τύπο ανοχής στον θόρυβο. Τα συστήματα αυτά, χρησιμοποιούνται στην διόρθωση κβαντικών σφαλμάτων, χωρίς να χρειαστεί ανθρώπινη παρέμβαση. Μπορούν αν επιδείξουν έτσι μεγάλη αντίσταση στην καταστροφή της υπέρθεσης των καταστάσεων (Ahn C., Wiseman H.M., Milburn G.J.,2003).



Εικόνα 2.30:Κβαντική διόρθωση σφαλμάτων

Πηγή : <http://physics4u.gr/blog/2012/01/21/%CE%AE-%CE%AF-%CF%8C/>

2.6 Κβαντικοί Υπολογισμοί

1 Δίνεται η αρχική κατάσταση των qubits που αποτελούν τον κβαντικό καταχωρητή. Υπολογίζεται το τανυστικό γινόμενο των πινάκων των καταστάσεων των qubits. Ο πίνακας που προκύπτει είναι η αρχική κατάσταση του κβαντικού καταχωρητή.

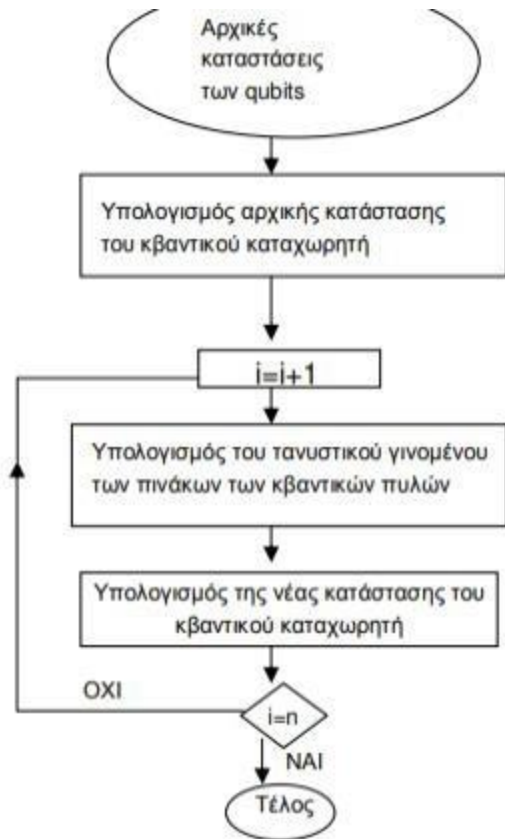
2 Υπολογίζεται το τανυστικό γινόμενο των πινάκων που περιγράφουν τις Κβαντικές Πύλες που δρουν στο επόμενο βήμα του κβαντικού υπολογισμού.

3 Ο πίνακας που προκύπτει από το τανυστικό γινόμενο των πινάκων των κβαντικών πυλών πολλαπλασιάζεται με τον πίνακα της νέας κατάστασης του κβαντικού καταχωρητή.

4 Τα 2 και 3 επαναλαμβάνονται τόσες φορές όσα και τα βήματα του κβαντικού υπολογισμού.

5 Ο πίνακας που προκύπτει από το τανυστικό γινόμενο των πινάκων των κβαντικών πυλών πολλαπλασιάζεται με τον πίνακα της νέας κατάστασης του κβαντικού καταχωρητή.

Ο πίνακας που προκύπτει από το τανυστικό γινόμενο των πινάκων των κβαντικών πυλών πολλαπλασιάζεται με τον πίνακα της νέας κατάστασης του κβαντικού καταχωρητή.



Εικόνα 2.31: Διάγραμμα εκτέλεσης των κβαντικών υπολογισμών.

Με i συμβολίζεται ο αριθμός του βήματος και με n ο συνολικός αριθμός βημάτων του κβαντικού υπολογισμού.

Πηγή: <https://eclass.upatras.gr/modules/document/index.php?course=EE742&openDir=/550968288idn>

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3⁰ – ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΒΑΝΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ & ΟΙ ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ ΤΟΥΣ

3.1 Κατασκευή Κβαντικών Υπολογιστών

Για να κατασκευαστεί ένας Κβαντικός Υπολογιστής ο οποίος θα βασίζεται στις αρχές της Κβαντομηχανικής, οι ερευνητές ακολούθησαν διάφορες τεχνολογίες, τις οποίες και θα δούμε στη συνέχεια.

3.1.1 Πυρηνικός Μαγνητικός Συντονισμός (NMR)



Εικόνα 3.1 : Nuclear magnetic resonance (NMR) spectrometer at the TU München (Φασματόμετρο Πυρηνικού Μαγνητικού Συντονισμού.).

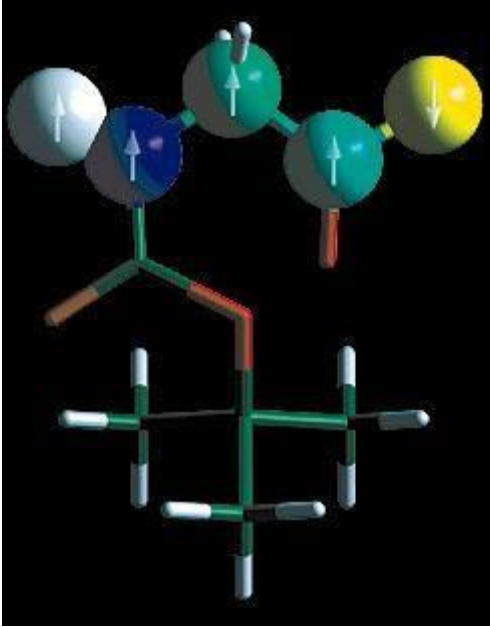
Πηγή: <http://www.org.chemie.tu-muenchen.de/glaser/qcomp.html>

Ο Πυρηνικός Μαγνητικός Συντονισμός (NMR) έχει βρει εφαρμογή στην κατασκευή Κβαντικών Υπολογιστών, εκτός των ιατρικών εφαρμογών του που ήταν έως τώρα γνωστές, καθώς και σε άλλους τομείς όπως στην Χημεία., στην Βιοχημεία, στην Φυσική Συμπύκνωση της ύλης κλπ. Η τεχνολογία NMR μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε θερμοκρασία δωματίου. Η κατασκευή Κβαντικών Υπολογιστών με αυτή τη τεχνολογία έχει αποδειχθεί μια διαδικασία σχετικά εύκολη με τη χρήση 2-3 qubits.

Η βασική ιδέα είναι πως ένας κβαντικός καταχωρητής είναι ένα μόριο το οποίο αποτελείται από 10 άτομα. Κάθε qubit αναπαρίσταται με το spin κάθε ατομικού πυρήνα στα άτομα του μορίου. Ο αριθμός των ατόμων NMR, ισούται με τον αριθμό των ατόμων σε κάθε μόριο (Valiev K.A., Kokin A.A., 1999).

Μέσω πειραμάτων NMR, οι ερευνητές κατάφεραν να αναπτύξουν βασικά εργαλεία που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πολλαπλούς τύπους μελλοντικών Κβαντικών Υπολογιστών. Μπορούν να σχεδιαστούν με αυτόν τον τύπο τεχνολογίας 2-3 qubits NMR συστήματα.

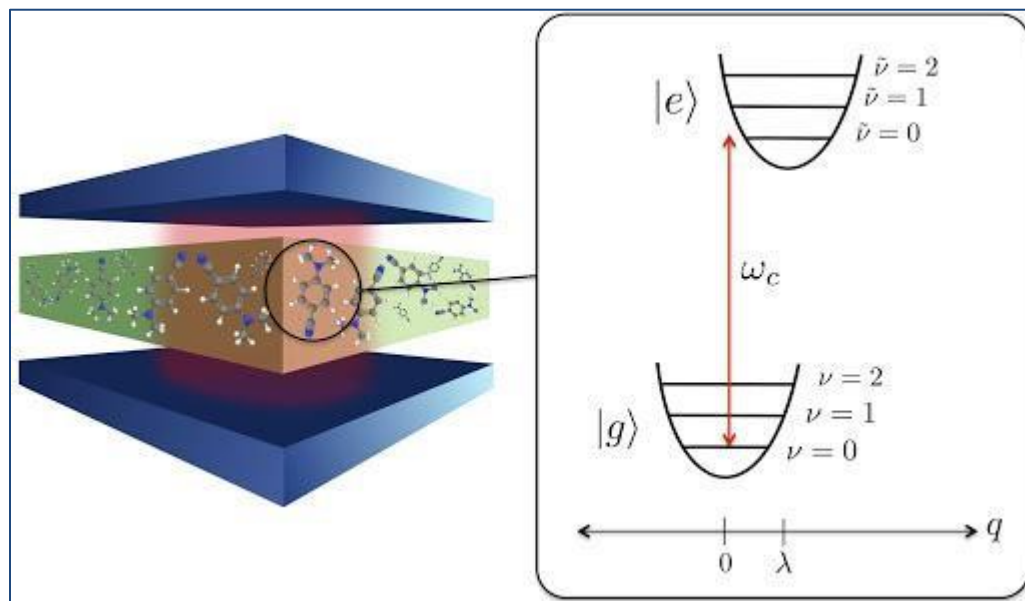
Η πιο πρόσφατη εξέλιξη είναι πως προσομοιώθηκε υπολογιστής με 7 qubit με τη χρήση ενός μορίου που αποτελείται από 7 spin πυρήνων. Το κάθε ένα από αυτά μπορεί να αλληλοεπιδρά με το άλλο, με αποτέλεσμα οι αλληλεπιδράσεις αυτές να είναι ανιχνεύσιμες σε όργανα NMR. Προφανώς υπάρχουν δυσκολίες, όπως για παράδειγμα να καταφέρουν να διαχωριστούν τα qubits σε ένα μόριο από τις χημικές τους ιδιότητες στην περίπτωση μεγάλων μορίων. Ακόμη, δύσκολο φαίνεται να γνωρίζουμε με ακρίβεια την αρχική κατάσταση. Συνεπώς, η τεχνολογία αυτή δεν μπορεί να βρει εφαρμογή σε υπολογιστές με >12 qubits. (Myers, Fahmy, Glaser, Marx 2001).



Εικόνα 3.2: *Molecular "hard ware" of the first five-qubit NMR quantum computer Preprint*

Πηγή: <http://www.org.chemie.tu-muenchen.de/glaser/qcomp.html>

3.1.2 Κοιλότητες Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής (QED)



Εικόνα 3.3: Κβαντική Ηλεκτροδυναμική με οργανικά υλικά

Πηγή: <http://fherreralab.com/research/organic-qed/>

Μια ακόμη ερευνητική κατεύθυνση για την δημιουργία Κβαντικών Υπολογιστών είναι και η χρήση κοιλότητας κβαντικής ηλεκτροδυναμικής (QED).

Η QED είναι μια θεωρία κβάντωσης του ηλεκτρομαγνητισμού που περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις της ακτινοβολίας με την ύλη. Η θεωρία αυτή είναι σχετικιστική. Οι εξισώσεις της δίνουν τις εξισώσεις της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

Η Κβαντική Ηλεκτροδυναμική υποστηρίζει πως η ανάπτυξη των ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων αποδίδεται στη εκπομπή και την απορρόφηση φωτονίων ως σωματιδίων ανταλλαγής. Αντιπροσωπεύουν διαταραχές των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων. Αντίστοιχα, τα ηλεκτρόνια μπορούν να θεωρηθούν ως διαταραχές κβαντισμένων πεδίων σε μια αντίστοιχη κατάσταση.

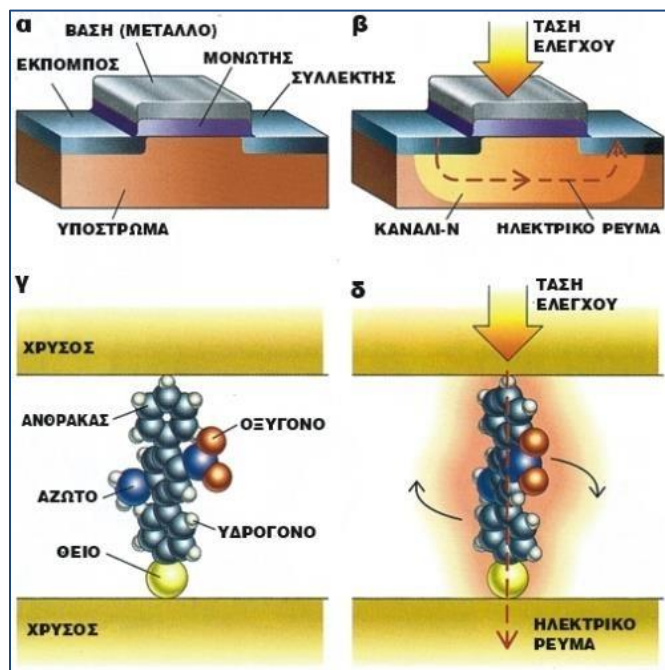
Τα φωτόνια αυτά είναι εικονικά και δεν μπορούν να φανερωθούν ή να ανιχνευθούν με

κατά κάποιον τρόπο, καθώς η ύπαρξή τους παραβιάζει την αρχή διατήρησης της ορμής. Η ανταλλαγή σωματιδίων μοιάζει με την αλληλεπίδραση, καθώς τα σωματίδια που αλληλοεπιδρούν αλλάζουν ταχύτητα και κατεύθυνση κατά την κίνηση. Ελευθερώνουν ή απορροφούν την ενέργεια ενός φωτονίου.

Τα φωτόνια εκπέμπονται επίσης σε ελεύθερη κατάσταση, συνεπώς μόνο τότε μπορούν να παρατηρηθούν. Η αλληλεπίδραση των φορτισμένων σωματιδίων συμβαίνει σε μια σειρά πολύπλοκων διαδικασιών. Μόνο ένα εικονικό φορτίο μπορεί να περιληφθεί. Σε διαδικασία δεύτερης τάξης υπάρχουν δύο φωτόνια κ.ο.κ.

Η κατασκευή Κβαντικών Υπολογιστών με αυτή τη μέθοδο, απαιτεί την παγίδευση ουδέτερων ατόμων και πόλωση φωτονίων. Η Κβαντική Πληροφορία αποθηκεύεται σε εσωτερικές καταστάσεις των ατόμων και είναι πιο εύκολο να αλληλοεπιδράσουν με τα qubits (Ruyatos J.F., Cirac J.I., Zoller P., 2000).

3.1.3 Μοριακοί Υπολογιστές**



Εικόνα 3.4 : Μοριακοί Υπολογιστές.

Πηγή: <https://www.rizospastis.gr/story.do?id=425248>.

Το μόριο της βενζενοθιόλης, που λειτουργεί σαν μοριακός αγωγός, δοκιμάστηκε μεταξύ δύο ακίδων χρυσού, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σχετικά μεγάλης έντασης ηλεκτρικό ρεύμα, που επιτρέπει να περάσει αυτό το είδος μορίου ταιριάζει με τις απαιτήσεις, ώστε οι μοριακές συσκευές να συνεργαστούν με τα συμβατικά ηλεκτρονικά συστήματα.

Ένα τρίτο μοντέλο δημιουργίας Κβαντικών Υπολογιστών, αποτελούν και οι μοριακού υπολογιστές. Έχει αναπτυχθεί μια διαδικασία η οποία βασίζεται στην κίνηση των μορίων. Διάφοροι ερευνητές έχουν καταφέρει να επιδείξουν λογικές πύλες με τη χρήση μιας στοιβάδας μορίων CO για να μπορέσουν να μεταφέρουν δεδομένα. Οι συσκευές για τις διεργασίες αυτές έχουν διαστάσεις nm (10^{-9}), μέγεθος πολύ μικρότερο από τους σημερινούς υπολογιστές.

Στα μικροσίπ πυριτίου έχει αυξηθεί σε μεγάλο βαθμό τα τελευταία χρόνια (περίπου τα τελευταία 40 χρόνια). Οι ερευνητές έχουν καταφέρει να ξεπεράσουν το πρόβλημα αυτό γενικά, με τη χρήση ενός ζεύγους χαμηλής θερμοκρασίας ηλεκτρονικών μικροσκοπίων σάρωσης, για να «κανονίσουν» ζεύγη μορίων CO σε μια επιφάνεια Cu.

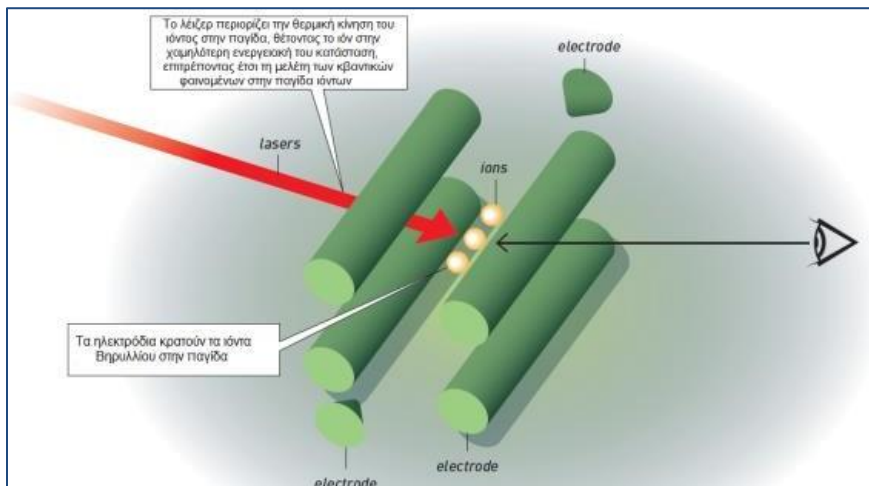
Μετακίνησαν ένα απλό μόριο CO παράλληλα με ένα από αυτά τα ζεύγη, έτσι ώστε τα 3 μόρια να σχηματίσουν ένα βέλος. Όμως ο σχηματισμός αυτός αποδείχθηκε ασταθής, καθώς αύξησε την ενέργεια του συστήματος.

Τοποθέτησαν τρεις σειρές ζευγών μορίων σε μια μορφή Y, με ένα απλό μόριο στο κεντρικό σημείο, όπου συναντώνται οι σειρές. Δύο σειρές ενεργήσαν ως είσοδοι και η τρίτη ενεργεί ως έξοδος. Εάν υπάρχει ένας καταρράκτης και στις δύο σειρές - δηλ. εάν υπάρχει ένα "1" και στις δύο εισόδους -μόρια θα πεταχτούν κατά μήκος των σειρών για να διαμορφώσουν την κεφαλή του βέλους με το απλό μόριο, που είναι ήδη στο σημείο όπου συναντώνται οι τρεις σειρές. Αυτή η κεφαλή έπειτα θα αποσυντεθεί, παράγοντας έναν καταρράκτη στην έξοδο.

Οι ερευνητές χρησιμοποίησαν μια παρόμοια ρύθμιση που κάνει την πύλη OR. Δυστυχώς οι μοριακές συσκευές καταρρακτών που έγιναν από τους ερευνητές ήταν πολύ αργές και θα μπορούσαν μόνο να χρησιμοποιηθούν για να εκτελέσουν μια απλή λειτουργία. Για να

επαναχρησιμοποίησαν τις συσκευές αυτές οι ερευνητές έπρεπε να τοποθετήσουν τα μόρια πίσω στην αρχική θέση τους χρησιμοποιώντας ένα από τα ηλεκτρονικά μικροσκόπια σάρωσης. Για να είναι χρήσιμοι, οι μοριακοί υπολογιστές καταρρακτών θα χρειάζονταν έναν αυτόματο μηχανισμό που θα επαναρρυθμιζε μερικά από τα μόρια και θα άφηνε τα άλλα άθικτα για να ενεργήσουν ως καταχωρητές δεδομένων (Royatos J.F., Cirac J.I., Zoller P.,2000,).

3.1.4 Παγίδες Ιόντων



Εικόνα 3.5: Παγίδες ιόντων

Πηγή: [https://physicsgg.me/tag/%CF%80%CE%B1%CE%B3%CE%AF%CE%B4%CE%B5%CF%82-](https://physicsgg.me/tag/%CF%80%CE%B1%CE%B3%CE%AF%CE%B4%CE%B5%CF%82-%CE%B9%CF%8C%CE%BD%CF%84%CF%89%CE%BD/)

[%CE%B9%CF%8C%CE%BD%CF%84%CF%89%CE%BD/](https://physicsgg.me/tag/%CF%80%CE%B1%CE%B3%CE%AF%CE%B4%CE%B5%CF%82-%CE%B9%CF%8C%CE%BD%CF%84%CF%89%CE%BD/)

Μια τελευταία τεχνική για τους Κβαντικούς Υπολογιστές, είναι η παγίδα ιόντων. Όπως προαναφέρθηκε, ένας Κβαντικός Υπολογιστής λειτουργεί με qubits και όχι με bits. Ένα qubit γίνεται, εκτός από 0 και 1, να είναι μια υπέρθεση των δύο τιμών, στην οποία το 0 και 1 συνδυάζονται σε μια ενιαία κατάσταση. Η κατάσταση κάθε qubit συνδέεται με την κατάσταση του διπλανού του. Στα πειράματα με τα ατομικά ιόντα, χρησιμοποιούνται τεράστιες ηλεκτρομαγνητικές παγίδες για να συγκρατηθούν τα ιόντα στη σειρά μέσα στο κενό. Είναι παντελώς αδύνατο να εφαρμοστεί για τα μεγάλα συστήματα όπως οι Κβαντικοί Υπολογιστές. Όμως τελευταία οι ερευνητές έχουν αναπτύξει μια ιοντική παγίδα με μέγεθος 100 μικρών, μέσα σε ένα τσιπ ημιαγωγών.

Το τσιπ χρησιμοποιήθηκε για να παγιδευτεί ένα μόνο ιόν καδμίου και το μετακίνησαν προς διαφορετικές κατευθύνσεις στην παγίδα εφαρμόζοντας ηλεκτρικά σήματα στα ηλεκτρόδια. Η παγίδα φτιάχτηκε με τη μέθοδο της λιθογραφίας. Μια ηλεκτρομαγνητική παγίδα είναι αυτή που κρατά τα ιόντα σε σειρά μέσα σε κενό, ενώ laser χειρίζονται τις καταστάσεις τους.

Για να μπορεί να είναι χρήσιμος ένας Κβαντικός Υπολογιστής, πρέπει να μπορούμε να δημιουργήσουμε ειδικές καταστάσεις qubit αλλά και να χειριζόμαστε τις καταστάσεις αυτές με τέτοιο τρόπο που να μπορούν να διατηρούν τα κβαντικά χαρακτηριστικά τους.

3.1.5 Σωματίδια Majorana

Στον τομέα της Φυσικής Στερεάς Κατάστασης υπάρχουν πειστικές ενδείξεις - αλλά όχι ακόμη αποδεικτικά στοιχεία - για την ύπαρξη φερμιονίων του Majorana. Θεωρητικά, αυτά τα σωματίδια θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για να κάνουν τους κβαντικούς υπολογιστές λιγότερο ευαίσθητους στο πρόβλημα της αποσυνολής.

Στην άμεση γραμμή της έρευνάς του, ο Ettore Majorana, ανακάλυψε, πιθανότατα πριν από

το 1937, μια θεωρία που περιελάμβανε αυτό που ονομάζεται σήμερα η δύναμη του Majorana. Το φωτόνιο είναι χωρίς φορτίο και είναι ίδιο με το δικό του αντι-σωματίδιο, αλλά το αντισωματίδιο του ηλεκτρονίου έχει αντίθετο φορτίο και είναι το ποζιτρόνιο. Τα νετρίνα είναι ουδέτερα αλλά γνωρίζουμε ότι έχουν το αντι-σωματίδιο τους, το οποίο μπορεί επίσης να περιγραφεί από την εξίσωση Dirac. Ωστόσο, υπάρχει λόγος να πιστεύουμε ότι τα νετρίνα θα περιγραφούν καλύτερα από τη θεωρία των φοιρίνια του Majorana ότι, όπως και τα φωτόνια, τα νετρίνα θα είναι το δικό τους αντι-σωματίδιο. Ακόμα, στον τομέα της Φυσικής των Σωματιδίων, δεν υπάρχουν επί του παρόντος στοιχεία για την ύπαρξη φερμιόνιων του Majorana.

Πράγματι, τα φερμιόνια του Majorana θα επέτρεπαν θεωρητικά να υλοποιηθεί αυτό που ονομάζεται τοπολογικός κβαντικός υπολογιστής.

Με συμβατικό υπολογιστή, ο χρόνος που απαιτείται για την εύρεση ενός κλειδιού κρυπτογράφησης αυξάνεται εκθετικά με το μέγεθός του, δηλαδή τον αριθμό των ψηφίων που περιέχει το κλειδί. Με έναν κβαντικό υπολογιστή, αυτή τη φορά αυξάνεται μόνο ως δύναμη μεγέθους. Η αποκρυπτογράφηση είναι δυνατή πολύ πιο γρήγορα. Στην περίπτωση της αποσύνθεσης μεγάλων αριθμών την αναζήτηση πληροφοριών σε μια βάση δεδομένων ή την προσομοίωση κβαντικών συστημάτων, οι κβαντικοί υπολογιστές είναι θεωρητικά ανώτεροι από τους κλασικούς. Δυστυχώς, οι κβαντικοί υπολογιστές επαρκούς δύναμης για να τους χτυπήσουν πρέπει να αποφύγουν το πρόβλημα της *ladecoherence* που παρεμβαίνει για να λύσει το παράδοξο της εναλλαγής του Schrödinger

3.2 Η Προοπτική των Κβαντικών Υπολογιστών

Οι Κβαντικοί Υπολογιστές δεν είναι κατάλληλοι για κάθε υπολογιστική διεργασία, όπως για παράδειγμα δεν μπορούν να επιταχύνουν τη επεξεργασία κειμένου ή την πλοήγηση στο διαδίκτυο. Πιθανώς στο μέλλον να χρησιμοποιηθούν υβρίδια κλασικών και Κβαντικών Υπολογιστών. Προορίζονται κυρίως για την προστασία προσωπικών δεδομένων. αυτό θα συμβαίνει διότι δεν θα μπορούν να εισέρχονται σε email και σε τραπεζικούς λογαριασμούς, λόγω της αυξημένης ασφάλειας που θα παρέχουν.

Η διαδικτυακή αναζήτηση θα είναι πολύ πιο γρήγορη, καθώς υπάρχει κβαντικός αλγόριθμος αναζήτησης δεδομένων σε λίστα, ο οποίος θα είναι μικρότερης τάξης από τον κλασικό.

Επίσης, η χρήση του GPS θα βελτιωθεί. Για παράδειγμα στα συστήματα εντοπισμού θέσης αυτοκινήτου. Η λειτουργία αυτή βασίζεται σε ρολόγια τα οποία λειτουργούν σύμφωνα με τις αρχές της Κβαντομηχανικής. Οι Κβαντικοί Υπολογιστές θα μπορούν να βελτιώσουν τα αποτελέσματα, καθώς θα δίνουν πιο έγκυρες πληροφορίες και αποτελέσματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο – ΚΒΑΝΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

Οι κβαντικοί υπολογισμοί στηρίζονται στις αρχές της Κβαντομηχανικής. Πολλές φορές οι κβαντικοί υπολογισμοί δεν ταυτίζονται με το συνηθισμένο τρόπο σκέψης ή την κοινή λογική. Η αρχή της υπέρθεσης, η αρχή της μέτρησης και η αρχή της ορθό μοναδιαίας εξέλιξης, αποτελούν τις βασικές αρχές της Κβαντομηχανικής θεωρίας. Η αρχή της υπέρθεσης είναι αυτή που δίνει στους κβαντικούς αλγορίθμους συγκριτικό πλεονέκτημα έναντι των κλασικών. Ας αναλογιστούμε ότι διαθέτουμε ένα κλασικό bit. Τότε αυτό ανά πάσα χρονική στιγμή θα έχει μία τιμή από το σύνολο $\{0,1\}$. Ένα κβαντικό bit, θα βρίσκεται σε μία υπέρθεση των τιμών του συνόλου $\{0,1\}$, δηλαδή χοντρικά θα έχει ταυτόχρονα όλες τις τιμές του συνόλου $\{0,1\}$. Ανάλογα, n κλασικά bits θα περιγράφουν μία τιμή του συνόλου $\{0, \dots, 2^n - 1\}$, ενώ n qubits θα περιγράφουν ταυτόχρονα όλες τις τιμές του συνόλου $\{0, \dots, 2^n - 1\}$.

4.1 Η Αρχή της Υπέρθεσης

Η αρχή της υπέρθεσης είναι εκείνη που δίνει στους κβαντικούς αλγορίθμους μεγάλο πλεονέκτημα σε σχέση με τους κλασικούς. Στους κβαντικούς υπολογιστές η μονάδα πληροφορίας είναι το Quantum Bit(qbit). Η θεμελιώδης κατάσταση μπορεί να συμβολιστεί με $|0\rangle$ και με $|1\rangle, \dots, |k-1\rangle$ οι επόμενες καταστάσεις του συστήματος.

Εάν εξετάσουμε την περίπτωση του ηλεκτρονίου σε ένα άτομο υδρογόνου, τότε αυτό βρίσκεται μόνο σε διακριτά επίπεδα ενέργειας, ξεκινώντας από την πρώτη διεγερμένη κατάσταση κλπ.

Σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης, η κβαντική κατάσταση του ηλεκτρονίου θα είναι:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |+\rangle \text{ και } |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |-\rangle \quad (4.1).$$

Το qubit μπορεί να βρεθεί σε κατάσταση υπέρθεσης μεταξύ των δύο βασικών καταστάσεων και να πάρει οποιασδήποτε τιμές, καθώς είναι ένα διάνυσμα στον χώρο Hilbert. Δηλαδή μπορούμε να έχουμε ταυτόχρονα και την κατάσταση 0 και την κατάσταση 1. Η έννοια της υπέρθεσης ή αρχή της επαλληλίας, αφορά όλα τα κβαντικά συστήματα που επιλύονται μέσω των γραμμικών εξισώσεων και είναι μια θεμελιώδης έννοια στην κβαντική φυσική. Σύμφωνα με αυτήν, το ολικό αποτέλεσμα ενός κβαντικού φαινομένου που αποτελείται από επί μέρους φαινόμενα, είναι ίσο με το άθροισμα των επί μέρους αποτελεσμάτων. Κάθε κβαντικό σύστημα μπορεί να βρεθεί σε καταστάσεις υπέρθεσης δύο βασικών καταστάσεων και θα αποδίδεται από την μαθηματική έκφραση που εμπερικλείει τα πλάτη πιθανότητας.

Η κατάσταση ενός κβαντικού συστήματος εκφράζεται από ένα καταστατικό διάνυσμα ket το οποίο συμβολίζεται με $|\Psi\rangle$. Όταν υπάρχει ένα σύνολο από πολλά σωματίδια, χωρίς να υπάρχει μεταξύ τους αλληλεπίδραση, κάθε ένα από αυτά βρίσκεται σε διαφορετική κατάσταση. Πρόκειται ουσιαστικά για πολύ μεγάλο αριθμό καταστάσεων που δημιουργούν ένα μείγμα το οποίο χαρακτηρίζεται ως υπέρθεση καταστάσεων (superposition of states).

Επομένως η υπέρθεση μπορεί να τυπωθεί ως εξής:

$$|\Psi\rangle = c_\alpha|\alpha\rangle + c_\beta|\beta\rangle \quad (4.2).$$

Όπου c_α, c_β μιγαδικοί αριθμοί χρονικά εξαρτώμενοι συντελεστές, που εκφράζουν πιθανότητες για τους οποίους ισχύει

$$|c_\alpha|^2 + |c_\beta|^2 = 1 \quad (4.3).$$

4.2 Η Αρχή της Μέτρησης

Η γραμμική υπέρθεση αποτελεί μέρος των μποζονίων.

$$| \varphi \rangle = \sum_{i=0}^{k-1} a_i |i\rangle, \quad (4.2)$$

Δυστυχώς δεν γνωρίζουμε πολλές πληροφορίες άρα κατά επέκταση δεν μπορούμε να γνωρίζουμε και τα πλάτη a_i . Το πρόβλημα αυτό γίνεται αισθητό στην Κβαντική Φυσική, καθώς μία μέτρηση σε ένα σύστημα με k καταστάσεις θα δώσει τον ακέραιο i με πιθανότητα $|a_i|^2$. Μια σημαντική πτυχή της διαδικασίας της μέτρησης είναι ότι μεταβάλλει την κατάσταση του συστήματος. Έτσι μετά από μία μέτρηση η νέα κατάσταση θα είναι ακριβώς αυτή που μετρήθηκε. (Ιωάννης Καραφυλλίδης, 2015)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5⁰ – ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

5.1 Προσέγγιση της Κβαντικής Θεωρίας στη Ψυχολογία

Οι γνωστικοί επιστήμονες(επιστήμονες που ασχολούνται με την γνωσιακή επιστήμη) αγωνίζονται εδώ και πολύ καιρό να διαμορφώσουν μια ολοκληρωμένη κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι άνθρωποι παίρνουν κρίσεις και αποφάσεις σε σύγκρουση και αβεβαιότητα.

Δεκαετίες έρευνας έδειξαν ότι δύο προσεγγίσεις κρυσταλλώνουν στην επιφάνεια - «ευρετική» και «λογική». Η ευρετική προσέγγιση έχει τη ρίζα της στην έννοια του περιορισμένου ορθολογισμού του Herbert Simon. Αυτή η προσέγγιση υποστηρίζει ότι, για να πάρουν κρίσεις και αποφάσεις, οι άνθρωποι τείνουν να χρησιμοποιούν απλές ευρετικές (π.χ. αντιπροσωπευτικότητα, αγκύρωση και προσαρμογή, λήψη του καλύτερου), οι οποίες μπορεί να μην φαίνονται πάντα λογικές.

Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως επαγωγική διαδικασία «από κάτω προς τα πάνω» με την έννοια ότι οι άνθρωποι μαθαίνουν απλούς κανόνες ad hoc που μπορούν να είναι αποτελεσματικοί ή όχι ανάλογα με τις περιβαλλοντικές συνθήκες. Σε αντίθεση, η ορθολογική προσέγγιση βασίζεται θεωρίες υποκειμενικής πιθανότητας και αναμενόμενης χρησιμότητας.

Αυτή η προσέγγιση υποστηρίζει ότι οι άνθρωποι μπορούν να αντλήσουν συμπεράσματα από τον κανόνα Bayes και αποφάσεις από τον αναμενόμενο κανόνα χρησιμότητας με ορθολογικό τρόπο. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως «εκ των άνω προς τα κάτω» αγωγή διαδικασία, όπου τα ίδια βασικά αξιώματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εξαγωγή συμπερασμάτων και βοηθητικών προγραμμάτων σε όλες τις περιβαλλοντικές συνθήκες.

Πρόσφατα, προέκυψε μια τρίτη προσέγγιση, «κβαντική γνώση». Από κοινού με την

ευρετική προσέγγιση, προϋποθέτει ότι ο άνθρωπος που λαμβάνει αποφάσεις υπόκειται σε περιορισμένη λογική. Επιπλέον, όπως και η ορθολογική προσέγγιση, τα συμπεράσματα που χρησιμοποιούνται για αποφάσεις προέρχονται από βασικά αξιώματα που ορίζουν μια θεωρία πιθανότητας. Ωστόσο, τα αξιώματα είναι διαφορετικά από αυτά που εφαρμόζονται στην προσέγγιση Bayesian, και κατά συνέπεια και τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτήν.

Σε ποια θεωρία πιθανότητας προσυπογράφει η κβαντική γνώση; Αυτή η ερώτηση μπορεί να εκπλήξει ορισμένους αναγνώστες γιατί, σε γενικές γραμμές, οι γνωστικοί επιστήμονες έχουν εκτεθεί σε μια θεωρία πιθανότητας - αυτό που θα ονομάσουμε κλασική (πιο τεχνικά, Kolmogorov) θεωρία πιθανότητας, στην οποία στηρίζονται τα μοντέλα Bayesian. Υπάρχουν, ωστόσο, αρκετές θεωρίες βιώσιμων πιθανοτήτων πάνω στις οποίες μπορούν να οικοδομηθούν πιθανοτικά μοντέλα γνώσης. Η κβαντική γνώση είναι μια τέτοια εναλλακτική που όλο και περισσότερο προσελκύει την προσοχή. Αυτό που κάνει την κβαντική γνώση αμφιλεγόμενη είναι ότι η σχετική θεωρία πιθανότητας αναπτύχθηκε στο πεδίο της κβαντικής Φυσικής (Peter D. Bruza et.al., 2015).

5.2 Η Έννοια της Κβαντικής Κατάστασης

Η Κβαντική Θεωρία μέτρησης και τα παράδοξα που προκύπτουν από αυτή αποτελούν τον κεντρικό άξονα της κατανόησης των φυσικών και λογικών αποτελεσμάτων της Κβαντικής Θεωρίας. Μια θεωρία Φυσικής υπόστασης πρέπει να καταλήγει σε προβλέψεις και ερμηνείες, οι οποίες να διαφέρουν κατά πολύ από τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την θέσπισή της. Δεν είναι άτοπο να ισχυριστούμε πως η Κβαντική Θεωρία καλύπτει ένα τέτοιο γεγονός. Ο σχεδιασμός της Κβαντικής Μηχανικής απαιτεί μια εξονυχιστική

συζήτηση των πρακτικών και φιλοσοφικών συνεπειών της θεωρίας.

Το τυπολόγιο όμως της Κβαντικής Μηχανικής προηγήθηκε σε σχέση με την διατύπωση της ερμηνείας της θεωρίας, με αποτέλεσμα οι εμπνευστές της να ασχοληθούν με τη μέτρηση αρκετά αργότερα. Η διατύπωση της Κβαντικής Μηχανικής του von Neumann βασίστηκε στο πρότυπο του Bohr και στην ερμηνεία της Σχολής της Κοπεγχάγης. Δημιούργησε συζήτηση και προβληματισμό με αποτέλεσμα την παραγωγή εργασιών και έθεσε το πλαίσιο των μετρήσεων των θεωριών μέτρησης που ακολούθησαν στο μέλλον (Σκάλτσας, 1993).

Η έννοια της κατάστασης είναι μια από τις λεπτεπίλεπτες έννοιες της Κβαντικής Μηχανικής. Στην Κλασική Μηχανική, ο όρος χρησιμοποιείται για να παραπέμψει κανείς στην πληροφορία για τη θέση και την ορμή ενός ατομικού συστήματος. Ανάλογα θεωρήθηκε πως η περιγραφή της κβαντικής κατάστασης θα παραπέμψει σε ιδιότητες ενός ατομικού συστήματος.

Αν υποθέσουμε ότι ο σκοπός της Φυσικής είναι να δίνει μια ρεαλιστική περιγραφή του κόσμου, αυτός ο σκοπός γίνεται ευκολότερα πραγματικότητα εάν ερμηνεύσουμε την συνάρτηση κβαντικής κατάστασης ως ένα στοιχείο της Φυσικής πραγματικότητας, κατά την ίδια έννοια που το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι ένα στοιχείο αυτής της πραγματικότητας. Σύμφωνα με τον Leslie Ballentine, η παραδοχή ότι «μια κβαντική κατάσταση είναι μια ιδιότητα ενός ατομικού φυσικού συστήματος», οδηγεί σε αντιφατικές καταστάσεις και πρέπει να εγκαταλειφθεί.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η Φυσική είναι μια επιστήμη με συνεχόμενες εξελίξεις. Η εξέλιξη της κλασικής Φυσικής σκέψης οδήγησε στην θέσπιση της Κβαντικής Θεωρίας. Η Κβαντική Θεωρία, ήρθε για να δώσει λύσεις και αποτελέσματα για πειραματικά δεδομένα τα οποία ήταν αδύνατο να ερμηνευθούν από τις θεωρίες της κλασικής Φυσικής.

Η Κβαντική Θεωρία, οδήγησε στην ανακάλυψη της Κβαντικής Θεωρίας Πληροφορίας, η οποία έδωσε λύση με εκπληκτικά ακριβή πειραματικά αποτελέσματα, διευκολύνοντας σημαντικά την επιστημονική έρευνα. Αν κι ακόμη βρίσκεται σε πρόωμη ανάπτυξη, αναμένουμε πως οι Κβαντικοί Υπολογιστές θα μπορούν να μελετηθούν και να αναπτυχθούν ακόμη περισσότερο, δίνοντας ακόμη περισσότερες απαντήσεις σε σημαντικά ερευνητικά ζητήματα.

Η περιοχή της Κβαντομηχανικής και των εφαρμογών της είναι ένας επιστημονικός χώρος που εξελίσσεται διαρκώς. Οι κβαντικοί υπολογιστές βρίσκονται ακόμα σε πολύ πρόωμο στάδιο, καθώς αυτοί που έχουμε στην διάθεση μας αποτελούνται μόλις από μερικές δεκάδες qubits. Το πεδίο των κβαντικών υπολογισμών δεν έχει ακόμα ωριμάσει αρκετά, αφού οι κβαντικοί αλγόριθμοι που έχει να παρουσιάσει είναι ελάχιστοι. Και όσο για τις κβαντικές γλώσσες προγραμματισμού, αυτές βρίσκονται στο επίπεδο της προδιαγραφής κβαντικών κυκλωμάτων ή ορθομοναδιαίων μετασχηματισμών. Όπως φαίνεται λοιπόν υπάρχει άπλετος χώρος για ερευνητική δράση και πάρα πολλά ζητήματα τα οποία πρέπει να λυθούν ώστε να μπορούμε να αντιμετωπίσουμε μία μέρα τους κβαντικούς υπολογιστές όπως αντιμετωπίζουμε σήμερα τους κλασικούς υπολογιστές.

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abbas Edalat 2003, *Quantum Computing*, Journal of Experimental and Theoretical Physics 102(3), pp. 466-474.

Ahn C., Wiseman H.M., Milburn G.J. 2003 *Quantum error correction for continuously detected errors*, Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics 61(2), pp.13.

Andre Berthiaume. "Quantum Computation". Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam.

Biswas, K. K., & Sajeed, S. 2012. Design and realization of a quantum Controlled NOT gate using optical implementation 22(3), pp.4-5.

Bruza Peter D. et.al., 2015, *Quantum cognition: a new theoretical approach to psychology*, Trends in Cognitive Sciences 19(7), pp.7.

Chiaverini J., et al. 2004, *Realization of quantum error correction*, Nature 432

Buluta, I., Ashhab, S., & Nori, F. (2011). Natural and artificial atoms for quantum computation. Reports on Progress in Physics, 74(10), pp122&128.

Deutsch David and Arthur Ekert 1993, *Quantum communication moves into the unknown*, Extract from Physics World 34(8), pp. 252-260.

DiVincenzo, D. P. The physical implementation of quantum computation. *Fortsch. Phys.* (special issue; Experimental Proposals for Quantum Computation), also as preprint quant-ph/0002077 at <http://xxx.lanl.gov> (2000).

Dirac P.A.M 1935, *The principles of Quantum Mechanics*, Oxford: Clarendon Press

Gribbin John 2002, *Κβαντική Φυσική*, Μτφρ Κ.Δεληγιάννης, Αθήνα: «Καθημερινή»,

2005

Garelli, M. S., & Kusmartsev, F. V. (2005). Buckyball quantum computer: realization of a quantum gate. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 48(2), pp 199-206.

Grover, L.K. 1998, *Quantum computers can search rapidly by using almost any transformation*, *Physical Review Letters* 80(3), pp.3-4.

Hay Tony and Walters Patrick 2003, *Το νέο κβαντικό σύμπαν*, Μπρ Γ.Κατσιλιέρης – Ν.Σιμάτος-Ε.Βιτωράτος, Αθήνα: Κάτοπτρο, 2005.

How to build a million-qubit quantum computer. Available at: <http://www.kurzweilai.net/how-to-build-a-million-qubit-quantum-computer>.

Jefferson, J. H., & Häusler, W. (1997). Quantum dots and artificial atoms. *arXiv preprint cond-mat 94(5)*, pp 24-28.

Jerry Moy Chow. (2010) . *Quantum Information Processing with Superconducting Qubits*, *PRL* 105(8), pp 4-17.

Juliá-Díaz, Bruno, Joseph M. Burdis, and Frank Tabakin. (2006). QDENSITY—a Mathematica quantum computer simulation, *Computer physics communications* 174, no. 11: 914-934.

Kockum, A. F., & Nori, F. 2019. Quantum bits with Josephson junctions. In *Fundamentals and Frontiers of the Josephson Effect* (pp. 703-741). Springer, Cham.

Kubo, Y., et al. "Viewpoint: Towards superconductor-spin ensemble hybrid quantum systems." *Phys. Rev. Lett* 105 (2010): 140502.

Kumar, P. (2007). Reduced Hamiltonian technique for designing quantum logic gates and data channels, *102(4)*. pp.62-67.

Kumar, Preethika, and Steven R. Skinner. (2007). Simplified approach to implementing controlled-unitary operations in a two-qubit system." *Physical Review A* 76, no. 2: 022335.

Le Gall, F. (2009). Exponential separation of quantum and classical online space complexity. *Theory of Computing Systems*, 45(2), pp 188-202.

Lim, Y. L., Barrett, S. D., Beige, A., Kok, P., & Kwek, L. C. (2006). Repeatuntil-success quantum computing using stationary and flying qubits. *Physical Review A*, 73(1), 012304
Mexico.

Mikio Nakahara Shigeru Kanemitsu, Martti M Salomaa and Shin Takagi. (2004). *Physical realization of quantum computing*, World Scientific Publishing Co. Osaka, Japan.

Mohammad Rastegari, Moin Nabi. *The Study of quantum Computation*, Shomal University, 2(5), pp 14 &15.

Myers, Fahmy, Glaser, Marx 2001, *Rapid solution of problems by nuclearmagnetic-resonance quantum computation*, *Physical Review A. Atomic, Molecular, and Optical Physics* 7(1), pp. 8-10.

Nagy, M., & Akl, S. G. (2006). Quantum computation and quantum information†. *The International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems*, 21(1), pp 1-59.

Nielsen Michael Aaron 1998, *Quantum Information Theory*, New Mexico: University of New 82(6), pp 11.

Nielsen, M. A., & Chuang, I. L. (2010). *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press. UK. 112(5), pp 220-226.

Quantum computing. Available at: <http://web.mit.edu/newsoffice/topic/quantum-computing.html>.

Quantum Future: GTRI Researchers are Designing and Testing Microfabricated Planar Ion

Traps. Available at: <http://gtresearchnews.gatech.edu/ion-traps/>.

Rosner, Jonathan L. - Enrico Fermi. (2011). "An introduction to Quantum Computing using Trapped cold Ions" 32(1), pp 22&38,

Sarovar M., Milburn G.J. 2005, *Continuous quantum error correction*, Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering

Steane, A. 1998, *Quantum computing. Reports on Progress in Physics*, 61(2), pp.117.

Styer Daniel F. 2000, *Ο παράξενος κόσμος της Κβαντικής Μηχανικής*, Μτφρ Γ.Κατσιλιέρης, Αθήνα: Κάτοπτρο, 2000

Tsampardoukas, C. (2011). Ion trap quantum computing, Naval Postgraduate School Monterey, California.

Valiev, K.A. and Kokin, A.A., Semiconductor NMR Quantum Computers with Individual and Ensemble Access to Qubits, *Microelektronika*, 1999, vol. 28, no. 5, pp. 326–337.

W Knill, E., Laflamme, R., Barnum, H., Dalvit, D., Dziarmaga, J., Gubernatis, J., & Zurek, W. H. (2002). Introduction to quantum information processing. arXiv preprint quant-ph/0207171.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αντωνιάδης Ιωάννης, Σημειώσεις Μαθήματος Κβαντικών Υπολογιστών και Κβαντικής Κρυπτογραφίας, Τμήμα Πληροφορικής ΑΠΘ.

Γρυπαίου Μιχαήλ Ελ. 1972, *Μαθήματα Κβαντομηχανικής*, Θεσσαλονίκη ΑΠΘ.

Θεοδωρόπουλος Μιχάλης 1992, *Φυσική και αιτιότητα : φυσικός κόσμος*

Καραφυλλίδης Ιωάννης 2005, *Κβαντικοί Υπολογιστές*, Αθήνα, Κλειδάριθμος.Ιωάννης

Μεταξάς, Η. (2015). *Μελέτη αρχών κβαντικών πυλών* (Bachelor's thesis).

Μπιτσάκης Ευτύχιος 1979, *Τα εννοιολογικά θεμέλια της Κβαντικής Μηχανικής*, Αθήνα

ΕΚΠΑ

Σκάλτσας Δημοσθένης 1993, *Η Κβαντομηχανική μέτρηση σύμφωνα με τις νεώτερες θεωρίες*, Πάτρα.

Τραχανάς Στέφανος 2002, *Κβαντομηχανική I*, Ηράκλειο Παν.εκδ. Κρήτης

Χατζησάββας Κωνσταντίνος 2006, *Μελέτη προβλημάτων για την υλοποίηση Κβαντικών Υπολογιστών και Κβαντική Πληροφορία*, Θεσσαλονίκη ΑΠΘ

Χρηστίδης Θ.Μ. 1997, *Χάος και πιθανολογική αιτιότητα: μεταξύ προκαθορισμού και τύχης*, Θεσσαλονίκη: Βάνιας