

Διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών της Β Γυμνασίου, αναφορικά με την αξονική συμμετρία, μέσω της επεξεργασίας ψηφιακού μοντέλου στο προγραμματιστικό περιβάλλον MaLT2.



Ψηφιακός
Μετασχηματισμός
και Εκπαιδευτική Πράξη

ΔΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών της Β Γυμνασίου, αναφορικά με την αξονική συμμετρία, μέσω της επεξεργασίας ψηφιακού μοντέλου στο προγραμματιστικό περιβάλλον MaLT2.

Άρτεμις Κ. Κατσακιώρη
A.M.: 19009

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Χρόνης Κυνηγός, Καθηγητής

**ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ
ΕΠΙΤΡΟΠΗ:** **Μαρία Μπούμπουκα**, Συνεργάτης του ΠΜΣ / Εκπαιδευτικός
Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
Μαριάνθη Γριζιώτη, Συνεργάτης του ΠΜΣ / Μεταδιδακτορική
Ερευνήτρια

Φεβρουάριος 2022

Διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών της Β Γυμνασίου, αναφορικά με την αξονική συμμετρία, μέσω της επεξεργασίας ψηφιακού μοντέλου στο προγραμματιστικό περιβάλλον MaLT2.



**Ψηφιακός
Μετασχηματισμός
και Εκπαιδευτική Πράξη**

ΔΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

Διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών της Β Γυμνασίου, αναφορικά με την αξονική συμμετρία, μέσω της επεξεργασίας ψηφιακού μοντέλου στο προγραμματιστικό περιβάλλον MaLT2.

Η διπλωματική εργασία εξετάστηκε επιτυχώς από την κάτωθι Εξεταστική Επιτροπή:

A/a	ΟΝΟΜΑ ΕΠΩΝΥΜΟ	ΒΑΘΜΙΔΑ/ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΨΗΦΙΑΚΗ ΥΠΟΓΡΑΦΗ
	Χρόνης Κυνηγός	Καθηγητής	
	Μαρία Μπούμπουκα	Συνεργάτης του ΠΜΣ / Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης	
	Μαριάνθη Γριζιώτη	Συνεργάτης του ΠΜΣ / Μεταδιδακτορική Ερευνήτρια	

Διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών της Β Γυμνασίου, αναφορικά με την αξονική συμμετρία, μέσω της επεξεργασίας ψηφιακού μοντέλου στο προγραμματιστικό περιβάλλον MaLT2.

ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η κάτωθι υπογεγραμμένη Άρτεμις Κατσακιώρη του Κωνσταντίνου, με αριθμό μητρώου 19009 φοιτήτρια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών Ψηφιακός Μετασχηματισμός και Εκπαιδευτική Πράξη του Τμήματος Μηχανικών Πληροφορικής και Υπολογιστών της Σχολής Μηχανικών του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής, δηλώνω ότι:

«Είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της, είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, οι όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε ακριβώς είτε παραφρασμένες, αναφέρονται στο σύνολό τους, με πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία έχει συγγραφεί από μένα αποκλειστικά και αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου, όσο και του Ιδρύματος.

Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του πτυχίου μου».

**Επιθυμώ την απαγόρευση πρόσβασης στο πλήρες κείμενο της εργασίας μου μέχρι και έπειτα από αίτηση μου στη Βιβλιοθήκη και έγκριση του επιβλέποντα καθηγητή.*

Η Δηλούσα

Άρτεμις Κατσακιώρη

*** Ονοματεπώνυμο /Ιδιότητα**

Ψηφιακή Υπογραφή Επιβλέποντα

(Υπογραφή)



*** Εάν κάποιος επιθυμεί απαγόρευση πρόσβασης στην εργασία για χρονικό διάστημα 6-12 μηνών (embargo), θα πρέπει να υπογράψει ψηφιακά ο/η επιβλέπων/ουσα καθηγητής/τρια, για να γνωστοποιεί ότι είναι ενημερωμένος/η και συναινεί. Οι λόγοι χρονικού αποκλεισμού πρόσβασης περιγράφονται αναλυτικά στις πολιτικές του Ι.Α. (σελ. 6):**

https://www.uniwa.gr/wp-content/uploads/2021/01/%CE%A0%CE%BF%CE%BB%CE%B9%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%B5%CC%81%CF%82_%CE%99%CE%B4%CF%81%CF%85%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%BF%CF%85%CC%81_%CE%91%CF%80%CE%BF%CE%B8%CE%B5%CF%84%CE%B7%CF%81%CE%B9%CC%81%CE%BF%CF%85_final.pdf

Διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών της Β Γυμνασίου, αναφορικά με την αξονική συμμετρία, μέσω της επεξεργασίας ψηφιακού μοντέλου στο προγραμματιστικό περιβάλλον MaLT2.

Διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών της Β Γυμνασίου, αναφορικά με την αξονική συμμετρία, μέσω της επεξεργασίας ψηφιακού μοντέλου στο προγραμματιστικό περιβάλλον MaLT2.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας πραγματοποιήθηκε έρευνα με στόχο να μελετήσει τις νοηματοδοτήσεις μαθητών, της Β΄ Γυμνασίου, αναφορικά με την αξονική συμμετρία. Συγκεκριμένα, στόχος της έρευνας είναι να συνεισφέρει στο πώς δομούνται και διευρύνονται τα νοήματα των μαθητών για την αξονική συμμετρία, όταν αυτοί διερευνούν τις συμμετρικές κινήσεις των χεριών του ανθρώπινου σώματος ως προς την σπονδυλική του στήλη. Η έρευνα οργανώνεται στα πρότυπα της έρευνας σχεδιασμού. Μετά από εκτενή αναζήτηση βιβλιογραφικών αναφορών, οι οποίες παρουσιάζονται, η ερευνήτρια οργανώνει μια διδακτική παρέμβαση. Για την υποστήριξη της παρέμβασης αναπτύσσει ψηφιακά εργαλεία και δραστηριότητες ως εργαλεία έρευνας. Το ψηφιακό εργαλείο αναπτύσσεται στο MaLT και στηρίζεται στον δυναμικό χειρισμό των αναπαραστάσεων. Οι δραστηριότητες που πλαισιώνουν το ψηφιακό εργαλείο είναι σχεδιασμένες ώστε να επιτρέψουν και να ενισχύσουν την διερεύνηση σχέσεων γωνιών, στο πλαίσιο της συμμετρίας, καθώς παράλληλα να εμπλέξουν τους χρήστες με την υπολογιστική σκέψη, μέσω της διόρθωσης ενσφάλματος μοντέλου, και με το problem posing, μέσω της δημιουργίας ενσφάλματος μοντέλου. Τα αποτελέσματα της έρευνας, φανερώνουν πως ο συνδυασμός των δραστηριοτήτων με το ψηφιακό εργαλείο ενισχύουν την διερεύνηση των μαθητών για τις σχέσεις των γωνιών που δημιουργούν συμμετρία. Επίσης, συνβάλουν στην διεύρυνση των νοημάτων, αναφορικά με την αξονική συμμετρία, εκείνων των μαθητών που είχαν μικρή προγραμματιστική εμπειρία. Για τους μαθητές που είχαν υψηλές δεξιότητες υπολογιστικής σκέψης φάνηκε πως η δραστηριότητα (η οποία στηρίχθηκε στην δυνατότητα δυναμικού χειρισμού των αναπαραστάσεων) δεν επηρέασε τις αντιλήψεις τους για την αξονική συμμετρία. Οι δεξιότητες υπολογιστικής σκέψης ενισχύθηκαν κατά την διόρθωση και κατασκευή ενσφάλματος μοντέλου. Οι αντικειμενικοί στόχοι του μαθηματικού Problem Posing, που αφορούν την ανάπτυξης κριτικής σκέψης δεν επιτεύχθηκαν.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Εκπαιδευτική Έρευνα με Ψηφιακές Τεχνολογίες

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: αξονική συμμετρία, υπολογιστικοί μικρόκοσμοι, συστήματα δυναμικού χειρισμού των αναπαραστάσεων, Problem posing

Διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών της Β Γυμνασίου, αναφορικά με την αξονική συμμετρία, μέσω της επεξεργασίας ψηφιακού μοντέλου στο προγραμματιστικό περιβάλλον MaLT2.

ABSTRACT

In the context of the present dissertation, a research was carried out, in order to investigate secondary school students' understanding & meanings regarding reflective symmetry. Specifically, the purpose of the research is to contribute to how students' meanings for reflective symmetry are structured and expanded when they investigate the symmetrical movements of the human body's hands in relation to its spine. The research is organized according to the standards of design-based research. After an extensive search of bibliographic references, which is presented, the researcher organized an intervention. To support the intervention, digital tools and activities have been developed as research tools. The digital tool has been developed in MaLT and relied on the dynamic manipulation of representations. The activities that framed the digital tool have been designed in such way to enable and enhance the exploration of angle relationships, in the context of symmetry, as well as to engage users with computational thinking through debugging and problem posing through bugging. The results of the research show that the combination of activities with the digital tool enhances the exploration of students' regarding angles relationships, in the context of symmetry. It, also, contributed to the expansion of meanings and understanding regarding reflective symmetry of those students who have limited programming experience. For students with high computational thinking skills, it seemed that an activity based on dynamic manipulation of the representations did not affect their perceptions of reflective symmetry. Computational thinking skills were enhanced during the bugging and debugging process. The objectives of Mathematical Problem Posing, which concern the development of critical thinking, were not met.

SUBJECT AREA: Educational Research with Digital Technology

KEYWORDS: reflective symmetry, computational microworlds, dynamic manipulation systems, Problem posing

Διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών της Β Γυμνασίου, αναφορικά με την αξονική συμμετρία, μέσω της επεξεργασίας ψηφιακού μοντέλου στο προγραμματιστικό περιβάλλον MaLT2.

Διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών της Β Γυμνασίου, αναφορικά με την αξονική συμμετρία, μέσω της επεξεργασίας ψηφιακού μοντέλου στο προγραμματιστικό περιβάλλον MaLT2.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Χρόνη Κυνηγό για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και για την συμβολή του στην πραγματοποίηση της παρούσας εργασίας. Επίσης, ευχαριστώ τους μαθητές που συμμετείχαν στις διδακτικές παρεμβάσεις, γιατί χωρίς τη βοήθειά τους δεν θα ήταν εφικτή η παρούσα έρευνα, καθώς και την Διευθύντρια του Γυμνασίου και τον συνάδελφο καθηγητή που βοήθησε στην οργάνωση της διεξαγωγής των διδακτικών παρεμβάσεων. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους δικούς μου ανθρώπους για την συμπαράσταση και την υπομονή τους κατά τη διάρκεια της έρευνας και της συγγραφής της εργασίας μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1.	Εισαγωγή.....	- 12 -
1.1	Οριοθέτηση και στήριξη του θέματος	- 12 -
1.2	Ερευνητικά Ερωτήματα	- 13 -
2.	Θεωρητικό Πλαίσιο	- 14 -
2.1	Θεωρία Οικοδόμησης της Γνώσης.....	- 14 -
2.2	Υπολογιστικοί Μικρόκοσμοι	- 16 -
2.2.1	Γεωμετρία της Χελώνας	- 17 -
2.2.2	Χελωνόσφαιρα _ MaLT2.....	- 18 -
2.3	Υπολογιστική Σκέψη.....	- 19 -
2.4	Problem Posing.....	- 20 -
2.5	Αξονική Συμμετρίας	- 21 -
2.5.1	Οδηγίες ΑΠΣ για τη διδασκαλία της αξονικής συμμετρίας	- 22 -
2.5.2	Βιβλιογραφική Επισκόπηση.....	- 23 -
3.	Μεθοδολογία	- 30 -
3.1	Στόχοι της έρευνας.....	- 30 -
3.2	Επιλογή ερευνητικής μεθόδου.....	- 30 -
3.3	Σχεδιασμός μικρόκοσμων και δραστηριοτήτων ως εργαλείο έρευνας.....	- 31 -
3.4	Δείγμα	- 35 -
3.5	Μέσα συλλογής δεδομένων	- 35 -
3.6	Μέθοδος Ανάλυσης Δεδομένων	- 36 -
3.7	Η δεοντολογία της έρευνας	- 36 -
4.	Ανάλυση της Παρέμβασης και Αποτελέσματα	- 36 -
4.1	Ανάλυση των Pre Tests και Αποτελέσματα.....	- 36 -
4.2	Ανάλυση πρώτου σκέλους της παρέμβασης	- 39 -

Διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών της Β Γυμνασίου, αναφορικά με την αξονική συμμετρία, μέσω της επεξεργασίας ψηφιακού μοντέλου στο προγραμματιστικό περιβάλλον MaLT2.

4.3 Ανάλυση δεύτερου σκέλους της παρέμβασης	- 42 -
4.4 Ανάλυση τρίτου σκέλους της παρέμβασης	- 44 -
4.5 Συζήτηση	- 46 -
4.6 Συμπεράσματα	- 50 -
4.7 Η Επέκταση Της Ερευνάς.....	- 51 -
5. Βιβλιογραφικές Αναφορές	- 52 -

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο της ολοκλήρωσης του κύκλου των σπουδών μου στο ΜΠΣ «Ψηφιακός Μετασχηματισμός και Εκπαιδευτική Πράξη».

1. Εισαγωγή

1.1 Οριοθέτηση και στήριξη του θέματος

Η Γεωμετρία ήταν από τους πρώτους κλάδους της γνώσης του ανθρώπου που διαμορφώθηκε ως επιστήμη. Αφορά την μελέτη του χώρου και των σχημάτων που υπάρχουν σε αυτόν. (Αργυρόπουλος, Βλάμος, Κατσούλης, Μαρκάτης, & Σιδέρης) Στον κλάδο της εκπαίδευσης, η γεωμετρία εξακολουθεί να αφορά πρωτίστως 'την αντίληψη του χώρου στον οποίο τα παιδιά ζουν, αναπνέουν και κινούνται' (Freudenthal, 1983). Παρόλο που είναι ένα αντικείμενο με άμεσες αναφορές στην σχέση του ανθρώπου με τον φυσικό χώρο που τον πλαισιώνει, οι παραδοσιακές μέθοδοι διδασκαλίας εστιάζουν, σε μικρές ηλικίες των παιδιών, στην αναγνώριση και ονομασία των επίπεδων σχημάτων και των ιδιοτήτων τους, ενώ σε μεγαλύτερες ηλικίες σε σύνθετα προβλήματα αφαιρετικής σκέψης. Έτσι, όταν η πληροφορία περνάει από το ένα άκρο στο άλλο, χωρίς να αξιοποιηθεί ο διαισθητικός πειραματισμός, ο έλεγχος υποθέσεων και διαισθήσεων και οι απόπειρες ερμηνείας και γενίκευσης διαμορφώνεται, αναπόφευκτα, η θεώρηση των μαθητών πως η Γεωμετρία ένα δύσκολο μάθημα. Την τελευταία δεκαετία η εκπαιδευτική κοινότητα αναζητά τρόπους ενσωμάτωσης των ψηφιακών τεχνολογιών στην διδασκαλία της Γεωμετρίας, καθώς θεωρείται ότι υποστηρίζουν τη διαδραστικότητα, τις πολλαπλές αναπαραστάσεις και τον δυναμικό χειρισμό των γεωμετρικών αντικειμένων, που δίνει πρόσθετη παιδαγωγική αξία στην διδασκαλία αυτό του διαισθητικού αντικειμένου.

Η παρούσα διπλωματική εργασία εστιάζεται σε μια γεωμετρική έννοια, αυτή της αξονικής συμμετρίας. Με στόχο την αναζήτηση ενδείξεων σχετικά με τον τρόπο που θα μπορούσαν να συνδυαστούν οι δυνατότητες των ψηφιακών τεχνολογιών με τη ανάπτυξη πρόσθετων δεξιοτήτων, όπως η υπολογιστική σκέψη και το Problem Posing για τη διδασκαλία της αξονικής συμμετρίας, αντλώντας πληροφορίες από τα συμπεράσματα ερευνών της παιδαγωγικής επιστήμης, οργανώνεται έρευνα, για τις ανάγκες της οποίας αναπτύσσονται ψηφιακά εργαλεία και υποστηρικτικές δραστηριότητες καθώς, και σχολική παρέμβαση στην οποία εφαρμόζονται

Η παρουσίαση της εργασίας γίνεται σε τέσσερα κεφάλαια. Πρώτο κεφάλαιο της εργασίας αποτελεί το παρόν κεφάλαιο. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται η Θεωρητική πλαισίωση της έρευνας. Δηλαδή, γίνεται αναφορά στις θεωρίες στις οποίες στηρίχθηκε η οργάνωση της έρευνας, όπως ο εποικοδομισμός, ο κοινωνικός εποικοδομισμός και ο κονστραξιονισμός, θεωρίες οι οποίες εστιάζονται στην κατανόηση, ερμηνεία και στην παρέμβαση, αντίστοιχα, στον τρόπο με τον οποίο ο μαθητής διαμορφώνει την γνώση του, περνώντας από αφηρημένα εσωτερικά νοήματα τα οποία μετασχηματίζονται μέσα από τα κοινωνικά πλαίσια με τα οποία αλληλοεπιδρά. Επίσης στο πλαίσιο του εποικοδομιστικού παρουσιάζονται οι υπολογιστικοί μικρόκοσμοι, δηλαδή, ψηφιακά περιβάλλοντα που με κατάλληλο παιδαγωγικό σχεδιασμό, έχουν αναδειχθεί σε ισχυρά μέσα για να αναπτύξουν οι μαθητές νοήματα για γεωμετρικές και όχι μόνο έννοιες. Τέλος, η θεωρητική πλαισίωση ολοκληρώνεται με δύο πολύ σημαντικές και σύγχρονες «δεξιότητες». Η Υπολογιστική Σκέψη, που ανήκει στις δεξιότητες του 21^{ου} αιώνα, είναι μια δεξιότητα απαραίτητη για τους μαθητές οι οποίοι θα συμπορευτούν με τους

υπολογιστές της ζωής τους και το Problem Posing που είναι μια διδακτική τεχνική η οποία ενισχύει την κριτική σκέψη των μαθητών. Ακολουθως, παρουσιάζεται η αξονική συμμετρία ως αντικείμενο διδασκαλίας μέσα από το ΔΕΠΠΣ και ΑΣΠ και τέλος, βιβλιογραφική ανασκόπηση των ερευνών που μελέτησαν την αξονική συμμετρία ως αντικείμενο διδασκαλίας. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η οργάνωση της έρευνας, ξεκινώντας από τους σκοπούς της έρευνας, την ερευνητική μέθοδο που επιλέχθηκε, την ανάπτυξη μικρόκοσμων και δραστηριοτήτων ως εργαλεία έρευνας, την μέθοδο ανάλυσης και την δεοντολογία της έρευνας. Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται αναλυτικά η παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε, τα αποτελέσματα της έρευνας, η συζήτηση και τα συμπεράσματα.

Η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε με τη συμμετοχή τεσσάρων μαθητών της Β' Γυμνασίου, οι οποίοι φοιτούν σε Πρότυπο Γυμνάσιο της Αθήνας. Η παρέμβαση διήρκησε συνολικά 140 λεπτά, διενεργήθηκε μετά την λήξη του σχολικού ωραρίου και ολοκληρώθηκε σε δύο συναντήσεις με τους μαθητές. Για την παρέμβαση χρησιμοποιήθηκε η αίθουσα του σχολείου των μαθητών. Παρούσα στην παρέμβαση ήταν μόνο η ερευνήτρια.

Η παρουσίαση της αξονικής συμμετρίας σε μαθητές που έχουν ολοκληρώσει τον κύκλο διδασκαλία του αντικειμένου, δεν κρίνεται λιγότερο σημαντική από την ερευνήτρια. Οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την έννοια και της εφαρμογές της συμμετρίας, τόσο στις επόμενες τάξεις του Γυμνασίου και του Λυκείου, όσο και σε μια πληθώρα εφαρμογών της στην καθημερινή τους ζωή, όπως την μουσική και ζωγραφική. Είναι, λοιπόν, σημαντικό να συνεχίσουν να δέχονται ερεθίσματα για αυτό το γνωστικό αντικείμενο και να προχωρούν, στην περαιτέρω, επέκταση των νοημάτων τους.

1.2 Ερευνητικά Ερωτήματα

- Πως οι μαθητές διερευνούν τις κινήσεις του ψηφιακού ανθρώπινου σώματος όταν καλούνται να συνδυάσουν την ενσώματη αντίληψη της κίνησης με τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού των αντικειμένων, που παρέχει το MaLT2;
- Πως αντιλαμβάνονται οι μαθητές την έννοια της αξονικής συμμετρίας, όταν έχουν λύσει προβλήματα με το ψηφιακό ανθρώπινο σώμα;
- Ποιες στρατηγικές χρησιμοποιούν οι μαθητές για να περιγράψουν ένα νέο πρόβλημα στηριγμένοι στα προβλήματα που έλυσαν;

2. Θεωρητικό Πλαίσιο

2.1 Θεωρία Οικοδόμησης της Γνώσης

Η θεωρία οικοδόμησης της γνώσης είναι μια επιστημολογία, η οποία δίνει έμφαση στις νοητικές διεργασίες του ατόμου· υποστηρίζει πως οι άνθρωποι οικοδομούν τη γνώση, δηλαδή νοήματα μέσω των εμπειριών τους και της αλληλεπίδρασής τους με ιδέες, ανθρώπους και με το περιβάλλον. Η γνώση δομείται στα προϋπάρχοντα νοήματα του ατόμου και για τον λόγο αυτό είναι μια ατομικά προσαρμοσμένη διαδικασία που μπορεί να έχει νόημα για το ίδιο το άτομο, αλλά όχι απαραίτητα για κάποιον άλλο (Cobb & Bowers, 1999). Η μάθηση, δηλαδή, είναι μια εσωτερική νοητική διαδικασία εξέλιξης των προσωπικών νοημάτων. Η αναδιάταξη και αναδόμηση των νοητικών δομών του ατόμου, οδηγεί στην προσαρμογή της νέας γνώσης αλλά και στη σύνδεσή της με τις υπάρχουσες νοητικές δομές (Shunk, 2010). Μερικοί από τους κυριότερους εκπροσώπους των Θεωριών Οικοδόμησης της Γνώσης είναι ο J. Piaget, ο S. Papert και ο L. S. Vygotsky.

Ο Jean Piaget που εισήγαγε τον επικοδομισμό (constructivism), ερεύνησε εκτενώς το πώς σκέφτεται και το τί είναι ικανό να κάνει ένα παιδί σε κάθε αναπτυξιακό του στάδιο. Για τον Piaget τα παιδιά δεν είναι ατελείς ενήλικες. Έχουν ένα δικό τους τρόπο σκέψης και αντίληψης του κόσμου που είναι απολύτως λειτουργικός για αυτά σε κάθε στάδιο ηλικίας τους. Τα παιδιά, όπως και οι ενήλικες αλλά και οι επιστήμονες, για να περάσουν από ένα τρόπο σκέψης και συμπεριφοράς σε έναν άλλον, δεν αρκεί να εκτεθούν σε κάποιον καλύτερο. Χρειάζεται μέσα από εμπειρίες, δοκιμές, αλληλεπίδραση με το περιβάλλον και τους ανθρώπους και μέσα από νοητικές διεργασίες να απορρίψουν ένα σύστημα και να υποδεχτούν κάποιο άλλο. Δηλαδή, η υποκειμενική αντίληψη - γνώση του εξωτερικού κόσμου αποτελείται από θεωρίες, οι οποίες ελέγχονται μέσω χρήσης και αντικαθίστανται, όταν διαψευστούν. Η υποκειμενική γνώση όταν συναντά την εξωτερική πραγματικότητα εκτίθεται σε εμπόδια τα οποία θα διασφαλίσουν τη βιωσιμότητα ή μη της γνώσης. Αυτό οδηγεί στην σύνδεση πτυχών της υποκειμενικής γνώσης με τον εξωτερικό κόσμο. Η αντικειμενική γνώση των μαθηματικών είναι κοινώς αποδεκτή υποκειμενική γνώση, η οποία εκφράζεται με λεκτικές και συμβολικές διατυπώσεις. Ο επικοδομισμός, εστιάζεται στην κατασκευή και ανακατασκευή της πραγματικότητας, η οποία επιτρέπει την επιτυχή δράση του ατόμου στον κόσμο της εμπειρίας του, φυσικό ή κοινωνικό. Ο Piaget μελετώντας την οικοδόμηση της γνώσης των μαθητών εστίαζε στην αφομοίωση, δηλαδή, στην ικανότητα των παιδιών να εξαγουν κανόνες, μέσα από την ενασχόλησή τους με εμπειρικά αντικείμενα, τους οποίους θα χρησιμοποιήσουν ως μέσα ερμηνείας και μετάφρασης του κόσμου τους (Ackermann, 2001).

Ο Seymour Papert, μαθητής του Piaget μοιράζεται με τον δάσκαλό του την ιδέα του εποικοδομισμού, αλλά στρέφει την προσοχή του στην δυναμική της αλλαγής από μια αντίληψη σε μια άλλη. Με αυτή την διαφοροποίηση εισάγει τον δομισμό (constructionism). Στο πλαίσιο του εποικοδομισμού, ο Papert, θεωρεί πως η γνώση είναι μια ατομική διαδικασία κατασκευής. Ο κόσμος σχηματίζεται και μετασχηματίζεται διαρκώς μέσω προσωπικών εμπειριών. Αντιλαμβάνονται τη νόηση σαν επίτευξη ισορροπίας ανάμεσα σε σταθερότητα – αλλαγή και διατήρηση – διαφοροποίηση και έτσι μελετά τις συνθήκες υπό τις οποίες ο μαθητής διατηρεί ή αλλάζει την θεώρησή του για ένα φαινόμενο όταν αλληλοεπιδρά με αυτό για ένα σημαντικό χρονικό διάστημα. Η

ουσιώδης διαφοροποίηση του Papert από το Piaget, είναι ο πρώτος δεν εστιάζει στην αφομοίωση, αλλά υιοθετεί την εμπλοκή – ενασχόληση με το φαινόμενο. Η έρευνα του Papert εστιάζεται στο πώς η γνώση δομείται και μετασχηματίζεται σε συγκεκριμένα πλαίσια, στο πώς δομείται και εκφράζεται μέσα από διαφορετικά μέσα και πώς επεξεργάζεται από διαφορετικούς ανθρώπους (Ackermann, 2001).

Η δουλειά του Papert υπήρξε ωδή στην Μαθηματική σκέψη των μαθητών. Ισχυρίστηκε πως δεν έχει δοθεί η δέουσα σημασία στο πώς τα παιδιά σκέφτονται μαθηματικά και στην φύση των νοημάτων που δομούν δεδομένων της γλώσσας και των εργαλείων που χρησιμοποιούν, των δραστηριοτήτων στις οποίες εμπλέκονται και της επικοινωνία που αναπτύσσουν. Εντόπισε ως κλειδί μάθησης την εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες εξερεύνησης στις οποίες μπορούν να χρησιμοποιήσουν και να επεξεργαστούν δικές τους ιδέες. (Κυνίγος C. , 2012).

Ένα από τα πιο αναγνωρισμένα σημεία της δουλειάς του Papert είναι οι υπολογιστικού μικρόκοσμοι και η γλώσσα προγραμματισμού που της οποίας υπήρξε οραματιστής, η LOGO.

Ο Lev Vygotsky, που θεωρείται ο εκπρόσωπος του κοινωνικού εποικοδομισμού θεωρεί πως η γνώση είναι θεμελιωμένη στην κοινωνία και η μάθηση πραγματοποιείται με την αλληλεπίδραση μεταξύ ατόμων και ευρύτερων κοινωνικών πλαισίων. Η μάθηση προϋποθέτει μια κοινωνική διαδικασία, μέσω της οποίας τα παιδιά μεγαλώνοντας ενσωματώνονται στη διανοητική ζωή του περιβάλλοντός τους. Κάθε αναπτυξιακή λειτουργία του παιδιού εμφανίζεται πρώτα στο κοινωνικό πεδίο και στην συνέχεια στο ατομικό μέσα από διαδικασίες εσωτερίκευσης. Το κοινωνικό περιβάλλον υποστηρίζει τη μάθηση μέσω της αλληλεπίδρασης με άλλα άτομα, με αντικείμενα, με τη γλώσσα και με τους κοινωνικούς θεσμούς, όπως το σχολείο. Η διδασκαλία θα λειτουργήσει ως μηχανισμός σύνδεσης, αποκωδικοποίησης και αφομοίωσης των δεδομένων του κοινωνικοπολιτιστικού περιβάλλοντος. Ακολουθώντας θα γίνει η εσωτερίκευση και επεξεργασία από τον μαθητή, ώστε να τα μετατρέψει σε μάθηση-γνώση-ανάπτυξη.

Βέβαια, κατά τον Vygotsky, αυτό θα πρέπει να γίνει στη «Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης» (ZEA). Η διδασκαλία είναι αποτελεσματική όταν προηγείται της ανάπτυξης, γιατί κινητοποιεί τις λειτουργίες που βρίσκονται σε διαδικασία ωρίμανσης και έτσι μετασχηματίζεται από μια απλή μεταφορά γνώσης σε μια μορφή συνεργασίας. Η συνεργασία, αυτή, μέσα στη ZEA υποστηρίζει την σταδιακή ανάπτυξη της ετοιμότητας του διανοητικού επιπέδου ενός μαθητή. Η ZEA μπορεί να λειτουργήσει σαν συνεργασία μαθητή – καθηγητή, δύο μαθητών ή συνεργασία μαθητή με μαθησιακό περιβάλλον. Όταν εφαρμόζεται σαν συνεργασία μαθητή – καθηγητή, πρέπει ο καθηγητής να πλησιάσει το διανοητικό επίπεδο του μαθητή για να ενισχύσει τον τύπο εκείνης της επικοινωνίας που θα βοηθήσει τον μαθητή στην οικοδόμηση της γνώσης. Όταν εφαρμόζεται σαν συνεργασία μαθητών, ο καθένας φέρνει τις εμπειρίες και την προϋπάρχουσα γνώση του, οι οποίες μέσα από την επικοινωνία, θα οδηγήσουν στην κατασκευή της από κοινού γνώσης. Τέλος, στην περίπτωση συνεργασίας του μαθητή με μαθησιακό περιβάλλον, η μάθηση βασίζεται στην αλληλεπίδραση ανάμεσα στο μαθητή, στο αντικείμενο μάθησης και στα διαθέσιμα εργαλεία.

2.2 Υπολογιστικοί Μικρόκοσμοι

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, οι μικρόκοσμοι εισάγονται από το Seymour Papert το 1971. Ορίζονται από το ίδιο ως αυτοτελείς κόσμοι όπου οι μαθητές μπορούν να μάθουν μεταφέροντας συνήθειες εξερεύνησης, από την προσωπική τους ζωή, σε έναν επίσημο επιστημονικό τομέα (Papert, 1980). Αργότερα, ο (Edwards, 1998), προτείνει δύο ορισμούς των μικρόκοσμων: ένας δομικό ορισμό που εστιάζει σε σχεδιαστικά στοιχεία που μοιράζονται τα περιβάλλοντα και έναν λειτουργικό ορισμό που υπογραμμίζει τα κοινά σημεία στον τρόπο με τον οποίο μαθαίνουν οι μαθητές με τους μικρόκοσμους. Πιο πρόσφατα, οι (Sarama & Clements, 2002) ορίζουν τους μικρόκοσμους ως υπολογιστικά περιβάλλοντα, τα οποία ενσωματώνουν ένα συνεκτικό σύνολο επιστημονικών εννοιών και σχέσεων που έχουν σχεδιαστεί ώστε σε συνδυασμό με κατάλληλο σύνολο δραστηριοτήτων και παιδαγωγικού σχεδιασμού, να επιτρέψει στους μαθητές να εμπλακούν σε δραστηριότητες κατασκευής και εξερεύνησης πλούσιες σε δημιουργία νοημάτων.

Οι μαθητές στους μικρόκοσμους έχουν τη δυνατότητα να ασχοληθούν με δραστηριότητες στις οποίες μπορούν να κάνουν κατασκευές, αλλά επίσης να αλλάξουν και να επεκτείνουν τους κανόνες και τις σχέσεις του ίδιου του μικρόκοσμου. Το άμεσο αποτέλεσμα του χειρισμού του μικρόκοσμου από τους χρήστες, μιας και κάθε χειρισμός εμφανίζει άμεσα το αποτέλεσμά του στην οθόνη, επιτρέπει την εξερεύνηση και τις κατασκευές και είναι το είδος της μάθησης που χαρακτήρισε την κατασκευαστική οπτική του Papert.

Ανάμεσα στους μικρόκοσμους, ξεχωριστή θέση έχουν οι μισοψημένοι μικρόκοσμοι. Αυτοί οι κόσμοι έχουν σχεδιαστεί ρητά για να προσελκύσουν τους χρήστες τους να τους αλλάξουν (Kynigos C. , Half-Baked Logo Microworlds as Boundary Objects in Integrated Design, 2007). Δηλαδή, είναι κόσμοι επιτηδευμένα ενσφάλματος. Όμως, η ουσία τέτοιων μικρόκοσμων δεν είναι μόνο ότι είναι κατασκευασμένοι για να επιτρέπουν αλλαγές αλλά και ότι διαμεσολαβούνται ως εύπλαστα, αμφισβητήσιμα αντικείμενα που επιδέχονται βελτίωση (Kynigos C. , 2012) σε διαδικασίες ανακάλυψης της γνώσης.

Με την πάροδο του χρόνου και την ραγδαίως εξελισσόμενη τεχνολογία οι μικρόκοσμοι προσαρμόζονται στις εξελίξεις. Η σπουδαιότητα της δυνατότητας γραπτού κώδικα φθίνει και έρχεται να πάρει τη θέση του η δυνατότητα δυναμικού χειρισμού των γραφικών μοντέλων – αναπαραστάσεων και τα υψηλής ποιότητας γραφικά. Οι μικρόκοσμοι που υποστηρίζουν την Γεωμετρία και έχουν τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού είναι γνωστοί ως DGS (dynamic geometry systems) ή Συστήματα Δυναμικού Χειρισμού Γεωμετρικών Αντικειμένων. Τα DGSs είναι υπολογιστικά προγράμματα που επιτρέπουν την δημιουργία και τον χειρισμό γεωμετρικών κατασκευών. Ο δυναμικός χειρισμός βοηθά τους μαθητές να κατανοούν τις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων και να γενικεύουν τους κανόνες τους και τις μεταξύ τους σχέσεις (Goldenberg & Cuoco, 1998). Για παράδειγμα θα μπορούσε να δημιουργηθεί μια κατασκευή τοποθετώντας μερικά σημεία και χρησιμοποιώντας τα για να ορισθούν νέα αντικείμενα όπως γραμμές, κύκλοι ή άλλα σημεία. Αφού δημιουργηθεί μια αρχική κατασκευή, υπάρχει η δυνατότητα μετακίνησης των αρχικών σημείων ώστε να παρατηρηθεί η αλλαγή της ίδιας της κατασκευής, αλλά και των ιδιοτήτων της.

Η (Battista, 2008) περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο τα DGSs προσφέρουν συνεχείς μετασχηματισμούς των μετακινούμενων - μεταβαλλόμενων αντικειμένων. Πράγματι, υπάρχουν ισχυρά στοιχεία που δείχνουν ότι ο δυναμικός χειρισμός στα DGS υποστηρίζει τη μετάβαση των μαθητών από ένα πεδίο στατικών χωρικών γραφημάτων

σε ένα πιο θεωρητικό πεδίο, βοηθώντας τους να εντοπίσουν την αναλλοίωτη εικόνα των γραφημάτων κατά τον δυναμικό χειρισμό. Στη μελέτη του για παιδιά του Δημοτικού, που χρησιμοποιούν DGS θέλησε να εντοπίσει συσχετισμούς μεταξύ της δυνατότητας μετακίνησης των αντικειμένων με 1) τις «ασυνείδητες οπτικές μεταμορφώσεις» από όπου οι άνθρωποι δομούν το χώρο και 2) με την υπόθεση ότι οι άνθρωποι παρατηρούν το αμετάβλητο. Δηλαδή, ο δυναμικός χειρισμός αλλάζει τον τρόπο που γίνονται αντιληπτά τα αντικείμενα, περνώντας από μια στατική οπτική αντίληψη σε μια πρόσκαιρη εστίαση του τί παραμένει αμετάβλητο.

Τα τελευταία χρόνια που τεχνητή νοημοσύνη κερδίζει έδαφος, και οι μικρόκοσμοι προσομοιώσεων διαδίδονται, η δυνατότητα γραπτού κώδικα σε μικρόκοσμους κερδίζει ξανά τη θέση της. (Healy & Kynigos, Charting the microworld territory over time: design and construction in mathematics education, 2010)

2.2.1 Γεωμετρία της Χελώνας

Ο μικρόκοσμος που εισάγει ο Papert λέγεται η Γεωμετρία της χελώνας. Στον μικρόκοσμο της Γεωμετρίας της Χελώνας οι μαθητές καλούνται να καθοδηγούν, την χελώνα, μέσα από γραπτό κώδικα να κινηθεί στο επίπεδο. Η γλώσσα προγραμματισμού που χρησιμοποιείται για τον χελωνόκοσμο είναι η Logo, η οποία προσεγγίζει την φυσική γλώσσα των μαθητών, τόσο σε επίπεδο λεξιλογίου, όσο και σε επίπεδο διατύπωσης των εντολών. Η θεωρητική αρχή του μικρόκοσμου ορίζει πως οι κινήσεις της χελώνας υπόκεινται στους περιορισμούς των βασικών γεωμετρικών αρχών. Ωστόσο, η Γεωμετρία της χελώνας ενσωματώνει και μη τυπικά μαθηματικά, δηλαδή μαθηματικά που σχετίζονται με τους ίδιους τους χρήστες και την αίσθησή τους για τον χώρο και τις, ίδιες τις, κινήσεις τους. Τα ονομάζει *body syntonic* και *ego syntonicity* (Healy & Kynigos, Charting the microworld territory over time: design and construction in mathematics education, 2010). Με τον όρο *body syntonic* περιγράφει το ότι οι μαθητές εργαζόμενοι στην Γεωμετρία της χελώνας καθοδηγούν την χελώνα να κινηθεί με τρόπο συμβατό με αυτό που θα κινούνταν οι ίδιοι. Με τον όρο *ego syntonicity* περιγράφει, την πρόθεση, του να κινηθούν οι μαθητές με τον τρόπο που κινείται το ψηφιακό δόμημα που δημιούργησαν, εργαζόμενοι στην Γεωμετρία της χελώνας. Ο Papert δημιουργώντας τον χελωνόκοσμο επιδιώκει να δώσει στους μαθητές ένα εργαλείο για να δημιουργήσουν αναπαραστάσεις, καθοδηγώντας τη χελώνα να κινηθεί, και να αναστοχαστούν επί των ίδιων των αναπαραστάσεων, αλλά και επί των κανόνων βάσει των οποίων δημιουργούνται οι αναπαραστάσεις. Με αυτόν, τον εμπειρικό, τρόπο οι μαθητές θα αντιλαμβάνονται τους περιορισμούς της Γεωμετρίας στους οποίους στηρίχτηκε η Γεωμετρία της χελώνας και θα τους γενικεύουν, δημιουργώντας για τους ίδιους ένα σύστημα μαθηματικής αντίληψης.

Πράγματι, στο γνωστικό πεδίο των μαθητικών, έχει αναγνωριστεί η αξία της Γεωμετρίας της Χελώνας ως εργαλείο για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης (Hoyles & Noss, A pedagogy for mathematical microworlds, 1992), (Noss & Hoyles, 1996). Όταν οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες προγραμματισμού με Logo, *‘έρχονται αντιμέτωποι’ με μια αναπαράσταση της ίδιας τους της μαθηματικής δραστηριότητας* (Hoyles, 1995) και όχι με μια δοσμένη μαθηματική αναπαράσταση. Αυτό είναι πολύ σημαντικό, καθώς, οι μαθητές καλούνται να εστιάσουν στη διαδικασία κατασκευής ώστε να αποδώσουν μια γεωμετρική αναπαράσταση σε γενικευμένη μορφή ενός προγράμματος. Είναι ακριβώς αυτό το

σημείο στο οποίο ο μικρόκοσμος ενώνει τις ενέργειες και τις αντιλήψεις των μαθητών με την μαθηματική γνώση.

2.2.2 Χελωνόσφαιρα _ MaLT2

Στο εγχειρίδιό της, η χελωνόσφαιρα περιγράφεται ως εξής: *Η «Χελωνόσφαιρα» είναι ένα διαδικτυακό εργαλείο συμβολικής έκφρασης για μαθηματική δραστηριότητα μέσω του προγραμματισμού, με σκοπό τη δημιουργία και το μαστόρεμα δυναμικών γραφικών μοντέλων και αντικείμενων σε τρισδιάστατο χώρο. Η ιστοσελίδα της «Χελωνόσφαιρας» είναι η <http://etl.ppp.uoa.gr/malt2/> και είναι προσβάσιμη από οποιαδήποτε συσκευή έχει πρόσβαση στο internet, χωρίς να απαιτεί κάποια επιπλέον εγκατάσταση.*

Το MaLT2 αποτελεί επέκταση της Γεωμετρίας της χελώνας. Είναι ένας μικρόκοσμος για κατασκευές μέσω προγραμματισμού σε γλώσσα Logo. Είναι ένα υπολογιστικό περιβάλλον διερευνητικής μάθησης, στο οποίο οι μαθητές εμπλέκονται στο να κάνουν οι ίδιοι μαθηματικά μέσα από τον αναστοχασμό για τους κανόνες βάση των οποίων δημιουργούνται οι αναπαραστάσεις στην οθόνη του υπολογιστή. Χαρακτηρίζεται ως επέκταση της Γεωμετρίας της χελώνας, γιατί η χελώνα - που έγινε σπουργίτι κινείται στον τρισδιάστατο γεωμετρικό χώρο και κατά συνέπεια δέχεται επιπλέον εντολές (περιστροφή πάνω, κάτω, δεξιά, αριστερά).

Υπάρχουν τρία βασικά στοιχεία που αποτελούν το περιβάλλον MaLT2 είναι: Ο επεξεργαστής εντολών, η τρισδιάστατη σκηνή και το εργαλείο δυναμικού χειρισμού (οι μεταβολείς). Στο πρόγραμμα επεξεργασίας εντολών, ο χρήστης μπορεί να γράψει προγράμματα για να κάνει το σπουργίτι να κινηθεί στην οθόνη. Η τρισδιάστατη σκηνή όπου το σπουργίτι κινείται καθώς εκτελούνται οι εντολές, έχει την ίδια λογική με το επίπεδο στο οποίο κινούνταν η χελώνα του PaperT. Η σκηνή της οθόνης μετατρέπεται σε τρισδιάστατη χάρις στην περισκοπική κάμερα που περιέχει το πρόγραμμα και με την οποία ο χρήστης μπορεί να παρατηρήσει τις αναπαραστάσεις που δημιούργησε από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Με το εργαλείο δυναμικού χειρισμού, ο χρήστης μπορεί να προκαλέσει δυναμικές μεταβολές σε αναπαραστάσεις που κατά την κωδικοποίηση τους τούς εκχωρήθηκαν μεταβλητές. Το εργαλείο παρέχει έναν μεταβολέα, για κάθε μεταβλητή της συγκεκριμένης διαδικασίας. Οι μεταβολείς δέχονται μέγιστες και ελάχιστες τιμές οι οποίες μπορούν να αλλάξουν από τον χρήστη. Τα παραπάνω χαρακτηριστικά καθιστούν το MaLT ένα πλούσιο υπολογιστικό περιβάλλον που επεκτείνει τη γεωμετρία της χελώνας πέρα από τα κλασικά δισδιάστατα σχέδια και την οδηγεί στον σύγχρονο κόσμο της διαδικτυακής κοινής χρήσης, των τρισδιάστατων γραφικών και των κινούμενων εικόνων. (Kynigos & Grizioti, 2018)

Στην παρούσα εργασία θα επιχειρηθεί να αξιοποιηθεί ο γραπτός κώδικας και η δυνατότητα δυναμικού χειρισμού του MaLT, ώστε οι μαθητές να διερευνήσουν την αξονική συμμετρία μέσα από τον αναστοχασμό για τους κανόνες βάσει των οποίων δημιουργήθηκαν οι αναπαραστάσεις του προγράμματος που επεξεργάζονται.

2.3 Υπολογιστική Σκέψη

Ο όρος υπολογιστική σκέψη (computational thinking) (ΥΣ) κάνει την εμφάνισή του το 2006 από την (Wing, 2006). Ως υπολογιστική σκέψη ορίζεται, από την ίδια, ο τρόπος με τον οποίο σκέφτεται ένα επιστήμονας πληροφορικής. Η ίδια, πέντε χρόνια αργότερα, ορίζει την υπολογιστική σκέψη με περισσότερη σαφήνεια. Δηλαδή, ως υπολογιστική σκέψη νοούνται οι διαδικασίες σκέψης που περιλαμβάνουν διατυπώσεις προβλημάτων και εκφορά της λύσης τους, με τρόπο τέτοιο που τόσο ο άνθρωπος, όσο και ο υπολογιστής μπορεί να κατανοήσει και να φέρει εις πέρας (Wing J. , 2012).

Οι (Grover & Pea, 2017) κάνουν μια αναλυτική παρουσίαση των πτυχών και πρακτικών που περιλαμβάνονται στην υπολογιστική σκέψη. Ονομαστικά οι πτυχές της υπολογιστικής σκέψης είναι η «μαθηματική λογική», η αλγοριθμική σκέψη, η αναγνώριση μοτίβων, η αφαίρεση (αφαιρετική σκέψη), η αξιολόγηση και ο αυτοματισμός.

Ως μέρος της ΥΣ η «μαθηματική λογική», αφορά την δεξιότητα αναλυτικής σκέψης που αναπτύσσετε με την επεξεργασία προβλημάτων που χρησιμοποιούν τις λογικές εντολές ή, και, όχι. Ως αλγοριθμική σκέψη αναφέρατε η βήμα προς βήμα σχεδίαση επίλυσης προβλημάτων. Η πτυχή της αναγνώρισης μοτίβων της ΥΣ έχει εφαρμογή καταρχήν στην αυτοματοποίηση λύσεων προβλημάτων που έχουν επαναληπτικές ή αναδρομικές διαδικασίες. Σε τέτοια προβλήματα, η διαδικασία που επαναλαμβάνεται προγραμματίζεται μια φορά και όταν χρειαστεί ξανά, απλώς να καλείται. Εκτός, όμως, από αυτή την βασική αρχή, η αναγνώριση μοτίβων έχει εφαρμοστεί και στην μηχανική μάθηση και τεχνητή νοημοσύνη που εστιάζουν στην αναγνώριση προτύπων στα δεδομένα. Για παράδειγμα, το Facebook αυτόματα «αναγνωρίζει» και προσθέτει ετικέτα σε ένα πρόσωπο. Η αφαίρεση χρησιμοποιείται για τον καθορισμό μοτίβων, τα οποία γενικεύονται και παραμετροποιούνται. Χρησιμοποιείται για να εντοπιστούν κοινές ιδιοτήτων ενός συνόλου αντικειμένων χωρίς να ελέγχονται οι μη κοινές τους ιδιότητες ή οι διαδικασίες μέσω των οποίων ισχύουν (Wing J. , 2014). Η αξιολόγηση είναι βασικό κομμάτι της ΥΣ. Η αξιολόγηση είναι μια διαρκής διαδικασία για τους επιστήμονες των υπολογιστών που κατεξοχήν κομμάτι της δουλειάς τους είναι να δομούν λύσεις. Υπάρχουν, λοιπόν, συνεχείς αξιολογήσεις των λύσεων που δομούν, διότι υπάρχουν πολλά και διαφορετικά κριτήρια καταλληλότητας μιας λύσης σε σχέση με τον στόχο και τους περιορισμούς. Η επιστήμη των υπολογιστών εστιάζεται σε λύσεις που θα εκτελούνται από μηχανή. Ο αυτοματισμός, λοιπόν, είναι αναγκαίος, ώστε η λύση που θα δίνει ο υπολογιστής να ενέχει όσες περισσότερες παραμέτρους μπορούν να προβλεφθούν. Η ικανότητα ανάπτυξης ευρέων αυτοματοποιημένων λύσεων είναι σημαντικό μέρος της υπολογιστικής σκέψης.

Οι πρακτικές που περιλαμβάνονται στην υπολογιστική σκέψη είναι: η αποδόμηση του προβλήματος (problem decomposition), η δημιουργία ψηφιακών δομημάτων, η δοκιμή και αποσφαλμάτωση, η σταδιακή βελτίωση και η συνεργασία και δημιουργικότητα.

Το problem decomposition, είναι μια συνήθης πρακτική για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Είναι, όμως και, μια βασική προσέγγιση στην επίλυση υπολογιστικών προβλημάτων. Η αποδόμηση ενός προβλήματος και το «σπάσιμό του σε μικρότερα υποπροβλήματα καθιστά το ίδιο το πρόβλημα πιο εύκολο στην επίλυση, αλλά και την διαδικασία επίλυσης πιο διαχειρίσιμη. Η δημιουργία ψηφιακών δομημάτων, από τον μαθητή με χρήση μιας γλώσσας προγραμματισμού είναι θεμελιώδους σημασίας για την ΥΣ. Ο προγραμματισμός για την δημιουργία ψηφιακών

δομημάτων, είναι βασικό εργαλείο για την υποστήριξη των νοητικών διεργασιών που εμπλέκονται στην ΥΣ. Ένα έτοιμο ψηφιακό δόμημα προς χρήση, δεν μπορεί να εμπλέξει το άτομο στις μεταγνωστικές διεργασίες που προκύπτουν από τον προγραμματισμό του δομήματος. Η δοκιμή, ο εντοπισμός σφαλμάτων και η αποσφαλμάτωση αποτελούν μέρος της διαδικασίας αξιολόγησης μιας υπολογιστικής λύσης, όπως επίσης και μέρος της ανάπτυξης στρατηγικής για την αποδόμησης που ενός προβλήματος. Ο αυστηρός, συστηματικός έλεγχος και ο εντοπισμός σφαλμάτων είναι μια τέχνη στην επιστήμη των υπολογιστών, και ιδιαίτερα στην ανάπτυξη λογισμικού. (Grover & Pea, 2017) Η σταδιακή βελτίωση, αφορά τον έλεγχο και την αποσφαλμάτωση του κώδικα ενός προβλήματος σε συχνά στάδια, ώστε η βελτίωση να γίνεται βήμα προς βήμα και όχι σε ολοκληρωμένα προγράμματα, τα οποία δεν λειτουργούν. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται κυρίως από επαγγελματίες προγραμματιστές. Η δημιουργικότητα και η συνεργασία είναι μια πρακτικά η οποία στοχεύει από τη μια στην ενθάρρυνση της πρωτότυπης και δημιουργικής σκέψης για την επίλυση προβλημάτων και από την άλλη στην υποστήριξη της δημιουργίας ψηφιακών δομημάτων μέσα από την συνεργασία.

Οι υπολογιστικές πρακτικές που αναφέρθηκαν είναι αφηρημένες και υψηλού επιπέδου για να διδαχθούν σε σχολική. Μελέτες έχουν δείξει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να αναπτύξουν αυτές τις πρακτικές μέσω κλειστών εργασιών κωδικοποίησης, αλλά και ότι, η εστίαση σε ασκήσεις προγραμματισμού υψηλού επιπέδου δεν τους επιτρέπει να γενικεύσουν τις υπολογιστικές τους γνώσεις. Τα παραπάνω συνηγορούν στο ότι υπάρχει ανάγκη στροφής στον εντοπισμό του πώς οι μαθητές μπορούν να επινοήσουν, να εκφράσουν και να εφαρμόσουν υπολογιστικές πρακτικές α) με νόημα και β) για την επίλυση προβλημάτων από διαφορετικά υπολογιστικά πεδία. Για να γίνουν οι υπολογιστικές πρακτικές ένας αποδεκτός αναγνωρίσιμος παιδαγωγικός στόχος, πρέπει να γίνει πολύ περισσότερη δουλειά για την αποσαφήνιση της εκδήλωσής τους και των τρόπων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές. (Grizioti & Kynigos, 2021)

Στην παρούσα εργασία έχει δημιουργηθεί στον μικρόκοσμο του MaLT, ένα πρόγραμμα για την αξονική συμμετρία. Το ίδιο το MaLT ως ένα κονστραξιονιστικό προγραμματιστικό εργαλείο που υποστηρίζει γραπτό κώδικα αφήνει το περιθώριο να ενσωματωθούν στα προγράμματα που δημιουργούνται αυτό όλες οι πτυχές της ΥΣ. Το πρόγραμμα που θα δοθεί στους μαθητές έχει κατασκευαστεί με στόχο να ενισχύσει την αλγοριθμική σκέψη και την αναγνώριση μοτίβων. Επιπλέον, στους μαθητές θα τεθεί το πρόβλημα της αποσφαλμάτωσης.

2.4 Problem Posing

Ο όρος Problem Posing (PP) επινοήθηκε από τον Βραζιλιάνο παιδαγωγό Paulo Freire το 1970. Ως Problem Posing ορίζεται μια διδακτική μέθοδος που δίνει έμφαση στην κριτική σκέψη. Είναι μια εναλλακτική διδακτική προσέγγιση της παραδοσιακής μεθόδου διδασκαλίας, στην οποία ο μαθητής καλείται να δημιουργήσει ένα νέο πρόβλημα ή μια ερώτηση με βάση μια δεδομένη κατάσταση (Mishra & Iyer, Problem Posing Exercises (PPE): An instructional strategy for learning of complex material in introductory programming courses, 2013). Το PP έχει αναδειχθεί σε χρήσιμο εργαλείο για τον εντοπισμό ελλείμματος γνώσης και σε ικανό εργαλείο για εξερεύνηση γνώσης. Το PP στον άνθρωπο είναι εξαιρετικά περιορισμένη τόσο σε ποσότητα όσο και σε ποιότητα (Graesser, et al., 2008). Υπάρχουν πολύ λίγοι άνθρωποι που γνωρίζουν το έλλειμμα γνώσης τους (Hacker, Dunlosky, & Graesser, 1998) . Το PP εμπλέκει τον

μαθητή στην κατανόηση, στον μετασχηματισμό και την παραγωγή νέας γνώσης μέσω διαφόρων διαδικασιών εξερεύνησης και αναστοχασμού (Beal & Cohen, 2012). Για τον λόγο αυτό, οι δραστηριότητες του PP δημιουργούν στους μαθητές μια αίσθηση «ιδιοκτησίας» της γνώσης στους. Τα παραπάνω πλεονεκτήματα του PP ως διδακτική μέθοδος, ώθησε την ερευνητική κοινότητα σε μελέτες για το πώς να το εφαρμόσουν, ανάλογα με την στόχευση.

Οι (Stoyanova & Ellerton, 1996) περιγράφουν τριών ειδών καταστάσεις για PP: ελεύθερη κατάσταση, δομημένη κατάσταση και ημιδομημένη κατάσταση. Οι διαφορετικές καταστάσεις επηρεάζουν την ποιότητα των ερωτήσεων. Για το σχεδιασμό δραστηριοτήτων που βασίζονται σε PP μπορεί να χρησιμοποιηθούν μια από τις αναφερόμενες καταστάσεις ή ένας συνδυασμός τους, ανάλογα με τον στόχο της δραστηριότητας. Οι (Mishra & Iyer, 2015) διερευνήσαν το PP ως εκπαιδευτική στρατηγική και το PP ως εργαλείο αξιολόγησης. Στη μαθηματική εκπαίδευση, ως PP, επίσης, ορίζονται δραστηριότητες που υποστηρίζουν τους δασκάλους και μαθητές στην διατύπωση ένας προβλήματος με βάση ένα συγκεκριμένο προβληματικό πλαίσιο ή μια προβληματική κατάσταση. Οι (Cai & Hwang, 2020) προτείνουν για το μαθηματικό PP (MPP) την διεξαγωγή μεγάλης κλίμακας ερευνών μέσω παρεμβάσεων οι οποίες θα σχεδιαστούν με στόχο την διερεύνηση και τον εντοπισμό στοιχείων για το πώς το MPP μπορεί πραγματικά να υποστηρίξει την εκμάθηση των μαθηματικών από τους μαθητές και το ποιό είναι η προστιθέμενη αξία των δραστηριοτήτων PP έναντι των δραστηριοτήτων PS (problem solving) που είναι κοινές στις τάξεις. Οι (Singer & Voica, 2013), προτείνουν και εφαρμόζουν ένα πλαίσιο PP, ώστε να συλλέξουν πληροφορίες για αποτελεσματική διδασκαλία, δηλαδή, την διατύπωση προβλημάτων και ερωτήσεων που εμβαθύνουν στο γνωστικό αντικείμενο. Οι (Kontorovich & Koichu, 2009) προτείνουν ένα πλαίσιο έρευνας για το PP στα μαθηματικά, το οποίο εφαρμόστηκε και αναδείχθηκε αποτελεσματικό (Koichu & Kontorovich, 2013), (Kontorovich, Koichu, Leikin, & Berman, 2012). Το πλαίσιο αυτό έχει τέσσερεις πτυχές: Τους πόρους (μαθηματικά γεγονότα, ορισμοί, αλγοριθμικές διαδικασίες, διαδικασίες ρουτίνας και σχετικές ικανότητες του μαθηματικού λόγου), τις στρατηγικές (γενίκευση, αποσύνθεση του προβλήματος, δημιουργία ενός μοντέλου, δημιουργία παραλλαγής, what-if-notting, αλυσιδοποίηση και στόχευση σε συγκεκριμένη λύση), την ευστοχία (πεπιοιθήσεις και αυτορρύθμιση), και το κοινωνικό πλαίσιο στο οποίο εφαρμόζεται το PP.

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας θα επιχειρηθεί μια δραστηριότητα που στοχεύει στην ανίχνευση του κατά πόσο οι μαθητές είναι σε θέση να θέτουν ουσιώδη προβλήματα. Για την δόμηση και αξιολόγηση της δραστηριότητας και των αποτελεσμάτων της θα χρησιμοποιηθεί το πλαίσιο των (Kontorovich & Koichu, Towards a Comprehensive Framework of Mathematical Problem Posing, 2009). Συγκεκριμένα, η δραστηριότητα έχει στόχευση μιας συγκεκριμένης λύσης, δηλαδή δημιουργία ενός νέου προβλήματος, η λύση του οποίου θα απαιτούσε τη χρήση μιας συγκεκριμένης μαθηματικής προσέγγισης.

2.5 Αξονική Συμμετρίας

Η πιο αποπλιστική περιγραφή του γιατί η συμμετρία είναι μια έννοια ακαταμάχητη δίνεται από τον μαθηματικό (Newman, 1956): *«Η συμμετρία δημιουργεί μια παράλογη αλλά ταυτόχρονα θαυμαστή συγγένεια μεταξύ φαινομενικά άσχετων αντικειμένων, φαινομένων και θεωριών: π.χ. το γήινο μαγνητισμό, τα πέπλα των γυναικών, το πολωμένο φως, τη φυσική επιλογή, τη θεωρία ομάδων, τις σταθερές και τους*

μετασχηματισμούς, την εργασία των μελισσών στην κυψέλη, τη δομή του χώρου, τη σχεδίαση των βάζων, την κβαντική φυσική, τους σκαραβαίους, τα πέταλα των λουλουδιών, τις αποτυπώσεις της περίθλασης των ακτινών-Χ, τη διαίρεση των κυττάρων των θαλάσσιων αχινών, τη θέση ισορροπίας στους κρυστάλλους, τους καθεδρικούς ναούς, τις νιφάδες χιονιού, τη μουσική, τη θεωρία της σχετικότητας». Πράγματι, είναι παντού στον κόσμο μας. Την αντιλαμβανόμαστε ως ομορφιά, αισθητική, αρμονία και κομψότητα. *Οι έννοιες της συμμετρίας διέπουν τους χώρους της τέχνης, της επιστήμης και αγγίζουν τα μαθηματικά. Ίσως, αυτό που αποκαλείται μοντέρνα τέχνη να χαρακτηρίζεται από έλλειψη στοιχείων συμμετρίας. Ο καλλιτέχνης προσδοκεί να εκφράσει πιθανόν κάποια εσωτερικότητα, η οποία στερείται της καθαρής γεωμετρικής συμμετρίας του έξω κόσμου. Παραδείγματος χάριν, η φοβερή ασυμμετρία της Γκουέρνικα του Picasso μας αφήνει άφωνους, δεν ξέρουμε τι να σκεφτούμε. Στη νοερή προσπάθεια μας να συνδέσουμε τα κομμάτια της, προκαλείται μια αγωνία, κι ίσως αυτό να ήθελε να προβάλλει ο καλλιτέχνης: την εσωτερική του αγωνία που δεν θα μπορούσε να εκφρασθεί μέσω συμμετρικών (αρμονικών) δομών.* (Μαυρίδης, 2004)

Είναι επόμενο, για έναν μαθητή να έχει νόημα να την μελετήσει βαθύτερα, όχι μόνο για τις ιδιότητες της συμμετρίας, που έχουν εφαρμογή σε διάφορα επιστημονικά πεδία, αλλά και για να αναγνωρίσει τα ερεθίσματα που λαμβάνει από το φυσικό και τεχνολογικό περιβάλλον του.

2.5.1 Οδηγίες ΑΠΣ για τη διδασκαλία της αξονικής συμμετρίας

Με βάση το τρέχον Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο και Πρόγραμμα Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) και το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών ΑΠΣ (2003), η έννοια της αξονικής συμμετρίας διδάσκεται στο μάθημα των μαθηματικών από την Α Δημοτικού έως και την Α Γυμνασίου. Στην υπόλοιπη πορεία των μαθητών στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση η αξονική συμμετρία δεν διδάσκεται, αλλά χρησιμοποιείται τόσο στο μάθημα των Μαθηματικών, όσο και σε άλλα μαθήματα. Συγκεκριμένα, οι στόχοι που θέτει το ΑΠΣ για τις δύο πρώτες τάξεις του Δημοτικού είναι να παρατηρούν εικόνες και σχήματα συμμετρικά ως προς άξονα και να συμπληρώνουν το συμμετρικό ενός σχήματος. Στις τάξεις Γ' και Δ' Δημοτικού να εξασκηθούν στην κατασκευή συμμετρικών σχημάτων ως προς άξονα σε τετραγωνισμένο χαρτί, ενώ στις τάξεις Ε' και ΣΤ' Δημοτικού να σχεδιάζουν το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς άξονα και να διενεργούν μεταφορές, μεγεθύνσεις και μικρύνσεις. Στην, δε, Α Γυμνασίου για τους μαθητές ενδείκνυται η αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών, παράλληλα με τη χρήση άλλων μέσων (όπως το διαφανές χαρτί, τα γεωμετρικά όργανα κτλ.) με σκοπό όχι μόνο την κατασκευή συμμετρικών σχημάτων αλλά και την κατανόηση και την αξιοποίηση των ιδιοτήτων της συμμετρίας. Είναι η πρώτη φορά στην διαδικασία μάθησης της αξονικής συμμετρίας που οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν και να γενικεύσουν τις ιδιότητες της αξονικής συμμετρίας στην μεσοκάθετο της βάσης ισοσκελούς τριγώνου. Επιπλέον στο ΔΕΠΠΣ προβλέπεται και προτείνεται διαθεματικό σχέδιο εργασίας με τίτλο «η συμμετρία στη ζωή μας» κατά το οποίο οι μαθητές καλούνται, εργαζόμενοι σε ομάδες, να εντοπίσουν συμμετρικά σχήματα από διάφορες κατηγορίες κατασκευών της καθημερινής ζωής του σήμερα αλλά και στο χθες, να τις παρουσιάζουν στην ολομέλεια και να συζητήσουν για το ρόλο και το είδος της συμμετρίας σε διάφορες περιπτώσεις.

Γενικά, κάθε σχεδιαζόμενη διδακτική παρέμβαση χρήζει να ευθυγραμμίζεται με τους στόχους που τίθενται από το ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ, ώστε να προσεγγίζεται το

επιδιωκόμενο μαθησιακό αποτέλεσμα. Έτσι, και στην παρούσα εργασία, πραγματοποιείται παρέμβαση με δραστηριότητες που αφορούν στην κατασκευή φιγούρων συμμετρικών ως προς άξονα και φιγούρων που έχουν άξονα συμμετρίας, στοχεύοντας στην γενίκευση των ιδιοτήτων της αξονικής συμμετρίας μέσα σε ένα διαθεματικό περιεχόμενο.

2.5.2 Βιβλιογραφική Επισκόπηση

Η έννοια της συμμετρίας είναι πλούσια σε αναφορές τόσο σε μαθηματικό επίπεδο, όσο και σε κοινωνικό. Για τον λόγο αυτό, ένα μέρος της εκπαιδευτικής έρευνας εστιάστηκε στον αν οι μαθητές αντιλαμβάνονται την έννοια της συμμετρίας και στο ποιες είναι οι δυσκολίες των μαθητών σε σχέση με τη συμμετρία και τις ιδιότητές της.

Οι (Leikin, Berman, & Zaslavsky, 2000) πραγματοποιούν έρευνα με στόχο να εντοπίσουν αν οι γνώσεις, των φοιτητών παιδαγωγικών, για την αξονική συμμετρία μπορούν να αλλάξουν κατά τη διάρκεια του μαθήματος “Learning Through Teaching” (LTT) στο οποίο οι φοιτητές καλούνταν να οργανώσουν ένα ολοκληρωμένο μάθημα για την αξονική συμμετρία το οποίο και θα παρουσίαζαν σε μαθητές σχολείου. Πριν την οργάνωση του μαθήματος οι φοιτητές απάντησαν σε ένα τεστ πρότερης γνώσης, από το οποίο αναδείχθηκε, πως οι φοιτητές είχαν έλλειμα γνώσης της αξονικής συμμετρίας, δυσκολευτήκαν να φέρουν άξονες συμμετρίας ειδικά αν οι άξονες δεν ήταν κατακόρυφοι ή οριζόντιοι και επιπλέον, έφεραν άξονες συμμετρίας σε σχήματα μη συμμετρικά.

Τα ευρήματα της έρευνας έδειξαν πως η μέθοδος LTT μπορεί να χρησιμεύσει ως εργαλείο για το ανάπτυξη των μαθηματικών γνώσεων των φοιτητών. Μια πιθανή εξήγηση είναι πως οι φοιτητές έπρεπε να συζητήσουν και να αναστοχαστούν τόσο επί της δικής τους διδασκαλίας, όσο και επί της διδασκαλίας των ομοτίμων τους.

Οι (Seah & Horne, 2019) θέλουν να ελέγξουν την ικανότητα των μαθητών να αιτιολογούν σχέσεις συμμετρίας. Πραγματοποίησαν μια μελέτη που απευθύνθηκε σε, όλων των τύπων τα, σχολεία της Αυστραλίας και το δείγμα ήταν μαθητές ηλικίας από 4 έως 10 ετών. Η μελέτη αυτή στηρίχτηκε σε απαντητικές φόρμες. Στις φόρμες υπήρχαν τρία ζητούμενα. 1) «Σε δοσμένα σχήματα να φέρετε άξονα συμμετρίας, παρότι δεν είχαν όλα τα σχήματα άξονα συμμετρίας», 2) «Να καταγράψετε τα σχήματα που έχουν άξονα ή / και κέντρο συμμετρίας και εκείνα που δεν έχουν τίποτα από τα δύο», 3) «να εξηγήσετε το πως αντιλαμβάνεστε αν ένα σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας.»

Τα αποτελέσματα, που αναλύθηκαν ανά ηλικιακή ομάδα και ανά τύπο σχολείου, έδειξαν έλλειψη κατανόησης της έννοιας της συμμετρίας, ιδιαίτερα της κεντρικής. Στη συζήτηση οι ερευνήτριες τονίζουν πως η κατανόηση της έννοιας της συμμετρίας πρέπει καταρχάς να χτιστεί στις σχέσεις γωνιών και επιπλέον πως πρέπει να γίνει εκτενής έρευνα σχετικά με τα μέσα σημειωτικής διαμεσολάβησης που θα βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν κατανόηση της έννοιας της συμμετρίας με έμφαση στο δόμημα και τα σύμβολα και όχι στην γλώσσα και την οπτικοποίηση.

Οι (Xistouiri & Pitta-Pantazi, 2006) μελετούν τον ρόλο που παίζει η ικανότητα χωρικής οπτικοποίησης και η ικανότητα χωρικού προσανατολισμού των μαθητών στην απόδοσή τους σε εργασίες αξονικής συμμετρίας.

Για να απαντήσουν στα ερευνητικά τους ερωτήματα

1)πως σχετίζονται η χωρική οπτικοποίηση, η ικανότητα χωρικού προσανατολισμού, η επίδοση στα μαθηματικά με την απόδοση σε εργασίες αξονικής συμμετρίας.

2)ποια από τις δύο χωρικές ικανότητες, χωρικού προσανατολισμού – χωρική οπτικοποίηση, σχετίζονται με την απόδοση σε εργασίες αξονικής συμμετρίας

3)αλλάζουν στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού σχολείου η χωρική οπτικοποίηση, η ικανότητα χωρικού προσανατολισμού και η απόδοση σε εργασίες αξονικής συμμετρίας

4)ποιοι παράγοντες, από τους: χωρική οπτικοποίηση, ικανότητα χωρικού προσανατολισμού, επίδοση στα μαθηματικά είναι πιο πιθανό να προβλέψουν την απόδοση σε εργασίες αξονικής συμμετρίας

επιστρατεύουν δείγμα 496 μαθητών Δημοτικού σχολείου, εκ των οποίων 244 αγόρια και 248 κορίτσια. Οι 154 μαθητές φοιτούσαν στην 4η Δημοτικού, οι 206 στην 5η Δημοτικού και οι 132 στην 6η Δημοτικού. Τα εργαλεία του πειράματος που διεξήγαγαν ήταν δύο ψυχομετρικό τεστ, μια αντικειμενική επίδοση στο μάθημα των μαθηματικών από τους δασκάλους των μαθητών καθώς και κάποιες εργασίες με χαρτί και μολύβι που αφορούν αξονική συμμετρία.

Στα αποτελέσματα

Τα αγόρια πήγαν, λίγο, καλύτερα από τα κορίτσια στο τεστ στην ικανότητα χωρικού προσανατολισμού. Δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ φύλων στο τεστ για την ικανότητα χωρικής οπτικοποίησης. Εμφανίστηκε στατιστικώς μη σημαντική διαφορά μεταξύ φύλων στην εργασία αξονικής συμμετρίας. Οι μαθητές φάνηκε να έχουν μεγαλύτερη ικανότητα χωρικού προσανατολισμού, παρά χωρικής οπτικοποίησης. Εμφανίστηκε υψηλή συσχέτιση της επίδοσης, των μαθητών, στα μαθηματικά τόσο με την ικανότητα χωρικής οπτικοποίησης, όσο και με την ικανότητα χωρικού προσανατολισμού. Επίσης εμφανίστηκε συσχέτιση μεταξύ ικανότητα χωρικής οπτικοποίησης και ικανότητας χωρικού προσανατολισμού. Η απόδοση σε εργασίες αξονικής συμμετρίας φάνηκε να συσχετίζονται με όλες τις μεταβλητές με θετική, όχι πολύ υψηλή, συσχέτιση. Συγκεκριμένα: Συσχέτιση απόδοσης σε εργασίες αξονικής συμμετρίας - ικανότητα χωρικού προσανατολισμού: $r=0.43$, Συσχέτιση απόδοσης σε εργασίες αξονικής συμμετρίας - ικανότητα χωρικής οπτικοποίησης : $r=0.298$, Συσχέτιση απόδοσης σε εργασίες αξονικής συμμετρίας – επίδοση στα μαθηματικά: $r=0.304$. Η τάξη φοίτησης φάνηκε να επηρεάζεται μόνο από την ικανότητα χωρικού προσανατολισμού. Φάνηκε πως όλες οι μεταβλητές προβλέπουν την απόδοση των μαθητών σε εργασίες αξονικής συμμετρίας και μάλιστα με την παρακάτω φθίνουσα σειρά: επίδοση στα μαθηματικά, ικανότητα χωρικού προσανατολισμού και τέλος η ικανότητα χωρικής οπτικοποίησης.

Όσο η τεχνολογία εξελίσσεται και όσο οι δεξιότητες του 21^{ου} αιώνα γίνονται απαιτητές για τους νέους, τόσο επιτακτικότερη προκύπτει η ανάγκη της εύρεσης μεθόδων ενσωμάτωσης των ψηφιακών εργαλείων στην εκπαίδευση. Όμως, με την πληθώρα των ψηφιακών εργαλείων, η προσοχή στρέφεται, όχι απλώς στην στείρα ενσωμάτωσή τους, αλλά στην ανίχνευση και αξιοποίηση εργαλείων που προσδίδουν παιδαγωγική αξία. Δηλαδή, που επιτρέπουν μια οπτική στην εκμάθηση των αντικειμένων που δεν ήταν προσβάσιμη με την παραδοσιακή διδασκαλία.

Η έρευνα, λοιπόν, έχει στραφεί στα ψηφιακά μέσα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν, στον τρόπο με τον οποίο μπορούν να ενσωματωθούν, αλλά και στο είδος των μαθησιακών αποτελεσμάτων που μπορούν να δώσουν.

Όπως και η παρούσα έρευνα, αρκετές έρευνες έστρεψαν την προσοχή τους στις αντιλήψεις που αναπτύσσουν οι μαθητές για τη συμμετρία μέσω μιας σειράς δραστηριοτήτων σε ψηφιακά συστήματα, όπως ο χελωνόκοσμος και τα DGS, που εμπλέκουν τους μαθητές με την έννοια της συμμετρίας.

Οι (Hoyles & Healy, 1997) μελετούν το πώς αλλάζουν και εξελίσσονται τα νοήματα των μαθητών για την αξονική συμμετρία με τη διαμεσολάβηση του χελωνόκοσμου. Προκειμένου να δημιουργήσουν μια σειρά δραστηριοτήτων στον χελωνόκοσμο, αλλά και πρόσθετα βοηθητικά εργαλεία, αρχικά διερευνούν την πρότερη γνώση των μαθητών. Δηλαδή, στο πρώτο στάδιο διενεργούν μια γραπτή δοκιμασία για 50 μαθητές στην αξονική συμμετρία. Στη συνέχεια πραγματοποιούν συνεντεύξεις όλων των μαθητών. Στο στάδιο αυτό, της διερεύνησης, φαίνεται πως οι μαθητές δεν έχουν εδραιωμένες στρατηγικές αιτιολόγησης και επίλυσης προβλημάτων για την αξονική συμμετρία. Στο δεύτερο στάδιο, οργανώνουν δραστηριότητες και επιπλέον εργαλεία στον χελωνόκοσμο, προκειμένου να ενισχύσουν την διερεύνηση των ιδιοτήτων της συμμετρίας από τους μαθητές και μάλιστα με τρόπο ευθυγραμμισμένο με το ΑΠΣ της Μεγάλης Βρετανίας. Ζητούν από τους μαθητές να εργαστούν σε ζευγάρια, ώστε να ολοκληρώσουν τρεις κατασκευές: κατασκευή ανάκλασης σχήματος με υποστηρικτικά εργαλεία, κατασκευή άξονα συμμετρίας σε συμμετρικές φιγούρες και κατασκευή ανάκλασης σχήματος. Από την βιντεοσκόπηση των ενεργειών και συζητήσεων των μαθητών, φάνηκε πως οι μαθητές κατάφεραν να ολοκληρώσουν και τα τρία ζητούμενα, αναπτύσσοντας ποικίλες στρατηγικές, οι οποίες παρότι αποτελεσματικές αποκλίνουν από τις επίσημες μαθηματικές μεθόδους. Στο τρίτο στάδιο της έρευνας, ζητούν από τους μαθητές να πραγματοποιήσουν μια δραστηριότητα στην αξονική συμμετρία, με χρήση γεωμετρικών οργάνων και χαρτιού. Εδώ θέλησαν να εντοπίζουν αν οι μαθητές είναι σε θέση να μεταφέρουν τα νοήματα που αναπτύσσουν όταν χρησιμοποιούν ψηφιακά μέσα, σε ένα διαφορετικό περιβάλλον, όπως αυτό των παραδοσιακών μαθηματικών. Εδώ, με κάποια υποστήριξη, φάνηκε πως οι μαθητές κατάφεραν να γενικεύσουν τα νοήματα που ανέπτυξαν.

Παρά τα ενθαρρυντικά αποτελέσματα τις έρευνας, οι ερευνήτριες συζητούν πως πρέπει να καλοδεχτούμε την διαφορετικότητα στην αντίληψη και έκφραση μαθηματικών νοημάτων, αν θέλουμε να αξιοποιήσουμε την πρόσθετη παιδαγωγική αξίας των ψηφιακών μέσων στην εκπαίδευση.

Η (Healy, 2003) πραγματοποιεί μια μελέτη προκειμένου να ελέγξει δύο ζητήματα. Αφενός αν ένα σύστημα μάθησης μπορεί να δώσει τον χώρο στους μαθητές να μεταβούν από εικόνες που έχουν άξονα συμμετρίας σε εικόνες που είναι συμμετρικές ως προς άξονα και στην συναρτησιακή τους σχέση. Αφετέρου, το πώς τα νοήματα που οικοδομούν οι μαθητές επηρεάζονται από τα διαφορετικά μέσα που χρησιμοποιούν. Για τον λόγο αυτό δημιουργεί σε δύο διαφορετικούς μικρόκοσμούς, στο Cabri Geometry και στον χελωνόκοσμο, δραστηριότητες με τις ίδιες μαθηματικές απαιτήσεις ώστε να συγκρίνει τα «μαθησιακά αποτελέσματα» από το καθένα.

Το δείγμα της έρευνας ήταν 24 μαθητές 12 – 13 ετών, οι οποίοι δημιούργησαν 12 ομάδες των 2 ατόμων. 6 ομάδες δούλεψαν με το Cabri και 6 με τον χελωνόκοσμο.

Οι δραστηριότητες πραγματοποιήθηκαν σε 5 90λεπτες συνεδρίες. Στους μαθητές τέθηκε το πρόβλημα της κατασκευής εργαλείου το οποίο θα παράγει την ανάκλαση οποιουδήποτε δοσμένου αντικειμένου.

Στα αποτελέσματα φάνηκε πως οι μαθητές «χαρτογραφούσαν» ευκολότερα εξαρτημένες – ανεξάρτητες μεταβλητές όταν δούλευαν στον χελωνόκοσμο. Όμως, τόσο οι μαθητές που δούλευαν στο Cabri, όσο και οι μαθητές που δούλευαν στον χελωνόκοσμο κατάφεραν να ενσωματώσουν στις κατασκευές τους τη χρήση ενδογενούς και εξωγενούς συμμετρίας των εικόνων. Στη συνέχεια έστρεφαν την προσοχή τους σε συναρτησιακές πτυχές της ανάκλασης.

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση της ερευνήτριας ήταν πως οι μαθητές φάνηκε να δεσμεύτηκαν ισχυρότερα με την δραστηριότητα στις πτυχές της στις οποίες μπορούσαν να «εισάγουν» εμπειρίες από τις κοινωνικές τους συμπεριφορές που είναι αποκομμένες από την διδασκαλία των μαθηματικών. Η ερευνήτρια ερμηνεύει την παρατήρηση ως εξής: *τα εργαλεία που είναι ικανά να προκαλέσουν την μαθηματική γνώση σε μια δραστηριότητα είναι εκείνα στα οποία τα ψηφιακά αντικείμενα που οικοδομούνται στην οθόνη αντιπροσωπεύουν μια εικονική / φυσική κοινωνική κατάσταση σε συνδυασμό με μια μαθηματική κατάσταση.*

Η (Healy, The role of tool and teacher mediation in the construction of meanings for reflection, 2004) παρουσιάζει μελέτη σχεδίασης συστημάτων μάθησης στα οποία, η γνώση των μαθητών περί ανάκλασης προσεγγίζει την επίσημη ακαδημαϊκή γνώση αυτή της ισομετρίας. Η μελέτη πραγματοποιήθηκε σε δύο στάδια. Στάδιο σχεδιασμού και στάδιο σύγκρισης.

Για το στάδιο του σχεδιασμού επιστρατεύτηκαν δύο μικρόκοσμοι και δύο διδακτικές προσεγγίσεις δημιουργώντας 4 συστήματα παρατήρησης και σύγκρισης. Οι μικρόκοσμοι ήταν DGE, δηλαδή σύστημα άμεσου δυναμικού χειρισμού ευκλείδειων γεωμετρικών αντικειμένων και MTG, δηλαδή, σύστημα πολλαπλών χελωνών στο δισδιάστατο επίπεδο που ελέγχονται με γραπτό κώδικα. Οι διδακτικές προσεγγίσεις ήταν FO (filling outward flow), δηλαδή, η εσωτερική γνώση προσεγγίζει σταδιακά την επίσημη ακαδημαϊκή και FI (filling inward flow), δηλαδή, η ακαδημαϊκή γνώση προσεγγίζει και συνδέεται με τις αντιλήψεις των μαθητών. Οι παρεμβάσεις πραγματοποιήθηκαν σε μορφή συζήτησης μακριά από τον υπολογιστή και για τον κάθε τύπο υιοθετήθηκαν διαφορετικές διδακτικές στρατηγικές. Οι FO παρεμβάσεις πραγματοποιήθηκαν πριν τις συνεδρίες με τους μικρόκοσμους με διδακτικές στρατηγικές 1)παρουσίαση μοντέλων με χρήση μαθηματικής γλώσσας, 2)ενθάρρυνση μαθητών χρησιμοποιήσουν επίσημη ορολογία, 3)επισήμανση λαθών, 4)παρουσίαση περισσότερων από μια σωστών προσεγγίσεων της λύσης. Οι FI παρεμβάσεις πραγματοποιήθηκαν μετά τις συνεδρίες με τους μικρόκοσμους με διδακτικές στρατηγικές 1)ερμηνεία των εκφράσεων του ερευνητή, 2)αναγνώριση και αξιολόγηση ταυτόσημων λύσεων, 3)αναγνώριση και αξιολόγηση διαφορετικών λύσεων.

Για καθένα από τα 4 συστήματα: Εργάστηκαν 6 μαθήτριες, ηλικίας 13 – 14 ετών, οι οποίες δούλευαν σε ζευγάρια, παρακολούθηθηκαν και αναλύθηκαν σε βάθος οι διαδράσεις των μαθητριών με την ερευνήτρια και τα συστήματα, οργανώθηκαν μια 45' διδακτική παρέμβαση και πέντε 90' συνεδρίες με τους μικρόκοσμους.

Σύγκριση αποτελεσμάτων:

Στα συστήματα DGE, η ανάκληση τείνει να αντιπροσωπεύεται από μια σχέση αντιστοίχισης μεταξύ ίσων κάθετων αποστάσεων, ενώ στα συστήματα MTG από

χαρτογράφηση ενός γκρουπ χελωνών σε ένα άλλο μέσω ίσων γωνιών και ίσων αποστάσεων.

Τα 4 συστήματα φάνηκαν ικανά να ενισχύσουν τους μαθητές να επεκτείνουν τις γνώσεις αναφορικά με τη συμμετρία. Το σύστημα DGE_FO, ήταν αυτό που φάνηκε να επιτρέπει στους μαθητές την διερεύνηση διαφορετικών προσεγγίσεων λύσης της ίδιας γεωμετρικής κατασκευής. Το σύστημα DGE_FI, φάνηκε να είναι πιο κοντά στο πώς τα βιβλία περιγράφουν την αξονική συμμετρία και άρα αυτό που προσέγγισαν ευκολότερα οι μαθητές. Τέλος το σύστημα MTG_FI ήταν το μόνο στο οποίο οι μαθητές αντιλήφθηκαν τα γεωμετρικά αντικείμενα σαν ένα σύνολο σημείων.

Η (Knuchel, 2004) κάνει μια παρουσίαση διδακτικών πειραμάτων που εφαρμόστηκαν στην Μοντάνα των ΗΠΑ και ήταν αποτελεσματικά στον πεδίο της συμμετρίας. Στην πλειονότητα των διδακτικών πειραμάτων εντοπίζεται ο συνδυασμός στοιχείων διαθεματικότητας με χρήση DGS. Η Knuchel υποστηρίζει πως οι μαθητές δείχνουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον, αλλά και βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της συμμετρίας, σαν μαθηματικό αντικείμενο, όταν την έχουν επεξεργαστεί μέσα από εφαρμογές της σε μη μαθηματικά αντικείμενα. Ο δε συνδυασμός της διαθεματικότητας με τα DGS, επιτρέπει στους μαθητές να δομήσουν και να ελέγξουν δικές τους νοητικές συνδέσεις της έννοιας της συμμετρίας, οι οποίες μετά από αυτή τη διεργασία γίνονται ισχυρότερες.

Οι (Ng & Sinclair, 2015) πραγματοποιούν μια διδακτική παρέμβαση, κάνοντας δύο μονόωρα μαθήματα, για να εντοπίσουν και να αναλύσουν την αλλαγή του τρόπου σκέψης των μαθητών αναφορικά με την αξονική συμμετρία όταν την επεξεργάζονται σε ένα DGS. Για την διδακτική παρέμβαση ετοιμάζουν στο Sketchpad μια εφαρμογή με τουβλάκια τοποθετημένα συμμετρικά ως προς άξονα' τόσο τα τουβλάκια όσο και ο άξονας μπορούν να μετακινηθούν. Οι μαθητές μετακινούσαν κατάλληλα τα τουβλάκια προκειμένου να κατασκευάσουν φιγούρες συμμετρικές ως προς άξονα κάθε φορά. Συνδυαστικά με το δόμημα οι μαθητές χρησιμοποιούσαν χαρτί και μολύβι. Δύο ερευνητές και ο εκπαιδευτικός συντόνιζαν, παρακολουθούσαν και υποστήριζαν την παρέμβαση. Τα αποτελέσματα της παρέμβασης ήταν πολύ ενθαρρυντικά, καθώς φάνηκε πως οι μαθητές εδραίωσαν νέο λεξιλόγιο για να περιγράφουν τις κινήσεις από τα τουβλάκια, αλλά ανέπτυξαν και νέα αίσθηση των κινήσεων, όπως φάνηκε από τις χειρονομίες που χρησιμοποιούσαν όσο η παρέμβαση εξελισσόταν. Οι ερευνητές μεταφράζουν την αποτελεσματικότητα της παρέμβασης σε επιτυχή συνδυασμό χρήσης DGS με ομαδοσυνεργατική μάθηση που υποστηρίζεται από τον εκπαιδευτικό.

Η βιβλιογραφική ανασκόπηση για την αξονική συμμετρία, φανερώνει αρχικά πως οι κοινές παρανοήσεις για την αξονική συμμετρία εμφανίζονται ανεπηρέαστες από την πάροδο του χρόνου. Αυτό έχει ένα ενδιαφέρον, καθώς με το πέρασμα των χρόνων τα προγράμματα σπουδών παγκοσμίως αναμορφώνονται και προσαρμόζονται σε αυτούς που απευθύνονται. Άρα, εκείνες οι παράμετροι που επηρεάζουν την «αστάθεια» των μαθητών απέναντι στην αξονική συμμετρία, πιθανά δεν έχει εντοπιστεί ή αντιμετωπιστεί κατάλληλα.

Ένα μέρος των ερευνών μελετά τις αντιλήψεις που αναπτύσσουν οι μαθητές για την αξονική συμμετρία, όταν τους παρουσιάζεται σε συνδυασμό με ψηφιακά εργαλεία που επιτρέπουν και ενισχύουν την διερεύνηση των σχέσεων των

αντικειμένων. Σε αυτές τις μελέτες εντοπίζεται στόχευση σε τρεις άξονες. Ο πρώτος άξονας είναι η ανάδειξη κατάλληλων ψηφιακών εργαλείων που ενισχύουν την μάθηση. Ο δεύτερος άξονας, αφορά στην τρόπο με τον οποίο, μετασχηματίζονται τα νοήματα που αναπτύσσουν οι μαθητές όταν δουλεύουν με ψηφιακά εργαλεία και τέλος, ο τρίτος άξονας αφορά στην ανάπτυξη της ικανότητας, των μαθητών, να αιτιολογούν, όταν δουλεύουν με ψηφιακά εργαλεία.

Από τις μελέτες αυτές προκύπτει ξεκάθαρα ο χελωνόκοσμος ως το κατεξοχήν εργαλείο, στο οποίο οι μαθητές προγραμματίζοντας την χελώνα να εκτελέσει κινήσεις, μαθαίνουν να σκέφτονται σωστά για την συμμετρία και μάλιστα, να γενικεύσουν τα νοήματά τους και σε άλλα περιεχόμενα. Βεβαίως, προκύπτουν και δύο πολύ ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις. Η πρώτη αφορά τον μαθηματικό φορμαλισμό στην εκτέλεση των λύσεων. Πρέπει να υποδεχτούμε μια μη επίσημη εκδοχή των μαθηματικών, αν θέλουμε να αξιοποιήσουμε την πρόσθετη παιδαγωγική αξία που προσφέρουν τα ψηφιακά εργαλεία. Η δεύτερη είναι πως οι μαθητές φάνηκε να εμπλέκονται εντονότερα με δραστηριότητες, στις οποίες είχαν την ευκαιρία να εισάγουν δικές τους εμπειρίες και εικόνες.

Επίσης, τα DGS που εξετάζονται, δηλαδή, το Cabri και το Sketch Pad, κρίνονται σαν ικανά εργαλεία για να ενισχυθεί η διερεύνηση των μαθητών για την αξονική συμμετρία, όμως, με κατάλληλη παιδαγωγική υποστήριξη τόσο κατά την ανάπτυξη των δραστηριοτήτων όσο και κατά την εφαρμογή τους. Εδώ έχει ενδιαφέρον να τονιστεί πως το Cabri Geometry έδωσε στους μαθητές την δυνατότητα να δημιουργήσουν εργαλείο παραγωγής συμμετριών, χάρις στα εργαλεία που ενσωματώνει. Από την άλλη το Sketchpad ενίσχυσε τους μαθητές, τόσο στον αποκτήσουν χωρικό προσανατολισμό των κινήσεων, όσο και να αναπτύξουν κατάλληλο λεξιλόγιο για την περιγραφή τους.

Μια βασική αναφερόμενη διδακτική μέθοδος που εφαρμόστηκε στις δραστηριότητες των μελετών ήταν η ομαδοσυνεργατική μάθηση, η οποία βοήθησε πολύ τους μαθητές να αναπτύξουν και να εδραιώσουν την γνώση τους.

Ένα κενό που εντοπίστηκε στην βιβλιογραφία αφορά την διαθεματική προσέγγιση της έννοιας της συμμετρίας. Η (Knuchel, 2004), αναφέρεται σε σενάρια διδασκαλία που έχουν διαθεματικές προσεγγίσεις για την αξονική συμμετρίας, και τα οποία αν συνδυαστούν με GDS οδηγούν σε επιθυμητά μαθησιακά αποτελέσματα. Όμως στην αναζήτηση βιβλιογραφίας δεν εντοπίστηκε κάποια τέτοια έρευνα.

Μια διαθεματική προσέγγιση για την αξονική συμμετρία μοιάζει ταιριαστή, καθώς η ίδια η συμμετρία αφορά μια πληθώρα θεμάτων, έξω από μαθηματικά περιεχόμενα. Επιπροσθέτως, αν εδώ τοποθετήσουμε την παρατήρηση της Healy, ότι δηλαδή οι μαθητές δεσμεύονται ισχυρότερα με δραστηριότητες στις οποίες μπορούν να ενσωματώσουν προσωπικές τους εμπειρίες, θα προέκυπτε πως η διαθεματική προσέγγιση της συμμετρίας χρήζει έρευνας. Θα ανέπτυσαν οι μαθητές, πιο στιβαρές στρατηγικές για να σκέφτονται για την αξονική συμμετρία, αν καλούνταν να την αντιληφθούν και να την εφαρμόσουν σε μια καθημερινή, μη μαθηματική κατάσταση;

Ένα άλλο κενό που εντοπίζεται στην βιβλιογραφία αφορά στις διδακτικές μεθόδους που εφαρμόζονται. Κάθε διδακτική παρέμβαση πιά, καθώς οργανώνεται και αναπτύσσετε για να «μελετήσει» την μάθηση των παιδιών, οφείλει να λάβει υπόψιν της πως απευθύνεται σε ανθρώπους που θα ζήσουν και θα εργαστούν

στον 21^ο αιώνα. Για τον λόγο αυτό ο σχεδιασμός κάθε δραστηριότητας θα πρέπει να εμπεριέχει και διδακτικές μεθόδους που υποστηρίζουν τις δεξιότητες του 21^{ου} αιώνα, όπως, κριτική σκέψη, συνεργασία, δημιουργικότητα και άλλες.

Στηριγμένη στα συμπεράσματα της βιβλιογραφίας και τις παρατηρήσεις της, η ερευνήτρια οργάνωσε έρευνα, η οποία στόχευσε στον εντοπισμό ενδείξεων για πώς σκέφτονται και ποια νοήματα αναπτύσσουν οι μαθητές για την αξονική συμμετρία. Συγκεκριμένα πώς νοηματοδοτούν οι μαθητές τις σχέσεις γωνιών στο πλαίσιο της αξονικής συμμετρίας. Για τον σκοπό αυτό ανέπτυξε μικρόκοσμο, σε εργαλείο που ενσωματώνει τον χελωνόκοσμο και τον δυναμικό χειρισμό, ο οποίος περιγράφει ένα διαθεματικό περικείμενο που υποστηρίχτηκε από δραστηριότητες που ενισχύουν την κριτική σκέψη.

3. Μεθοδολογία

3.1 Στόχοι της έρευνας

Η εργασία αυτή είχε στόχους, τόσο ερευνητικού χαρακτήρα, όσο και διδακτικού προσανατολισμού.

Ο ερευνητικός στόχος της εργασίας είναι η ανίχνευση ενδείξεων για το αν και κατά πόσο δομούνται νοήματα για τις σχέσεις γωνιών στο πλαίσιο της αξονικής συμμετρίας, όταν παρουσιάζονται μέσω ενός συνδυασμού κονστραξιονιστικού ψηφιακού εργαλείου, με δόμημα που συνδέεται με την κοινωνική ζωή των μαθητών.

Η στοχοθεσία, από την άποψη του διδακτικού προσανατολισμού, εστιάζεται σε δεξιότητες του 21^{ου} αιώνα. Συγκεκριμένα, την επικοινωνία, την συνεργασία και την κριτική σκέψη. Με βάση την ταξινόμια του Bloom, ορίζονται στόχοι στο επίπεδο της κατανόησης, της ανάλυσης και της σύνθεσης.

Ειδικότερα οι μαθησιακοί στόχοι της εργασίας είναι οι μαθητές, εργαζόμενοι σε ομάδες, να είναι σε θέση:

- Να εξηγούν τον τρόπο με τον οποίο κατασκεύασαν αξονική συμμετρία, όταν θα έχουν κάνει διορθώσεις στο ψηφιακό μοντέλο με τη χρήση δυναμικού χειρισμού.
- Να διακρίνουν το λάθος του κώδικα που επηρεάζει την αξονική συμμετρία, όταν θα έχουν κανόνες – στρατηγικές κατασκευή τους.
- Να σχεδιάσουν ένα νέο πρόβλημα, παρόμοιο με αυτό που έλυσαν, όταν θα έχουν διορθώσει τον κώδικα του προγράμματος.

3.2 Επιλογή ερευνητικής μεθόδου

Η ερευνητική μέθοδος που επιλέχθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία, για την διεξαγωγή του πειράματος, ήταν αυτή της έρευνας σχεδιασμού. Για την ακρίβεια, η ερευνητική διαδικασία σχεδιάστηκε στα πρότυπα της έρευνας σχεδιασμού, αλλά θα διεξάγονταν μόνο ένας κύκλος έρευνας, άρα θα μπορούσε να περιγραφεί σαν πείραμα σχεδιασμού.

Ο όρος έρευνα σχεδιασμού περιγράφει ένα ερευνητικό παράδειγμα που ορίζεται από τους (Wang & Hannafin, 2005) ως *μια συστηματική αλλά ευέλικτη μεθοδολογία που στοχεύει στη βελτίωση της εκπαιδευτικής πρακτικής μέσω επαναληπτικής ανάλυσης, σχεδιασμού, ανάπτυξης και υλοποίησης, βασισμένη στη συνεργασία μεταξύ ερευνητών και επαγγελματιών σε πραγματικές συνθήκες και οδηγεί σε σχεδιαστικές αρχές και θεωρίες ευαίσθητες στα συμφραζόμενα.*

Η έρευνα που βασίζεται στο σχεδιασμό έχει τα εξής βασικά χαρακτηριστικά:

Αποτελείται από πραγματικούς ερευνητικούς στόχους, δηλαδή, ερευνάται μια εκπαιδευτική πρακτική κατά την εφαρμογή της και στοχεύει στο να βελτιώσει τόσο τη θεωρία όσο και την πράξη.

Χρησιμοποιεί μεθοδολογία θεμελιωμένης θεωρίας καθώς εφαρμόζεται σε περιορισμένο δείγμα και σε πραγματικές, όχι εργαστηριακές, συνθήκες. Πριν την διεξαγωγή ενός πειράματος σχεδιασμού ο ερευνητής πραγματοποιεί εκτενή βιβλιογραφική ανασκόπηση των ερευνών που πραγματοποιήθηκαν σε αντίστοιχες περιπτώσεις σχεδιασμού, ώστε να εντοπίσει τα κενά και να διασφαλίσει την αξία της έρευνάς του.

Είναι μια ευέλικτη ερευνητική διαδικασία, καθώς διεξάγεται σε επαναληπτικούς κύκλους σχεδιασμού, υλοποίησης, ανάλυση και επανασχεδιασμού. Μέσα από αυτήν την επαναληπτική διαδικασία διαμορφώνεται μια θεωρία επίκαιρη, στηριγμένη στα δεδομένα που συλλέγονται σε κάθε κύκλο σχεδιασμού και εφαρμογής. Ο ερευνητής σε αυτή τη διαδικασία καλείται να ισορροπήσει ανάμεσα στον ρόλο του σχεδιαστή και του ερευνητή, πράγμα που το επιτρέπει περισσότερες οπτικές και λύσεις.

Θεωρείται ενοποιημένη μέθοδος έρευνας, καθώς οι ερευνητές χρησιμοποιούν μικτές μεθόδους για να διασφαλίσουν την αξιοπιστία των μεθόδων τους. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται είναι ερωτηματολόγια, αξιολόγηση, μελέτη περίπτωσης, συνέντευξη, αναστοχαστική ανάλυση και διαμορφωτική αξιολόγηση.

Παρέχει αποτελέσματα σχετιζόμενα με το περιεχόμενο με αναλυτικές λεπτομέρειες για την διαδικασία έρευνας, για την συλλογή δεδομένων, όπως και για την οποιοδήποτε αλλαγή σε σχέση με τον αρχικό σχεδιασμό. Σημαντικό μέρος είναι και η καθοδήγηση στον τρόπο εφαρμογής ώστε να είναι προσβάσιμη σε κάποιον άλλον ερευνητή που εντόπισε και θέλει να εφαρμόσει μια καινοτομία του σχεδιασμού. Τέλος, αναφέρονται οι συνθήκες που οδήγησαν σε διαφορετικά αποτελέσματα.

Επιπλέον, η έρευνα σχεδιασμού έχει αναγνωριστεί ως κατάλληλη για την αξιολόγηση ψηφιακών περιβαλλόντων. Αυτό συμβαίνει γιατί, για την αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας ενός περιβάλλοντος μάθησης πρέπει η σχεδίαση και η έρευνα αποτελεσματικότητας να προχωρούν ταυτόχρονα, ώστε οι απαραίτητες προσαρμογές και βελτιώσεις να εφαρμόζονται πριν την ολοκλήρωση της φάσης σχεδιασμού (Wang & Hannafin, 2005).

3.3 Σχεδιασμός μικρόκοσμων και δραστηριοτήτων ως εργαλείο έρευνας

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, καθώς οργανώνεται στα πρότυπα της έρευνας σχεδιασμού, επιδιώκεται να διερευνηθεί αν ένας συνδυασμός δραστηριοτήτων που στηρίζονται σε θεωρητικά πλαίσια μάθησης και σε διδακτικές μεθόδους είναι ικανός να υποστηρίξει την διερεύνηση των σχέσεων γωνιών στο πλαίσιο της αξονικής συμμετρίας, ώστε να αποτελέσει καλή πρακτική παρουσίαση του αντικειμένου σε μαθητές Γυμνασίου. Εργαλεία της έρευνας θα αποτελέσουν δραστηριότητες σε μικρόκοσμους που αναπτύχθηκαν από την ερευνήτρια.

Το καταρχάς ερευνητικό ενδιαφέρον, που οδήγησε στην παρούσα εργασία, προέκυψε από την ενδιαφέρον της ερευνήτριας για την αξονική συμμετρία και τις ιδιότητές της. Για την ακρίβεια, διερεύνηση των σχέσεων γωνιών που ορίζουν αξονική συμμετρία, όπως συζητούν οι (Seah & Horne, 2019) στην έρευνά τους. Όμως, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, στόχος δεν είναι, απλώς να διερευνηθούν οι αντιλήψεις των μαθητών για την αξονική συμμετρία, αλλά το να διερευνηθεί αν μια διαθεματική προσέγγιση μπορεί να διευρύνει την αντίληψη της έννοιας και των ιδιοτήτων της αξονικής συμμετρίας και την διατύπωση γενικών κανόνων από τους μαθητές, όπως προτείνει η (Knuchel, 2004). Για τον λόγο αυτό, επιχειρήθηκε να δημιουργηθεί ένα δόμημα που θα παρουσιάζει την αξονική συμμετρία ενσωματωμένη σε μια καθημερινή κατάσταση ώστε οι μαθητές να αναπτύξουν στρατηγικές σκέψης, που θα είναι ανεξάρτητες από συνηθισμένα μαθηματικά περιεχόμενα, όπως ορθογώνια, ισοσκελή και ισόπλευρα τρίγωνα και γράμματα του αλφαβήτου που παρουσιάζονται στα σχολικά εγχειρίδια. Η ερευνήτρια θεωρεί το παραπάνω σημαντικό, καθώς, οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την συμμετρία στην καθημερινή ζωή, νωρίτερα από όταν τους παρουσιάζεται η έννοια της αξονικής συμμετρίας στο μάθημα της Γεωμετρίας και θα

συνεχίζουν να την συναντούν και μετά την σχολική τους πορεία. Για να εξυπηρετηθεί αυτή η σκοπιμότητα, μετά από σκέψη και έρευνα, επιλέγεται το ίδιο το ανθρώπινο σώμα ως σύστημα σημειωτικής διαμεσολάβησης της γνώσης. Τα χέρια του ανθρώπου σε κατάλληλες θέσεις μπορούν να τοποθετηθούν συμμετρικά, ως προς την σπονδυλική στήλη του ανθρώπου. Θεωρώντας ότι, κατά σύμβαση, οι ώμοι, του ανθρώπινου σώματος, ισαπέχουν από τη σπονδυλική στήλη και ότι τα χέρια έχουν το ίδιο μήκος, μπορούν να ορίσουν ίσες γωνίες και να θεωρηθούν συμμετρικά ως προς άξονα σε ένα πλήθος επιπέδων του χώρου.

Η καθημερινή κατάσταση που αποφασίστηκε να παρουσιαστεί είναι κινήσεις - θέσεις των χεριών για την διατήρηση της καλής στάσης του σώματος. Εδώ υπάρχουν δύο οπτικές. Αφενός είναι μια καθημερινή συνθήκη που τα παιδιά την εντοπίζουν τόσο στο μάθημα της Γυμναστικής, όσο και στην καθημερινή τους ρουτίνα όταν τεντώνονται μετά από αρκετή ώρα σε ίδια στάση ή όταν ξυπνούν το πρωί. Αφετέρου, το ανθρώπινο σώμα έχει έναν νοητό άξονα συμμετρίας, την σπονδυλική στήλη. Έτσι η αίσθηση και η αιτιολόγηση περί συμμετρίας γίνεται ενσώματη, καθώς οι ζητούμενες συμμετρικές κινήσεις των μαθητών και του ψηφιακού σώματος ταυτίζονται.

Η ενσώματη αντίληψη των κινήσεων, φέρνει στο προσκήνιο την θεωρία μάθησης του εποικοδομισμού, του κοινωνικού εποικοδομισμού και του κονστραξιονισμού. Το κοινό των θεωριών είναι πως η γνώση είναι μια εσωτερική διαδικασία του ανθρώπου η οποία διαμορφώνεται μέσα από την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον, τους ανθρώπους και τις δραστηριότητες εξερεύνησης στις οποίες μπορούν να χρησιμοποιήσουν και να επεξεργαστούν δικές τους ιδέες. Θα δημιουργηθούν δραστηριότητες:

- Οι οποίες θα στοχεύουν στην αφομοίωση, δηλαδή, στην ικανότητα των παιδιών να εξάγουν κανόνες, μέσα από την ενασχόλησή τους με εμπειρικά αντικείμενα
- Στις οποίες οι μαθητές θα δουλεύουν σε ομάδες ώστε να προκριθεί η ΖΕΑ μεταξύ ομότιμων
- Οι οποίες, για την διερευνητική τους διάσταση, θα υποστηριχτούν από μικρόκοσμο που θα δημιουργήσει η ερευνήτρια στο MaLT. Το MaLT ως επέκταση του χελωνόκοσμου ενέχει την body syntonic αντίληψη της μάθησης και είναι κατάλληλο εργαλείο για να υποστηρίξει την συγκεκριμένη δραστηριότητα

Το MaLT επιλέχθηκε για τον σχεδιασμό του μικρόκοσμου, καθώς από την μια πλευρά ενέχει την body syntonic αντίληψη της μάθησης, όπως αναφέρθηκε, και από την άλλη, η βιβλιογραφική ανασκόπηση ανέδειξε τόσο τον χελωνόκοσμο όσο και τα GDS ως αποτελεσματικά εργαλεία για διερεύνηση και επέκταση της γνώσης των μαθητών περί αξονικής συμμετρίας. Το MaLT συνδυάζει τις δυνατότητες του χελωνόκοσμου με τον δυναμικό χειρισμό των αναπαραστάσεων, άρα ενσωματώνει όλα τα στοιχεία που η βιβλιογραφία προτείνει για μικρόκοσμους που στηρίζουν την ανακάλυψη της γνώσης στην αξονική συμμετρία.

Για την κατασκευή του δομήματος δημιουργήθηκαν δύο κομμάτια κώδικα. Ο κώδικα του κορμού που περιέχει το κεφάλι και τα πόδια και ο κώδικα των χεριών. Στους ώμους και τους αγκώνες των χεριών ενσωματώθηκαν μεταβλητές που ορίζουν το πόσες μοίρες στρίβει δεξιά ή / και αριστερά το κάθε μέρος του χεριού. Η επιλογή του να υπάρχουν μεταβλητές στον ώμο και στον αγκώνα έγινε για να αυξηθεί το πλήθος των διαφορετικών κινήσεων που μπορεί να εκτελέσει το σώμα. Οι έννοιες που ενσωματώθηκαν στον σχεδιασμό δομήματος είναι το μήκος ευθύγραμμου τμήματος, οι γωνίες που ορίζουν τα χέρια με την σπονδυλική στήλη, ο άξονας συμμετρίας, οι

αντίθετες γωνίες, γωνίες ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς και οι συμμετρικές κινήσεις ως προς άξονα.

Η παρέμβαση επιλέγεται να γίνει σε μαθητές της Β' Γυμνασίου, οι οποίοι έχουν διδαχθεί την αξονική συμμετρία από την Α' Δημοτικού έως την Α Γυμνασίου.

Μέσω της έρευνας επιχειρείται να εντοπιστεί το αν, το πώς και το κατά πόσο αυτή η διαθεματική προσέγγιση της έννοιας αλλάζει και επεκτείνει τα νοήματα των μαθητών για την αξονική συμμετρία. Επιπροσθέτως, επιλέγεται να αξιοποιηθεί η δυνατότητα δυναμικού χειρισμού του MaLT για την υποστήριξη των μαθητών στο να εξάγουν κανόνες για την αξονική συμμετρία με έμφαση στην σχέση γωνιών. Τέλος επιχειρείται να εμπλουτιστεί η παρέμβαση με δραστηριότητες ενίσχυσης της κριτικής σκέψης των μαθητών σε επίπεδο υπολογιστικής σκέψης και ΡΡ.

Ο μαθησιακό σχεδιασμός των δραστηριοτήτων οργανώθηκε με βάση το μοντέλο της Νέας Μάθησης. Επιχειρήθηκε μια ολοκληρωμένη κυκλική πορεία των μαθητών μέσα από τις γνωσιακές διαδικασίες του βιώνοντας το νέο, νοηματοδοτώντας με θεωρία, αναλύοντας λειτουργικά και εφαρμόζοντας δημιουργικά.

Πίνακας 1: Μαθησιακός Σχεδιασμός

	Στόχοι	Δραστηριότητα
Στην αρχή της παρέμβασης οι μαθητές θα απαντήσουν σε ένα pretest		
Βιώνοντας το νέο	Να εξηγούν τον τρόπο με τον οποίο κατασκεύασαν αξονική συμμετρία, όταν θα έχουν κάνει διορθώσεις στο ψηφιακό μοντέλο με τη χρήση δυναμικού χειρισμού.	Οι μαθητές αρχικά «εκτίθενται» στο νέο καθώς παρατηρούν, ακούν και διαβάζουν το υποστηρικτικό video.
		Εξερευνούν πως θα καθοδηγήσουν το ψηφιακό σώμα να μιμηθεί την κίνηση του ανθρώπου.
		Περιγράφουν της παρατηρήσεις της εξερεύνησής τους.
Νοηματοδοτώντας Με θεωρία		Γενικεύουν την μάθηση καθώς την εφαρμόζουν σε ένα νέο περιβάλλον.
Αναλύοντας λειτουργικά		Συνθέτουν την στρατηγική που εντόπισαν, για το πως λειτουργεί η συμμετρία στα προγράμματα που χειρίστηκαν
Εφαρμόζοντας δημιουργικά	Να διακρίνουν το λάθος του κώδικα που επηρεάζει την αξονική συμμετρία, όταν θα έχουν κανόνες – στρατηγικές κατασκευή τους	Συνθέτουν την εμπειρία της μάθησης σε ένα αντιφατικό πρόβλημα
	Να σχεδιάσουν ένα νέο πρόβλημα, παρόμοιο με αυτό που έλυσαν, όταν θα έχουν διορθώσει τον κώδικα του προγράμματος.	Αξιολογούν το πως θα διορθώσουν το πρόβλημα αναλύοντας τις αλλαγές που επιβάλλουν οι κινήσεις του σώματος
		Σχεδιάζουν ένα νέο πρόβλημα αναπτύσσοντας αλλαγές στον κώδικα

Ανάλυση των δραστηριοτήτων που παρουσιάζονται στον πίνακα 1

Βιώνοντας το νέο

Το υποστηρικτικό video δείχνει έναν άνθρωπο να κάνει τις κινήσεις που θα κληθεί να κάνει το ψηφιακό σώμα. Περιέχει αναλυτική περιγραφή των θέσεων των χεριών του ανθρώπου, προφορική και γραπτή. Δηλαδή, εκτός της οπτικής αναπαράστασης του τελικού ζητούμενου αποτελέσματος, προσφέρει και λεκτική υποστήριξη, η οποία μπορεί να ενισχύσει τους μαθητές στο να αιτιολογήσουν ή στο να διατυπώσουν κανόνες ή / και στρατηγικές για την αξονική συμμετρία.

Οι μαθητές έχουν στην διάθεσή τους το ψηφιακό σώμα που προγραμματίστηκε από την ερευνήτρια. Σε αυτή την δραστηριότητα καλούνται να μετακινήσουν του δρομείς των μεταβλητών ώστε το ψηφιακό σώμα να φέρει τα χέρια του στην θέση που τα έχει ο άνθρωπος.

Οι μαθητές καλούνται να καταγράψουν, σε καθοδηγητικό φύλλο εργασίας, το ποιες σχέσεις γωνιών δημιούργησαν ώστε να το ψηφιακό σώμα να τοποθετήσει τα χέρια του συμμετρικά ως προς την σπονδυλική στήλη.

Νοηματοδοτώντας με θεωρία

Δίνεται στους μαθητές μια νέα δραστηριότητα της ίδιας λογικής για να επιβεβαιώσουν τις παρατηρήσεις τους, δηλαδή τις σχέσεις γωνιών που ορίζονται από τα χέρια και τον κορμό του ψηφιακού σώματος, ώστε τα χέρια του να τοποθετηθούν συμμετρικά ως προς την σπονδυλική του στήλη. Στην δραστηριότητα αυτή, εμφανίζονται δύο ψηφιακά σώματα με κατακόρυφο άξονα μεταξύ τους που πρέπει να ορίσουν συμμετρική κίνηση ως προς τον κατακόρυφο άξονα.

Αναλύοντας λειτουργικά

Οι μαθητές καλούνται να διατυπώσουν, στο υποστηρικτικό φύλλο εργασίας, τους κανόνες που εντόπισαν – τις στρατηγικές που ανέπτυξαν προκειμένου να κινηθεί το ψηφιακό σώμα συμμετρικά ως προς άξονα, ώστε να αναστοχαστούν επί αυτών και να τους εδραιώσουν.

Εφαρμόζοντας δημιουργικά

Οι μαθητές καλούνται να μετακινήσουν του δρομείς των μεταβλητών ώστε το ψηφιακό σώμα να τοποθετήσει τα χέρια του συμμετρικά ως προς την σπονδυλική στήλη. Όμως, στο σημείο αυτό το δόμημα είναι μισοψημμένο.

Οι μαθητές καλούνται να εκτελέσουν μια δραστηριότητα αποσφαλμάτωσης του κώδικα. Συγκεκριμένα, την αποσφαλμάτωση του μισοψημμένου κώδικα της προηγούμενης άσκησης, για να έχουν τη δυνατότητα να ελέγξουν την στρατηγική τους όταν δημιουργούν συμμετρικές κινήσεις ως προς άξονα.

Οι μαθητές καλούνται να εκτελέσουν μια δραστηριότητα PP. Συγκεκριμένα, καλούνται να μισοψηφίσουν μια κίνηση του σώματος και να προκαλέσουν την άλλη ομάδα να την διορθώσει, για να έχουν τη δυνατότητα να σκεφτούν γύρω από την στρατηγική που ανέπτυξαν και να την εφαρμόσουν σε νέα προβλήματα που οι ίδιοι δημιουργούν.

Καθώς η παρέμβαση ολοκληρώνεται με μια δραστηριότητα PP, θεωρήθηκε αναγκαίο ολόκληρος ο σχεδιασμός της παρέμβασης να υποστηρίξει την δραστηριότητα PP. Για την κατάλληλη υποστήριξη της δραστηριότητας, επιλέχθηκε

ένα θεωρητικό πλαίσιο, αυτό των (Kontorovich & Koichu, Towards a Comprehensive Framework of Mathematical Problem Posing, 2009). Με βάση αυτό το πλαίσιο, η γνώση του περιεχομένου είναι απαιτούμενη σε δραστηριότητες PP. Στην παρούσα οργάνωση δραστηριοτήτων, αυτό επιτυγχάνεται καθώς οι μαθητές έχουν έρθει σε επαφή με το γνωστικό περιεχόμενο της δραστηριότητας, με το video που παρακολούθησαν, με την ολοκλήρωση κινήσεων μέσω δυναμικού χειρισμού, μέσω της διατύπωσης των παρατηρήσεών τους, στην συνέχεια μέσω της διατύπωσης των στρατηγικών τους και τέλος, μέσω ελέγχου των στρατηγικών τους κατά την αποσφαλμάτωση. Όλες οι παραπάνω διαδικασίες δίνουν στους μαθητές την δυνατότητα να εδραιώσουν τις αντιλήψεις τους και να έχουν γνώση επί του αντικείμενου. Το στάδιο της εξοικείωσης των μαθητών με το γνωστικό αντικείμενο, θεωρείται ικανό να τους επιτρέψει να διατυπώσουν ένα νέο πρόβλημα, στηριγμένοι σε όσα ήδη έχουν λύσει. Η πτυχή του πώς το κοινωνικό πλαίσιο επηρεάζει τα προβλήματα που θέτουν οι μαθητές, το ποιές δυναμικές προκύπτουν για τους μαθητές και για τα προβλήματα όταν δουλεύουν σε ζευγάρια, μένει να φανεί αν θα αναδειχθεί σαν πληροφορία, καθώς το δείγμα θα εργαστεί σε ομάδες και άρα δεν θα υπάρξει αντιπαραβολή αποτελεσμάτων. Τέλος, η πτυχή της ευστοχίας και καταλληλότητας των προβλημάτων που τίθενται είναι προς εξέταση, τόσο από τους ίδιους τους μαθητές που θα διατυπώσουν το πρόβλημα, όσο και από την άλλη ομάδα μαθητών που θα κληθεί να το λύσει.

Η δραστηριότητα ολοκληρώνεται με ένα post test για να ελεγχθεί το αν οι μαθητές θα είναι σε θέση να μεταφέρουν τις αντιλήψεις που ανέπτυξαν κατά την επεξεργασία του ψηφιακού σώματος σε δραστηριότητες αξονικής συμμετρίας σε άλλο περιεχόμενο.

3.4 Δείγμα

Οι μαθητές που αποτέλεσαν το δείγμα του διδακτικού πειράματος, ήταν 4 μαθητές που φοιτούσαν στην Β' Γυμνασίου, Πρότυπου Σχολείου της Αθήνας. Οι μαθητές ήταν εξοικειωμένοι στη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή, αλλά και το προγράμματος MaLT2, καθώς συμμετείχαν στον Μαθηματικό Όμιλο του σχολείου τους, όπου πραγματοποιούνται διερευνητικές δραστηριότητες με το MaLT2. Οι μαθητές προέρχονταν από το ίδιο τμήμα, καθώς επιβάλλονταν η τήρηση των υγειονομικών πρωτόκολλων λόγω Covid 19. Οι επιδόσεις των μαθητών θεωρούνται εν γένει υψηλές. Καθώς, φοιτούσαν στην Β' Γυμνασίου, είχαν ήδη διδαχθεί την έννοια της συμμετρίας στις τάξεις του Δημοτικού και στην τάξη της Α' Γυμνασίου.

3.5 Μέσα συλλογής δεδομένων

Για τη συλλογή των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε: Πρόγραμμα καταγραφή οθόνης του υπολογιστή και οι σημειώσεις της ερευνήτριας. Το πρόγραμμα καταγραφής οθόνης του υπολογιστή θεωρήθηκε σημαντικό μέσο συλλογής δεδομένων, καθώς τα ερευνητικά ερωτήματα και η στόχευση της έρευνας αφορούσαν τόσο το πώς σκέφτονται και ενεργούν οι μαθητές όσο και το μαθησιακό αποτέλεσμα. Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιήθηκε η δυνατότητα καταγραφής που προσφέρει το ψηφιακό μέσο διασύνδεσης zoom, το οποίο επιτρέπει τόσο την καταγραφή της οθόνης του υπολογιστή, όσο και του ήχου, δηλαδή των συζητήσεων των μαθητών. Οι σημειώσεις της ερευνήτριας, που γράφονταν μετά το πέρας κάθε συνάντησης, χρησιμοποιήθηκαν

για να καταγραφούν στάσεις και κινήσεις των μαθητών που δεν μπορούσαν να καταγραφούν με το άλλο μέσο συλλογής δεδομένων.

3.6 Μέθοδος Ανάλυσης Δεδομένων

Σε ποιοτικές έρευνες δεν υπάρχει ενδεδειγμένη μέθοδος ανάλυσης των δεδομένων. Η ανάλυση των δεδομένων προκύπτει από την αλληλεπίδραση των δεδομένων με τον ερευνητή ταυτόχρονα με την συλλογή των δεδομένων, καθώς εκεί αρχίζουν να αναδύονται τα κεντρικά θέματα της ανάλυσης.

Στην παρούσα έρευνα, για την ανάλυση των δεδομένων, έγινε απομαγνητοφώνηση και οργάνωση των συζητήσεων των μαθητών σε πίνακα, ανά ερευνητικό ερώτημα και ανά σκέλος δραστηριότητας. Ο πίνακας εμπλουτίστηκε από τις σημειώσεις της ερευνήτριας και από στιγμιότυπα της δράσης της οθόνης.

3.7 Η δεοντολογία της έρευνας

Στόχος μιας έρευνας είναι ο εντοπισμός δεδομένων που θα επιτρέψουν την κατανόηση μιας κατάστασης ή την εκτίμηση της αποτελεσματικότητας μιας θεώρησης. Σε κάθε περίπτωση, όσο σημαντική κι αν είναι η στόχευση της έρευνας, μια από τις μεγαλύτερες ευθύνες του ερευνητή είναι η εξασφάλιση της ελεύθερης συμμετοχής των συμμετεχόντων. Στην παρούσα έρευνα τα θέματα δεοντολογίας που ανέκυψαν ήταν: Η εξασφάλιση της συναίνεσης των εμπλεκόμενων φορέων και η εξασφάλιση συναίνεσης των συμμετεχόντων και των κηδεμόνων τους, εφόσον είναι ανήλικοι.

Για την εξασφάλιση της συναίνεσης των εμπλεκόμενων φορέων, η ερευνήτρια ήρθε σε επαφή με τον καθηγητή Μαθηματικών του σχολείου για να αιτηθεί να γίνει δεκτή για την εκτέλεση του πειράματος σχεδιασμού. Με δεδομένο του ότι το σχολείο είναι Πρότυπο, οι διαδικασίες που απαιτούνται για την αποδοχή ενός τέτοιου αιτήματος είναι σύντομες. Ο καθηγητής Μαθηματικών του σχολείου, εξασφάλισε την άδεια της Διευθύντριας του σχολείου. Στην συνέχεια, τού εστάλη το υλικό της δραστηριότητας, ώστε να το εγκρίνει.

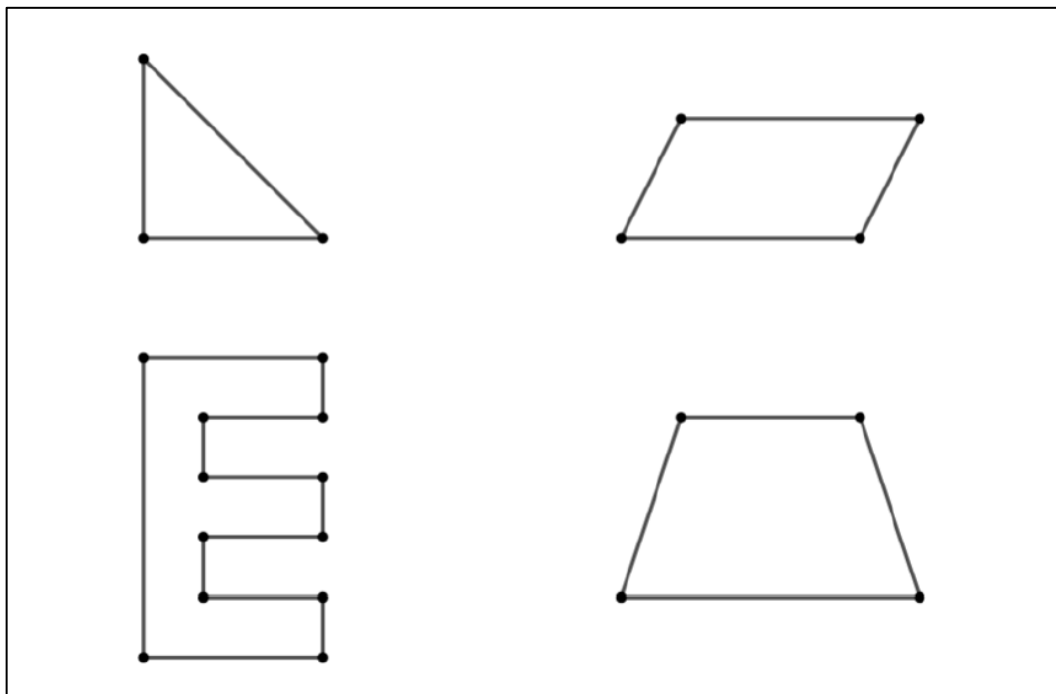
Για την εξασφάλιση συναίνεσης των συμμετεχόντων και των κηδεμόνων τους, καταρχήν ο συνεργαζόμενος εκπαιδευτικός, ενημέρωσε τους μαθητές για την επερχόμενη δραστηριότητα, ώστε εκείνοι εθελοντικά να δηλώσουν συμμετοχή. Εφόσον, καθορίστηκαν οι μαθητές που θα συμμετείχαν στάλθηκε στους γονείς τούς έγγραφο, στο οποίο ζητούνταν άδεια για την συμμετοχή των μαθητών, ενώ παράλληλα τους ενημέρωνε για το σκοπό της δραστηριότητας και την διασφάλιση της ανωνυμίας των συμμετεχόντων μαθητών. Τέλος, στην πρώτη συνάντηση που είχε η ερευνήτρια με τους μαθητές τους ενημέρωσε για τους σκοπούς της έρευνας και για την διαδικασία που θα ακολουθούσε.

4. Ανάλυση της Παρέμβασης και Αποτελέσματα

4.1 Ανάλυση των Pre Tests και Αποτελέσματα

Στην αρχή της παρέμβαση ζητήθηκε από τους μαθητές να πραγματοποιήσουν μια γραπτή δοκιμασία (pre test) από την οποία θα εντοπίζονταν η πρότερη γνώση τους αναφορικά με την αξονική συμμετρία. Το pre test απαντήθηκε μόνο από το δείγμα της έρευνας. Η γραπτή δοκιμασία αποτελούνταν από δύο σκέλη.

Στο πρώτο σκέλος, οι μαθητές, καλούνταν να φέρουν τον άξονα συμμετρίας κάποιων σχημάτων, εφόσον, θεωρούσαν ότι τα σχήματα αυτά είχαν άξονα συμμετρίας. Τα σχήματα που δόθηκαν στους μαθητές είχαν τον φορμαλισμό των σχολικών εγχειριδίων, ώστε να τους είναι γνώριμα.



Εικόνα 1: 1^ο σκέλος pre test

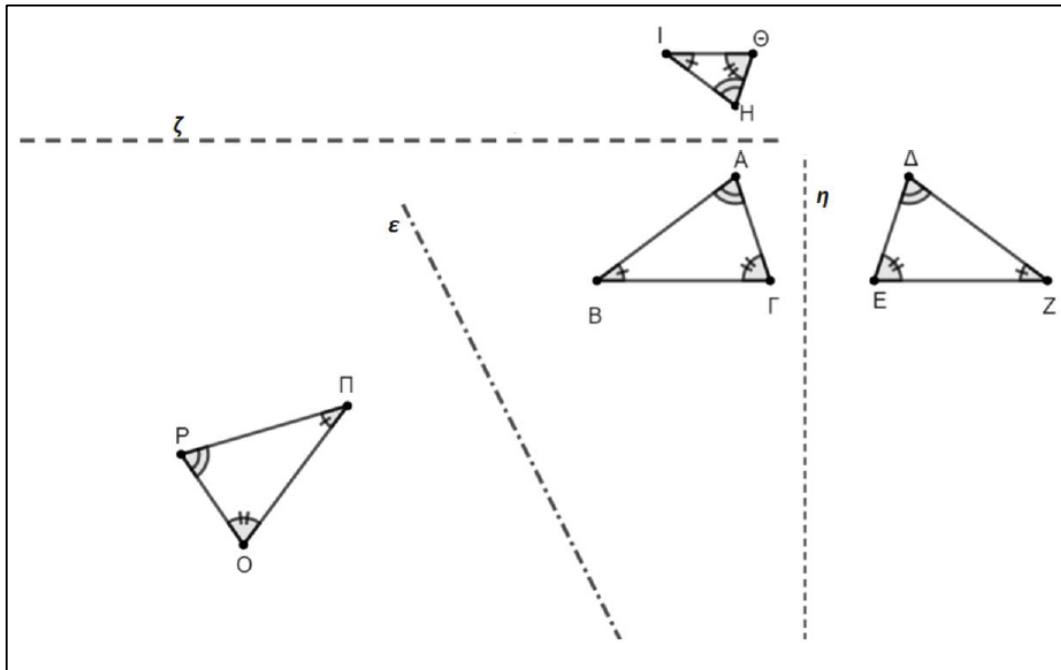
Αρχικά οι μαθητές προβληματίστηκαν με το γεγονός ότι δεν είχαν μαζί τους χάρακες. Η ερευνήτρια τους είπε πως θα μπορούσαν με ελεύθερο χέρι να φέρουν τους άξονες, δηλαδή, δεν είχε σημασία να είναι ίσια η γραμμή, αλλά να φαίνεται το από που διέρχεται. Στην συνέχεια τα παιδιά έκαναν και άλλες ερωτήσεις σχετικά με αν το τρίγωνο που δίνεται είναι ισοσκελές, αν όλα τα δοσμένα σχήματα έχουν άξονα συμμετρίας ή αν κάποια από αυτά έχουν περισσότερους από έναν άξονα συμμετρίας. Στις ερωτήσεις αυτές η ερευνήτρια δεν έδωσε σαφή απάντηση, αλλά τους προέτρεψε να βρουν εργαλεία ελέγχου των αποριών τους.

Σε αυτό το πρώτο σκέλος οι μαθητές, έφεραν όλοι σωστά τον άξονα συμμετρίας του ισοσκελούς τριγώνου, του γράμματος E και του ισοσκελούς τραπέζιου. Μόνο σε δύο από τους 5 μαθητές εμφανίστηκε η συνηθισμένη αντίληψη πως το παραλληλόγραμμο έχει άξονα συμμετρίας. Ένας μαθητής, μάλιστα, έφερε δύο άξονες συμμετρίας στο παραλληλόγραμμο.

Η λανθασμένη αντίληψη του ότι το παραλληλόγραμμο έχει άξονα ή άξονες συμμετρίας, έχει παρατηρηθεί συχνά στην βιβλιογραφία (Leikin, Berman, & Zaslavsky, 2000), (Τσελεπίδης & Μαρκόπουλος, 2005), (Hoyles & Healy, 1997), (Seah & Horne, 2019). Μια ερμηνεία που έχει δοθεί για αυτή την παρερμηνεία, των μαθητών, είναι πως αν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας, τότε χωρίζει το σχήμα σε δύο ισοδύναμα ή ισεμβαδικά χωρία.

Στο δεύτερο σκέλος οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν το συμμετρικό ενός τριγώνου ως προς άξονα. Τους δόθηκε ένα κεντρικό τρίγωνο ΑΒΓ και τρεις πιθανές επιλογές άξονα – τριγώνου για να επιλέξουν το συμμετρικό του ως προς άξονα. Για τον σχεδιασμό των επιλογών που δόθηκε στους μαθητές χρησιμοποιήθηκαν οι συνηθισμένες παρανοήσεις που εμφανίζονται στην βιβλιογραφία. Συνήθως όταν οι

μαθητές καλούνται να φέρουν το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς άξονα, δεν παρατηρούν 1) τις γωνίες που ορίζουν οι πλευρές των σχημάτων με τον άξονα συμμετρίας, ειδικά αν ο άξονας δεν είναι κατακόρυφος, 2) την απόσταση του σχήματος από τον άξονα συμμετρίας και πιο σπάνια 3) το μέγεθος του σχήματος (Hoyles & Healy, 1997). Προφανώς η μία επιλογή ήταν ορθή. Οι άλλες παρίσταναν, ίσα τρίγωνα των οποίων οι κορυφές δεν ισαπέχουν από τον άξονα και όμοια τρίγωνα με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$. Οι μαθητές, κλήθηκαν να επιλέξουν ένα από τα τρία ως σωστό και να περιγράψουν τον τρόπο που σκέφτηκαν ή έλεγξαν την ορθότητα της πρότασης.



Εικόνα 2: 2^ο σκέλος pre test

Στο σκέλος αυτό όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά, ότι δηλαδή, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι συμμετρικό του ΠΡΟ ως προς την ευθεία (ε). Συγκριτικά, λοιπόν, με την βιβλιογραφία υπάρχει μια πρώτη ένδειξη πως οι μαθητές είναι έμπειροι στον χειρισμό σχημάτων που είναι συμμετρικά ως προς άξονα. Το ενδιαφέρον, λοιπόν, στρέφεται στο να εντοπιστεί το πώς σκέφτηκαν οι μαθητές για καταλήξουν σε αυτή την απάντηση.

M1: *Γιατί, αν τα διπλώσουμε το ένα θα «πέσει» πάνω στο άλλο, καθώς τα μήκη των πλευρών, οι γωνίες και τα σημεία των κορυφών των τριγώνων ισαπέχουν από την ευθεία (ε).*

M2: *Έχουν το ίδιο σχήμα και ο άξονας βρίσκεται στην μέση των δύο τριγώνων*

M3: *Γιατί το ΑΒΓ δεν είναι συμμετρικό του ΗΘΙ ως προς ευθεία (ζ), γιατί το ΗΘΙ είναι πολύ μικρότερο από το ΑΒΓ. Επίσης το ΑΒΓ δεν είναι συμμετρικό του ΔΕΖ ως προς ευθεία (η) γιατί το ΔΕΖ είναι πιο μακριά από την (η) σε σχέση με το ΑΒΓ.*

M4: *Γιατί η απόσταση του ΑΒΓ με την ευθεία (η) είναι πιο μικρή από την απόσταση του ΔΕΖ με την ευθεία (η). Το μέγεθος του ΑΒΓ είναι μεγαλύτερο από το ΗΘΙ, ενώ η απόσταση του ΑΒΓ με την ευθεία (ε) είναι ίδια με την απόσταση με το ΠΡΟ με την ευθεία (ε) και έχουν τις ίδιες γωνίες και πλευρές.*

[Εδώ ο μαθητής έλεγξε όσα λέει, χρησιμοποιώντας την δίπλωση της κόλλας]

M5: Δημιούργησα έναν «χάρακα» ώστε να έχω μια ιδέα του τι γίνεται. Σκέφτηκα τί ήταν συμμετρικό, όμως δεν είμαι σίγουρος για την έννοια, οπότε σκέφτηκα: Για να είναι συμμετρικό ως προς τη γραμμή πρέπει: να έχει ίδια περίμετρο και ίδια απόσταση από τη γραμμή. Το ΑΒΓ έχει ίδιο σχήμα με το ΔΕΖ, αλλά διαφορετική απόσταση. Το ΑΒΓ έχει ίδια απόσταση με το ΗΘΙ, αλλά διαφορετικό σχήμα. Το μόνο που μένει είναι το ΠΡΟ που έχει ίδιο σχήμα και ίδια απόσταση από την ευθεία (ε).

Εδώ παρατηρείται ότι οι μαθητές παρότι απάντησαν σωστά, χρησιμοποίησαν διαφορετικές στρατηγικές σκέψης. Όλοι έλεγξαν την απόσταση των τριγώνων από τον άξονα και τα μήκη των πλευρών των τριγώνων. Κάποιοι μαθητές αναφέρθηκαν σε ίσες γωνίες, οι οποίες δίνονται στα σχήματα. Δύο μαθητές χρησιμοποίησαν την στρατηγική της δίπλωση της κόλλας για έλεγχο ταύτισης των σχημάτων. Δύο μαθητές χρησιμοποίησαν την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο, αποκλείοντας τις δύο περιπτώσεις με απλή παρατήρηση και ο τελευταίος μαθητής, που δεν θυμόταν πως ορίζεται η έννοια της συμμετρίας σχημάτων ως προς άξονα, αποφασίζει να χρησιμοποίησει μια διαισθητική προσέγγιση για να ελέγξει την συμμετρία. Αποφασίζει τα κριτήριά του και κατασκευάζει το εργαλείο που θα του επιτρέψει να ελέγξει ως προς συμμετρία. Όπως περιγράφει ο ίδιος κατασκεύασε έναν χάρακα με χαρτί και μολύβι, περισσότερο γνώμονα θα μπορούσαμε να τον χαρακτηρίσουμε γιατί δεν υπήρχε κλίμακα μέτρησης.

Παρότι, εδώ οι μαθητές χρειάστηκε να επιλέξουν και να αιτιολογήσουν και όχι να κατασκευάσουν το συμμετρικό ως προς άξονα, όπως σε άλλες μελέτες και παρότι δεν δόθηκαν λάθος απαντήσεις επιβεβαιώνεται το συμπέρασμα των (Hoyles & Healy, 1997) πως οι μαθητές είχαν κατασκευάσει μια κοινωνικά διαμοιραζόμενη αντίληψη της έννοιας της συμμετρίας από τις καθημερινές τους εμπειρίες και την προηγούμενη δουλειά της στο σχολείο.

4.2 Ανάλυση πρώτου σκέλους της παρέμβασης

Ξεκινώντας η παρέμβαση οι μαθητές δημιούργησαν δύο ομάδες, την Ομάδα Α και την Ομάδα Β. Κάθε ομάδα αποτελούνταν από δυο μαθητές της Β΄ Γυμνασίου.

Πριν ξεκινήσουν οι μαθητές να επεξεργάζονται την δραστηριότητα στον μικρόκοσμο του MaLT, παρακολούθησαν το video όπου ένας άνθρωπος τοποθετεί τα χέρια του σε συγκεκριμένες θέσεις. Παρακολούθησαν, επίσης και την περιγραφή των γωνιών που σχηματίζουν ο βραχίονας με τον κορμό, με τον ώμο και τον ορίζοντα και ο πήχης με τον βραχίονα και τον ορίζοντα.

Σκέλος 1 – Μέρος 1^ο

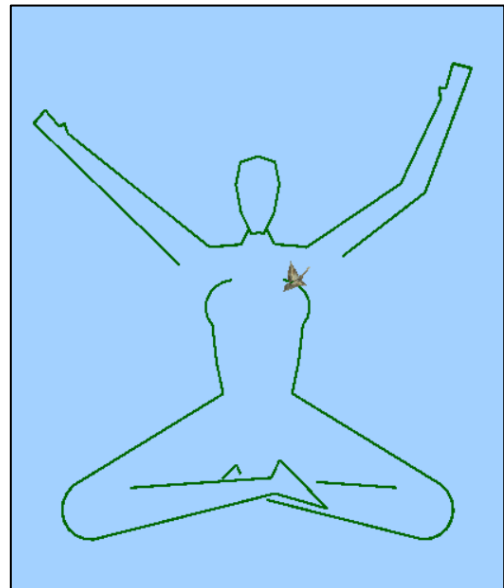
Εδώ οι μαθητές βρήκαν στο MaLT το ψηφιακό ανθρώπινο σώμα, το οποίο, μιμείται τις θέσεις των χεριών του ανθρώπου. Το δεξί χέρι του ψηφιακού σώματος είναι σωστά προγραμματισμένο, ενώ το αριστερό όχι. Ζητούμενο, για τους μαθητές, ήταν να μετακινήσουν κατάλληλα τους δρομείς των μεταβλητών του αριστερού χεριού ώστε το ψηφιακό σώμα να φέρει τα χέρια του στη θέση που τα είχε και ο άνθρωπος στην αντίστοιχη «κίνηση». Χρειάστηκε να διορθώσουν δύο κινήσεις. Τις κινήσεις 1 και 2 που φαίνονται στις εικόνες 3 και 4 αντίστοιχα. Στο σκέλος αυτό, υπήρξε υποστηρικτικό φύλλο εργασίας, στο οποίο οι μαθητές μπορούσαν να ελέγχουν ξανά το ζητούμενο, το οποίο ήταν : «Μετακινώντας τους δρομείς – μεταβολείς των μεταβλητών του αριστερού

χειριού βοηθήστε το ψηφιακό σώμα να τοποθετήσει τα χέρια του συμμετρικά ως προς την σπονδυλική του στήλη.» Όταν οι μαθητές ολοκλήρωσαν την διόρθωση την κίνησης του ψηφιακού σώματος, το φύλλο εργασίας τους καθοδήγησε να διατυπώσουν τη σχέση που έχουν οι γωνίες που στρίβουν το δεξί και το αριστερό χέρι.

Σε αυτό το σκέλος υπάρχει διπλή στόχευση. Από τη μια επιδιώκεται οι μαθητές να καταλάβουν το πως λειτουργεί το πρόγραμμα, δηλαδή, να εντοπίσουν ποιες μεταβλητές του προγράμματος αντιστοιχούν σε ποιο μέρος του χειριού και από την άλλη, να εξοικειωθούν με την αλλαγή προσανατολισμού που πρέπει να χειριστούν. Η αλλαγή του προσανατολισμού προκύπτει καθώς, το ζητούμενο είναι, οι μαθητές, να διορθώσουν το δεξί χέρι του ψηφιακού σώματος· το οποίο, όμως, αντιστοιχεί στο αριστερό δικό τους χέρι, καθώς κοιτάζουν την οθόνη. Αυτή η συνθήκη, αν και δεν είναι ασυνήθιστη, όταν οι μαθητές καλούνται να το αντιμετωπίσουν σαν μια «κανονική» συνθήκη βάσει της οποίας θα δουλέψουν, τους προκαλέσει σύγχυση. Πράγμα το οποίο συνέβη.



Εικόνα 3 : Κίνηση 1



Εικόνα 4 : Κίνηση 2

Σε αυτή τη φάση οι μαθητές, αρχικά προβληματίστηκαν με το ζήτημα του προσανατολισμού, αλλά γρήγορα παράκαμψαν αυτή την διαισθητική δυσκολία εστιάζοντας στις μεταβλητές που χρειάζεται να μεταβάλουν τις τιμές τους. Αυτό έγινε με τον πειραματισμό – μετακίνηση των κατάλληλων δρομέων. Όταν ένιωσαν πως αντιλαμβάνονται το δόμημα και τον χειρισμό του και μπορούσαν να «λύσουν το πρόβλημα» που τους δόθηκε, επέστρεψαν στο video για να εντοπίσουν την θέση των χειριών του ανθρώπου.

Στην ομάδα Α, οι μαθητές, όταν έλεγξαν τους δρομείς προκειμένου να εντοπίσουν την κίνηση των χειριών, πήγαν στο video και διάβασαν την περιγραφή της 1^{ης} κίνησης που έλεγε πως τα χέρια σχηματίζουν με τους ώμους ορθή γωνία και είναι μεταξύ τους παράλληλα. Στη συνέχεια επανήλθαν στο πρόγραμμα και μετέβαλλαν τις τιμές των μεταβλητών, μετακινώντας τους δρομείς και άλλαξαν τις οριακές τιμές των μεταβλητών, ώστε να έρθει το αριστερό χέρι στην σωστή του θέση. Ήταν κάπως

μουδιασμένοι και αβέβαιοι για την απάντησή τους. Όταν δούλεψαν με την 2^η κίνηση, διάβασαν την περιγραφή της κίνησης, άλλαξαν τις τιμές των μεταβλητών σωστά και άρχισαν να εξηγούν ο ένας στον άλλο.

M1: «Όταν λέει 40° πάνω από τον ορίζοντα, εννοεί αυτή τη γωνία (την δείχνει νοητά με το ποντίκι) γιατί ο ορίζοντας είναι αυτός (τον δείχνει νοητά με το ποντίκι)».

M2: «Ναι, αλλά είναι συμμετρικά ως προς την σπονδυλική στήλη;»

M1: «Είναι γιατί τα χέρια έχουν ίσο μήκος, σχηματίζουν ίση γωνία με την σπονδυλική στήλη και άρα ισαπέχουν από αυτή.»

Παρατηρείται, εδώ ότι η ομάδα A έκανε ταύτιση της θέσης των χεριών του σώματος με τον ορισμό της αξονικής συμμετρίας. Μετά, όμως δυσκολεύτηκαν να καταλήξουν στην διατύπωση της παρατήρησης της σχέσης των γωνιών που στρίβουν δεξί και αριστερό χέρι.

Στην ομάδα B, όπως και στην ομάδα A, προκειμένου οι μαθητές να καθοδηγήσουν το ψηφιακό σώμα να εκτελέσει την πρώτη κίνηση, δεν δοκίμασαν να λύσουν το πρόβλημα συμμετρίας με την μετακίνηση των δρομέων, εφόσον το ένα χέρι ήταν σωστά προγραμματισμένο. Επιχείρησαν την οπτική ταύτιση των δύο εικόνων. Δεν έλεγξαν εάν αυτή ήταν σωστή βάσει της διατύπωσης του video ή της γωνίας που ορίζει ο ώμος με τον βραχίονα. Κάτι που επιβεβαιώνεται από το ότι το δεξί και το αριστερό χέρι είχαν στρίψει αριστερά και δεξιά αντίστοιχα από τον κατακόρυφο άξονα 2°, ώστε να επιτευχθεί παραλληλία. Παρά το λάθος τους, σε σχέση με την διατύπωση της κίνησης, η απάντηση που έδωσαν για τις σχέσεις των γωνιών, ήταν σωστή. Δηλαδή, πως παρατήρησαν στροφή ίσων γωνιών δεξιού και αριστερού χεριού. Στη συνέχεια, όταν έπρεπε να το βοηθήσουν το ψηφιακό σώμα να φέρει τα χέρια στην δεύτερη θέση, έχοντας πια την εμπειρία της πρώτης θέσης, πήγαν στο video, είδαν την θέση των χεριών και γρήγορα και με άνεση αντέγραψαν την γωνία που στρίβει το δεξί χέρι και στο αριστερό και έγραψαν την ίδια παρατήρηση.

Αυτό που προκαλεί την εντύπωση της ερευνητριας είναι πως οι μαθητές όταν παρακολούθησαν το video για την 2^η θέση των χεριών, διάβασαν και επανέλαβαν πως τα χέρια βρίσκονται 40° πάνω από τον ορίζοντα, αλλά χωρίς προβληματισμό μετακίνησαν τις μεταβλητές τους δεξιού χεριού 50°. Αυτό ενδεχομένως δηλώνει πως οι μαθητές μεταβάλλοντας τις τιμές των μεταβλητών με την χρήση του δυναμικού χειρισμού του MaLT δεν μπαίνουν στην διαδικασία να αντιληφθούν το ότι οι μεταβλητές αντιπροσωπεύουν μοίρες στροφής γωνιών και ότι το video και το δόμημα περιγράφουν δύο συμπληρωματικές γωνίες.

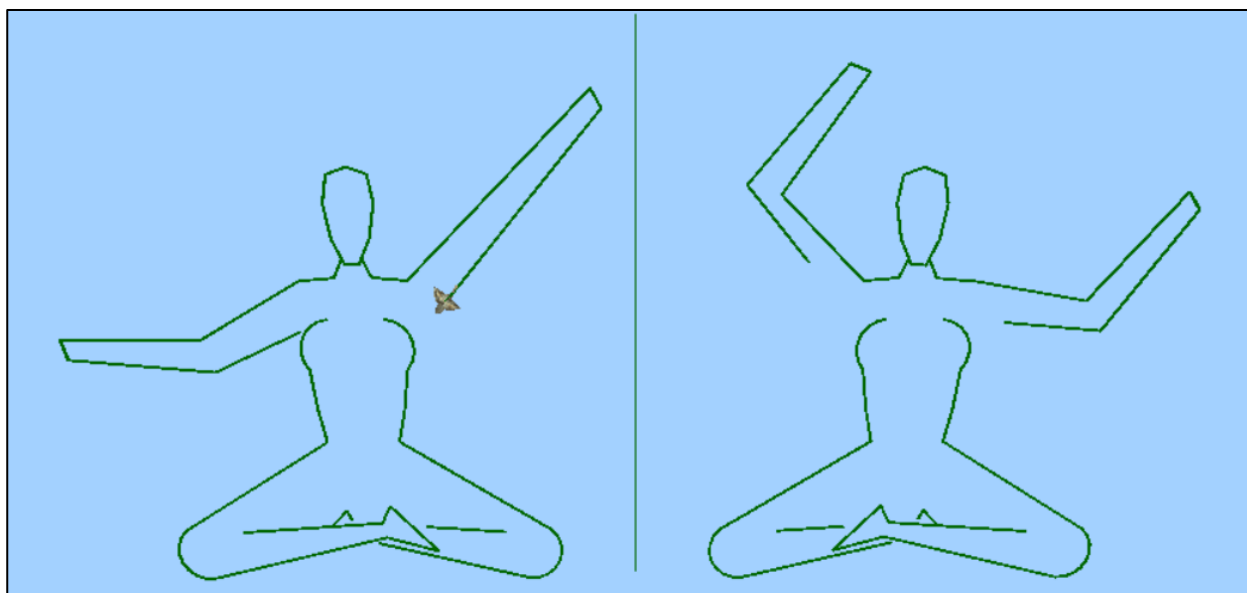
Σκέλος 1 – Μέρος 2°

Σε αυτό το σκέλος το πρόγραμμα έχει δύο ψηφιακά σώματα, να στέκονται με έναν κατακόρυφο άξονα, ανάμεσά τους (εικόνα 5). Το δεξί σώμα είναι σε σωστή θέση, ενώ το αριστερό που πρέπει να είναι το συμμετρικό του δεξιού ως προς άξονα χρειάζεται διορθώσεις στις γωνίες των χεριών. Στόχος αυτής της δραστηριότητας ήταν να προβληματιστούν οι μαθητές αναφορικά με την εξωγενή συμμετρία, δηλαδή την συμμετρία εικόνων ως προς άξονα. Εδώ εμφανίστηκε ξανά το ζήτημα του προσανατολισμού. (ποιο είναι το αριστερό και ποιο το δεξί σώμα;)

Η ομάδα A, δυσκολεύτηκε αρχικά στον εντοπισμό των μεταβλητών του κάθε χεριού, όμως όταν αυτό ξεκαθαρίστηκε, δοκίμασαν, σωστά, την δημιουργία ίσων γωνιών στα σωστά χέρια. Το ότι αυτό συνέβη χωρίς την υποστήριξη της εικόνας, είναι μια ένδειξη της καλής αντίληψης, των μαθητών, για τις συμμετρικές εικόνες ως προς άξονα.

Για την ομάδα Β, «το πρόβλημα» λύθηκε ξανά, όταν οι μαθητές αντιλήφθηκαν τις μεταβλητές που αντιστοιχούσαν σε κάθε χέρι του κάθε σώματος. Το video, σαν εικόνα και όχι σαν λεκτική περιγραφή έδωσε και εδώ την άμεση λύση της αντιγραφής των τιμών των μεταβλητών του δεξιού χεριού του δεξιού σώματος στο αριστερό χέρι του αριστερού σώματος και του αριστερού χεριού του δεξιού σώματος στο δεξί χέρι του αριστερού. Θα είχε ενδιαφέρον να δούμε, αν και αυτή η ομάδα θα προγραμματίζε σωστά τα χεριά χωρίς την υποστήριξη του video και αυτό διότι, έχει φανεί στην βιβλιογραφία, πως οι περισσότερες παρανοήσεις που εντοπίζονται για την συμμετρία σε έρευνες, αφορά την συμμετρία ως προς άξονα σε στατικά αντικείμενα, πόσο μάλλον σε ένα δόμημα που υποστηρίζεται από δυναμικό χειρισμό.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί πως οι μαθητές πολύ σύντομα αναπαράγουν την ιδέα των ίσων γωνιών. Αυτή η ένδειξη θα μπορούσε να έχει μια από τις παρακάτω ερμηνείες. Είτε, ότι οι μαθητές αρχίζουν να αντιλαμβάνονται την συμμετρία ως ίσες γωνίες, που είναι το επιδιωκόμενο, είτε αντιμετωπίζουν το πρόγραμμα με αυτοματισμούς.



Εικόνα 5 : Σκέλος 1_Μέρος 2°

Με την ολοκλήρωση και αυτού του σκέλους οι μαθητές καλούνταν να διατυπώσουν τις στρατηγικές με τις οποίες χειρίστηκαν την έως τώρα πορεία της παρέμβασης. Συγκεκριμένα,

Για τις δύο πρώτες κινήσεις του 1^{ου} σκέλους

«Για να είναι τα χέρια του σώματος συμμετρικά ως προς την σπονδυλική στήλη πρέπει...»

Ομάδα Α: *οι αντίστοιχες μεταβλητές των χεριών να είναι ίδιες*

Ομάδα Β: *να έχουν τις ίδιες μετρήσεις και στα δύο μέρη του άξονα*

Για την τρίτη κίνηση του 1^{ου} σκέλους

«Για να είναι οι θέσεις των ψηφιακών σωμάτων συμμετρικές ως προς τον κατακόρυφο άξονα πρέπει...»

Ομάδα Α: *οι αντίστοιχες μεταβλητές του κάθε χεριού να είναι ίδιες και να έχουν ίσες μεταβλητές*

Ομάδα Β: να έχουν τις ίδιες μετρήσεις και στα δύο μέρη του άξονα

Η ομάδα Α αφιέρωνε πολύ χρόνο στις διατυπώσεις της και γινόταν πολλές διαπραγματεύσεις μεταξύ των μαθητών για αυτό. Ο ένας μαθητής έλεγε στον άλλο «Το σκέφτεσαι πάρα πολύ» και έπαιρνε την απάντηση «το σκέφτομαι πάρα πολύ γιατί πρέπει να το σκέφτομαι πάρα πολύ!». Ο μαθητής που επέμενε πολύ στο να δώσουν σωστές διατυπώσεις, προσέγγιζε με κατάλληλο λεξιλόγιο την διατύπωση του κανόνα που διέπει την συμμετρία των αναπαραστάσεων των δομημάτων. Όμως, ο άλλος μαθητής που χειρίζονταν την καταγραφή στο φύλλο εργασίας, ασκούσε πίεση να προχωρήσουν παρακάτω. Τελικά έδιναν έναν απλοϊκό κανόνα, που αποκομμένος από την συζήτηση των μαθητών, θα χαρακτηριζόταν λανθασμένος. Εδώ έχει ενδιαφέρον το ότι ο μαθητής που δεν έχει αναπτυγμένο κατάλληλο λεξιλόγιο επέμενε στην δική του διατύπωση και δεν εμπιστευόταν τον πιο έμπειρο συμμαθητή του.

4.3 Ανάλυση δεύτερου σκέλους της παρέμβασης

Σε αυτό το σκέλος φαινομενικά το ζητούμενο είναι ίδιο με αυτό του πρώτου σκέλους – μέρος 1. Δηλαδή, να μεταβάλλουν τις τιμές των μεταβλητών του αριστερού χεριού της 3^{ης} κίνησης (εικόνα 6), ώστε τα χέρια να έρθουν συμμετρικά ως προς την σπονδυλική στήλη. Όμως εδώ, το δόμημα είναι κατά μία έννοια μισοψημένο. Δηλαδή, δεξί και αριστερό χέρι στρίβουν και τα δύο αριστερόστροφα. Έτσι αν το δει κανείς σαν ένα νέο πρόγραμμα δεν υπάρχει πρόβλημα στην συμμετρία. Δηλαδή μπορούν οι μαθητές με κατάλληλες αλλαγές στην γωνία στροφής, για την ακρίβεια, με αντίθετες γωνίας στροφής σε δεξί και αριστερό χέρι, να μετακινήσουν τα χέρια ώστε να έρθουν συμμετρικά ως προς την σπονδυλική στήλη. Αν, όμως, το δει κάποιος σαν το ίδιο πρόγραμμα, έχει γίνει μια αλλαγή στον κώδικα που δεν παράγει τις συμμετρικές θέσεις των χεριών όπως θα έπρεπε. Ζητήθηκε από τους μαθητές να το δουν και με τις δύο οπτικές.

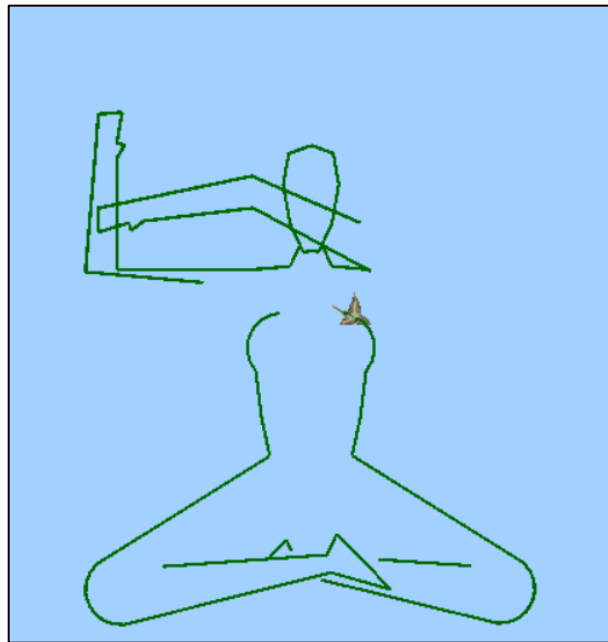
Σκέλος 2 – Μέρος 1^ο

Στο πρώτο μέρος δόθηκε στους μαθητές ως ένα πρόγραμμα διαφορετικό από τα προηγούμενα.

Αρχικά οι μαθητές και των δύο ομάδων έχοντας την φόρα από τις προηγούμενες δραστηριότητες αποφάσισαν να βάλουν ίσες τιμές στις μεταβλητές, για να δουν πως ο κανόνας τους δεν λειτουργούσε. Ακολούθησαν την συνηθισμένη τους διαδρομή βίντεο και δοκιμές στις τιμές των μεταβλητές του αριστερού χεριού. Χωρίς μεγάλη καθυστέρηση και οι δύο ομάδες κατέληξαν πως ο ώμος του αριστερού χεριού πρέπει να κάνει στροφή 270°, προκειμένου να έρθουν τα χέρια σε θέση συμμετρική ως προς την σπονδυλική στήλη.

Η διατύπωση της παρατήρησης των μαθητών δυσκόλεψε τις ομάδες και κυρίως την ομάδα Α, η οποία, όμως, διατύπωσε την εξής παρατήρηση: *Αυτή τη φορά οι μεταβλητές δεν είναι ίδιες, αλλά το αποτέλεσμα παραμένει ίδιο. Η σχέση μεταξύ τους είναι τριπλάσια η μια της άλλης. Το χέρι είναι, ήδη, γυρισμένο 90° οπότε πρέπει να το γυρίσουμε άλλες 270° για να έρθει στη θέση του.* Η ομάδα Β εδώ είπε: *Στο δεξί χέρι το φ να ισούται με το θ αλλά και με το ψ του άλλου χεριού. Για να υπολογίσουμε το χ πρέπει να κάνουμε 360°-θ, που ισούται με 270°.* Όπου θ, φ, ψ, χ είναι οι μεταβλητές των γωνιών ώμων και αγκώνων του ψηφιακού σώματος.

Η επιμονή ενός μαθητή της ομάδας Α να δώσουν καλά διατυπωμένες απαντήσεις δίνει στην ερευνήτρια την πρώτη ένδειξη για το ότι οι μαθητές της ομάδας Α έχουν προβληματιστεί και έχουν αρχίσει να αντιλαμβάνονται το πρόγραμμα και την συμμετρία όπως περιγράφεται από το πρόγραμμα.



Εικόνα 6: Σκέλος 2

Σκέλος 2 – Μέρος 2^ο

Σε αυτό το σκέλος, ζητήθηκε από τις ομάδες, να διορθώσουν τον κώδικα του αριστερού χεριού της 3^{ης} κίνησης, που χρησιμοποιήθηκε και παραπάνω, ώστε δεξί και αριστερό να στρίβουν ίσες γωνίες για να είναι τα χέρια συμμετρικά ως προς σπονδυλική στήλη. Είναι λοιπόν, μια διαδικασία αποσφαλμάτωσης, η οποία, όπως αναφέρθηκε στην θεωρητική πλαισίωση, είναι μια πολύ σημαντική δεξιότητα της υπολογιστικής σκέψης. Σε αυτό το σκέλος αναμένετε από τους μαθητές να εισχωρήσουν στον κώδικα και να δουν πως αυτό που οδηγεί στις αντίθετες γωνίες είναι πως, και τα δυο στρίβουν αριστερόστροφα και να το διορθώσουν.

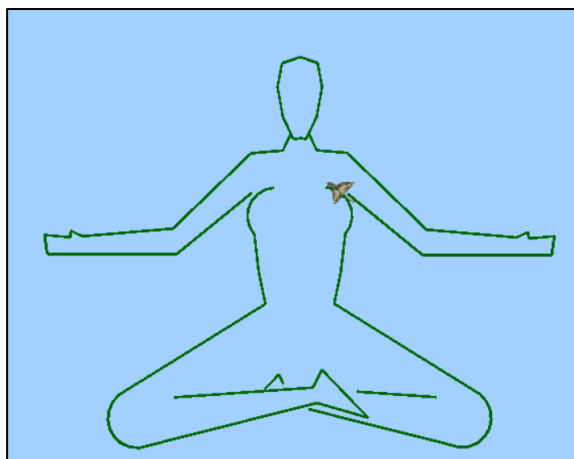
Η ομάδα Α, που είχε ήδη προβληματιστεί με την αλλαγή στο προηγούμενο ζητούμενο, ρωτάει αν μπορούν να θέσουν αρνητική τιμή στις μεταβλητές. Η ερώτηση αυτή πυροδοτήθηκε από το ότι ο ενός μαθητή να επαναλάβει με το χέρι του την κίνηση του δομήματος. Η θετική απάντηση της ερευνήτριας οδήγησε την ομάδα σε δοκιμές, που γρήγορα έδωσαν τη λύση.

Η ομάδα Β, ορμώμενη από την διατύπωση του ζητούμενου, που ήταν: «Να διορθώσετε τον κώδικα του αριστερού χεριού της 3ης κίνησης, προκειμένου δεξί και αριστερό χέρι να στρίβουν κατά ίση γωνία ώστε το ψηφιακό σώμα να τοποθετήσει τα χέρια του συμμετρικά ως προς την σπονδυλική του στήλη.», αποφάσισαν να αντικαταστήσουν τις μεταβλητές του αριστερού χεριού με εκείνες του δεξιού και έτσι να υπάρχει μοναδική μεταβλητή που στρίβουν ώμος και αγκώνας δεξιά και αριστερά. Αυτό όμως, δεν μπορούσε να λειτουργήσει. Αποφάσισαν λοιπόν να προσθέσουν τον κανόνα του 360°-χ στον κώδικα του αριστερού χεριού. Αυτό φυσικά λειτούργησε. Αυτή η σκέψη των μαθητών, ήταν μια βελτιστοποίηση του προγράμματος πολύ ενδιαφέρουσα, η οποία αναδείκνυε υψηλές δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων. Από την άλλη, όμως, το δεξί και το αριστερό χέρι στρίβουν πάλι αντίθετες γωνίες, απλώς έθεταν μια τιμή στην μεταβλητή της στροφής των ώμων.

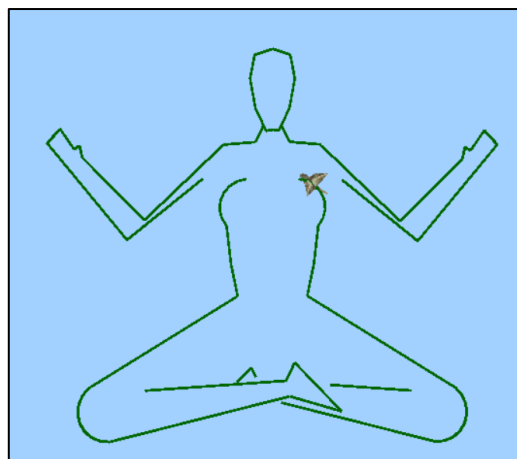
4.4 Ανάλυση τρίτου σκέλους της παρέμβασης

Το 3^ο σκέλος της παρέμβασης αφορά την πτυχή του PP. Οι μαθητές κλήθηκαν να προκαλέσουν την άλλη ομάδα δημιουργώντας για εκείνη ένα σφάλμα στον κώδικα του αριστερού χεριού. Η ομάδα B δούλεψε με την 4^η κίνηση (εικόνα 7), ενώ η ομάδα A με την 5^η κίνηση (εικόνα 8). Οι κινήσεις αυτή τη φορά δόθηκαν στους μαθητές με την ορθή θέση των χεριών. το. Διευκρινίστηκε, στους μαθητές, πως διόρθωση του κώδικα, σήμαινε τα χέρια να στρίβουν κατά ίσες γωνίες, ώστε να είναι συμμετρικά ως προς σπονδυλική στήλη.

Το στάδιο αυτό προκάλεσε τον ενθουσιασμό των ομάδων. Και οι δύο ομάδες προσπάθησαν να δημιουργήσουν έναν δυσεπίλυτο γρίφο, επεμβαίνοντας και στην δομή και στις γωνίες που στρίβουν τα χέρια. Η ομάδα A επέφερε αλλαγές στο δεξιά – αριστερά που στρίβει το σπυργίτι για να κατασκευάσει όλη τη δομή του αριστερού χεριού και κάποιες αλλαγές στο μήκος. Η ομάδα B άλλαξε, επίσης, τα μήκη που προχωράει το σπυργίτι για να κατασκευάσει το αριστερό χέρι, πρόσθεσε άσκοπες μεταβλητές που θα μπέρδευαν την αντίπαλη ομάδα και άλλαξε τις υπάρχουσες μεταβλητές μεταξύ τους. Τα προβλήματα που έθεσαν οι ομάδες, η μια στην άλλη, δεν ήταν ιδιαίτερος δύσκολα στην επίλυση καθώς είχαν τον σωστό κώδικα το δεξιού χεριού και μπορούσαν να πάρουν μια ιδέα του πως έμοιαζε ο σωστός κώδικας. Η ομάδα A δυσκολεύτηκε περισσότερο από την B, καθώς ήταν περισσότερα τα εμπόδια που είχε να ξεπεράσει.



Εικόνα 7: Σκέλος 3_Ομάδα B



Εικόνα 8: Σκέλος 3_Ομάδα A

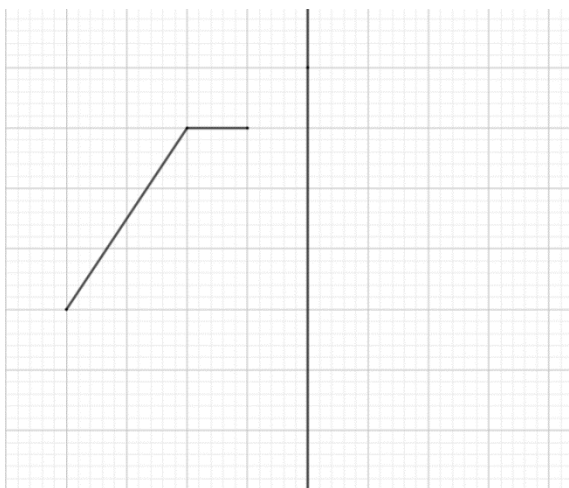
Στο τέλος της δραστηριότητας, επιλέχθηκε η ομάδα B για μια σύντομη συνέντευξη και post test. Η επιλογή της ομάδας B ήταν αυθόρμητη και στηρίχθηκε στο ότι είχε ολοκληρώσει πρώτη την δραστηριότητα.

Στην συνέντευξη, η οποία ήταν δομημένη, η ερευνήτρια προσπάθησε να αποσπάσει από τους μαθητές, το αν μέσω της δραστηριότητας άλλαξαν ή επεκτάθηκαν τις αντιλήψεις τους για την αξονική συμμετρίας. Η ερώτηση που έγινε στους μαθητές ήταν η εξής: Στο 1^ο σκέλος, διατυπώσατε τον κανόνα: «Για να είναι τα χέρια του σώματος συμμετρικά ως προς την σπονδυλική του στήλη, πρέπει να έχουν τις ίδιες μετρήσεις και στα δύο μέρη του άξονα συμμετρίας». Αν σκεφτείτε έξω από την δραστηριότητα, όταν τοποθετείτε άξονα συμμετρίας σε μια εικόνα, ποιόν κανόνα διατυπώνετε; Θεωρείτε πως αυτοί οι δύο κανόνες συγκλίνουν; Η απάντηση των μαθητών ήταν πως όταν σκέφτονται έξω από την δραστηριότητα να τοποθετήσουν άξονα συμμετρίας σε μια εικόνα, προσπαθούν να βρουν πού θα τον τοποθετήσουν,

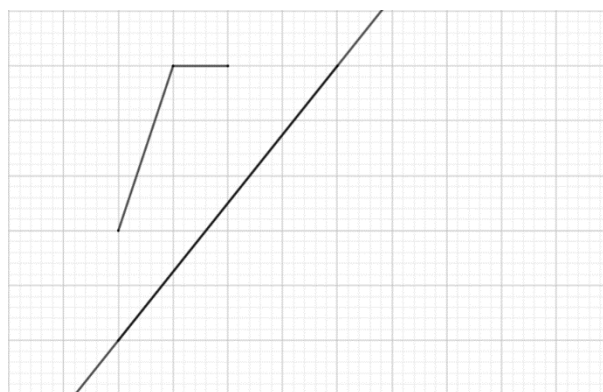
ώστε τα δύο μέρη που ορίζει ο άξονα να ταυτίζονται αν γίνει δίπλωση κατά μήκος του άξονα. Δεν μπορούσαν, όμως, να βρουν ομοιότητα αυτής της σκέψης με τον κανόνα που διατύπωσαν για την δραστηριότητα γιατί αυτή περιείχε μεταβλητές των οποίων τις τιμές μπορούν να αλλάξουμε και να μην υπάρχει συμμετρία.

Στο πλαίσιο της συνέντευξης οι μαθητές θέλησαν να μάθουν αν τα πήγαν καλά, αν απάντησαν σωστά στα ζητούμενα, οπότε έγιναν επιπλέον συζητήσεις, οι οποίες όμως δεν αφορούσαν τους στόχους της έρευνας.

Το posttest, έγινε σε πολύ περιορισμένο χρόνο. Ζητήθηκε από του μαθητές να φέρουν τις συμμετρικές δυο τεθλασμένων γραμμών ως προς άξονα, σε τετραγωνισμένο χαρτί. Στην 1^η περίπτωση ο άξονας ήταν κατακόρυφος οπότε, με την χρήση του τετραγωνισμένου χαρτιού, ήταν αναμενόμενο οι μαθητές να φέρουν εύκολα το συμμετρικό της τεθλασμένης γραμμής, όπως και έγινε. Στην 2^η περίπτωση, που ο άξονας ήταν πλάγιος και η τεθλασμένη γραμμή, δεν είχε κάθετα ή παράλληλα μέρη στον άξονα συμμετρίας ή στις πλευρές του τετραγωνισμένου χαρτιού, οι μαθητές λειτούργησαν ξανά με την λογική του ισαπέχει. Παρότι, τους δόθηκαν μοιρογνωμόνια και η εκφώνηση τους προέτρεπε να δοκιμάσουν τον κανόνα που όρισαν για τον άξονα συμμετρίας, ο περιορισμένος χρόνος τους ώθησε να χρησιμοποιήσουν στην στρατηγική τους που λειτουργούσε. Είναι πιθανό, βέβαια, το αποτέλεσμα του posttest να είναι παραπλανητικό. Αφενός γιατί συμπληρώθηκε μόνο από τη μία ομάδα, η οποία, μάλιστα, δεν είχε αναπτύξει νοήματα για τις σχέσεις των γωνιών στο πλαίσιο της αξονικής συμμετρίας και αφετέρου γιατί ο περιορισμός του χρόνου δεν επέτρεψε στην ερευνήτρια να καθοδηγήσει τους μαθητές να μιμηθούν τις κινήσεις των χεριών του δομήματος, όπως έγινε στην έρευνα των (Hoyles & Healy, UNFOLDING MEANINGS FOR REFLECTIVE SYMMETRY, 1997).



Εικόνα 9: 1^ο Σκέλος posttest



Εικόνα 10: 2^ο Σκέλος posttest

4.5 Συζήτηση

Τα αποτελέσματα της έρευνα δείχνουν πως οι μαθητές διευκολύνονται πολύ στην διερεύνηση των κινήσεων των χεριών του σώματος από την δυνατότητα δυναμικού χειρισμού που τους παρέχει το ψηφιακό εργαλείο.

Από την απομαγνητοφώνηση (πίνακας 5, 6 στο παράρτημα) και την παρακολούθηση των μαγνητοσκοπήσεων του καταγραφέα οθόνης, παρατηρείται πως ο τρόπος που οι μαθητές διερεύνησαν τις κινήσεις του ψηφιακού σώματος εξελισσόταν όσο προχωρούσαν οι δραστηριότητες. Αρχικά, οι μαθητές συζητούσαν για ζητήματα προσανατολισμού και για τον λόγο αυτό κατέφευγαν στο υποστηρικτικό video. Πράγματι, όπως φαίνεται και στις απομαγνητοφωνήσεις, στο παράρτημα, οι μαθητές συχνά προβληματίζονταν: «Ποιο είναι το αριστερό χέρι του ανθρώπου;», «Αριστερά ή δεξιά όπως κοιτάζουμε την οθόνη;», «Μην το πειράζεις αυτό, εμείς το αριστερό χέρι πειράζουμε!». Όσο οι δραστηριότητες εξελίσσονταν οι μαθητές τόσο λιγότερο χρειάζονται την οπτική ενίσχυση του καθοδηγητικού video. Είναι χαρακτηριστικό ότι η ομάδα Α, παρακολούθησε το video μόνο στις δύο πρώτες κινήσεις που ολοκλήρωσαν. Στην επόμενη κίνηση, όταν δυσκολεύτηκαν, πρότεινε ο ένας μαθητής να δούνε το video, αλλά δεν χρειάστηκαν την οπτική υποστήριξη, γιατί βρήκαν μόνοι τους τον τρόπο να διορθώσουν τα χέρια του ψηφιακού σώματος. Αντίστοιχα, η ομάδα Β παρακολούθησαν το video μόνο μέχρι την τρίτη κίνηση. Η αλλαγή αυτή, το να μην έχουν, δηλαδή, την ανάγκη της οπτικής υποστήριξης είναι ένδειξη του ότι άρχισαν να συνδέουν τον προσανατολισμό τους με τον κώδικα του προγράμματος και τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε κάθε χέρι. Έτσι, όταν αντιλήφθηκαν αυτή την σύνδεση, άρχισαν να συνδέουν τις διερευνήσεις των κινήσεων του ψηφιακού σώματος με τις τιμές των μεταβλητών. Η σύνδεση αυτή εξελίχθηκε σε δύο στάδιο. Αρχικά, άλλαζαν τις οριακές τιμές, ενώ στη συνέχεια συνδύαζαν αλλαγή οριακών τιμών με μετακίνηση μεταβολέων για να καταλάβουν πως λειτουργεί η κίνηση των χεριών. Σε συζητήσεις των ομάδων, όταν υπήρχε περίπτωση διαφωνίας, η απάντηση ήταν να δοκιμάσουν κάποιον άλλον συνδυασμό ο οποίος, τελικά, έκαμπτε τις όποιες αντιρρήσεις. Βεβαίως, η μετακίνηση των μεταβολέων χρησιμοποιήθηκε εξαρχής από τους μαθητές. Ωστόσο άρχισε να επιδρά στον τρόπο που αντιλαμβάνονται τις κινήσεις, μόνο όταν έχουν μεταφράσει την κίνηση σε στροφές γωνιών και τιμές μεταβλητών. Η πορεία του πώς συζήτησαν οι μαθητές τις κινήσεις του ψηφιακού σώματος φαίνεται στον πίνακα 2.

Πίνακας 2: Εξέλιξη της διερεύνησης των κινήσεων.

Ποιο είναι το αριστερό χέρι; Βάλε το video.	Ποιες είναι οι μεταβλητές του αριστερού χεριού. Για δοκίμασε.	Βάλε $x=0$.	Βάλε $x=0$ και γύρνα το.
---	---	--------------	--------------------------

Αυτή η διαδοχή των σταδίων στις συζητήσεις, των μαθητών, αναδεικνύει πως τα νοήματα των μαθητών μέσα από την ενασχόλησή τους με το δόμημα εξελίσσονται. Η αρχική οπτική ταύτιση μετατρέπεται σε στροφές ίσων γωνιών. Κάτι που είναι ζητούμενο για την σωστή αντίληψη της συμμετρίας (Seah & Horne, 2019). Σημαντική ένδειξη του ότι ο δυναμικός χειρισμός των αντικειμένων αλληλοεπιδρά με την ενσώματη αντίληψη της κίνησης προκύπτει από το ότι ένας μαθητής της ομάδας Α στην διάρκεια της αποσφαλμάτωσης, του κώδικα της τρίτης άσκησης, επαναλάμβανε με το σώμα τους την κίνηση του δομήματος για να αντιληφθεί το πώς λειτουργεί ο κώδικας για το δόμημα και να εντοπίσει το σφάλμα. Αυτή η διαδικασία οδήγησε στην κομβική ερώτηση του αν μπορεί το χέρι να κινηθεί κατά αρνητική γωνία.

Ταυτόχρονα με την εξέλιξη των διερευνήσεων των κινήσεων του ψηφιακού σώματος, εξελισσόταν το πώς αντιλαμβάνονται, οι μαθητές, την έννοια της συμμετρίας.

Η ομάδα Β εστίασε εξ' αρχής στις μεταβλητές. Η ομάδα Α, από την άλλη, έκανε πολλές συζητήσεις για την κατασκευή της συμμετρίας, αλλά κυρίως για την διατύπωση των κανόνων. Αυτές οι συζητήσεις και διαπραγματεύσεις δίνουν την εικόνα του πώς τα υπάρχοντα νοήματα μετασχηματίζονται και εξελίσσονται. Οι μαθητές της ομάδας Α, όταν αναζητούν τη συμμετρία στις δύο πρώτες κινήσεις συζητούν: «Να κάνουμε και το άλλο χέρι όπως αυτό», «Πρέπει να συμπίπτει αν το διπλώσουμε στην σπονδυλική στήλη», «Τα χέρια είναι ίσα, στρίβουν ίσες μοίρες, άρα ισαπέχουν από την σπονδυλική στήλη». Στην πορεία, όμως, της δραστηριότητας συζητούν «Μετακίνησε την μεταβλητή α, να δούμε σε ποιο χέρι αντιστοιχεί για να βρούμε την αντίστοιχη μεταβλητή του άλλου χεριού». Αρχίζουν, δηλαδή, να στηρίζονται στις τιμές της γωνίας στροφής των χεριών και να αποδεσμεύονται από την οπτική ταύτιση, χωρίς βέβαια να την απορρίπτουν. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τους κανόνες που διατυπώνουν για το τί πρέπει να συμβαίνει, ώστε τα χέρια του ψηφιακού σώματος να είναι συμμετρικά ως προς την σπονδυλική στήλη, που αναφέρεται στην ανάλυση του 1^{ου} σκέλους των δραστηριοτήτων.

Ο μαθησιακός στόχος της χρήσης δυναμικού χειρισμού για την υποστήριξη της δραστηριότητας της αξονικής συμμετρίας, είναι οι μαθητές να εδραιώσουν με πειραματισμό τα συμπεράσματα τους ώστε να είναι σε θέση να τα διατυπώσουν, αλλά και να αξιοποιούν τις διατυπώσεις τους ως άξονα ανάλυσης τις συμμετρίας όταν καλούνται να διορθώσουν τον κώδικα.

Το πρώτο σκέλος του μαθησιακού στόχου φαίνεται να επιτυγχάνεται. Οι μαθητές ήταν σε θέση να διατυπώσουν τα συμπεράσματά τους σε μορφή κανόνων – στρατηγικών, χωρίς όμως επίσημο λεξιλόγιο, σε αντίθεση με τα αποτελέσματα των (Ng & Sinclair, 2015). Αυτή η παρατήρηση αξίζει να αναλυθεί σε δύο άξονες. Αφενός, στην προαναφερθείσα έρευνα η δραστηριότητα υποστηρίζονταν από τους δύο ερευνητές και τον δάσκαλο των μαθητών, ενώ στην παρούσα υποστηρίχτηκε μόνο από την ερευνήτρια. Αυτό έπαιξε σημαντικό ρόλο στο ότι οι μαθητές δεν ανέπτυξαν κατάλληλο λεξιλόγιο για να περιγράψουν την συμμετρία. Στους κανόνες που διατυπώνουν, οι μαθητές, επαναλαμβάνονται οι εκφράσεις «...ίδιες μεταβλητές...», «...ίδιες γωνίες...». Αυτή η στοιχειώδης διόρθωση θα μπορούσε να έχει γίνει αν η παρέμβαση υποστηρίζονταν από τουλάχιστον έναν ακόμη ειδικό, ερευνητή ή μαθηματικό, ώστε να υπάρχει ο χρόνος και η εστίαση της προσοχής σε κάθε ομάδα χωριστά. Ο άλλος άξονας, αφορά την κατανομή των ρόλων στις ομάδες. Οι μαθητές της ομάδας Α, χαρακτηρίζονται ο ένας από ανεπτυγμένη ικανότητα τεκμηρίωσης των απαντήσεων του και ο άλλος από αναπτυγμένες δεξιότητες υπολογιστικής σκέψης. Παρά του ότι ο καθένας θα μπορούσε να φέρει στην ομάδα την δική του «εξειδίκευση» και να επωφεληθούν και οι δύο, η λάθος κατανομή ρόλων συνέβαλε σε κακές έως λάθος τεκμηριώσεις και σε πολύ μεγάλη καθυστέρηση στην υλοποίηση αλλαγών στο πρόγραμμα. Στην παρούσα έρευνα, οι περιορισμοί πρωτοκόλλων covid επέβαλε πως ένα μέλος της ομάδας θα χειρίζεται τον υπολογιστή και το άλλο μέλλον θα καταγράφει στο υποστηρικτικό φυλλάδιο εργασίας. Οι ρόλοι κατανεμήθηκαν από την ερευνήτρια, χωρίς αυτή, να έχει γνώση των δεξιοτήτων των μαθητών. Καλό θα ήταν, λοιπόν, η κατανομή ρόλων, εφόσον υπάρχουν, να γίνονται από τον διδάσκοντα καθηγητή που θα έχει αντίληψη των ειδικών δεξιοτήτων των μαθητών του.

Το σκέλος του μαθησιακού στόχου που αφορά το αν οι μαθητές αξιοποιούν τις διατυπώσεις τους ως άξονα ανάλυσης τις συμμετρίας κατά την αποσφαλμάτωση, επιτυγχάνεται από την ομάδα Α. Οι μαθητές, εντόπισαν και εδραίωσαν το επαναλαμβανόμενο μοτίβο των ίσων γωνιών που ορίζουν τα χέρια με την σπονδυλική στήλη, τον νοητό άξονα συμμετρίας, όσο επεξεργάζονταν τις κινήσεις του ψηφιακού σώματος, στην προσπάθειά τους να δημιουργήσουν συμμετρικές κινήσεις. Η πεποίθηση αυτή ήταν τόσο ισχυρή που από την δεύτερη δοκιμασία και έπειτα

προέκυψε σαν αυτοματισμός. Καταρχάς δοκίμαζαν ίσες γωνίες στροφής προκειμένου τα χέρια να είναι συμμετρικά ως προς την σπονδυλική στήλη και αν αυτό δεν λειτουργούσε διάβαζαν το ζητούμενο πιο προσεκτικά ή περνούσαν στο υποστηρικτικά video, ώστε να πάρουν πληροφορίες. Από τη μια, αυτό δηλώνει πως το δόμημα επηρέασε σημαντικά τον τρόπο που οι μαθητές αντιλαμβάνονταν τη συμμετρία. Από την άλλη ο συνδυασμός του επαναλαμβανόμενου προγράμματος θα μπορούσε να λειτουργήσει σαν μια «ασφαλής μέθοδος παραγωγής» συμμετρίας για την συγκεκριμένη διαδικασία. Για την μια ομάδα, πραγματικά, λειτούργησε σαν πεποίθηση, ενώ για την άλλη σαν επίλυση της συγκεκριμένης διαδικασίας.

Δηλαδή, για την μια ομάδα, την ομάδα A, δημιούργησε σοβαρό προβληματισμό το πρόγραμμα στο οποίο η συμμετρία των χεριών ως προς την σπονδυλική στήλη δημιουργούνταν με άλλον συνδυασμό γωνιών. Προσπαθούν για πολύ ώρα να αιτιολογήσουν έναν νέο κανόνα που ερχόταν να καταρρίψει τον προηγούμενο ο οποίος είχε γίνει κατανοητός διότι συνέκλινε και επέκτεινε την πρότερη γνώση τους για την αξονική συμμετρία. Ο κανόνας τους, δε, ήταν τόσο ισχυρός που μέσα στην νέα διατύπωση έπρεπε να υπάρχει. Όταν λοιπόν, οι μαθητές πέρασαν στο στάδιο της διόρθωσης του κώδικα που υποδήλωνε πως υπήρχε σφάλμα στην προηγούμενη συμμετρία, ένιωσαν ξανά ισχυροί απέναντι στις γνώσεις τους και μετά από συζήτηση και δοκιμές κατάφεραν να επιτύχουν και τον δεύτερο σκέλος του μαθησιακού στόχου. Από την άλλη, η ομάδα B, θεωρώντας πως αυτοί οι κανόνες που διατυπώνουν, είναι οι κανόνες με τους οποίους λειτουργεί το πρόγραμμα που επεξεργάζονται και μόνο, δεν φάνηκε να επηρεάζονται από αυτή την αλλαγή του κανόνα τους. Φάνηκε να το εκτίμησαν ως εξής, το πρόγραμμα που επεξεργάζονται τώρα είναι μια παραλλαγή του προηγούμενου προγράμματος και άρα έχει δικούς του κανόνες για να παράγει συμμετρία. Οι κανόνες που διατύπωναν, δεν αφορούσαν την αξονική συμμετρία, αλλά τους κανόνες ενός προγράμματος. Αυτό επιβεβαιώνεται και από την συνέντευξη των μαθητών οι οποίοι απάντησαν πως η αξονική συμμετρία σε μια τυπική εικόνα και η συμμετρία στο πρόγραμμα δεν έχουν τους ίδιους κανόνες. Επιπλέον, στην διαδικασία αποσφαλμάτωσης, διάβασαν το ζητούμενο σαν προγραμματιστική πρόκληση. Η διατύπωση «...να στρίβουν τα χέρια κατά ίση γωνία...» μεταφράστηκε από τους μαθητές να υπάρχει μοναδική μεταβλητή που να επηρεάζει τη γωνία στροφής και των δύο χεριών. Το ότι οι μαθητές της ομάδας B δεν νοηματοδότησαν την έννοια της αξονικής συμμετρίας μέσω της παρέμβασης, φαίνεται να συσχετίζεται με το ότι χαρακτηρίζονται ως άτομα με πολύ ανεπτυγμένες δεξιότητες υπολογιστικής σκέψης, ενώ ο μικρόκοσμος που καλούνται επεξεργαστούν έχει χαμηλές προγραμματιστικές απαιτήσεις. Αυτή η παρατήρηση επιβεβαιώνεται και από (Grover & Pea, 2017), όταν λένε πως ένα πρόγραμμα χαμηλών απαιτήσεων (low floor) είναι πιθανό να είναι τόσο εύκολο για τον χρήστη που να μην αναπτύξει κάποια μεταγνωστική δεξιότητα.

Σε σχέση με τον τρίτο μαθησιακό στόχο, ο οποίος ήταν, οι μαθητές να σχεδιάσουν ένα νέο πρόβλημα, παρόμοιο με αυτό που έλυσαν, όταν θα έχουν διορθώσει τον κώδικα του προγράμματος, παρατηρήθηκε πως οι μαθητές έγιναν με ενθουσιασμό problem posers. Η ιδέα του να δημιουργήσουν μια ενσφάλατη άσκηση και να προκαλέσουν την άλλη ομάδα να την λύσει, λειτούργησε καταλυτικά στο να προσπαθήσουν να είναι δημιουργικοί. Το ότι κατά συνθήκη ήταν μαθητές του ίδιου τμήματος, λόγω πρωτοκόλλου covid, επίσης λειτούργησε στο πόσο δημιουργικά σκέφτηκαν, καθώς γνώριζαν τον τρόπο που σκέφτονται οι συμμαθητές τους. Μέσα στον ενθουσιασμό τους, οι μαθητές, δεν παρέλειψαν να κοιτάξουν το πρόβλημα που δημιουργούσαν από την ζητούμενη σκοπιά. Δηλαδή, να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα που στοχεύει στην συγκεκριμένη λύση, που τους ζητήθηκε. Εδώ, επιβεβαιώνεται η κατεύθυνση των (Singer, Ellerton, & Cai, 2013) για την χειραγώγηση των στόχων. Η πρότασή τους, να ζητηθεί από τους μαθητές να θέσουν ένα νέο πρόβλημα που να

στοχεύει σε συγκεκριμένη λύση και για την ,προτεινόμενη, δομή του να χρησιμοποιηθούν οι παραδοχές ενός προβλήματος που είχε τεθεί νωρίτερα, φαίνεται πως τους άφησε τον χώρο να ασχοληθούν με αυτή την διαδικασία χωρίς να προβληματιστούν ή να αγχωθούν. Αντιθέτως, φάνηκε να τους έδωσε την δυνατότητα να προτείνουν τα προβλήματά τους με αυτοπεποίθηση και σιγουριά. Από την άλλη σκοπιά, την κριτική σκέψη που αναπτύσσουν οι μαθητές όταν καλούνται να θέσουν ένα νέο πρόβλημα και το πόσο εμβαθύνουν στις έννοιες, δεν επιτεύχθηκε στην τρέχουσα έρευνα. Στα προβλήματα που διατύπωσαν οι μαθητές φάνηκε να θέτουν εύστοχα προγραμματιστικά προβλήματα, παρά μαθηματικά προβλήματα. Αν, και συμπεριέλαβαν στους στόχους τους το να δημιουργήσουν πρόβλημα στην συμμετρία, δεν φάνηκε να τους απασχολεί το πώς μπορούν να το κάνουν αυτό με άλλον τρόπο εκτός του τρόπου που τους παρουσιάστηκε. Πράγματι, η μια ομάδα «χάλασε» τη συμμετρία των κινήσεων των χεριών αλλάζοντας το προς τα που στρίβει το χέρι, δεξιά ή αριστερά, όπως είχε συμβεί στην 3^η κίνηση, ενώ η άλλη ομάδα άλλαξε τις μοίρες της αρχικής θέσης του χεριού, επεμβαίνοντας στο μη παραμετρικό κομμάτι του κώδικα. Ίσως εδώ, να χρειαζόταν να υποστηριχθεί η εμβάθυνση των μαθητών, στην αξονική συμμετρία, μέσω μιας άλλης δραστηριότητας. Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, ο μικρόκοσμος που δίνεται στους μαθητές διατρέχεται σταθερά από τον ίδιο κανόνα. Θα μπορούσε να έχει δημιουργηθεί ένας άλλος μικρόκοσμος που να παρουσιάζει ένα νέο πρόβλημα γωνιών, στο πλαίσιο της αξονικής συμμετρίας, ώστε να τους δοθεί και ένα επιπλέον ερέθισμα για διερεύνηση. Εκτός από έναν νέο μικρόκοσμο, τα επιπλέον ερεθίσματα θα μπορούσαν να υποστηριχτούν από βιωματική δραστηριότητα στην οποία οι μαθητές θα καθοδηγούνταν στο να δημιουργήσουν με το σώμα τους άλλες συμμετρικές κινήσεις των χεριών τους, είτε ως προς την σπονδυλική στήλη, είτε ως προς άλλο άξονα συμμετρίας. Κάτι τέτοιο θα επέτρεπε και αλλαγή στην διατύπωση του ζητούμενου της τελικής δραστηριότητας από κλειστού τύπου ζητούμενο σε ανοιχτού τύπου. Στην τρέχουσα έρευνα το ζητούμενο ήταν να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα στην συμμετρία των χεριών ως προς σπονδυλική στήλη που θα λύνεται με στροφή ίσων γωνιών. Αν είχαν δοθεί περισσότερα ερεθίσματα στους μαθητές με επιπλέον δραστηριότητες, το ζητούμενο θα μπορούσε να είναι η δημιουργία προβλήματος στην συμμετρία των χεριών, χωρίς στόχευση σε συγκεκριμένη λύση. Οι μαθητές και των δύο ομάδων φάνηκαν ικανοποιημένοι με τα προβλήματα που έθεσαν. Οι μαθητές της ομάδας Α, φάνηκαν μετριοπαθείς, δηλώνοντας πως δεν γινόταν να διατυπωθεί ένα πρόβλημα πολύ δύσκολο. Η ομάδα Β, είχε πολύ μεγάλη αυτοπεποίθηση για το πρόβλημα που έθεσε, ώστε ονόμασε το πρόβλημά της «Άμα μπορείς λύσε το». Το να εμβαθύνουν οι μαθητές σε μια έννοια μέσα από την ενασχόλησή τους με το να θέτουν ουσιώδη προβλήματα ή και ερωτήσεις, είναι μια διαδικασία που απαιτεί την ένταξη της μεθόδου PP στις ρουτίνες διδασκαλίας των μαθητών. Δεν θα ήταν δυνατό αυτό να συμβεί στο πλαίσιο αυτής της έρευνας. Η ένδειξη, όμως, του ότι οι μαθητές μπορούν να ενθουσιαστούν με την δραστηριότητα του PP, όταν εντάσσεται σαν τελικό κομμάτι μιας διερευνητικής διδακτικής ενότητας, έρχεται να προσθέσει στην βιβλιογραφία.

4.6 Συμπεράσματα

Συμπερασματικά, στην τρέχουσα έρευνα εντοπίζονται ενδείξεις για το ότι σε ένα πλαίσιο διερευνητικής μάθησης η δυνατότητα δυναμικού χειρισμού ψηφιακών δομημάτων συμβάλλει την διερεύνηση των εννοιών αλλά και την επέκταση των νοημάτων από τους μαθητές. Συγκεκριμένα, η μία ομάδα μέσα από αυτή τη διαδικασία νοηματοδότησε την έννοια της αξονικής συμμετρίας σαν σχέσεις γωνιών και επέκτεινε τη γνώση της. Όπως φάνηκε από τις απαντήσεις του pre test, αλλά και από συζητήσεις των μαθητών στην διάρκεια της παρέμβασης, η αξονική συμμετρία ελέγχεται, κυρίως, μέσω της δίπλωσης κατά μήκος του άξονα και της οπτικής ταύτισης των δύο μερών της εικόνας. Ο μαθησιακός σχεδιασμός και η δυνατότητα δυναμικού χειρισμού του MaLT έδωσε στους μαθητές, της ομάδας Α, την δυνατότητα να πειραματιστεί και να σκεφτεί την συμμετρία υπό το πρίσμα των γωνιών που σχηματίζουν τα αντικείμενα με τους άξονες, να ελέγξει και να παγιώσει αυτήν την οπτική. Για την ομάδα Β, η δραστηριότητα δεν έγινε αντιληπτή ως διαδικασία μάθησης. Οι μαθητές της ομάδας αυτής, χαρακτηρίζονται ως έμπειροι χρήστες του λογισμικού που χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή του ψηφιακού δομήματος και ως άτομα με υψηλές δεξιότητες υπολογιστικής σκέψης. Για αυτούς τους μαθητές δεν κρίνονται κατάλληλες οι δραστηριότητες που στηρίζονται στον δυναμικό χειρισμό των αναπαραστάσεων. Βεβαίως, οι μαθητές, εντόπισαν και εφάρμοσαν το μοτίβο των ίσων γωνιών που ορίζουν τα αντικείμενα με τον άξονα συμμετρίας, αλλά δεν φάνηκε να επηρεάζεται η αντίληψη που είχαν για την έννοια της συμμετρίας όπως φάνηκε από την συνέντευξη.

Τέλος, η κατ' εξοχήν, στρατηγική που ακολούθησαν οι μαθητές για να θέσουν ένα νέο πρόβλημα ήταν να χρησιμοποιήσουν τις προβληματικές καταστάσεις που διόρθωσαν στην διάρκεια της παρέμβασης και να αλλάξουν τις μετρήσεις του προγράμματος που κατασκεύαζε το ψηφιακό σώμα. Η μία ομάδα, που χαρακτηρίζεται από υψηλή δεξιότητα υπολογιστικής σκέψης, προσθέτει, επιπλέον, άσκοπες μεταβλητές για να αποπροσανατολίσει την άλλη ομάδα. Η διαδικασία αυτή, της μίμησης των ζητούμενων σε ένα νέο πρόβλημα, είναι καταρχάς μια καλή ένδειξη, τόσο για το ότι, οι μαθητές, κατάλαβαν την δομή και το νόημα της προβληματικής, που θέτουν οι δραστηριότητες, όσο και για το ότι είναι σε θέση να την εφαρμόσουν. Η επιλογή του να συνδυαστεί στο ερέθισμα για την δραστηριότητα του PP, το να θέσουν οι μαθητές ένα νέο πρόβλημα στηριγμένοι σε αυτά που έλυσαν με το να προκαλέσουν την άλλη ομάδα, φαίνεται να λειτουργεί καταλυτικά στην εμπλοκή των μαθητών με τη δραστηριότητα. Οι μαθητές και των δύο ομάδων προβληματίζονταν για την ευστοχία και την καταλληλότητα των προβλημάτων όσο τα προετοίμαζαν, αλλά ένιωσαν ικανοποιημένοι από τα τελικά παραγόμενά τους. Η διάθεση των μαθητών να δημιουργήσουν απαιτητικά προβλήματα, για την άλλη ομάδα, οδήγησε στην ανάπτυξη κριτικής σκέψης σε ζητήματα που σχετίζονται με την υπολογιστική σκέψη και όχι με το γνωστικό αντικείμενο. Είναι όμως μία διαδικασία η οποία αξίζει να ενσωματώνεται, ώστε οι μαθητές, σε θετικό κλίμα, να επεξεργάζονται τα συμπεράσματά τους και τα νοήματα που δημιουργούν θέτοντας νέα προβλήματα και ερωτήσεις.

Η παραπάνω ερευνητική δραστηριότητα, προτείνεται από την ερευνήτρια να εφαρμοστεί σε μαθητές της Β' Γυμνασίου που έχουν ήδη αναπτύξει νοήματα για την έννοια της αξονικής συμμετρίας, ώστε να επεκτείνουν και να εδραιώσουν τα νοήματά τους σε μη μαθηματικά περικείμενα. Για την διασφάλιση των αποτελεσμάτων

προτείνεται σε κάθε σκέλος της δραστηριότητας οι μαθητές να εφαρμόζουν τις παρατηρήσεις τους σε άλλη δραστηριότητα, ώστε να έχουν την δυνατότητα να τα ελέγξουν σε ένα νέο δόμημα που δεν θα διατρέχεται σταθερά από τους ίδιους κανόνες.

4.7 Η Επέκταση Της Ερευνάς

Για την επέκταση της έρευνας προτείνεται η αξιοποίηση του ίδιου ψηφιακού σώματος και στην τρίτη διάσταση: μια δυνατότητα που ενσωματώνεται στο MaLT. Η πρώτη σκέψη για την παρούσα εργασία, ήταν αυτή. Δηλαδή το ψηφιακό σώμα να κινεί τα χέρια του στον χώρο και να παράγει συμμετρίες. Ο προγραμματισμός για να κινείται το ψηφιακό σώμα στον χώρο, χρειάζεται μια πολύ μικρή παρέμβαση. Δηλαδή, προσθήκη δύο έως τεσσάρων ακόμα μεταβλητών. Μεταβλητές περιστροφής των χεριών δεξιά – αριστερά και πάνω - κάτω. Με αυτόν τον τρόπο θα μπορούσαν να οριστούν συμμετρικές θέσεων των χεριών του ανθρώπινου σώματος ως προς επίπεδο, το οποίο θα καλούνταν να σχηματίσουν οι μαθητές, ως προς άξονα και κέντρο. Βεβαίως, μια τέτοια πρόταση θα είχε νόημα να εφαρμοστεί σε μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας και εφόσον εξασφαλιζόνταν η ικανότητα αιτιολόγησης της συμμετρίας στο επίπεδο. Επιπλέον, σε μια τέτοια επέκταση που αυξάνεται η πολυπλοκότητα των νοημάτων και των διερευνήσεων που πρέπει να κάνουν οι μαθητές, θα έπρεπε κάθε δραστηριότητα να υποστηρίζεται από διδασκαλία.

5. Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Mishra, S., & Iyer, S. (2013). Problem posing exercises (PPE): an instructional strategy for learning of complex material in introductory programming courses. *In Technology for education (T4E), 2013 IEEE fifth international conference on*, (pp. 151-158).
- Ackermann, E. (2001). Piaget's Constructivism, Papert's Constructionism: What's the difference? *CONSTRUCTIVISM: USES AND PERSPECTIVES IN EDUCATION, VOLUMES 1. 2.* Geneva. Retrieved 12 20, 2021, from http://learning.media.mit.edu/content/publications/EA.Piaget%20_%20Papert.pdf
- Battista, M. (2008). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives* (pp. 341-362). Information Age Publishing Charlotte, NC.
- Beal, C., & Cohen, P. (2012). Teach Ourselves: Technology to Support Problem Posing in the STEM Classroom. *Creative Education*, 3(4), pp. 513-519. doi:10.4236/ce.2012.34078
- Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102(8), pp. 325-347. doi:10.1016/j.ijer.2019.01.001
- Cobb, P., & Bowers, J. (1999). Cognitive and Situated Learning Perspectives in Theory and Practice. *Educational Researcher*, 28(4), pp. 4-15. doi:10.3102/0013189X028002004
- Edwards, L. (1998). Embodying mathematics and science: Microworlds as representations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), pp. 53-78. doi:10.1016/S0732-3123(99)80061-3
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
- Goldenberg, P., & Cuoco, A. (1998). What Is Dynamic Geometry? In *Designing learning Environments for developing understanding of Geometry and space* (pp. 365-386). Routledge.
- Graesser, A., Otero, J., Corbett, A., Flickinger, D., Joshi, A., & Vanderwende, L. (2008). *Guidelines for question generation shared task evaluation campaigns*. University of Memphis.
- Grizioti, M., & Kynigos, C. (2021). Code the mime: A 3D programmable charades game for computational thinking in MaLT2. *British Journal of Educational Technology*, 52(3), pp. 1004-10023. doi:10.1111/bjet.13085
- Grover, S., & Pea, R. (2017). Computational Thinking: A Competency Whose Time Has Come. In *Computer Science Education*. doi:10.5040/9781350057142.ch-003
- Hacker, D., Dunlosky, J., & Graesser, A. (1998). *Metacognition in educational theory and practice*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Healy, L. (2003). From symmetry as a property to reflection as a geometrical transformation: evolving meanings and computational tools. *Third computer algebra in mathematics*. Reims, France. Retrieved 11 7, 2021, from <https://edutice.archives-ouvertes.fr/edutice-00001334/document>

- Healy, L. (2004). The role of tool and teacher mediation in the construction of meanings for reflection. *28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, pp. 33-40. Bergen, Norway.
- Healy, L., & Kynigos, C. (2010). Charting the microworld territory over time: design and construction in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, pp. 63–76. doi:10.1007/s11858-009-0193-5
- Hoyles, C., & Healy, L. (1997). UNFOLDING MEANINGS FOR REFLECTIVE SYMMETRY. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*(2), pp. 27–59. doi:https://doi.org/10.1023/A:1009721414546
- Hoyles, C., & Noss, R. (1992). A pedagogy for mathematical microworlds. *Educational Studies in Mathematics*, 23, pp. 31–57. doi:https://doi.org/10.1007/BF00302313
- Knuchel, C. (2004). Teaching Symmetry in the Elementary Curriculum. *The Mathematics Enthusiast*, 1(1). Retrieved from https://scholarworks.umt.edu/tme/vol1/iss1/2
- Koichu, B., & Kontorovich, I. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing: a case of the Billiard Task. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), pp. 71-86. doi:10.1007/s10649-012-9431-9
- Kontorovich, I., & Koichu, B. (2009). Towards a Comprehensive Framework of Mathematical Problem Posing. *33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, pp. 401-408. Thessaloniki, Greece.
- Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *Journal of Mathematical Behavior*, pp. 149-161. doi:10.1016/j.jmathb.2011.11.002
- Kynigos, C. (2012). Constructionism: theory of learning or theory of design? *12th International Congress on Mathematical Education*. Seoul, S. Korea.
- Kynigos, C., & Grizioti, M. (2018). Programming Approaches to Computational Thinking: Integrating Turtle Geometry, Dynamic Manipulation and 3D Space. *Informatics in Education*, 17(2), pp. 321-340. doi:10.15388/infedu.2018.17
- Leikin, R., Berman, A., & Zaslavsky, G. (2000). Learning Through Teaching: The Case of Symmetry. *Mathematics Education Research Journal*, 12(1), pp. 18-36. doi:10.1007/BF03217072
- Mishra, S., & Iyer, S. (2013). Problem Posing Exercises (PPE): An instructional strategy for learning of complex material in introductory programming courses. *IEEE Fifth International Conference on Technology for Education*, (pp. 151-158). Kharagpur, India. doi:https://doi.org/10.1109/T4E.2013.45
- Mishra, S., & Iyer, S. (2015). An exploration of problem posing-based activities as an assessment tool and as an instructional strategy. *Research and Practice in Technology Enhanced Learning*, 10(5), pp. 1-19. doi:10.1007/s41039-015-0006-0
- Ng, O.-L., & Sinclair, N. (2015). Young children reasoning about symmetry in a dynamic geometry environment. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), pp. 421-434. doi:10.1007/s11858-014-0660-5
- Noss, R., & Hoyles, C. (1996). Windows on mathematical meaning: Learning cultures and computers. Spingers Science and Business Media.
- Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. New York: Basic Books .

- Sarama, J., & Clements, D. (2002). Design of Microworlds in Mathematics and Science Education. *Journal of Educational Computing Research*, 27(1), pp. 1-5. doi:https://doi.org/10.2190/P9GT-RN11-3AY3-WBG6
- Seah, R., & Horne, M. (2019). An exploratory study on students' reasoning about symmetry. *Proceedings of the 42nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 628-635). Perth: MERGA.
- Shunk, H. (2010). *Θεωρίες Μάθησης. Μια εκπαιδευτική προσέγγιση*. Αθήνα: Μεταίχμιο.
- Singer, F. M., Ellerton, N., & Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), pp. 1-7. doi:10.1007/s10649-013-9478-2
- Singer, F., & Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), pp. 9-26. doi:10.1007/s10649-012-9422-x
- Stoyanova, E., & Ellerton, N. (1996). A framework for research into students' problem posing. In *Technology in mathematics education* (pp. 518-525). Melbourne: P. Clarkson.
- Wang, F., & Hannafin, M. (2005). Design-based research and technology-enhanced learning environments. *Educational Technology, Research and Development*, 53(4), pp. 5-23. doi:10.1007/BF02504682
- Wing, J. (2006). "Computational Thinking". *Communications of the ACM*, 49(3), pp. 33-35.
- Wing, J. (2012). Research Notebook: Computational Thinking--What and Why?
- Wing, J. (2014). COMPUTATIONAL THINKING BENEFITS SOCIETY. *Social Issues in Computing*.
- Xistouri, X., & Pitta-Pantazi, D. (2006). SPATIAL ROTATION AND PERSPECTIVE TAKING ABILITIES IN RELATION TO PERFORMANCE IN REFLECTIVE SYMMETRY TASKS. *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 5, pp. 425-440. Prague.
- Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., & Σιδέρης, Π. (n.d.). *Ευκλείδεια Γεωμετρία*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εδόσεων "ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ".
- Τσελεπίδης, Κ., & Μαρκόπουλος, Χ. (2005). Τσελεπίδης, Κ. & Μαρκόπουλος, Χ. (2005). Συμμετρία: σχέση ισότητας ή γεωμετρικός μετασχηματισμός;. *1ο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών*.

Παράθεση Πινάκων

Πίνακας 3: ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΡΟΛΟΓΙΑΣ

Ξενόγλωσσος όρος	Ελληνικός Όρος
Problem Posing	Διατύπωση Προβλημάτων
Computational Thinking	Υπολογιστική Σκέψη
Body syntonic	Ενσώματη αντίληψη
Ego syntonic	Ενσώματη αντίληψη
Low floor program	Πρόγραμμα χαμηλών απαιτήσεων

Πίνακας 4: ΑΡΚΤΙΚΟΛΕΞΑ

ΡΡ	Τεχνική στην οποία οι μαθητές θέτουν προβλήματα
ΑΠΣ	Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών
ΔΕΠΠΣ	Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο και Πρόγραμμα Σπουδών
ΥΣ	Υπολογιστική σκέψη

Πίνακας 5: Απομαγνητοφώνηση διαλόγων Ομάδας Α

Ομάδα Β	Ερευνητικά ζητούμενα		
Σκέλη	Διερεύνηση Κινήσεων	Συμμετρία	Στρατηγικές
1_1.1	Το δεξί του ανθρώπου, άρα το αριστερό στην οθόνη	Έχει και τα δυο χέρια σηκωμένα	
	Πρέπει υποχρεωτικά οι τιμές να είναι 17 – 31	Έχουν τις ίδιες τιμές	
	$\Theta=2, \varphi=0, \chi=0, \psi=0$ - Κυρία τελειώσαμε	Πρέπει να είναι το ένα ίδιο με το άλλο	
1_1.2	Ίδιο είναι απλώς έχουν αλλάξει οι τιμές	Πρέπει να είναι το ίδιο. Βάλε τις τιμές που έχει πάνω	
1_2	Ποιο είναι το αριστερό σώμα;	Πρέπει να είναι το ίδιο	
	Ποιο είναι το αριστερό χέρι	Εδώ έχει δύο σπονδυλικές στήλες	
	Που ξέρουμε ποιες μεταβλητές είναι του αριστερού και ποιες του δεξιού σώματος		
	Δεν μου φαίνεται σωστό - Για δοκίμασε 50 Μπα όχι στις 30 άστο		
2_1	Βάλε 90 και 90	Κοιτά το πρόγραμμα το φ αντιστοιχεί στο ψ , όχι το θ ! Κοιτά τον κώδικα πρέπει αντίστοιχα να είναι σε δεξί αριστερό	
	Όχι δεν είναι το ίδιο. - Βάλε 0..δεν είναι Βάλε κάτι πολύ μεγάλο...βάλε 360 Αυτό είναι 270, άρα 180+90 – όχι 360 -90		
2_2	Ωραία, βάλε όπου θ, φ τα χ, ψ - Δεν λειτουργεί. Κάτσε τι έκανε το πρόγραμμα πριν; Άρα πρέπει να βάλουμε 360- χ Εντάξει τα χέρι κινούνται συγχρονισμένα.		
3			Να βγάλουμε τον μισό κώδικα
			Να αλλάξουμε τις μεταβλητές
			Να πειράξουμε τις μετρήσεις των χεριών (τα μήκη). Αφού είναι ίδιος ο κώδικας του δεξιού με το αριστερό χέρι, πρέπει απλώς να το σκεφτούν
			Να αλλάξουμε τις μεταβλητές του ώμου με τις μεταβλητές του ς αγκώνα
			Να αλλάξουμε το setpos
			Να προσθέσουμε μεταβλητές που δεν κάνουν τίποτα!
συνέντευξη	1-1.1 πειραμαστήκαμε με τις μεταβλητές και είδαμε ότι είναι ίδιες 2-2 το αριστερό εδώ το θ είναι αριστερά ενώ το άλλο παραμένει το ίδιο. Είναι λάθος έπρεπε να πάει δεξιά	1_1.1 Αν φέρεις τον άορατο άξονα Αν θέλεις έναν άορατο άξονα και το τσακίσεις Θα δεις ότι πέφτει το ένα πάνω στο άλλο να βρεις κι άλλο (πως θα φέρεις τον άξονα συμμετρίας σε μια εικόνα έξω από το μαλτ) Πρέπει να σκεφτούμε από ποια μεριά θα τον βάλουμε ώστε όταν χωριστεί σε δύο μέρη το αντικείμενο το οποίο θέλουμε να βάλουμε άξονας συμμετρίας όταν διπλωθεί από τα δύο μέρη να είναι ίδιο	

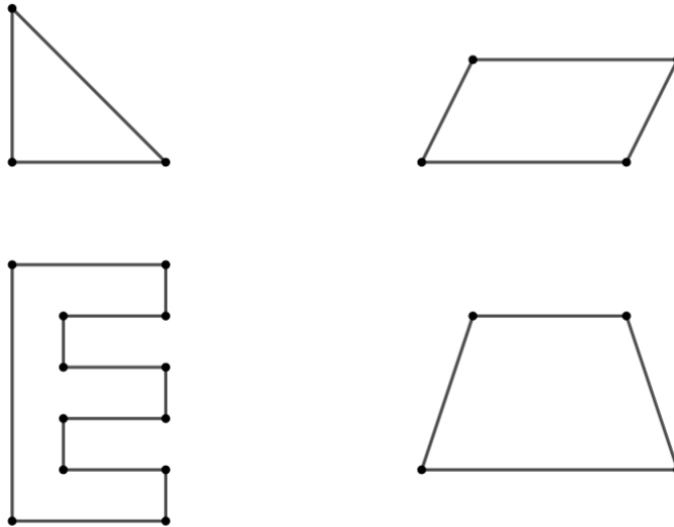
Πίνακας 6: Απομαγνητοφώνηση διαλόγων Ομάδας Β

Ομάδα Α	Ερευνητικά ζητούμενα		
Σκέλη	Διερεύνηση Κινήσεων	Συμμετρία	Στρατηγικές
1_1.1	Παρότι μας λέει δεξί εμείς θα φτιάξουμε το αριστερό;	Να κάνουμε και το άλλο χέρι όπως αυτό	
	Βάλε το video. - Το δεξί ήταν 0 0 ;	Λέει κάθετα στους ώμους και παράλληλα μεταξύ τους	
		Στρίβουν ίσες γωνίες για να είναι ίδια	
1_1.2	Όταν λέει 40 πάνω από τον οριζοντα εννοεί αυτή τη γωνία, γιατί οριζοντας είναι αυτός.	Είναι ίσες οι γωνίες προς την σπονδυλική στήλη	
	Το δεξί είναι φ,θ ,άρα πειράζουμε τα χ,ψ	Τα χέρια είναι ίσα, στρίβουν ίσες μοίρες, άρα ισαπέχουν από την σπονδυλική στήλη.	
	Μην ακουμπήσεις το δεξί. Το αριστερό είναι. Το δεξί σε εμάς είναι το αριστερό του.	Πρέπει να συμπίπτει αν το διπλώσουμε στην σπονδυλική στήλη	
	Κάνε zoom να ελέγξουμε τις γωνίες.	Οι γωνίες είναι ίσες και 40 μοίρες έλεγε το video. Οι γωνίες είναι κάπως αόριστο, πρέπει να τεκμηριώνεις σωστά.	
1_2	Το αριστερό σώμα σε μας;	Αυτό πρέπει να είναι συμμετρικό με αυτό (δεξί δεξιού, αριστερό αριστερού)	
	Για κούνησε το α,β. Τα κ,λ είναι το δεξί χέρι Πήγαινε πιο κάτω στον κώδικα.	Βρες το α σε ποιο χέρι αντιστοιχεί να βρούμε την αντίστοιχη μεταβλητή	
	Δες στο βίντεο την κίνηση...όχι περίμενε	Ίδιες μεταβλητές, ίσες γωνίες	
	Βάλε $\alpha=\theta$, $\beta=\phi$, $\kappa=\chi$, $\lambda=\psi$	Τα δυο δεξιά χέρια ίδιες μεταβλητές	
2_1	Βάλε $\chi=90$ - Ωχι! - βάλε $\psi=90$	Αυτή τη φορά οι μεταβλητές είναι δεν είναι ίδιες, αλλά το αποτέλεσμα είναι ίδιο. Δηλαδή τα χέρια είναι συμμετρικά ως προς την σπονδυλική στήλη.	
	Βάλε 360 Να το βάλε 270 Αυτό είναι. Σκέψου το 180 σαν 0		
	Για βάλε $\chi=0$ και γύρνα το. Αυτό είναι! Το βρήκα! Μπορείς να βάλεις αρνητική γωνία; Όχι. Σίγουρα, δεν το δοκιμάζουμε; Όχι!		
2_2	Βάλε πλην στο χ . - Δεν είναι ίσες οι γωνίες. Βάλε δεξιά χ . - Αυτό είναι!	Διορθώνουμε τον κώδικα ώστε να στρίβει δεξιά χ . Με αυτό τον τρόπο τα χέρια θα είναι συμμετρικά ως προς την σπονδυλική στήλη όταν οι μεταβλητές είναι ίσες	
3			Να βάλουμε το δεξιά αριστερά στο χ
			Να αλλάξουμε το setpos
			Να αλλάξουμε όλα τα δεξιά σε αριστερά
			Να πειράξουμε τις μετρήσεις των χεριών (τα μήκη).
			Να αλλάξουμε τις μοίρες που στρίβουν οι γωνίες χωρίς μεταβλητές

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (Pre Test)

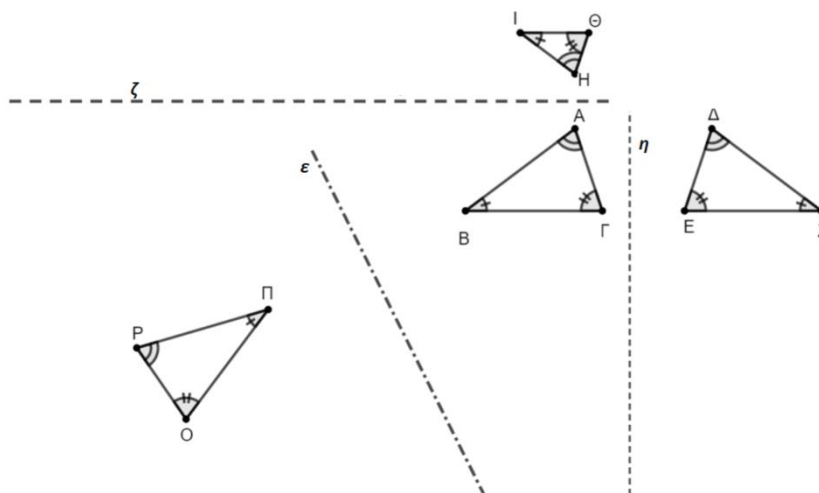
Εικόνες που έχουν άξονα συμμετρίας & Εικόνες συμμετρικές ως προς άξονα

1. Να φέρετε τον άξονα συμμετρίας των παρακάτω σχημάτων, εφόσον έχουν.



2. Μια από τις τρεις προτάσεις είναι αληθής. Αφού επιλέξετε αυτή που θεωρείτε σωστή, κυκλώνοντας τον αριθμό της (i, ii, iii), περιγράψτε τον τρόπο που σκεφτήκατε ή ελέγξατε την ορθότητα της πρότασης.

- i. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι συμμετρικό του ΔEZ ως προς ευθεία η
- ii. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι συμμετρικό του $H\Theta I$ ως προς ευθεία ζ .
- iii. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι συμμετρικό του $\Pi P O$ ως προς ευθεία ϵ .



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (Υποστηρικτικό Φύλλο Εργασίας)

Παρακολουθήστε το video.

Στο video παρακολουθήσατε έναν άνθρωπο να κάνει κάποιες κινήσεις χεριών που βοηθούν στην διατήρηση καλής στάσης του σώματος. Οι κινήσεις θεωρούνται συμμετρικές με άξονα συμμετρίας την σπονδυλική του στήλη.

Στόχος είναι να πραγματοποιήσετε κατάλληλες παρεμβάσεις στο ψηφιακό σώμα, ώστε αυτό να μιμηθεί τις κινήσεις των χεριών του ανθρώπου.

1^ο σκέλος

1. Ξεκινώντας, θα δουλέψετε με τις 2 πρώτες κινήσεις. Το δεξί χέρι είναι σωστά προγραμματισμένο, ενώ το αριστερό όχι. Μετακινώντας τους δρομείς – μεταβολείς των μεταβλητών του αριστερού χεριού βοηθήστε το ψηφιακό σώμα να τοποθετήσει τα χέρια του συμμετρικά ως προς την σπονδυλική του στήλη.

Διορθώστε : Την 1η κίνηση, χρησιμοποιώντας το αρχείο 1_κίνηση1.mlt

Παρατηρείτε κάποια σχέση μεταξύ την γωνιών που στρίβουν το δεξί και το αριστερό χέρι;

Διορθώστε : Την 2η κίνηση, χρησιμοποιώντας το αρχείο 1_κίνηση2.mlt

Παρατηρείτε κάποια σχέση μεταξύ την γωνιών που στρίβουν το δεξί και το αριστερό χέρι;

2. Μετακινώντας τους δρομείς – μεταβολείς των μεταβλητών των χεριών του αριστερού ψηφιακού σώματος βοηθήστε το να ολοκληρώσει την άσκηση, δηλαδή το αριστερό σώμα να κάνει συμμετρική κίνηση με το δεξί ως προς τον κατακόρυφο άξονα που εμφανίζεται.

Διορθώστε την 6η κίνηση, χρησιμοποιώντας το αρχείο 1_κίνηση_6.mlt

Έχοντας ολοκληρώσει το 1^ο σκέλος, προσπαθήστε να διατυπώσετε έναν κανόνα:

Για να είναι τα χέρια του σώματος συμμετρικά ως προς την σπονδυλική στήλη πρέπει

Για να είναι οι κινήσεις των ψηφιακών σωμάτων συμμετρικά ως προς τον κατακόρυφο άξονα πρέπει

2^ο σκέλος

1. Τώρα, θα δουλέψετε με την 3η κίνηση. Το δεξί χέρι είναι σωστά προγραμματισμένο, ενώ το αριστερό όχι. Μετακινώντας τους δρομείς – μεταβολείς των μεταβλητών του αριστερού χεριού βοηθήστε το ψηφιακό σώμα να τοποθετήσει τα χέρια του συμμετρικά ως προς την σπονδυλική του στήλη.

Διορθώστε την 3η κίνηση, χρησιμοποιώντας το αρχείο 1_κίνηση3.mlt

Παρατηρείτε κάποια σχέση μεταξύ των γωνιών που στρίβουν το δεξί και το αριστερό χέρι;

2. Να διορθώσετε τον κώδικα του αριστερού χεριού της 3ης κίνησης, προκειμένου δεξί και αριστερό χέρι να στρίβουν κατά ίση γωνία ώστε το ψηφιακό σώμα να τοποθετήσει τα χέρια του συμμετρικά ως προς την σπονδυλική του στήλη .

3^ο σκέλος

Τώρα ήρθε η ώρα να προκαλέσετε την άλλη ομάδα!

Στο αρχείο 1_κίνηση_5.mlt σας δίνεται ολοκληρωμένη η 5η κίνηση του ψηφιακού σώματος. Να επέμβετε στον κώδικα του αριστερού χεριού, ώστε να προκαλέσετε την άλλη ομάδα να τον διορθώσει (δηλαδή να ορίσει ίσες γωνίες στροφής δεξιού – αριστερού χεριού, ώστε αυτά να είναι συμμετρικά ως προς την σπονδυλική στήλη).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (Post Test)

Να φέρετε τα συμμετρικά των παρακάτω τεθλασμένων γραμμών ως προς τη δοσμένη ευθεία.

Αν σε κάποια σημεία βολεύει χρησιμοποιήστε τις παρατηρήσεις σας, από τις κινήσεις του ψηφιακού σώματος.

