Ψηφιακός Μετασχηματισμός και Εκπαιδευτική Πράξη

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Διδακτικές πρακτικές ενός εκπαιδευτικού για τη διδασκαλία Αριθμητικών Προόδων με το λογισμικό «Κυβόκοσμος» στην Α΄ Λυκείου

Άννα Ι. Παΐλα
Α.Μ.: 20028

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: **Χρόνης Κυνηγός**, Καθηγητής

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:
Χρόνης Κυνηγός, Καθηγητής
Ζαχαρούλα Σμυρναίου, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια
Αικατερίνη Κασιμάτη, Καθηγήτρια

Ιούλιος 2022

Ψηφιακός Μετασχηματισμός και Εκπαιδευτική Πράξη

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Διδακτικές πρακτικές ενός εκπαιδευτικού για τη διδασκαλία Αριθμητικών Προόδων με το λογισμικό «Κυβόκοσμος» στην Α' Λυκείου

Η διπλωματική εργασία εξετάστηκε επιτυχώς από την κάτωθι Εξεταστική Επιτροπή:

Α/α	**ΟΝΟΜΑ ΕΠΩΝΥΜΟ**	**ΒΑΘΜΙΔΑ/ΙΔΙΟΤΗΤΑ**	**ΨΗΦΙΑΚΗ ΥΠΟΓΡΑΦΗ**
1	Χρόνης Κυνηγός	Καθηγητής	Polychronis Kynigos — Digitally signed by Polychronis Kynigos Date: 2022.07.08 15:37:40 +03'00'
2	Ζαχαρούλα Σμυρναίου	Αν. Καθηγήτρια	ZACHAROULA SMYRNAIOU — Digitally signed by ZACHAROULA SMYRNAIOU Date: 2022.07.10 19:17:25 +03'00'
3	Αικατερίνη Κασιμάτη	Καθηγήτρια	AIKATERINI KASIMATI — Digitally signed by AIKATERINI KASIMATI Date: 2022.07.08 16:14:28 +03'00'

ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η κάτωθι υπογεγραμμένη Άννα Παΐλα του Ιωάννη, με αριθμό μητρώου 20028 φοιτήτρια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών Ψηφιακός Μετασχηματισμός και Εκπαιδευτική Πράξη του Τμήματος Μηχανικών Πληροφορικής και Υπολογιστών της Σχολής Μηχανικών του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής, δηλώνω ότι:

«Είμαι συγγραφέας αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της, είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, οι όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε ακριβώς είτε παραφρασμένες, αναφέρονται στο σύνολό τους, με πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία έχει συγγραφεί από μένα αποκλειστικά και αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου, όσο και του Ιδρύματος.

Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του πτυχίου μου».

*****_Επιθυμώ την απαγόρευση πρόσβασης στο πλήρες κείμενο της εργασίας μου μέχρι …………………… και έπειτα από αίτηση μου στη Βιβλιοθήκη και έγκριση του επιβλέποντα καθηγητή._

Ο/Η Δηλούσα

*** Ονοματεπώνυμο /Ιδιότητα**

Ψηφιακή Υπογραφή Επιβλέποντα (Υπογραφή)

**** Εάν κάποιος επιθυμεί απαγόρευση πρόσβασης στην εργασία για χρονικό διάστημα 6-12 μηνών (embargo), θα πρέπει να υπογράψει ψηφιακά ο/η επιβλέπων/ουσα καθηγητής/τρια, για να γνωστοποιεί ότι είναι ενημερωμένος/η και συναινεί. Οι λόγοι χρονικού αποκλεισμού πρόσβασης περιγράφονται αναλυτικά στις πολιτικές του Ι.Α. (σελ. 6):***

https://www.uniwa.gr/wp-content/uploads/2021/01/%CE%A0%CE%BF%CE%BB%CE%B9%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%B5%CC%81%CF%82%CE%99%CE%B4%CF%81%CF%85%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%BF%CF%85%CC%81_%CE%91%CF%80%CE%BF%CE%B8%CE%B5%CF%84%CE%B7%CF%81%CE%B9%CC%81%CE%BF%CF%85_final.pdf_

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον καθηγητή κ. Κυνηγό, για την ευκαιρία που μου έδωσε να εκπονήσω το συγκεκριμένο έργο, για τις γνώσεις που μου προσέφερε και για το άριστο κλίμα συνεργασίας που είχαμε.

Θερμές ευχαριστίες θέλω να εκφράσω επίσης σε όλους τους καθηγητές μεταπτυχιακού προγράμματος, για την πολύτιμη και ουσιαστική βοήθεια που μου παρείχαν σε όλα τα στάδια των μεταπτυχιακών μου σπουδών, όντας πάντα πρόθυμοι να απαντήσουν στις ερωτήσεις και τους προβληματισμούς μου.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τη μητέρα μου, που καθ’ όλη τη διάρκεια των σπουδών μου, με στήριξε ηθικά και υλικά, όντας δίπλα μου στην όλη προσπάθειά μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η βασική επιδίωξη στη μελέτη αυτή είναι η μελέτη των πρακτικών ενός εκπαιδευτικού, στο παραδοσιακό του μάθημα και κατά την διάρκεια μαθημάτων με αξιοποίηση ψηφιακών δομημάτων, αρχικά σχεδιασμένων από άλλους εκπαιδευτικούς και στη συνέχεια σχεδιασμένων από τον ίδιο, με χρήση εστιασμένων συγγραφικών εργαλείων.

Το βασικό Ερευνητικό ερώτημα τέθηκε ως εξής: Πώς διαμορφώνονται οι πρακτικές ενός εκπαιδευτικού στην διδασκαλία των αριθμητικών προόδων Α' Λυκείου, με την αξιοποίηση ψηφιακών δομημάτων που έχουν σχεδιαστεί με χρήση εστιασμένων συγγραφικών εργαλείων, όπως ο Κυβόκοσμος;

Για το σκοπό αυτό επιλέξαμε την ποιοτική έρευνα - μελέτη περίπτωσης όπου διενεργήθηκε σε βάθος εξερεύνηση και συστηματική ανάλυση της διδασκαλίας του εκπαιδευτικού. Συμμετέχων στην έρευνα ήταν ένας εκπαιδευτικός ο οποίος δεν είχε εμπειρία στην ενσωμάτωση νέων τεχνολογιών στη διδακτική πράξη.

Ως προς το σχεδιασμό και την πορεία της ερευνητικής διαδικασίας στην πρώτη φάση έγινε η διερεύνηση υπαρχουσών πρακτικών από τον εκπαιδευτικό μέσα από την παρατήρηση της διδασκαλίας του παραδοσιακού του μαθήματος στις αριθμητικές προόδους διάρκειας τριών διδακτικών ωρών. Στη συνέχεια έγινε η καταγραφή των πρακτικών του με εστίαση στους ρόλους που υιοθετεί και τον τρόπο που αντιμετωπίζει το μαθηματικό περιεχόμενο. Τέλος ακολούθησε ημιδομημένη συνέντευξη από τον εκπαιδευτικό με έμφαση σε ερωτήματα σχετικά με τα υπό διερεύνηση ζητήματα και άλλα που προκύπτουν από την παρατήρηση.

Κατά τη δεύτερη φάση της έρευνας έγινε η διερεύνηση των αρχικών πρακτικών με τη χρήση του «Κυβόκοσμου» και διενεργήθηκαν συνεδρίες εξοικείωσης του εκπαιδευτικού με αυτόν. Στη συνέχεια έγινε παρατήρηση μαθήματος του εκπαιδευτικού με τον Κυβόκοσμο με χρήση έτοιμων δραστηριοτήτων.

Κατά την τρίτη φάση, ο εκπαιδευτικός με την υποστήριξη της ερευνήτριας σχεδίασε ο ίδιος δραστηριότητα στον Κυβόκοσμο με σκοπό την διδασκαλία της στη τάξη. Στη συνέχεια έγινε η παρατήρηση του μαθήματος του εκπαιδευτικού με τον Κυβόκοσμο. Τέλος, πραγματοποιήθηκε αναστοχασμός και τελική αποτίμηση του προγράμματος μέσα από μια τελική συνέντευξη.

Ο εκπαιδευτικός, παρόλο που δεν χρησιμοποιούσε τις νέες τεχνολογίες, ύστερα από την εκπαίδευση του με τον Κυβόκοσμο και την ενσωμάτωση του στη διδασκαλία του, αναγνώρισε την πρόσθετη παιδαγωγική αξία και την συμβολή του στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών και αποδείξεων.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Διδακτική των μαθηματικών

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Αριθμητικές Πρόοδοι, Κυβόκοσμος, Εκπαιδευτική δραστηριότητα, Εστιασμένα συγγραφικά εργαλεία

ABSTRACT

The main goal of this study was to examine the practices of a teacher, in his traditional lesson and during courses using digital structures, initially designed by other teachers and then designed by him, using focused writing tools.

The main research question was: How are the practices of a teacher modulated, during the utilization of digital structures designed using focused writing tools, such as “Kivokosmos”?

To this end, we have chosen the quality research - case study where an in-depth exploration and systematic analysis of the teacher's teaching was carried out. The participant in the research was a teacher, who did not have deep technological knowledge and did not utilize technological learning tools in his lectures.

In terms of the design of the research process, in the first phase, the teacher was observed by the researcher during the observation of three traditional lessons. Subsequently, his practices were recorded with focusing on the roles he adopted and the way he treated mathematical content. Finally, a semi-structured interview was conducted focusing on the questions under investigation and on other issues that were arisen from the lectures observation.

During the second phase of the research, the initial practices of the teacher were expanded by conducting "Kivokosmos" sessions in order that the teacher becomes familiarized with it and be able to use it in his lectures. Then, teacher’s lesson with the use of “Kivokosmos” was observed. These lessons were made using scenarios that were designed by the researcher.

During the third phase, the teacher with the help of the researcher designed his own educational activity with “Kivokosmos”. Then, the researcher observed the teacher as he applied his activity to the students. A final interview was made in next, in order to make the final assessment of the program.

Even though the teacher was against the use of new technologies in mathematics education, after he used “Kivokosmos” applying it to the students, he admitted its benefits and its contribution in the more thorough understanding of mathematical concepts and proofs.

SUBJECT AREA: Teaching of mathematics

KEYWORDS: Numerical Progresses, cubocosmos, Educational Scenario, Focusing Writing Tools

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος

Βασικό κίνητρο

Βασικό κίνητρο για την παρούσα εργασία, αποτέλεσε η προσπάθεια που γίνεται για εκσυγχρονισμό των διδακτικών πρακτικών με την εισαγωγή των Νέων Τεχνολογιών στη μαθησιακή διαδικασία έτσι ώστε η διδασκαλία να είναι πιο δημιουργική και ευχάριστη στους μαθητές. Η προσπάθεια αυτή εντάσσεται στο γενικότερο πλαίσιο που έχει θέσει το Υπουργείο Παιδείας (ΥΠΑΙΘ) με την εισαγωγή του «Ψηφιακού Σχολείου» (http://dschool.edu.gr/), βασικοί πυλώνες του οποίου είναι τα διαδραστικά σχολικά βιβλία, το Φωτόδεντρο και η ψηφιακή εκπαιδευτική πλατφόρμα με την ονομασία «e-me».

Το περιβάλλον του «Ψηφιακού Σχολείου», παραμένει ένα σχεδόν αδιερεύνητο αντικείμενο της εκπαίδευσης. Μέχρι στιγμής, λίγες μόνο έρευνες υπάρχουν οι οποίες μελετούν τη σωστή αξιοποίηση των διαδραστικών βιβλίων και του Φωτόδεντρου στην εκπαιδευτική διαδικασία. Για παράδειγμα η εργασία των Δουκάκης κ.α. (2013), ερευνά τις απόψεις των μαθητών Γυμνασίου, που σχετίζονται με τη χρήση των νέων τεχνολογιών και συγκεκριμένα των μικροπειραμάτων που υπάρχουν στα διαδραστικά βιβλία των μαθηματικών, ενώ υπάρχουν και εργασίες οι οποίες είναι πιο στοχευμένες και αφορούν συγκεκριμένα εργαλεία και εφαρμογές όπως η εργασία των Φακούδη κ.α. (2014) στην οποία αναλύεται η χρήση μιας συγκεκριμένης εφαρμογής, αυτής του «Κυβόκοσμου». Παρόλα αυτά, μέχρι στιγμής δεν έχουμε επαρκείς πληροφορίες αναφορικά με το πώς αντιμετωπίζουν αυτά τα νέα δεδομένα οι εκπαιδευτικοί.

Ο σχεδιασμός ψηφιακών μαθησιακών αντικειμένων που αξιοποιούν και συνδυάζουν νέες τεχνολογίες και ταυτόχρονα προσφέρουν πρόσθετη παιδαγωγική αξία, αποτελεί μια συνεχή πρόκληση του τομέα της εκπαιδευτικής τεχνολογίας και πεδίο ανοιχτής έρευνας. Διαδικασίες όπως η κατασκευή, η διασκευή, ο διαμοιρασμός και το «μαστόρεμα» ψηφιακών δομημάτων ενισχύουν την ενεργή χρήση της τεχνολογίας ως μέσο έκφρασης ιδεών, διερεύνησης και νοηματοδότησης εννοιών (Κυνηγός, 2014). Περεταίρω ερευνητική προσπάθεια αναφορικά με το πώς αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί τα παραπάνω δεδομένα είναι επιβεβλημένη προκειμένου να διευρυνθεί η χρήση των νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση.

Σκοπός της έρευνας

Η παρούσα έρευνα εντάσσεται στην περιοχή της Διδακτικής των Μαθηματικών και ειδικότερα στο κομμάτι της που αφορά την Επαγγελματική Ανάπτυξη των εκπαιδευτικών μέσω της χρήσης ψηφιακών εργαλείων. Το θέμα που επιχειρεί να προσεγγίσει η εργασία είναι η μελέτη της διαμόρφωσης των πρακτικών ενός καθηγητή μαθηματικών μέσα από την αξιοποίηση ψηφιακών εργαλείων κατάλληλα σχεδιασμένων για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Για το λόγο αυτό, επιλέχθηκε ο Κυβόκοσμος, που ανήκει στην κατηγορία των «εστιασμένων ψηφιακών εργαλείων» (Κυνηγός κ.α., 2019), δηλαδή συγκεκριμένων εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς για τη συγγραφή νέων ψηφιακών δομημάτων.

Στη παρούσα έρευνα, επιδιώκεται η μελέτη των πρακτικών ενός εκπαιδευτικού (Ernest, 1988), τόσο στο παραδοσιακό του μάθημα όσο και κατά την διάρκεια μαθημάτων με αξιοποίηση ψηφιακών δομημάτων, αρχικά σχεδιασμένων από άλλους εκπαιδευτικούς και στη συνέχεια σχεδιασμένων από τον ίδιο, με χρήση εστιασμένων συγγραφικών εργαλείων. Μέσα από τη μελέτη αυτή, αναμένεται να απαντηθεί το εξής ερώτημα: Πώς διαμορφώνονται οι πρακτικές ενός εκπαιδευτικού στη διδασκαλία των αριθμητικών προόδων Α’ Λυκείου, με την αξιοποίηση ψηφιακών δομημάτων που έχουν σχεδιαστεί με χρήση εστιασμένων συγγραφικών εργαλείων, όπως ο Κυβόκοσμος;

Δομή κεφαλαίων

Στο πρώτο κεφάλαιο του κειμένου, γίνεται μια εισαγωγή στον ψηφιακό μετασχηματισμό του σημερινού σχολείου και παρουσιάζεται το ερευνητικό θέμα της διπλωματικής.

Το δεύτερο κεφάλαιο αφιερώνεται στην θεωρητική θεμελίωση της έρευνας. Αρχικά γίνεται μια αναφορά στην ανάγκη επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών και στη συνέχεια αναπτύσσονται οι κυρίαρχες εκπαιδευτικές πρακτικές. Έπειτα γίνεται μια εισαγωγή στον κόσμο των μικροπειραμάτων και στον Κυβόκοσμο. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η βιβλιογραφική ανασκόπηση πάνω στην οποία στηρίχτηκε η παρούσα εργασία, αναπτύσσοντας τα θέματα της μαθηματικής διαίσθησης, της έννοιας της απόδειξης στα μαθηματικά και στις οπτικές αποδείξεις.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε. Δίνονται τα βήματα της έρευνας και παρουσιάζεται το προφίλ του εκπαιδευτικού που επιλέξαμε. Επίσης γίνεται παρουσίαση των δραστηριοτήτων στον Κυβόκοσμο τα οποία δόθηκαν στον εκπαιδευτικό για διδασκαλία τους στη τάξη. Αναπτύσσεται ο τρόπος διεξαγωγής των δραστηριοτήτων και η πρόσθετη παιδαγωγική τους αξία.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα δεδομένα και τα αποτελέσματα της έρευνας, χωρισμένα ανά στάδιο στα οποίο αυτή οργανώθηκε. Αρχικά γίνεται παρουσίαση των πρακτικών του εκπαιδευτικού πριν την εκπαίδευση του με τον Κυβόκοσμο. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα ευρήματα από την ημιδομημένη συνέντευξη με τον εκπαιδευτικό, τονίζοντας τους στόχους και τους τρόπους διδασκαλίας του καθώς και την άποψη του για τη χρήση νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση. Ακολουθούν τα αποτελέσματα από τις συνεδριάσεις εξοικείωσης του εκπαιδευτικού με τον Κυβόκοσμο και της παρατήρησης των μαθημάτων του με τα έτοιμα δομήματα. Στη συνέχεια γίνεται αναλυτική περιγραφή της νέας δραστηριότητας που σχεδίασε ο εκπαιδευτικός στον κυβόκοσμο. Τέλος, παρουσιάζονται τα ευρήματα από την παρατήρηση του μαθήματος του εκπαιδευτικού με το δικό του δόμημα και παρουσιάζεται η τελική συνέντευξη μαζί του.

Στο πέμπτο κεφάλαιο εξάγονται τα τελικά συμπεράσματα της έρευνας ενώ γίνονται προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

Το κείμενο συμπεριλαμβάνει δύο Παραρτήματα. Στο Παράρτημα Α παρουσιάζονται αρχικά οδηγίες για την εκμάθηση του Κυβόκοσμου οι οποίες δόθηκαν στον εκπαιδευτικό. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα φύλλα εργασίας για τον Κυβόκοσμο, τόσο αυτά στα οποία εκπαιδεύτηκε ο εκπαιδευτικός όσο και αυτό το οποίο σχεδίασε ο ίδιος. Στο Παράρτημα Β παρουσιάζονται οι σημειώσεις από την παρακολούθηση του κλασικού τρόπου διδασκαλίας του εκπαιδευτικού πριν την ενασχόληση του με τον Κυβόκοσμο.

Στο τέλος του κειμένου παρατίθεται η Βιβλιογραφία.

1 Εισαγωγή

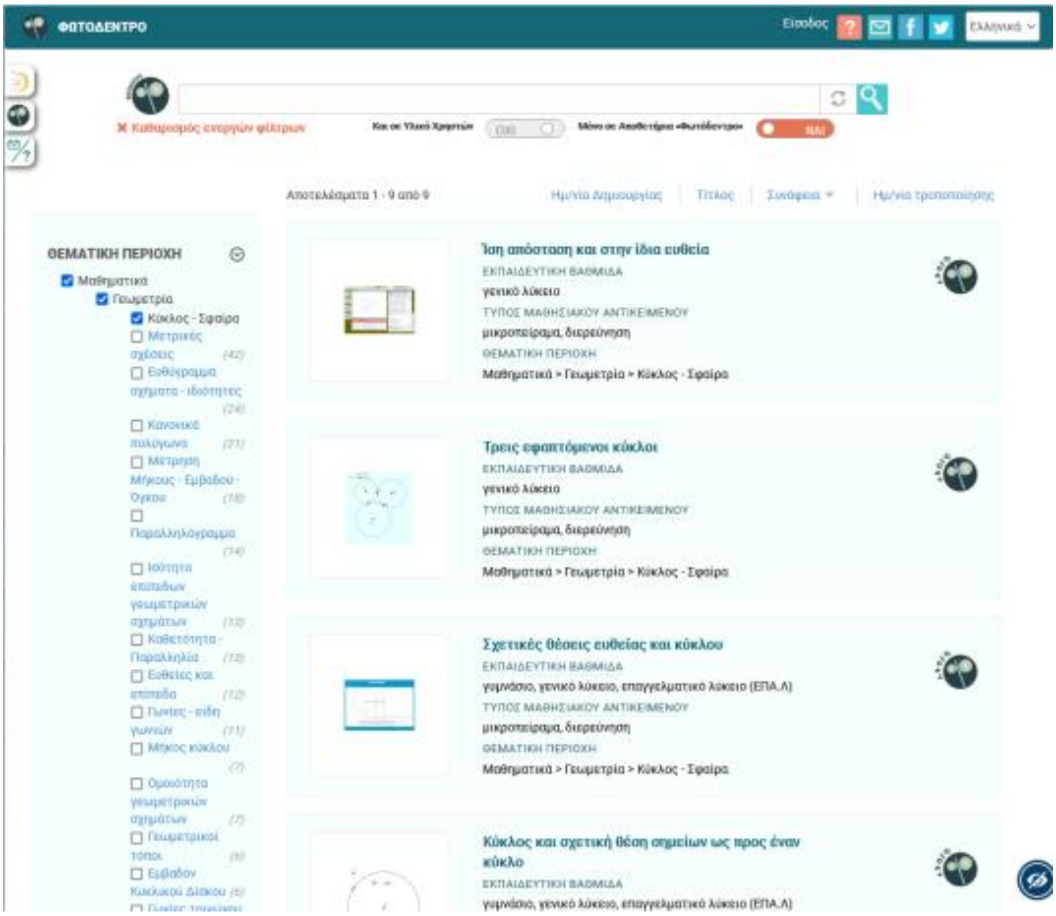
1.1 Το ψηφιακό σχολείο

Μέσα στην προσπάθεια ψηφιακού μετασχηματισμού του σχολείου (Κυγός 2002, Κυνηγός και Δημακαράκη 2002), το Υπουργείο Παιδείας έχει δημιουργήσει ένα σύνολο ψηφιακών εφαρμογών οι οποίες στο σύνολο τους αποτελούν το «Ψηφιακό Σχολείο» (http://dschool.edu.gr/). Τα βασικά εργαλεία του «Ψηφιακού Σχολείου» είναι τα διαδραστικά ή εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, το Φωτόδεντρο και η νέα ψηφιακή εκπαιδευτική πλατφόρμα με την ονομασία «e-me» (Σχήμα 1.1.1).

Σχήμα 1.1.1: Εικόνα από την κεντρική σελίδα του ιστότοπου https://dschool.edu.gr/.

Τα διαδραστικά ή εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία είναι διαθέσιμα στο διαδίκτυο σε μορφή html καθώς είναι εμπλουτισμένα με διαδραστικό ψηφιακό υλικό. Περιλαμβάνουν τόσο το βιβλίο του μαθητή όσο και τετράδιο εργασιών και το βιβλίο του εκπαιδευτικού.

Το Φωτόδεντρο (http://photodentro.edu.gr) είναι μια on-line ανοιχτή ψηφιακή βιβλιοθήκη η οποία περιλαμβάνει μια ευρεία γκάμα εργαλείων (προγραμμάτων), όπως για παράδειγμα πειράματα και προσομοιώσεις, μοντέλα, αναπαραστάσεις δεδομένων, εκπαιδευτικά παιχνίδια και σενάρια. Η βιβλιοθήκη περιλαμβάνει εργαλεία τα οποία μπορούν να αναπροσαρμοστούν και να επαναχρησιμοποιηθούν (Megalou και Kaklamanis, 2014). Για την ευκολότερη αναζήτηση των εργαλειών, το Φωτόδεντρο, παρέχει τη δυνατότητα φιλτραρίσματος με βάση το μάθημα και την θεματική περιοχή. Για παράδειγμα, αν ο ενδιαφερόμενος θέλει να βρει δεδομένα και ασκήσεις για τον κύκλο, μπορεί να επιλέξει την κατηγορία των Μαθηματικών, στη συνέχεια να επιλέξει την υποκατηγορία της Γεωμετρίας και στη συνέχεια την υποκατηγορία με την ονομασία «κύκλος-σφαίρα» (Σχήμα 1.1.2). Επιπλέον, μπορεί να γίνει διαχωρισμός με βάση τη βαθμίδα εκπαίδευσης καθώς και την ηλικία του μαθητή.



Σχήμα 1.1.2: Παραδείγματα εκπαιδευτικών εργαλείων που βρίσκονται στην ιστοσελίδα του Φωτόδενρου.

Η ψηφιακή εκπαιδευτική πλατφόρμα «e-me», αποτελεί ένα μέσο δικτύωσης όπου μαθητές και εκπαιδευτικοί δημιουργούν τη δική τους διαδικτυακή κοινότητα, μέσα από την οποία μπορούν να επικοινωνούν και να συνεργάζονται. Με την ίδρυση αυτής της εκπαιδευτικής πλατφόρμας, το ΥΠΑΙΘ στοχεύει στη δημιουργία ενός προσωπικού περιβάλλοντος μάθησης (Personal Learning Environment, PLE), μέσω του οποίου, οι μαθητές θα έχουν τη δυνατότητα να διαχειρίζονται αποτελεσματικά διαφορετικές πηγές μάθησης, να συνεργάζονται και να συν-δημιουργούν. Επίσης υπάρχει η δυνατότητα να παρέχεται συγκεντρωμένο υλικό σε μαθητές που έμειναν εκτός της σχολικής τάξης για μεγάλο χρονικό διάστημα, έτσι ώστε να μη διακόπτεται η επαφή τους με το αντικείμενο, καθώς και τη δυνατότητα της άμεσης επικοινωνίας μεταξύ συμμαθητών και δασκάλου, καλλιεργώντας μια αλληλένδετη σχέση εμπιστοσύνης με γνώμονα την οικειότητα (Manolis και Kalaitzidou, 2014).

Ιδιαίτερα στον τομέα των μαθηματικών, που αποτελεί ένα αντικείμενο δύσκολο για ένα μεγάλο πλήθος μαθητών, η ανάγκη για χρήση πρόσθετου υλικού είναι αναγκαία. Μέσα από το «Ψηφιακό Σχολείο», αυτό το πρόσθετο υλικό δίνεται μέσω των ψηφιακών εργαλείων μαθηματικής έκφρασης, το οποίο εμφανίζεται στα διαδραστικά βιβλία με τη μορφή μικροπειραμάτων. Σύμφωνα με τον Κυνηγό (2014), η ορολογία «μικροπείραμα», δημιουργήθηκε για να σκιαγραφήσει ένα είδος ψηφιακού δομήματος, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε συνθετικές εργασίες. Τα μικροπειράματα χρησιμοποιούνται κατά την εκπαιδευτική διαδικασία από τους μαθητές είτε ατομικά είτε συνεργατικά, με διά ζώσης υποστήριξη από τον εκπαιδευτικό. Τα βασικά χαρακτηριστικά των μικροπειραμάτων είναι:

- Χρησιμοποιούνται για επεξήγηση, εμβάθυνση, διερεύνηση και επέκταση μαθηματικών εννοιών. Αυτό γίνεται ανεξάρτητα από το στενό πλαίσιο συγκεκριμένων δραστηριοτήτων του σχολικού βιβλίου, με αποτέλεσμα την αυτονομία τους από αυτό.
- Περιλαμβάνουν προσομοιώσεις φαινομένων που περιγράφονται από τα μαθηματικά.
- Χρησιμοποιούν πολλαπλές αναπαραστάσεις (σχήματα, γραφικές παραστάσεις, πίνακες κ.α.) για την κατανόηση των εννοιών και των φαινομένων.
- Παρέχουν δυναμικό χειρισμό των μαθηματικών αντικειμένων, ώστε οι μαθηματικές έννοιες και ιδιότητες να γίνουν αντικείμενο προβληματισμού και διερεύνησης. Οι μαθητές μεταβάλλουν σχήματα και παραμέτρους και παρατηρούν τι μένει σταθερό και τι αλλάζει προσπαθώντας να εξηγήσουν τη συμπεριφορά.
- Παρουσιάζονται επιπρόσθετα ερωτημάτων προς διερεύνηση, χωρίς να δίνεται η λύση, για την περεταίρω ενασχόληση του μαθητή με το αντικείμενο.

Ένα παράδειγμα μικροπειράματος παρουσιάζεται στην παρακάτω εικόνα. Το μικροπείραμα αυτό έχει να κάνει με τον υπολογισμό του ύψους ενός νέφους, αξιοποιώντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας παρατήρησής του. Το μικροπείραμα έχει δημιουργηθεί με χρήση εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας και χειρισμού αλγεβρικών ψηφιακών συστημάτων (Geogebra).

Σχήμα 1.1.3: Παραδείγματα μικροπειράματος για την κατανόηση της χρήσης των τριγωνομετρικών αριθμών.

Η τεχνολογία η οποία αναπτύσσεται με ταχύτατους ρυθμούς τις τελευταίες δεκαετίες, οδηγεί στην ανάγκη συνεχούς επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών και εκσυγχρονισμού των μεθόδων διδασκαλίας. Σύμφωνα με διεθνείς έρευνες, η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών όλων των βαθμίδων κρίνεται απαραίτητη λόγω των αλλαγών που συντελούνται τόσο στο στενό σχολικό περιβάλλον όσο και στις παγκόσμιες κοινωνικές, τεχνολογικές και οικονομικές συνθήκες που συνεχώς μεταβάλλονται. Η ανάγκη για την αναβάθμιση των γνώσεων των εκπαιδευτικών διαφαίνεται, επίσης, από το γεγονός ότι ανάμεσα στον χρόνο ολοκλήρωσης των σπουδών τους και στην έναρξη της διδακτικής τους σταδιοδρομίας μεσολαβεί, συνήθως, αρκετός χρόνος. Το κενό αυτό καλείται να καλύψει η επιμόρφωση.

Τα τελευταία 15 χρόνια έχουν πραγματοποιηθεί πολλές επιμορφωτικές δράσεις, με κυριότερη την επιμόρφωση Α' επιπέδου σε βασικές δεξιότητες νέων τεχνολογιών. Το 2009, το Υπουργείο Παιδείας διεξήγαγε προγράμματα ολοκληρωμένης επιμόρφωσης για 27.500 εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Τα επιμορφωτικά προγράμματα αφορούσαν στην απόκτηση γνώσεων και δεξιοτήτων για την παιδαγωγική αξιοποίηση και εφαρμογή των ΤΠΕ (Τεχνολογίες Πληροφορικής και Επικοινωνίας) στη διδασκαλία του γνωστικού τους αντικειμένου (Επιμόρφωση Β' επιπέδου ΤΠΕ). Το έργο «Επιμόρφωση των εκπαιδευτικών για την αξιοποίηση και εφαρμογή των ΤΠΕ στη διδακτική πράξη» έχει ως αντικείμενο την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στη διδακτική αξιοποίηση των ΤΠΕ στην τάξη (http://b-epipedo2.cti.gr).

Η αναγκαιότητα της επιμόρφωσης αποτελεί αντικείμενο συζήτησης και ενδιαφέροντος και από την πλευρά των ίδιων των εκπαιδευτικών. Οι εκπαιδευτικοί επιζητούν την δια βίου εκπαίδευση τους όχι μόνο σε θέματα σχετικά με την ειδικότητα τους αλλά και για τις νέες τεχνολογίες, την ειδική αγωγή, τις μαθησιακές δυσκολίες και τις σύγχρονες διδακτικές μεθόδους.

1.2 Ερευνητικό θέμα

Οι πρακτικές της διδασκαλίας των εκπαιδευτικών, αναφέρονται στο «τι κάνουν οι εκπαιδευτικοί στον επαγγελματικό τους ρόλο, αλλά και στο πώς το κάνουν» (Ponte, 2011). Θεωρούνται ένα σημαντικό πεδίο μελέτης στο χώρο της διδακτικής μαθηματικών (Potari, 2021), καθώς συνδέονται άμεσα με την ανάπτυξη της γνώσης του εκπαιδευτικού αλλά και με τη μάθηση του μαθητή, κατά συνέπεια καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό την επιτυχία των στόχων των σύγχρονων Προγραμμάτων Σπουδών. Σύμφωνα με την ερευνητική ομάδα των Clark-Wilson et al. (2020) από όλους τους παράγοντες που παίζουν ρόλο στη δραστηριότητα του μαθητή, είναι ο εκπαιδευτικός αυτός που επηρεάζει περισσότερο τη μάθηση. Παράλληλα, η ένταξη της ψηφιακής τεχνολογίας στη διδασκαλία των μαθηματικών, καθιστά ακόμα πιο αναγκαίο τον εμπλουτισμό των γνώσεων του εκπαιδευτικού με τις δυνατότητες που μπορεί αυτή να συνεισφέρει στη διδασκαλία του. Έτσι, ο εκπαιδευτικός ως υποκείμενο έρευνας έχει ξεχωριστό ενδιαφέρον για τη διδακτική των μαθηματικών.

Παράλληλα, το πλήθος των προσφερόμενων τεχνολογικών εργαλείων και οι διαφορετικές κατηγορίες χρήσης τους, δεν έχουν επιτρέψει την πλήρη μελέτη των δυνατοτήτων και της συνεισφοράς του καθενός από αυτά στη διδασκαλία των μαθηματικών. Έτσι, ένας ακόμα λόγος για τον οποίο επιλέχθηκε το θέμα αυτό, είναι η διερεύνηση της χρήσης και αξιοποίησης από τον εκπαιδευτικό συγκεκριμένων ψηφιακών εργαλείων, όπως είναι τα «εστιασμένα συγγραφικά εργαλεία», τα οποία επιτρέπουν στον χρήστη-εκπαιδευτικό να σχεδιάσει ψηφιακά δομήματα χωρίς να απαιτούν από αυτόν υψηλού επιπέδου τεχνολογικές γνώσεις. Τα δομήματα αυτά μπορούν να εστιάσουν σε μια γνωστική περιοχή, να ενσωματώνουν λειτουργικότητες που παρέχουν στον μαθητή αλληλεξαρτώμενες πολλαπλές αναπαραστάσεις για τη διερεύνηση εννοιών αυτής της περιοχής και να υποστηρίζουν τον αναστοχασμό. Μπορεί κανείς να τα αντιληφθεί ως «ένα καλούπι που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον σχεδιασμό διαφορετικών δομημάτων συγκεκριμένου τύπου» (http://etl.eds.uoa.gr/ekpaideytiko-logismiko/estiasmena-syggrafika-ergaleia.html).

Με βάση τις παραπάνω ερευνητικές ανάγκες, το θέμα στο οποίο επικεντρώνεται η παρούσα έρευνα, είναι οι πρακτικές ενός εκπαιδευτικού δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης πριν και μετά την αξιοποίηση εστιασμένων συγγραφικών εργαλείων και συγκεκριμένα του Κυβόκοσμου. Ο εκπαιδευτικός στην αρχή με τη χρήση έτοιμων δραστηριοτήτων αλλά και στη συνέχεια με δραστηριότητες που αναπτύσσει ο ίδιος, εισάγει τους μαθητές στην έννοια των αριθμητικών προόδων με τη χρήση του Κυβόκοσμου. Η έρευνα αυτή, αναμένεται να δώσει πληροφορίες σε θεωρητικό και πρακτικό επίπεδο για τον τρόπο με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί σχεδιάζουν με αυτά και κυρίως για τον τρόπο με τον οποίο αυτά επηρεάζουν τις διδακτικές τους πρακτικές.

2 Θεωρητική θεμελίωση

2.1 Επιμόρφωση των εκπαιδευτικών

Η σύγχρονη κοινωνία απαιτεί τη συνεχή επιμόρφωση των ατόμων κάτι που μετατρέπει αυτόματα την παραδοσιακή εκπαίδευση να αποτελεί ένα μόνο μέρος του εκπαιδευτικού συστήματος (Καλογιαννάκης & Παπαδάκης, 2012). Η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών όλων των βαθμίδων της εκπαίδευσης στη χρήση και κυρίως στην παιδαγωγική αξιοποίηση των ΤΠΕ στην καθημερινή σχολική πρακτική κρίνεται επιβεβλημένη. Συνεπώς, η εισαγωγή των ΤΠΕ στην εκπαίδευση θα πρέπει να ιδωθεί υπό το πρίσμα του αναγκαίου εκσυγχρονισμού των μεθόδων μάθησης και διδασκαλίας (Vosniadou & Kollias, 2001).

Από διάφορες έρευνες φαίνεται ότι η εξέλιξη των εκπαιδευτικών ώστε να ενσωματώσουν τις ΤΠΕ στην καθημερινή διδακτική πρακτική γίνεται βαθμιαία μέσα από μια σειρά διακριτών φάσεων (Sherry 1998, Vosniadou & Kollias 2001, Kalogiannaki, 2010), όπου στα τελικά στάδια απαιτείται κυρίως αλλαγή στάσεων. Έτσι το πώς εντάσσουν τη χρήση των ΤΠΕ μέσα την τάξη εξαρτάται από το πώς οι ίδιοι αντιμετωπίζουν τις ΤΠΕ, τι ενδιαφέρον τους προκαλεί και πώς ενσωματώνουν τη χρήση του στις δικές τους παιδαγωγικές απόψεις (Kalogiannakis, 2010).

Όσον αφορά τη χώρα μας, οι Καλογιαννάκης & Παπαδάκης (2012) επισημαίνουν ότι παρότι τα τελευταία 15 έτη έχουν πραγματοποιηθεί αρκετές επιμορφωτικές δράσεις, με αποκορύφωμα την επιμόρφωση Α' επιπέδου (Π1) σε βασικές δεξιότητες ΤΠΕ, διάφορες έρευνες (Τζιμόπουλος 2003, Τζιμογιάννης & Κόμης 2004, Καρακασίδης 2005, Τραψιώτη κ.α. 2009, Kalogiannakis 2010), φανέρωσαν ότι όλες οι δράσεις έπασχαν από παιδαγωγική φαντασία και πρωτοτυπία ενώ δεν συνέβαλαν ουσιαστικά στην ενσωμάτωση των ΤΠΕ στη διδακτική πρακτική. Στα πλαίσια αυτά, το ΥΠΑΙΘ εισήγαγε το 2009 προγράμματα ολοκληρωμένης επιμόρφωσης για 27.500 εκπαιδευτικούς της Α'/θμιας και Β'/θμιας εκπαίδευσης. Τα επιμορφωτικά προγράμματα αφορούν στην απόκτηση γνώσεων και δεξιοτήτων για την παιδαγωγική αξιοποίηση και εφαρμογή των ΤΠΕ στη διδασκαλία του γνωστικού τους αντικειμένου (Επιμόρφωση Β' επιπέδου ΤΠΕ). Το έργο «Επιμόρφωση των εκπαιδευτικών για την αξιοποίηση και εφαρμογή των ΤΠΕ στη διδακτική πράξη» έχει ως αντικείμενο την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στη διδακτική αξιοποίηση των ΤΠΕ στην τάξη. (http://b-epipedo2.cti.gr)

Η Πληροφορική το 2011, εντάχθηκε για πρώτη φορά ως ιδιαίτερο γνωστικό αντικείμενο στο Πρόγραμμα Επιμόρφωσης Β' Επιπέδου (Γρηγοριάδου κ.α., 2012). Συνοπτικά, το αντικείμενο της επιμόρφωσης Β' επιπέδου αποτελεί η εκμάθηση των αρχών παιδαγωγικής αξιοποίησης των ΤΠΕ, η απόκτηση δεξιοτήτων, κατά κλάδο εκπαιδευτικών, για την παιδαγωγική αξιοποίηση εκπαιδευτικού λογισμικού και εργαλείων γενικής χρήσης και η καλλιέργεια του τρίπτυχου γνώσεις-δεξιότητες-στάσεις.

Σε σχέση με την σπουδαιότητα της επιμόρφωσης μπορούμε να αναφερθούμε στο ότι η συνεχής βελτίωση των πνευματικών εφοδίων των εκπαιδευτικών που στελεχώνουν τις σχολικές μονάδες αποτελεί βασική προϋπόθεση για την αποτελεσματικότητα της εκπαίδευσης. Επίσης η επαγγελματική εξέλιξη των εκπαιδευτικών είναι ένας πολύ σημαντικός παράγοντας που καθορίζει, ουσιαστικά, την ποιότητα του εκπαιδευτικού έργου. Τόσο η επιμόρφωση, όσο και η κατάρτιση των εκπαιδευτικών αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα τμήματα της προσπάθειας για την αναβάθμιση της ποιότητας της εκπαίδευσης. Οι εκπαιδευτικοί προσπαθούν να βελτιώσουν και να εξελίξουν τις διδακτικές τους πρακτικές μέσω της δια βίου μάθησης και επιμόρφωσης (Σταματοπούλου κ.α. 2017).

Οι ικανότητες των εκπαιδευτικών να προσαρμόζονται στις απαιτήσεις του σύγχρονου κόσμου και οι παιδαγωγικές τους αντιλήψεις εξαρτώνται τόσο από τις προπτυχιακές τους σπουδές όσο και από την συνεχή επιμόρφωση τους. Από τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό το γεγονός ότι η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών συνδέεται άρρηκτα με τα θεμέλια του εκπαιδευτικού συστήματος. (Τσούλιας, 2011).

Βασικός σκοπός της επιμόρφωσης είναι η αναβάθμιση της εκπαιδευτικής πράξης και μακροπρόθεσμα του εκπαιδευτικού συστήματος. Είναι κοινά αποδεκτό ότι το γνωσιακό επίπεδο του εκπαιδευτικού προσωπικού καθορίζει τον βαθμό μάθησης και σχολικής επιτυχίας των μαθητών. (Bayar, 2014). Σκοπός της επιμόρφωσης στην σύγχρονη κοινωνία είναι να εξελίσσει συνεχώς τον εκπαιδευτικό ώστε να μπορεί να κατανοεί τις ανάγκες των μαθητών του και της κοινωνίας αλλά και να αναλαμβάνει πρωτοβουλίες και ευθύνες μέσα σε ένα γενικότερο πλαίσιο που καθορίζεται από την Πολιτεία.

Σύμφωνα με διεθνείς έρευνες, η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών όλων των βαθμίδων κρίνεται απαραίτητη λόγω των αλλαγών που συντελούνται τόσο στο στενό σχολικό περιβάλλον όσο και στις παγκόσμιες κοινωνικές, τεχνολογικές και οικονομικές συνθήκες που συνεχώς μεταβάλλονται. Οι συνεχείς εξελίξεις στις επιστήμες και στην τεχνολογία οδηγούν σε αλλαγές στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών, στις παιδαγωγικές πρακτικές και σε όλες τις διαστάσεις της σχολικής ζωής. Οι εκπαιδευτικοί, στην διάρκεια της σταδιοδρομίας τους, καλούνται να κατανοήσουν και να εφαρμόσουν νέες τεχνολογίες και νέες διδακτικές μεθοδολογίες μέσα στην τάξη. Η νέα κοινωνική πραγματικότητα που έχει διαμορφωθεί δημιουργεί, πραγματικά, μεγάλη ανάγκη για την επιμορφωτική στήριξη των εκπαιδευτικών. Η ανομοιογένεια του μαθητικού δυναμικού, η ένταξη πολιτισμικών μειονοτήτων και οι διαφορετικές μορφωτικές τους ανάγκες καλούν τους εκπαιδευτικούς να εφαρμόσουν τις αρχές της διαπολιτισμικής εκπαίδευσης με κύριο στόχο να προάγουν την ισότητα και την διαφορετικότητα μέσα στις σχολικές αίθουσες (Φιλοκώστα, 2010).

Η ανάγκη για την αναβάθμιση των γνώσεων των εκπαιδευτικών διαφαίνεται, επίσης, από το γεγονός ότι ανάμεσα στον χρόνο ολοκλήρωσης των σπουδών τους και στην έναρξη της διδακτικής τους σταδιοδρομίας μεσολαβεί, συνήθως, αρκετός χρόνος. Το χρονικό διάστημα αυτό, οδηγεί τις περισσότερες φορές τον εκπαιδευτικό μακριά από τις αποκτηθείσες γνώσεις του. Το κενό αυτό καλείται να καλύψει η επιμόρφωση. Οι εκπαιδευτικοί, μετά την ολοκλήρωση των σπουδών τους είναι επιστημονικά καταρτισμένοι για το αντικείμενο της διδασκαλίας τους αλλά υστερούν σε παιδαγωγική κατάρτιση και πρακτική εφαρμογή. Η διαπίστωση αυτή κάνει πιο έντονη την ανάγκη της επιμόρφωσης (Γεωργιάδου κ.α., 2014).

Η αναγκαιότητα της επιμόρφωσης αποτελεί αντικείμενο συζήτησης και ενδιαφέροντος και από την πλευρά των ίδιων των εκπαιδευτικών. Σύμφωνα με έρευνες τόσο σε διεθνές όσο και εθνικό επίπεδο, οι εκπαιδευτικοί επιζητούν την δια βίου εκπαίδευση τους όχι μόνο σε θέματα σχετικά με την ειδικότητα τους αλλά και για τις νέες τεχνολογίες, την ειδική αγωγή, τις μαθησιακές δυσκολίες και τις σύγχρονες διδακτικές μεθόδους. Επίσης, αποτυπώνουν την ανάγκη τους για επιμόρφωση σε θέματα που άπτονται των προσωπικών τους αναγκών και των καθημερινών καταστάσεων που αντιμετωπίζουν μέσα τις σχολικές τάξεις και στα σχολικά τους συγκροτήματα. Παράλληλα, επιθυμούν επιμορφώσεις μεγάλης διάρκειας ώστε να υπάρξει συνεχή και ποιοτική βελτίωση των γνώσεων τους. (Bayar, 2014).

Η συνεχής επιμόρφωση από την μία πλευρά βοηθάει τους εκπαιδευτικούς να βελτιώσουν την καθημερινή απόδοση τους και να επιλύσουν τα καθημερινά προβλήματα που παρουσιάζονται μέσα σε μία σχολική τάξη, από την άλλη όμως αποτελεί και ένα μέσο αυτοαξιολόγησης και επαγγελματικής βελτίωσης του ίδιου. (Φιλοκώστα, 2010)

Μέσα στις συνθήκες που επικρατούν στην σύγχρονη κοινωνία, μιας κοινωνίας που διακατέχεται από περιβαλλοντικά, κοινωνικά, φυλετικά, πολιτιστικά και θρησκευτικά προβλήματα σε συνδυασμό με την διαφοροποίηση των αναγκών των σύγχρονων μαθητών, ο ρόλος του εκπαιδευτικού αλλάζει και απαιτεί νέες επαγγελματικές ικανότητες που μπορούν να αποκτηθούν μέσα από την επιμόρφωση και την δια βίου εκπαίδευση (Σιπητάνου κ.α., 2012).

2.2 Εκπαιδευτικές πρακτικές

Η ταχύτατη εξέλιξη της τεχνολογίας από τις τελευταίες δεκαετίες του προηγούμενου αιώνα μέχρι σήμερα, επηρέασε βαθύτατα το χώρο της εκπαίδευσης. Ολοένα και περισσότερες νέες μέθοδοι και πρακτικές αναδύονται και ενσωματώνονται στη εκπαιδευτική διαδικασία, αξιοποιώντας διδακτικά τις δυνατότητες της ψηφιακής τεχνολογίας. Οι θετικές επιστήμες και ειδικότερα τα μαθηματικά, είναι από τα πρώτα πεδία στα οποία ενσωματώθηκε η εκπαιδευτική τεχνολογία. Η εξέλιξη από τις αρχικές στατικές τεχνολογίες, σε εκείνες που συνδυάζουν με εποικοδομητικό τρόπο τα μαθηματικά με προγραμματισμό ή/και με δυναμικά περιβάλλοντα μάθησης, που ενσωματώνουν δυνατότητες συρσίματος, μεταβολών και κινούμενων σχημάτων (Papert 1980, Laborde & Laborde 1993) υπήρξε ραγδαία, με διαρκή εμπλουτισμό μέχρι τις μέρες μας. Στα περιβάλλοντα αυτά, οι μαθητές μπορούν να αναπαραστήσουν τις μαθηματικές έννοιες, να τις επεξεργαστούν και να τις διερευνήσουν, κατασκευάζοντας έτσι τα προσωπικά τους νοήματα για αυτές (Noss et al., 1997). Έτσι, όχι μόνο η γεωμετρία, αλλά και η άλγεβρα και ο λογισμός, με έννοιες όπως της μεταβλητής, της συνάρτησης, του ορίου, της παραγώγου και το ολοκληρώματος που στα συμβατικά διδακτικά περιβάλλοντα έχουν καθαρά στατικό και συμβολικό χαρακτήρα, μπορούν να αποκτήσουν δυναμικές αναπαραστάσεις (Ferrara et al., 2006).

Σύμφωνα με την ερευνητική ομάδα των Clark-Wilson, Robutti & Thomas (2020) η εξέλιξη αυτή οδήγησε την έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης στο συμπέρασμα ότι η χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας έχει δύο κύριες υποστηρικτικές λειτουργίες: (α) την οργάνωση της εργασίας του εκπαιδευτικού (παραγωγή φύλλων εργασίας, αξιολόγηση) και (β) νέους τρόπους άσκησης και αναπαράστασης των μαθηματικών» (Sinclair & Robutti, 2020). Σταδιακά, προστέθηκε και μια τρίτη λειτουργία, η υποστήριξη της οργάνωσης σε κοινότητες, της επικοινωνίας και ανταλλαγής υλικών.

Όλες αυτές οι λειτουργίες αποτελούν ταυτόχρονα νέες προκλήσεις για τον ρόλο του εκπαιδευτικού και τον φέρνουν στο επίκεντρο των προσπαθειών για την αναβάθμιση της μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι Sinclair & Yerushalmy (2016) αναφέρουν ότι «συγκρινόμενη με την έρευνα για τη μάθηση του μαθητή με την τεχνολογία, η έρευνα για τον εκπαιδευτικό δεν έχει αναπτυχθεί το ίδιο». Οι παραπάνω ερευνήτριες σε μια ανασκόπηση των θεμάτων της έρευνας της τελευταίας δεκαετίας για τον εκπαιδευτικό, αναφέρουν τόσο μελέτες για τη γνώση που χρειάζονται οι εκπαιδευτικοί για να διδάξουν με τη χρήση της τεχνολογίας και το τρόπο με τον οποίο μαθαίνουν να τη χρησιμοποιούν στην τάξη (σε πλαίσια τόσο ενδοϋπηρεσιακά, όσο και πριν από αυτά), όσο και μελέτες που υπογραμμίζουν παραγωγικές πρακτικές με τις οποίες εμπλέκονται οι εκπαιδευτικοί όταν διδάσκουν με ψηφιακές τεχνολογίες. Οι δεύτερες εντάσσονται στο πεδίο της παρούσα έρευνα.

Οι πρακτικές που ακολουθούν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, εξαρτώνται από πολλούς παράγοντες, όπως τη γνώση και τις πεποιθήσεις του εκπαιδευτικού, τους περιορισμούς και τις ευκαιρίες του κοινωνικού πλαισίου, αλλά και το επίπεδο αναστοχασμού του εκπαιδευτικού (Ernest, 1988). Οι έρευνες στο πεδίο των επαγγελματικών πρακτικών ασχολούνται κυρίως με το πώς αυτές ευθυγραμμίζονται με το πρόγραμμα σπουδών και πώς μπορούν να προωθηθούν από διαφορετικά περιβάλλοντα εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών. Κάποιοι συγγραφείς αντιμετωπίζουν τις πρακτικές με πολύ γενικό τρόπο - είτε ως παραδοσιακές είτε ως προσανατολισμένες στην αναμόρφωση - ενώ άλλοι εξετάζουν πιο συγκεκριμένες πτυχές της πρακτικής, όπως η επιλογή και η πρόταση εργασιών στους μαθητές και η διεξαγωγή της δραστηριότητας των μαθητών σε αυτές τις εργασίες (Ponte, 2011). Η παρούσα έρευνα αποτελεί ένα συγκερασμό των παραπάνω, καθώς μελετά έναν εκπαιδευτικό αρχικά σε παραδοσιακό διδακτικό περιβάλλον και στη συνέχεια σε περιβάλλον υποστήριξης δραστηριοτήτων με ψηφιακά εργαλεία. Η μελέτη εστιάζεται στους ρόλους που υιοθετεί ο εκπαιδευτικός στα διαφορετικά αυτά πλαίσια και στον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζει σε αυτά το περιεχόμενο του προγράμματος σπουδών.

Σύμφωνα με τον Ernest (1988), οι πρακτικές συνήθως, οδηγούν στην υιοθέτηση τριών διαφορετικών ρόλων από τον εκπαιδευτικό:

1) **Καθοδηγητικός**, με στόχο την κατοχή δεξιοτήτων από τους μαθητές και την ορθή εκτέλεση διαδικασιών και κανόνων. Συνδέεται συνήθως με την αυστηρή παρακολούθηση των κειμένων του σχολικού βιβλίου και του Προγράμματος Σπουδών.
2) **Επεξηγηματικός**, με στόχο την εννοιολογική κατανόηση, συνήθως τροποποιεί το σχολικό βιβλίο προσθέτοντας προβλήματα και δραστηριότητες
3) **Διευκολυντικός**, θέτοντας προβλήματα προς επίλυση και κατασκευάζοντας ο ίδιος δραστηριότητες.

Οι Clark-Wilson, Robutti & Thomas (2020) σε μια ανασκόπηση των ερευνών σχετικά με τη διδασκαλία με ψηφιακές τεχνολογίες, διαπιστώνουν ότι υπάρχουν λίγες ερευνητικές μελέτες εντός της αίθουσας του εκπαιδευτικού. Οι έρευνες αυτές είναι κυρίως μεσαίας έως μεγάλης κλίμακας, με στόχο τόσο την τεκμηρίωση όσο και τη θεωρία των πρακτικών στην τάξη με την τεχνολογία. Η διαπίστωση αυτή θέτει ένα μεθοδολογικό ζήτημα και εξηγείται από το γεγονός ότι οι μελέτες μεγάλης κλίμακας απαιτούν σημαντικούς ανθρώπινους και οικονομικούς πόρους για την παρατήρηση πολλαπλών τάξεων σε επαρκή χρονικά διαστήματα. Ταυτόχρονα, η τεράστια γκάμα τεχνολογικών εργαλείων που είναι διαθέσιμα στους εκπαιδευτικούς, καταλήγει σε συγκεκριμένες επιλογές εργαλείων, αποδίδοντας λιγότερο γενικευτικά ευρήματα.

Μέσα από το σκεπτικό που αναπτύχθηκε παραπάνω, η παρούσα έρευνα επιχειρεί να συνεισφέρει στη γνώση που έχουμε για τις πρακτικές του εκπαιδευτικού στο χώρο της αίθουσάς του και πώς αυτές διαμορφώνονται όταν η διδασκαλία του ενσωματώνει ψηφιακά εργαλεία που του επιτρέπουν να σχεδιάσει με αυτά κατάλληλες για τους μαθητές του δραστηριότητες.

2.3 Εισαγωγή στον κόσμο των μικροπειραμάτων

Με την αναθεώρηση του Προγράμματος Σπουδών από το σχολικό έτος 2011-2012, η εισαγωγή των ψηφιακών τεχνολογιών, στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών, κρίθηκε αναγκαία με σκοπό να συνεισφέρει στον πειραματισμό, στη δημιουργία εικασιών, την ανακάλυψη μαθηματικών ιδεών και την ανάπτυξη της μαθηματικής επιχειρηματολογίας από τους μαθητές. Για την επίτευξη των παραπάνω στόχων, δημιουργήθηκαν δομήματα, που ενσωματώθηκαν σε διαφορετικά σημεία της ύλης και συνδέονται με δραστηριότητες, ασκήσεις και παραδείγματα των σχολικών βιβλίων (Δουκάκη et al., 2013).

Ο όρος «μικροπειράματα» επινοήθηκε για να περιγράψει ένα είδος ψηφιακού δομήματος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί μαζί με ευρύτερα εργαλεία έκφρασης, σε συνθετικές εργασίες, συνήθως όμως προορίζεται για μεικτή παρέμβαση. Αυτά τα δομήματα ενσωματώνουν μια πιο συγκεκριμένη περιοχή εννοιών απ' ότι τα εργαλεία έκφρασης (Κυνηγός, 2014). Σύμφωνα με το νέο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών, «...τα ψηφιακά εργαλεία μαθηματικής έκφρασης αξιοποιούνται με συνδυασμό μεικτής και διακριτής παρέμβασης. Χρησιμοποιούνται δηλαδή ως εργαλεία έκφρασης σε βασικό υλικό αναφοράς σε συνθετικές εργασίες και παράλληλα επιλεκτικά με τη μορφή μικρο-πειραμάτων στο πλαίσιο κατανόησης εννοιών, αναπαραστάσεων και των συνδέσεων μεταξύ αναπαραστάσεων» (Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, 2011).

Τα μαθηματικά μπορούμε να τα δούμε είτε σαν ένα αφηρημένο πεδίο της ανθρώπινης σκέψης, με αντικείμενά τα αξιώματα τις ιδιότητες και τις μαθηματικές αποδείξεις, είτε ως μια εφαρμοσμένη επιστήμη, που μπορεί να εξηγήσει διάφορα φαινόμενα (Kynigos, 2007a). Η μάθηση των μαθηματικών αποτελεί μια εμπειρική διαδικασία κατά την οποία οι μαθητές μέσα από υποθέσεις, εικασίες, αποδείξεις, αντιπαραδείγματα και ανασκευές (Lakatos, 1996) κατασκευάζουν τα δικά τους νοήματα. Σε αυτό το πλαίσιο, τα μιρκοπειράματα κάνουν τις μαθηματικές αναπαραστάσεις καλύτερα κατανοητές, αμφισβητούν τις παραδοσιακές μαθηματικές αναπαραστάσεις, προσφέροντας άλλες ειδικά σχεδιασμένες ώστε να διευκολύνουν τη δημιουργία νοημάτων (Kynigos, 2007a).

Τα μικροπειράματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε ατομικά είτε ομαδικά υπό την καθοδήγηση εκπαιδευτικών ή γονέων. Μπορούν είτε να αποτελέσουν μέρος του μαθήματος είτε μέρος μιας συνθετικής εργασίας διερεύνησης. Τα μικροπειράματα στοχεύουν στην επεξήγηση μιας μαθηματικής έννοιας και την εμβάθυνση σε αυτή ή επεκτείνουν θεματικά την έννοια πέρα από τα στενά όρια του σχολικού βιβλίου (Κυνηγός, 2014). Οι διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις (μαθηματικού φορμαλισμού, κειμενικού λόγου, μαθηματικών αναπαραστάσεων, γραφημάτων, σχημάτων, πινάκων κτλ.), και ο δυναμικός χειρισμός των μαθηματικών αντικειμένων, οδηγεί τους μαθητές σε προβληματισμό, διερεύνηση και διαπραγμάτευση των σχέσεων - συμπεριφορών και ιδιοτήτων (Kynigos, 2007b).

Βασικός στόχος είναι τα ψηφιακά δομήματα να δίνουν έμφαση σε πραγματικά προβλήματα και κοινωνικά θέματα. Ειδικά για τα μαθηματικά, ο σχεδιασμός και η επιλογή δομημάτων και πηγών θα πρέπει να εντάσσεται στους ειδικούς στόχους του αντίστοιχου προγράμματος σπουδών. Οι ψηφιακές τεχνολογίες αξιοποιούνται με στόχο την πρόσθετη διδακτική και μαθησιακή αξία. Σκοπός είναι δηλαδή να ενισχυθεί το παραδοσιακό μοντέλο εκπαίδευσης και να προαχθούν οι στόχοι του νέου σχολείου. Το είδος αυτό των ψηφιακών δομημάτων σχεδιάζεται σε πλαίσιο, με τον ευρύτερο σκοπό να προβλέπει ενδυνάμωση του ρόλου όλων των εμπλεκομένων, δηλαδή δράση, επικοινωνία και προσωπικό νόημα για το μαθητή, αναβάθμιση διδακτικών μεθόδων και προοπτική για καλλιέργεια καλύτερων σχέσεων με τους μαθητές και τον εκπαιδευτικό, επικοινωνία των μαθητών με το γονέα, προοπτική για ανάπτυξη πληθώρας τέτοιων δομημάτων από παιδαγωγούς - σχεδιαστές κλπ. (Κυνηγός, 2014).

Τα κριτήρια επιλογής των πηγών που χρησιμοποιήθηκαν στο πλαίσιο αυτό, δίνουν έμφαση στα επιτεύγματα που βασίζονται στα μαθηματικά, στην ιστορία των μαθηματικών, στα φαινόμενα που ερμηνεύονται με τα μαθηματικά και σε σαγηνευτικά μαθηματικά παράδοξα (Κυνηγός, 2014). Το σκεπτικό με το οποίο επιλέχθηκαν τα συγκεκριμένα δομήματα να ενταχθούν στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών ήταν η σημαντικότητα του να αποκτήσουν οι μαθητές εμπειρία στη χρήση τέτοιων προγραμμάτων, με ποικίλη θεματολογία και κλιμακούμενη δυσκολία. Οι δραστηριότητες των μαθητών που ενισχύονται και εμπλουτίζονται με τα εργαλεία αυτά είναι η δημιουργία ψηφιακών μαθηματικών αντικειμένων, σχέσεων και μοντέλων, η διερεύνηση και ο πειραματισμός με μαθηματικά αντικείμενα και σχέσεις.

Ανάλογα με το είδος της μαθηματικής δραστηριότητας και τον τρόπο χρήσης της εκάστοτε τεχνολογίας που χρησιμοποιούν, τα εργαλεία έκφρασης χωρίζονται στις εξής κατηγορίες (Κυνηγός, 2014):

- Μαθηματική έκφραση μέσω προγραμματισμού

- Δυναμικός χειρισμός γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων
- Αλγεβρική διερεύνηση με αντίστοιχα συστήματα
- Πειραματισμός με ψηφιακά μοντέλα
- Διερεύνηση, πειραματισμός και επεξεργασία δεδομένων για στατιστική και πιθανότητες

Με βάση τα παραπάνω, τα μοντέλα που δίνεται μεγαλύτερη έμφαση στα ψηφιακά βιβλία των μαθηματικών είναι μεταξύ άλλων και ο «ψηφιακός άβακας», το «πολύζυγο», ο Κυβόκοσμος, και το λογισμικό «Geogebra». Τα συγκεκριμένα μοντέλα είναι με τέτοιο τρόπο δομημένα, ώστε να αποτελούν «ανοιχτές» εφαρμογές (Κυνηγός, 2014, Φακούδης, Λάτση και Παπαδόπουλος, 2014), και μπορούν να γίνουν αντικείμενα πειραματισμού, όχι μόνο από τους μαθητές, αλλά και τους εκπαιδευτικούς, δίνοντάς τους τη δυνατότητα να τα τροποποιούν και να τα προσαρμόζουν στις ανάγκες κάθε διδακτικής ενότητας καθώς και τις ανάγκες για πρόσθετη υποστήριξη και κατανόηση των μαθητών. Ο εκπαιδευτικός πλέον δεν αποφασίζει αν θα εντάξει το ψηφιακό υλικό στη μαθηματική διαδικασία, αλλά πρέπει να αποφασίσει στοχαστικά και κριτικά τον τρόπο που θα το προσαρμόσει, αξιοποιώντας την τεχνολογική και παιδαγωγική γνώση περιεχομένου που διαθέτει (Δουκάκη et al., 2013).

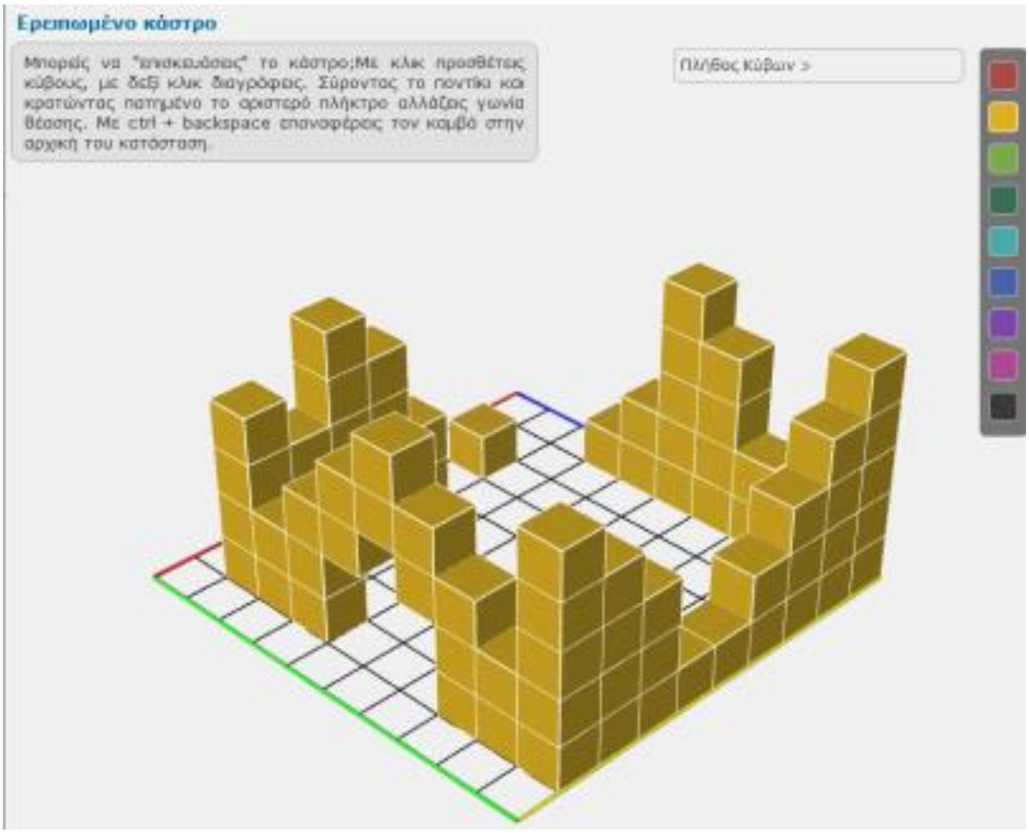
Τα μικροπειράματα πρέπει να θεωρούνται σύμφωνα με όρους της διδακτικής σαν «ζωντανά έγραφα» (living documents, Kynigos, 2015). Είναι εκεί για να αλλάξουν και αυτό είναι μια κουλτούρα που πρέπει να καλλιεργηθεί στην τάξη. Να περάσει στους μαθητές την αίσθηση ότι τα μαθηματικά είναι κάτι με το οποίο μπορούμε να ασχοληθούμε, να σχεδιάσουμε, κάτι που έχει ενδιαφέρον. Το διαδραστικό ή εμπλουτισμένο βιβλίο αποτελεί αφορμή για τον εκπαιδευτικό να το αλλάξει, να το διαμορφώσει και να κάνει το οποιοδήποτε δόμημα να είναι κατάλληλο για τη δική του τάξη.

Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, τα αποτελέσματα αυτής της παρέμβασης δεν είναι σαφή και έτσι δεν έχουμε εικόνα του πως επιδρά αυτή η παρέμβαση στη σχολική πρακτική, καθώς υπάρχουν ελάχιστες εργασίες που περιγράφουν μια πρακτική εφαρμογή τους στην τάξη.

2.4 Εισαγωγή στον Κυβόκοσμο

Η συνεχής αναζήτηση και το μεγάλο ενδιαφέρον για τη δημιουργία νέων τεχνολογικών μέσων που θα βοηθήσουν στην αποτελεσματικότερη διδασκαλία και στην βαθύτερη κατανόηση από τη μεριά των μαθητών των εννοιών της γεωμετρίας, κατέστησε επιτακτική την ανάγκη δημιουργίας ενός σύγχρονου δυναμικού εργαλείου, που θα παρουσίαζε την τρισδιάστατη μορφή της γεωμετρίας. Το εργαλείο αυτό, έπρεπε να παρέχει αναπαραστάσεις πολλαπλά διασυνδεδεμένες, καθώς και δυναμικό χειρισμό και δυναμική απεικόνιση μέσα από ένα διαδραστικό περιβάλλον (Laborde et al., 2006). Σαν αποτέλεσμα αυτών, θα δινόταν η δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων μέσα από την μοντελοποίηση και τον πειραματισμό, έτσι ώστε να ελέγχονται εικασίες από τους χρήστες, να ερμηνεύοντας φαινόμενα και να γίνονται γενικεύσεις (Artigue, 2002).

Για την ικανοποίηση των παραπάνω αναγκών, δημιουργήθηκε στα πλαίσια εμπλουτισμού των σχολικών βιβλίων των Μαθηματικών, η εφαρμογή (applet) του «Κυβόκοσμου». Πρόκειται για μια ιδέα που έχει την αρχή της στην ανάλογη εφαρμογή Building with Blocks του Freudenth al Institute for Science and Mathematics Education (http://www.fisme.science.uu.nl /toepassingen/00724/). Το γραφικό περιβάλλον του κυβόκοσμου και ένα παράδειγμα εφαρμογής του φαίνονται στο Σχήμα 2.4.1. Οδηγίες για τον Κυβόκοσμο οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν και για την εκπαίδευση του εκπαιδευτικό παρουσιάζοντα στο Παράρτημα Α.1.



Σχήμα 2.4.1: Παράδειγμα εφαρμογής στον «Κυβόκοσμο».

Κύρια λειτουργία του Κυβόκοσμου είναι να βοηθά στην διερεύνηση και τον πειραματισμό με τρισδιάστατα εικονικά μοντέλα προκειμένου να επιτευχθεί η καλλιέργεια και ανάπτυξη εννοιών του χώρου, η αναπαράσταση χωρικών σχέσεων και οι πολλαπλές διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις. Αυτό επιτυγχάνεται τόσο μέσα από ελευθερία δράσεων για το χρήστη, όσο και από την επιβολή εκείνων των περιορισμών που θα οδηγήσουν το χρήστη στην προτιθέμενη κατανόηση. Στο περιβάλλον αυτό ο μαθητής χειρίζεται εικονικούς κύβους (ως δομικούς λίθους) για τις κατασκευές του, τις οποίες μπορεί στη συνέχεια να χειρίζεται δυναμικά. Ο μαθητής μπορεί να αντιληφθεί τις γεωμετρικές σχέσεις μέσα από τη διαρκή εναλλαγή της οπτικής γωνίας των μοντέλων που εξετάζονται και μέσα από την εναλλαγή δισδιάστατων και τρισδιάστατων αναπαραστάσεων του ίδιου αντικειμένου. Οι χωρικές σχέσεις που μπορούν να προσεγγιστούν μέσα από τον «Κυβόκοσμο» ποικίλουν, και σχετίζονται με θέματα όπως: η ανάλυση και η σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων, η αναγνώριση και η αναπαράσταση σχημάτων από διαφορετικές γωνίες θέασης, οι χωρικές σχέσεις μεταξύ γεωμετρικών σχημάτων, η μέτρηση όγκου, οι διευθύνσεις και θέσεις στο χώρο, καθώς και η σύνδεση επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και γεωμετρικών στερεών (Φακούδης, Λάτση και Παπαδόπουλος, 2014). Ο Κυβόκοσμος, δεν αποτελεί μόνο μια κατασκευασμένη αναπαράσταση ενός αντικειμένου, αλλά μπορεί να λειτουργήσει ως διαμεσολαβητικό εργαλείο, ώστε να γεφυρώσει το χάσμα μεταξύ των άτυπων στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές για την επίλυση των προβλημάτων με τις επιστημονικά αποδεκτές έννοιες.

Στα πειράματα που έχουν δημιουργηθεί με τον Κυβόκοσμο, ζητείται από τους μαθητές να ανακαλύψουν σχέσεις μεταξύ δισδιάστατων και τρισδιάστατων αντικειμένων, με σκοπό την κατανόηση των ιδιοτήτων των τρισδιάστατων αντικειμένων. Για να συμβεί αυτό, απαιτείται σημαντικά υψηλός βαθμός οπτικοποίησης καθώς και επινόηση πολύπλοκων αναπαραστάσεων. Για το λόγο αυτό, ο Κυβόκοσμος, δίνει τη δυνατότητα πολλαπλών πειραματισμών με διάφορες απεικονίσεις και έλεγχο των κατασκευών, από οποιαδήποτε οπτική γωνία. Όπως όλες οι εφαρμογές που εντάχθηκαν στο Ψηφιακό Σχολείο και στα βιβλία των μαθηματικών, έτσι και ο Κυβόκοσμος, αποτελεί μία «ανοιχτή» εφαρμογή, αποτελώντας ένα υλικό προς επεξεργασία και παρέχοντας την ευκαιρία για πειραματισμό και από τον εκπαιδευτικό, ο οποίος μπορεί να προσαρμόσει τις δραστηριότητες με βάση τους στόχους του μαθήματος και τις ανάγκες των μαθητών του.

Οι εκδοχές του Κυβόκοσμου που συναντάμε συνήθως στα διαδραστικά βιβλία των μαθηματικών του Δημοτικού περιλαμβάνει την τοποθέτηση κύβων ανάλογα με τον αριθμό που δίνει η κάθε θέση πάνω στο πλέγμα, την αναπαράσταση μίας κατασκευής ή τη συμπλήρωση μιας ημιτελούς κατασκευής, την ελεύθερη δημιουργία ημιτελούς κατασκευής και τη κατασκευή τρισδιάστατου σχήματος από δοσμένες φωτογραφικά επίπεδες όψεις του σχήματος.

2.5 Βιβλιογραφική τεκμηρίωση της παρούσας έρευνας

Η παρούσα εργασία θα επικεντρωθεί στο κεφάλαιο των αριθμητικών προόδων των Μαθηματικών της Α΄ Λυκείου. Οι δραστηριότητες που εφαρμόστηκαν στην παρούσα εργασία αναπτύχθηκαν με αφορμή τις δυσκολίες που συναντούν οι καθηγητές και οι μαθητές στο παραδοσιακό πλαίσιο «χαρτί-μολύβι» όταν κινούνται αποκλειστικά στο συμβολικό χώρο της άλγεβρας (Nossetal, 1997).

Οι έννοιες και οι διαδικασίες διδάσκονται παραδοσιακά κυρίως με τρόπο μηχανικό (μέσα από μεθοδολογίες), χωρίς οι μαθητές να μπορούν να νοηματοδοτήσουν τον αλγεβρικό φορμαλισμό (Kynigos et al., 2010), καταλήγοντας σε αποδείξεις, τις οποίες όμως δεν μπορούν να κατανοήσουν πλήρως, ούτε να δώσουν ικανοποιητικές εξηγήσεις για αυτές (Hanna, 1990). Με αυτή την έννοια, η παρούσα εργασία επιδιώκει την νοηματοδότηση των εμπλεκόμενων μαθηματικών εννοιών γύρω από τις αριθμητικές προόδους και τη δημιουργία αποδείξεων με επεξηγηματικό χαρακτήρα, μέσα από τη χρήση των εννοιών αυτών (Vergnaud, 1996) σε ένα περιβάλλον τρισδιάστατης αναπαράστασής τους, όπως αυτό του Κυβόκοσμου.

Ειδικότερα, στην θεματική ενότητα του αθροίσματος ν όρων μιας αριθμητικής προόδου, υπάρχουν αποδείξεις καθαρά τυπικές, οι οποίες είναι πλήρως αποδεκτές από την μαθηματική κοινότητα, όπως η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής, η οποία ωστόσο, τις τελευταίες δεκαετίες δεν προτείνεται στα Προγράμματα Σπουδών της δευτεροβάθμιας. Η έρευνα στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών εδώ και δεκαετίες έχει επισημάνει μια σειρά από δυσκολίες των μαθητών στο συγκεκριμένο πεδίο, όπως αυτές που αφορούν στην κατανόηση εννοιών οι οποίες είναι επαναλαμβανόμενες σε άπειρο πλήθος βημάτων (όπως στην αριθμητική και γεωμετρική πρόοδο). Επίσης, οι μαθητές παρουσιάζουν σημαντικές δυσκολίες όταν πρέπει να ερμηνεύσουν τον συμβολικό τρόπο με τον οποίο παρουσιάζεται η προς απόδειξη μαθηματική σχέση αλλά και στην κατασκευή αποδείξεων που χρησιμοποιούν τον συμβολισμό αυτό (Gibson, 1998). Η γνώση του μαθηματικού περιεχομένου θεωρείται πως παίζει πολύ σημαντικό ρόλο, καθώς και το ότι κατά την εφαρμογή της μαθηματικής επαγωγής οι μαθητές εστιάζουν κυρίως στα διαδικαστικά χαρακτηριστικά της και όχι στα εννοιολογικά (Baker, 1996). Σύμφωνα με τον Gibson (1998) οι μαθητές θεωρούν ότι θα ήταν ιδιαίτερα βοηθητικό αν μπορούσαν να αναπαραστήσουν οπτικά τις μαθηματικές προτάσεις που δίνονται με συμβολικό τρόπο.

2.5.1 Μαθηματική διαίσθηση

Όπως ακριβώς η παρατήρηση στις φυσικές επιστήμες εστιάζει σε συγκεκριμένο χώρο και χρόνο, το ίδιο και στα Μαθηματικά, οι μαθηματικές διαισθήσεις είναι διακριτές και τείνουν να είναι μοναδικές παρά γενικές (π.χ. 1+3+5=9). Αυτό που μπορούν να κάνουν οι συγκεκριμένες εικόνες είναι να διευρύνουν το τοπίο των διαισθητικών αληθειών και να αλλάξουν τον χαρακτήρα τους προσθέτοντας μερικές που είναι σχετικά πιο γενικές. Οι τρόποι με τους οποίους γίνονται αντιληπτές οι διαισθήσεις στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης ποικίλουν (Kynigos et al., 2019). Από τη μια θεωρούνται ημιτελείς συλλογιστικές διαδικασίες, το ακριβώς δηλαδή αντίθετο της αυστηρότητας, και από την άλλη θεωρούνται πολύτιμες για τη μαθηματική σκέψη και δημιουργικότητα. Σε αντίθεση με τις φυσικές επιστήμες, η διαίσθηση στα μαθηματικά θεωρείται ότι αναπτύσσεται με την εμπειρία, κάτι που απουσιάζει από την μαθηματική εκπαίδευση και πρέπει να καλλιεργηθεί στο σχολείο.

2.5.2 Η έννοια της απόδειξης στα μαθηματικά

Η βασική ιδέα που διέπει τις δραστηριότητες που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία, είναι αρχικά η οπτική και διαισθητική προσέγγιση των προς απόδειξη σχέσεων και μέσα από αυτήν η καλλιέργεια της ανάγκης για τυπική μαθηματική απόδειξη. Η τυπική μαθηματική απόδειξη μιας δοσμένης πρότασης, είναι “μια αλληλουχία προτάσεων, έτσι ώστε η πρώτη να ξεκινά από ένα αξίωμα, κάθε μια από τις επόμενες να είναι είτε αξίωμα, είτε να προέρχεται από τις προηγούμενες εφαρμόζοντας κανόνες συνεπαγωγής και η τελευταία είναι αυτή που πρέπει να αποδειχθεί” (Hanna, 1990). Αυτή η διαδικασία έχει μηχανικό χαρακτήρα, παραβλέπει τα ψυχολογικά χαρακτηριστικά της απόδειξης και αναπτύχθηκε με στόχο να εξαφανίσει την ανάγκη για διαισθητικές ενδείξεις και ανθρώπινη κρίση, καθώς και οι δυο αυτοί παράγοντες (στο πλαίσιο του φορμαλισμού) θεωρούνται ως πηγές σοβαρών λαθών.

Από τις τελευταίες δεκαετίες του προηγούμενου αιώνα στο πλαίσιο της μαθηματικής κοινότητας ξεκίνησε μια διαδικασία επανεξέτασης του ρόλου των αξιωματικών δομών και της τυπικής απόδειξης και έχει συμφωνηθεί ότι οι αποδείξεις μπορεί να έχουν διαφορετικούς βαθμούς τυπικής εγκυρότητας αλλά να κερδίζουν τον ίδιο βαθμό αποδοχής. Τέθηκε το θέμα «ποια θα έπρεπε να είναι η ιδανική απόδειξη και τι πρέπει να διδάξει κανείς στα σχολεία», δημιουργήθηκε μια τάση απομάκρυνσης από την υπερβολική εξάρτηση από αυστηρές αποδείξεις, δόθηκε έμφαση στο ρόλο της απόδειξης ως μέσου επικοινωνίας και αναγνωρίσθηκαν οι κοινωνικές διαδικασίες που συντελούν στην αποδοχή ενός νέου αποτελέσματος.

Έτσι, σύμφωνα με την Hanna, σταδιακά άρχισε να αναδεικνύεται η έννοια της απόδειξης ως «πειστικό επιχείρημα» και δημιουργήθηκε η διάκριση ανάμεσα σε «αποδείξεις που εξηγούν» και «αποδείξεις που απλώς αποδεικνύουν». Και οι δυο αποτελούνται από δηλώσεις που είτε είναι αξιώματα οι ίδιες, είτε προκύπτουν από προηγούμενες δηλώσεις (και επομένως τελικά από αξιώματα) ως αποτέλεσμα της σωστής εφαρμογής των κανόνων εξαγωγής συμπερασμάτων. Η διαφορά τους έγκειται στο ότι οι δεύτερες αναπτύσσουν γραπτό λόγο που ασχολείται μόνο με την τεκμηρίωση, ενώ οι πρώτες εκτός από την αλήθεια μιας πρότασης δείχνουν επίσης γιατί είναι αληθής παρέχοντας ένα σύνολο λόγων που πηγάζουν από το ίδιο το φαινόμενο. Κατά την Hanna οι «αποδείξεις που εξηγούν» φανερώνουν και χρησιμοποιούν τις μαθηματικές ιδέες που βρίσκονται από πίσω.

Μια απόδειξη που «απλά αποδεικνύει» είναι η μαθηματική επαγωγή. Το ίδιο αποδεκτή θεωρείται και η μέθοδος του Gauss (που προτείνεται στο σχολικό βιβλίο του Λυκείου) και χρησιμοποιεί την ιδιότητα της συμμετρίας δυο διαφορετικών αναπαραστάσεων του αθροίσματος για να εξηγήσει την αλήθεια της πρότασης. Η απόδειξη αυτή, αν και κινείται στο συμβολικό χώρο της άλγεβρας, θεωρείται πιο διαφωτιστική για τους μαθητές και έχει έναν πολύ πιο επεξηγηματικό χαρακτήρα.

2.5.3 Οπτικές αποδείξεις

Οι αποδείξεις χωρίς λόγια (Proofs Without Words, Doyleetal 2014) είναι οπτικές αποδείξεις και βασίζονται σε διαγράμματα που περικλείουν την ουσία των βασικών μαθηματικών σχέσεων ή θεωρημάτων που βρίσκονται από πίσω. Έχουν ως βάση τη διαπίστωση ότι για τους περισσότερους ανθρώπους, η οπτική μνήμη είναι πιο ισχυρή από τη γραμμική μνήμη των βημάτων σε μια απόδειξη. Επιπλέον, οι διάφορες σχέσεις που είναι ενσωματωμένες σε ένα καλό διάγραμμα αντιπροσωπεύουν πραγματικά μαθηματικά που περιμένουν αναγνώριση και διατύπωση. Έτσι, οι αποδείξεις χωρίς λόγια, βοηθούν τους μαθητές να μάθουν και να θυμούνται τα μαθηματικά, είναι συχνά πιο ακριβείς από τις αποδείξεις με λέξεις (που δεν θυμούνται σωστά).

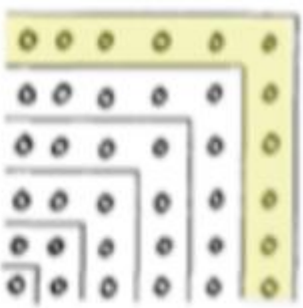
Υπάρχει μια έντονη συζήτηση γύρω από τις αποδείξεις χωρίς λόγια. Η μια τάση θεωρεί ότι δεν είναι πραγματικές αποδείξεις και κατά συνέπεια δεν είναι πειστικές. Η άλλη τάση θεωρεί ότι είναι πιο σύντομες και βαθύτερα πειστικές σε σχέση με την παραδοσιακή, προτασιακή μαθηματική επιχειρηματολογία, επομένως (σε τέτοιες περιπτώσεις) είναι απολύτως αποδεκτές και περιστασιακά μπορεί να είναι προτιμότερες.

Ειδικότερα, οι οπτικές αποδείξεις με επαγωγή (Relaford-Doyle & Nunez, 2017) που χρησιμοποιούνται και στην παρούσα εργασία, βασίζονται σε ειδικά σχεδιασμένες εικόνες – αναπαραστάσεις. Η κάθε μια από αυτές είναι πεπερασμένη και άρα μπορεί να εμφανίσει μόνο ένα συγκεκριμένο σύνολο περιπτώσεων του προβλήματος. Η επιχειρηματολογία με βάση την περίπτωση εμπίπτει στην ομπρέλα της επαγωγικής συλλογιστικής, η οποία δεν παρέχει συγκεκριμένα συμπεράσματα και δεν γίνεται αποδεκτή στην επίσημη μαθηματική αιτιολόγηση.

Ωστόσο, οι οπτικές αποδείξεις περιέχουν πρόσθετη δομή που θα μπορούσε να αξιοποιηθεί για να αποδειχθεί ότι ένα θεώρημα ισχύει απαραίτητα σε όλες τις περιπτώσεις, ακόμη και σε εκείνες που δεν απεικονίζονται στην εικόνα. Έτσι, μια οπτική απόδειξη, παρά το γεγονός ότι εμφανίζει μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό περιπτώσεων, θα μπορούσε να εξυπηρετήσει μια λειτουργία που μοιάζει με απόδειξη.

Στην κατηγορία των οπτικών αποδείξεων ανήκουν και αυτές που επιλέχθηκαν στις δραστηριότητες που θα μελετήσουμε με τον Κυβόκοσμο. Βασίζονται στις γεωμετρικές αναπαραστάσεις των αθροισμάτων και η χαρακτηριστική ιδιότητα είναι το πρότυπο που πρέπει οι μαθητές να προσδιορίσουν. Έχουν οπτικό χαρακτήρα και ανήκουν σε μια κατηγορία αποδείξεων που αναπτύχθηκε ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια στην οποία η μαθηματική κοινότητα φαίνεται να αποδίδει ιδιαίτερο διδακτικό ενδιαφέρον.

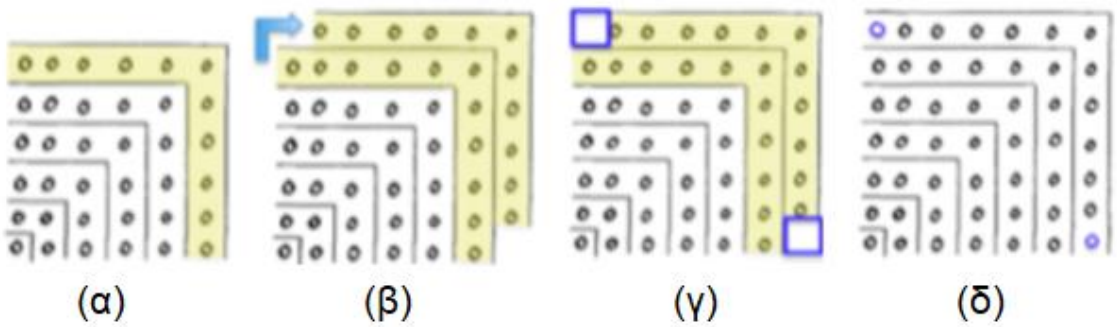
Για παράδειγμα, για το άθροισμα των ν διαδοχικών περιττών αριθμών, με το οποίο ασχοληθήκαμε και στην εργασία μας, οι Relaford-Doyle & Nunez (2017) αναπτύσσουν μια επιχειρηματολογία για τη δύναμη της εικόνας που αναπαριστά το άθροισμα αυτό σε σχέση με την αυστηρή μαθηματική απόδειξη μέσω μαθηματικής επαγωγής. Ξεκινούν από τη διαπίστωση ότι οποιαδήποτε εικόνα είναι πεπερασμένη και επομένως μπορεί να εμφανίσει μόνο συγκεκριμένες περιπτώσεις ενός γενικού θεωρήματος. Για παράδειγμα στο Σχήμα 2.5.1 απεικονίζεται μια οπτικοποίηση του αθροίσματος διαδοχικών περιττών αριθμών ξεκινώντας από το 1. Στο αριστερό μέρος του σχήματος φαίνεται η οπτική αναπαράσταση του προβλήματος ενώ στο δεξιά η αριθμητική ερμηνεία. Παρατηρούμε ότι η οπτική αναπαράσταση του προβλήματος θα χρησίμευαν ως βάση για μια τυπική επαγωγική γενίκευση. Η εικόνα μπορεί να πείσει τον θεατή ότι το θεώρημα πιθανότατα ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς χωρίς ωστόσο να προσφέρει βεβαιότητα.



$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$$

Σχήμα 2.5.1: Οπτική αναπαράσταση αθροίσματος διαδοχικών περιττών αριθμών.

Το συγκριτικό πλεονέκτημα της εικόνας είναι ότι περιέχει δομή η οποία μπορεί να μην εύκολα ορατή σε μια αυστηρή μαθηματική απόδειξη. Η δομή αυτή, μπορεί να αξιοποιηθεί προκειμένου να αποδειχθεί ότι η ιδιότητα θα συνεχίσει να διατηρείται για τιμές που δεν φαίνονται στην εικόνα. Δηλαδή, θα πρέπει να αποδειχθεί ότι το τετράγωνο σχήμα διατηρείται εάν και μόνο εάν το επόμενο στρώμα περιέχει τον επόμενο διαδοχικό περιττό αριθμό κουκκίδων. Για παράδειγμα, εάν ξεκινήσουμε με ένα τετράγωνο ν x ν, το επόμενο (ν+1) επίπεδο θα μπορούσε να κατασκευαστεί αντιγράφοντας το νιοστό επίπεδο και μεταφέροντας το αντίγραφο προς τα επάνω μία μονάδα και δεξιά μία μονάδα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5.2α,β. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα δύο κενές θέσεις που πρέπει να καλυφθούν για να διατηρηθεί το τετράγωνο σχήμα (Σχήμα 2.5.2γ). Έτσι, κάθε στρώμα πρέπει να περιέχει ακριβώς δύο περισσότερες τελείες από τον προκάτοχό του. Δεδομένου ότι η διαφορά μεταξύ οποιωνδήποτε δύο διαδοχικών περιττών αριθμών είναι 2, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το νέο στρώμα πρέπει να περιέχει τον επόμενο διαδοχικό περιττό αριθμό κουκκίδων.



Σχήμα 2.5.2: Βήματα για την οπτική απόδειξη του αθροίσματος διαδοχικών περιττών αριθμών.

Η εξέλιξη των ψηφιακών τεχνολογιών τις τελευταίες δεκαετίες άλλαξε σταδιακά την αντίληψη ότι η «διακριτή» σκέψη ήταν μια υποδεέστερη γνωστική λειτουργία από την αφηρημένη σκέψη, αποδεικνύοντας ότι η τακτική και πλούσια έκθεση στην πρώτη μπορούσε να έχει κεντρικό ρόλο ώστε να φτάσει ο μαθητής στην δεύτερη (Ackerman, 1985). Ο ισχυρισμός ότι τα νοήματα δημιουργούνται με φυσικό τρόπο στο κοινωνικό και διανοητικό μας περιβάλλον ενισχύεται μέσα από τη χρήση ψηφιακής τεχνολογίας, η οποία μπορεί να εμπλουτίσει αυτό το περιβάλλον έτσι ώστε οι μανθάνοντες να έχουν περισσότερες ευκαιρίες δημιουργίας νοημάτων (Kynigos, 2015). Αυτή η προσέγγιση στη μάθηση, έχει τις ρίζες της στο επιστημολογικό παράδειγμα του «δομισμού» με βασική αρχή ότι τα μαθηματικά μαθαίνονται κάνοντας πράγματα με αυτά και όχι θεωρώντας τα ως αδιαμφισβήτητες αλήθειες ή ως μια οντολογική πραγματικότητα που πρέπει ο μανθάνων να εξηγήσει. Στο δομικό επιστημολογικό παράδειγμα, τα Μαθηματικά θεωρούνται ως διαψεύσιμα, δηλαδή κάθε μαθηματικός ορισμός, θεώρημα, απόδειξη έχει τη δυνατότητα απόρριψης, μέσα από μια μαθηματική δραστηριότητα που περιλαμβάνει λογικές σκέψεις, αφαιρέσεις, γενικεύσεις και απόδειξη, αλλά και εικασίες με δημόσια έκφραση των συλλογισμών και εμπλοκή σε έναν κύκλο εύρεσης αντιπαραδειγμάτων, ανασκευών και νέων αποδείξεων (Lakatos, 1976).

Με βάση τις παραπάνω θεωρητικές παραδοχές αναπτύχθηκαν οι δραστηριότητες που παρουσιάζονται στην Ενότητα 3.3, προσθέτοντας σε αυτές τη χρήση ενός ψηφιακού εργαλείου (του Κυβόκοσμου) το οποίο αναμένεται να δώσει πρόσθετη αξία στην επιχειρούμενη οπτικοποίηση των εμπλεκόμενων μαθηματικών εννοιών, σε σχέση με αυτή που περιγράφουν παραπάνω οι Relaford-Doyle & Nunez (2017).

3 Μεθοδολογία της έρευνας

Η παρούσα έρευνα εστιάζει σε έναν εκπαιδευτικό, ο οποίος δεν έχει χρησιμοποιήσει ποτέ διδακτικά την ψηφιακή τεχνολογία. Εξαιτίας της επιλογής αυτής είναι αναγκαία η υποστήριξη σε επίπεδο εκμάθησης του εργαλείου, για την οποία δεν απαιτούνται βαθιές τεχνολογικές γνώσεις, αλλά και σε επίπεδο σχεδιασμού με αυτό. Η μελέτη των πρακτικών διδασκαλίας στο επίπεδο της αίθουσας του εκπαιδευτικού, είναι πιο εφικτό να γίνει σε μικρής κλίμακας έρευνες, που έχουν ποιοτικά χαρακτηριστικά (Twining et al, 2017). Το δείγμα της έρευνας μας είναι ένας μόνο εκπαιδευτικός. Η εστίαση σε έναν εκπαιδευτικό, κατατάσσει την έρευνα στις μελέτες περίπτωσης, με στόχο την σε βάθος εξερεύνηση και συστηματική ανάλυση της διδασκαλίας του (Cohen & Manion, 1997). Δεν επιδιώκεται η γενίκευση, αλλά η βαθιά γνώση της συγκεκριμένης περίπτωσης και η περιγραφή της ώστε να αναγνωρισθεί σε παρόμοιες καταστάσεις. Συνεπώς, δεν τίθεται το ζήτημα της αντιπροσωπευτικότητας του δείγματος.

3.1 Οργάνωση της έρευνας – Βασικά στοιχεία

Η έρευνα οργανώνεται σε τρεις φάσεις. Στην **Α' Φάση** έγινε διερεύνηση των πρακτικών του εκπαιδευτικού πριν την εκπαίδευση του με τον Κυβόκοσμο, παρακολουθώντας το μάθημα του και πραγματοποιώντας ημιδομημένη συνέντευξη μαζί του. Στην **Β' Φάση** έγινε διερεύνηση των αρχικών πρακτικών του εκπαιδευτικού με τον Κυβόκοσμο, εκπαιδεύοντας τον στον Κυβόκοσμο και παρακολουθώντας το μαθήματος του με αυτόν. Στην **Γ' Φάση** έγινε διερεύνηση των πρακτικών του εκπαιδευτικού μετά την εκπαίδευση του με τον Κυβόκοσμο. Ο εκπαιδευτικός σχεδίασε δική του δραστηριότητα στον Κυβόκοσμο και στη συνέχεια παρατηρήσαμε το μάθημα του με αυτή. Τέλος πραγματοποιήσαμε ημιδομημένη συνέντευξη μαζί του.

Αναλυτικά, τα βήματα τις έρευνας είναι:

1. Έγινε παρακολούθηση των μαθημάτων ενός εκπαιδευτικού στο παραδοσιακό διδακτικό του περιβάλλον. Τα μαθήματα αυτά διήρκησαν 3 εκπαιδευτικές ώρες. Έγινε παρατήρηση και καταγραφή των πρακτικών του εστιάζοντας στους ρόλους που υιοθετεί και στον τρόπο που αντιμετωπίζει το μαθηματικό περιεχόμενο.
2. Πραγματοποιήθηκε μια ημιδομημένη συνέντευξη από τον εκπαιδευτικό, ώστε να συμπεριληφθούν σε αυτήν όχι μόνο τα υπό διερεύνηση ζητήματα, αλλά και άλλα που προκύπτουν από την παρατήρηση.

3. Διεξήχθησαν δύο συνεδρίες εξοικείωσης του εκπαιδευτικού με τον Κυβόκοσμο με χρήση έτοιμων δραστηριοτήτων για τη διδασκαλία των αριθμητικών προόδων.
4. Έγινε παρατήρηση μαθήματος του εκπαιδευτικού με τα έτοιμα ψηφιακά δομήματα.
5. Με την υποστήριξη της ερευνήτριας ο εκπαιδευτικός προχώρησε στον σχεδιασμό της δικής του δραστηριότητας στον Κυβόκοσμο.
6. Έγινε παρατήρηση του μαθήματος στο οποίο ο εκπαιδευτικός ενσωμάτωσε τη δραστηριότητα που σχεδίασε ο ίδιος.
7. Πραγματοποιήθηκε τελική συνέντευξη αποτίμησης του έργου.

Τα βήματα 1 και 2 ανήκουν στην Α’ Φάση της έρευνας, τα βήματα 3 και 4 στην Β’ Φάση ενώ τα βήματα 5, 6, 7 στην Γ’ Φάση.

Σαν **μέθοδος συλλογής δεδομένων** επιλέχτηκε η τριγωνοποίηση (Twining et al. 2017, Cohen & Manion 1997) χρησιμοποιώντας την παρατήρηση, τις ημιδομημένες συνεντεύξεις και τα φύλλα εργασίας. Τα δεδομένα που συλλέχθηκε και αποτελούν τα **δεδομένα της έρευνας** είναι οι σημειώσεις πεδίου από την παρατήρηση των μαθημάτων του εκπαιδευτικού τόσο στο παραδοσιακό μάθημα όσο και στο μάθημα με τη χρήση των νέων τεχνολογιών, οι σημειώσεις από τις συνεντεύξεις με τον εκπαιδευτικό καθώς και τα φύλλα εργασίας για τα ψηφιακά δομήματα στον Κυβόκοσμο. Το υλικό της παρατήρησης του παραδοσιακού μαθήματος, σε συνδυασμό με την πρώτη συνέντευξη, φώτισε τις κυρίαρχες διδακτικές πρακτικές του εκπαιδευτικού, ενώ το υπόλοιπο υλικό έδωσε μια εικόνα για τη μετεξέλιξη των πρακτικών του.

Καταλληλότερη **μέθοδος ανάλυσης** κρίθηκε η «θεματική ανάλυση των δεδομένων» (Guest et al, 2012) κατά την οποία επιλέγουμε τα δεδομένα με βάση την ήδη υπάρχουσα θεωρία με στόχο να την επιβεβαιώσουμε. Έτσι, έγινε κωδικοποίηση των δεδομένων σε θέματα τα οποία ταιριάζουν με το θεωρητικό πλαίσιο που αναπτύχθηκε παραπάνω. Τα δεδομένα της παρατήρησης ανέδειξαν κώδικες όπως το είδος των ερωτήσεων που ο εκπαιδευτικός υποβάλει στους μαθητές του (ανοιχτές-κλειστές), το χρόνο που διαθέτουν οι μαθητές για τη διερεύνηση των ερωτημάτων του, το βαθμός καθοδήγησης των απαντήσεων και την ενθάρρυνση των μαθητών για συνεργασία. Επίσης, οι συνεντεύξεις έδωσαν πληροφορίες για την αιτιολόγηση των πρακτικών του και ανέδειξαν μια διάσταση ανάμεσα σε αυτά που θα ήθελε και σε αυτά που τελικά κάνει.

Τα **αποτελέσματα**, που παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο, εστιάζονται στις θεματικές ενότητες που φωτίζουν τα ερευνητικά ερωτήματα και αναλύονται συνδυαστικά ως προς τα διαφορετικά μέσα συλλογής των δεδομένων και τον χρόνο συλλογής τους, ώστε να αναδειχθεί η ενδεχόμενη μετατόπιση των πρακτικών του εκπαιδευτικού. Δηλαδή, επιχειρείται μια συνεχής σύγκριση των δεδομένων μέσα στον χρόνο ως προς συγκεκριμένους άξονες της κωδικοποίησης.

Η επιτυχία της έρευνας έγκειται στην ακριβέστατη περιγραφή των ευρημάτων και στην σημασία που αυτά ενδεχομένως θα έχουν στο πεδίο της επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών. Η χρήση του Κυβόκοσμου θα αποτελέσει ένα παράδειγμα διδακτικής αξιοποίησης της κατηγορίας των εστιασμένων ψηφιακών εργαλείων και θα συζητηθούν οι δυνατότητες και οι περιορισμοί του.

Τα **θέματα ηθικής** είναι τεράστιας σημασίας σε κάθε ποιοτική έρευνα και ειδικά στις περιπτώσεις όπως της παρούσας έρευνας, όπου τα δεδομένα είναι προσωπικά και απαρτίζονται από μικρό αριθμό μεμονωμένων συμμετεχόντων (Twining et al, 2017). Δεν αναφερόμαστε μόνο σε νομικά ζητήματα, αλλά και στη δέσμευση του ερευνητή ως προς τα υποκείμενα της έρευνας που εδώ είναι μαθητές και εκπαιδευτικός. Ζητήθηκε η συγκατάθεση των γονέων για την παρακολούθηση των μαθημάτων. Επίσης, στην ανάλυση της έρευνας δεν αναφέρονται πραγματικές ονομασίες προσώπων και σχολικής μονάδας.

3.2 Προφίλ του εκπαιδευτικού

Ο εκπαιδευτικός επιλέχτηκε έτσι ώστε να μην έχει ιδιαίτερες γνώσεις υπολογιστών και ως εκ τούτου να μην κάνει χρήση νέων τεχνολογιών στο μάθημα του. Το μάθημα του βασίζεται στην παραδοσιακή διδασκαλία μαθηματικών, με τον καθηγητή να αναπτύσσει πρώτα την θεωρία στον πίνακα παρουσιάζοντας ιδιότητες, θεωρήματα και αποδείξεις αυτών και στη συνέχεια επιλύοντας εφαρμογές και ασκήσεις. Συνεπώς ο καθηγητής αυτός είναι αποκομμένος από τις σύγχρονες πλατφόρμες εκπαίδευσης όπως είναι η ηλεκτρονική τάξη (e-class) και η πλατφόρμα e-me, όπως και από τα εκπαιδευτικά εργαλεία όπως είναι το πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας Geogebra και τα εργαλεία που υπάρχουν στο Φωτόδεντρο.

Στον εκπαιδευτικό αρέσει ιδιαίτερα η διδασκαλία και θέλει να βοηθήσει τους μαθητές μεταδίδοντας τις γνώσεις του σε αυτά. Πιστεύει όμως ότι ο καλύτερος τρόπος να μάθει κάποιος μαθηματικά είναι ο παραδοσιακός. Έχει πολύχρονη εμπειρία στη διδασκαλία της Άλγεβρας Α’ Λυκείου και κατ’ επέκταση των αριθμητικών προόδων οι οποίες είναι το αντικείμενο των δραστηριοτήτων προς διδασκαλία με τον Κυβόκοσμο.

3.3 Δραστηριότητες προς διδασκαλία από τον εκπαιδευτικό

Οι δραστηριότητες με τις οποίες θα ασχοληθούμε αφορούν το κεφάλαιο των αριθμητικών προόδων του γνωστικού αντικειμένου των Μαθηματικών. Σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, το κεφάλαιο αυτό εντάσσεται στην Α’ Λυκείου και συγκεκριμένα στην Παράγραφο 5.2 του σχολικού βιβλίου της Άλγεβρας. Η διάρκεια της διδασκαλίας των δραστηριοτήτων ήταν μία διδακτική ώρα. Ο εκπαιδευτικός δεν δέχτηκε να διαθέσει περισσότερες ώρες λόγω του μεγάλου όγκου της ύλης του μαθήματος.

Στη παρούσα έρευνα, ο Κυβόκοσμος χρησιμοποιήθηκε για να εισάγει τους μαθητές στην έννοια της αριθμητικής προόδου. Οι μαθητές, χρησιμοποίησαν τον Κυβόκοσμο ώστε να ανακαλύψουν και να αποδείξουν σχέσεις που αφορούν το άθροισμα όρων αριθμητικής προόδου όπως για παράδειγμα τα αθροίσματα:

- $1+3+5+7+\ldots+(2\nu-1)=\nu^2$
- $1+2+3+4+\ldots+\nu=\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$

Μέσα από τι δραστηριότητες οι μαθητές αναμένεται να μάθουν να:

- Κατασκευάζουν μόνοι τους δραστηριότητες στο περιβάλλον του Κυβόκοσμου.
- Αναγνωρίζουν μαθηματικά μοτίβα που σχετίζονται με την Αριθμητική Πρόοδο και γενικότερα με τις Ακολουθίες.
- Αξιοποιούν την έννοια της Αριθμητικής Προόδου για την μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.
- Κάνουν γενίκευση για ν αριθμούς, επιλύοντας το μαθηματικό πρόβλημα για συγκεκριμένο πλήθος αριθμών.
- Αποδεικνύουν τον τύπο για τον οποίο έκαναν εικασία, με τη βοήθεια του Κυβόκοσμου για συγκεκριμένο πλήθος αριθμών ν.
- Αποκτήσουν γεωμετρική εποπτεία του προβλήματος, δηλαδή να λύνουν ένα πρόβλημα της Άλγεβρας με γεωμετρικό τρόπο.
- Εισαχθούν διαισθητικά στην έννοια της «Μαθηματικής Επαγωγής».

Όπως ήδη αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι αποδείξεις μπορεί να θεωρηθεί είτε ότι δείχνουν την αλήθεια μιας μαθηματικής πρότασης με συμβολικό τρόπο, κινούμενες στον χώρο των τυπικών μαθηματικών, είτε ότι επεξηγούν την αλήθεια της μαθηματικής πρότασης χρησιμοποιώντας πρόσθετα αναπαραστασιακά μέσα και ίσως πιο άτυπες μεθόδους απόδειξης. Στο κομμάτι αυτό, οι ψηφιακές τεχνολογίες μπορούν να συμβάλλουν, καθώς οι δυνατότητες των ψηφιακών εργαλείων για αναπαράσταση των αφηρημένων εννοιών και διαδικασιών αποτελούν ένα πολύ σημαντικό εργαλείο στα χέρια του εκπαιδευτικού (Ferrara, 2006).

Με αυτό το σκεπτικό, για τις δραστηριότητες επιλέχτηκε ο Κυβόκοσμος, ο οποίος αναπτύχθηκε έχοντας ως σημείο εκκίνησης την άτυπη γνώση των παιδιών που κατασκευάζεται μέσω της εμπλοκής τους με κατασκευές, ώστε να αναζητήσουν φαινόμενα και μέσα που θα συμβάλουν στη μαθηματικοποίηση του περιβάλλοντος χώρου (Φακούδης κ.α., 2014) και να νοηματοδοτήσουν έννοιες όπως το άθροισμα των όρων μιας Αριθμητικής Προόδου.

Η τυπική μαθηματική απόδειξη των παραπάνω σχέσεων με μαθηματική επαγωγή, είναι μία αυστηρή μαθηματική μέθοδος που κινείται καθαρά στο χώρο των συμβόλων και των παραδοχών της άλγεβρας, πλήρως αποδεκτή από τη μαθηματική κοινότητα (a proof that proves, σύμφωνα με την Hanna 1990). Ωστόσο, η μέθοδος αυτή συναντά τα προβλήματα που περιγράφηκαν στο προηγούμενοι κεφάλαιο.

Η προσέγγιση της απόδειξης με χρήση του Κυβόκοσμου, ανήκει στην κατηγορία των επεξηγηματικών αποδείξεων, που καταφέρνει να οπτικοποιήσει τις αλγεβρικές σχέσεις. Η γεωμετρική αναπαράσταση των αριθμών με συγκεκριμένα τρισδιάστατα αντικείμενα (κύβους) στον Κυβόκοσμο δίνει υπόσταση στα αλγεβρικά αντικείμενα (Sfard, 1991) και γίνεται η γέφυρα για τη σύνδεση της Άλγεβρας με τη Γεωμετρία.

Ο Κυβόκοσμος αποτελεί ένα εργαλείο που διευκολύνει τη διερεύνηση και τον πειραματισμό με τρισδιάστατα διαδραστικά εικονικά μοντέλα με στόχο την καλλιέργεια και ανάπτυξη εννοιών του χώρου, την αναπαράσταση χωρικών σχέσεων, αλλά και τη διασύνδεση μεταξύ αναπαραστάσεων στα πλαίσια μικροπειραμάτων (Φραγκούδης, Λάτση, Παπαδόπουλος, 2014).

Ο εκπαιδευτικός στοχεύει αφενός στο να δοθεί στο χρήστη αρκετή ελευθερία διερεύνησης και αυτενέργειας, αφετέρου στο να συμπεριλάβει σημαντικούς περιορισμούς που θα καθοδηγούν το χρήστη σύμφωνα με την επιδιωκόμενη μαθησιακή εμπειρία. Οι μαθητές χρησιμοποιώντας τον Κυβόκοσμο, κατασκευάζουν-δημιουργούν και χειρίζονται γεωμετρικές αναπαραστάσεις του αθροίσματος των όρων αριθμητικών προόδων, μέσα από τη δυνατότητα εναλλαγής της γωνίας θέασης της διάταξης των κύβων και την εναλλαγή δισδιάστατων και τρισδιάστατων αναπαραστάσεων του ίδιου αντικειμένου.

3.3.1 Πρόσθετη παιδαγωγική αξία δραστηριοτήτων

Η δυνατότητα αναπαράστασης των αφηρημένων αλγεβρικών εννοιών με γεωμετρικό-χωρικό τρόπο (Ferrara et al, 2006) και δυναμικού χειρισμού τους, θεωρείται μια μαθηματική δραστηριότητα με πρόσθετη παιδαγωγική αξία, καθώς ενθαρρύνει τους μαθητές να σκέφτονται ‘μαζί με τον Κυβόκοσμο’ αλλάζοντας τα δομήματα τους και μαστορεύοντας πάνω στα νοητικά τους δημιουργήματα. Έτσι, οι μαθητές αναμένεται να κατασκευάσουν νοήματα για τις έννοιες μέσα από τη χρήση τους (Vergnaud, 1996). Με βάση την προσέγγιση αυτή, η τεχνολογία μπορεί να λειτουργήσει ως καταλύτης για τη δημιουργία περιβαλλόντων στα οποία ο μαθητής θα έχει το ρόλο του 'μικρού επιστήμονα' και θα εμπλέκεται μέσω της δραστηριότητας στη διαδικασία της μάθησης

Μια πρόσθετη παιδαγωγική αξία του Κυβόκοσμου σε σχέση με τα παραδοσιακά μέσα είναι η δυνατότητα που παρέχεται για δημιουργία τρισδιάστατων αντικειμένων. Με αυτό τον τρόπο μπορούν να κατανοηθούν έννοιες τα μεγέθη που πολλές φορές δεν γίνονται αντιληπτά από τα απλά μονοδιάστατα σχήματα του σχολικού βιβλίου.

Οι μαθητές, μέσα από χρήση έτοιμων δομημάτων και την τροποποίηση τους για την δημιουργία καινούργιων, βελτιώνουν την αίσθηση της αυτοαποτελεσματικότητας τους (Kafai & Burke, 2014). Τα αντικείμενα που αναπτύσσονται εκφράζουν το μαθητή και τις ιδέες του, δημιουργώντας έτσι το αίσθημα της ιδιοκτησίας σε αυτό. Επίσης, για τους μαθητές του Λυκείου είναι ιδιαίτερα ελκυστική η ιδέα ότι θα φτιάξουν μόνοι τους μια δραστηριότητα η οποία απευθύνεται σε άλλους μαθητές. Ταυτόχρονα, μέσα από την ανασκευή ενός υπάρχοντος δομήματος, αποφεύγεται η χρονοβόρα και πολύπλοκη διαδικασία ανάπτυξης ενός τέτοιου συστήματος από το μηδέν.

3.3.2 Τρόπος διεξαγωγής των δραστηριοτήτων

Η εφαρμογή των δραστηριοτήτων για Αριθμητικές Προόδους με τον Κυβόκοσμο θα πρέπει να διεξαχθεί στην αίθουσα Πληροφορικής όπου θα υπάρχουν ηλεκτρονικοί υπολογιστές, βιντεοπροβολέας και διαδραστικός πίνακας ώστε οι μαθητές να εργασθούν σε διμελείς ομάδες. Στις δραστηριότητες χρησιμοποιείται το λογισμικό Κυβόκοσμος (για αναλυτική περιγραφή του Κυβόκοσμου στην διεύθυνση http://etl.eds.uoa.gr/ekpaideytiko-logismiko/estiasmena-syggrafika-ergaleia/kybokosmos.html).

Ο προτεινόμενος τρόπος διεξαγωγής των δραστηριοτήτων είναι οι μαθητές να χωριστούν σε ομάδες των 2 ατόμων και κάθε δυάδα να αντιστοιχηθεί σε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή, όπου ο ένας μαθητής να χειρίζεται τον υπολογιστή και ο δεύτερος να τον επιβλέπει και να συμπληρώνει τυχόν παραλείψεις του. Με τον τρόπο αυτό επιμερίζονται οι εργασίες που θα δοθούν ενώ ταυτόχρονα αναπτύσσεται το αίσθημα της συνεργασίας κατά την επίλυση προβλημάτων. Ο διαχωρισμός των ομάδων αφήνεται αυστηρά στην ευχέρεια του διδάσκοντα, ο οποίος γνωρίζει τις συνθήκες της τάξης ώστε να επιτευχθεί η μέγιστη δυνατή συνεργασία μεταξύ των μαθητών και κατ' επέκταση η ομαλή υλοποίηση των δραστηριοτήτων.

Ο ρόλος του διδάσκοντα θα είναι υποστηρικτικός, συμβουλευτικός αλλά κυρίως εποπτικός, τόσο σε επίπεδο εργασίας εντός των ομάδων, όσο και σε αυτό της ολομέλειας τάξης. Θα περιγράφει αναλυτικά τα στάδια της δραστηριότητας, θα ανατροφοδοτεί και θα συμβουλεύει τους μαθητές όταν είναι απαραίτητο. Στη διάρκεια της υλοποίησης των δραστηριοτήτων, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να συνεργάζεται μαζί τους, να τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και να τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν τον πειραματισμό.

Οι δραστηριότητες επιχειρούν μια οπτική προσέγγιση του αθροίσματος ν όρων των αριθμητικών προόδων. Μέσω των δραστηριοτήτων επιδιώκεται η εξέταση ειδικών περιπτώσεων του κάθε αθροίσματος (για ν=1, ν=2, κλπ), η διατύπωση υποθέσεων για το εξαγόμενό του, η διατύπωση του γενικού τύπου για ν όρους και η ανάγκη για τυπική μαθηματική απόδειξη.

Η χρήση του Κυβόκοσμου εστιάζει στην κατασκευή των ειδικών περιπτώσεων από τους ίδιους τους εμπλεκόμενους καθηγητές και μαθητές, ως στερεά αντικείμενα που αποτελούνται από κύβους, στη δυνατότητα αλλαγής της οπτικής γωνίας τους, στην επανατοποθέτηση των κύβων κάθε περίπτωσης από 3D σε 2D, ώστε να διευκολυνθεί η εξαγωγή συμπερασμάτων. Οι προς απόδειξη σχέσεις δεν δίνονται από την αρχή στον μαθητή, ώστε να έχει τη δυνατότητα να σκεφθεί έξω από τον μαθηματικό φορμαλισμό και να κατασκευάσει τα δικά του δομήματα.

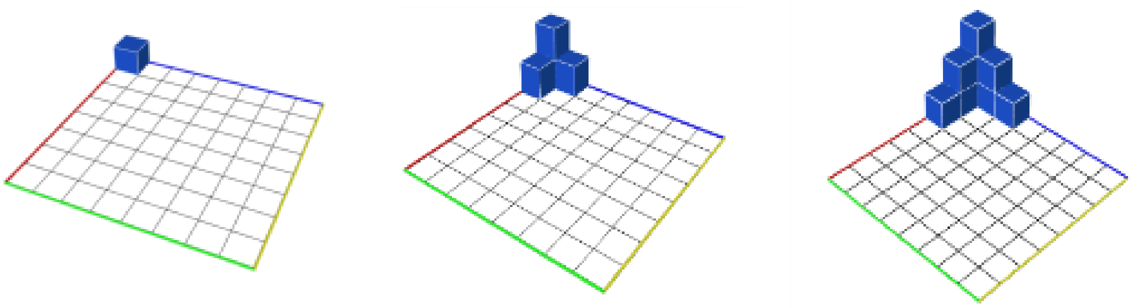
3.3.3 Μελέτη των έτοιμων δομημάτων στον Κυβόκοσμο

Οι μαθητές, αφού εισαχθούν στις έννοιες της Αριθμητικής Προόδου μέσω της παραδοσιακής διδασκαλίας από τον εκπαιδευτικό, θα εισέλθουν στο περιβάλλον του Κυβόκοσμου χρησιμοποιώντας τα έτοιμα δομήματα που σχεδίασε η ερευνήτρια και στα οποία εκπαιδεύτηκε ο εκπαιδευτικός (Παράρτημα Α.1). Από τους μαθητές θα ζητηθεί να υλοποιήσουν τη δραστηριότητα όπως περιγράφονται στα Φύλλα Εργασίας (Παράρτημα Α.2 και Α.3). Η φάση αυτή διεξάγεται στο εργαστήριο πληροφορικής.

Στο **πρώτο δόμημα**, τα παιδιά καλούνται να κάνουν μια εικασία και να ανακαλύψουν τον τύπο του αθροίσματος των ν πρώτων περιττών αριθμών. Αρχικά, στους μαθητές δίνεται στο φύλλο εργασίας (Παράρτημα Α.2) τρία μαθηματικά μοτίβα (Σχήμα 3.3.1), και ζητείται:

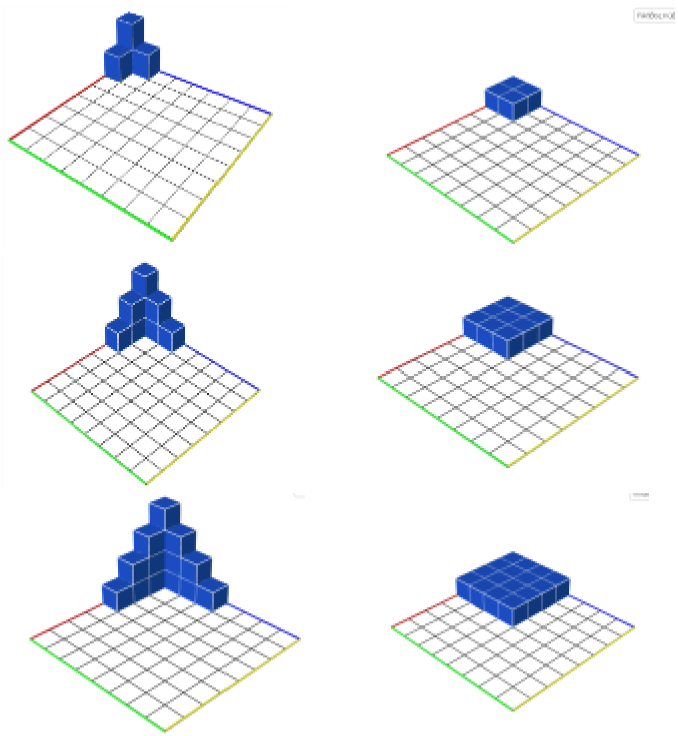
1. Να κατασκευάσουν τους επόμενους πύργους Π4 και Π5.
2. Να περιγράψουν το μοτίβο που παρατηρούν.
3. Να βρουν από πόσους ορόφους θα αποτελείται η κατασκευή Π6 και πόσα κυβάκια θα έχει σε κάθε όροφο.

4. Να βρουν από πόσα κυβάκια θα αποτελείται ο κάθε πύργος από Π1 έως Π6 και να μαντέψουν ένα τύπο για το πλήθος των κύβων της ν-οστής κατασκευής $Π_ν$ για τον τυχαίο φυσικό αριθμό ν.
5. Να προσπαθήσουν να αποδείξουν γεωμετρικά τον τύπο που μαντέψατε με τη βοήθεια του Κυβόκοσμου (για ν = 3, 4, 5, 6) μεταφέροντας κάθε όροφο στο ίδιο επίπεδο έτσι ώστε να σχηματιστεί ένα τετράγωνο (Σχήμα 3.3.2).
6. Να γράψουν έναν τύπο για το άθροισμα $1+3+5+7+...+(2\nu-1)$ των ν πρώτων περιττών αριθμών και να προσπαθήσουν να τον αποδείξουν αλγεβρικά.



Π1 Π2 Π3

Σχήμα 3.3.1: Αρχικές κατασκευές Π1, Π2, Π3 που δίνονται στους μαθητές για να ανακαλύψουν και να συνεχίσουν το μοτίβο.



Σχήμα 3.3.2: Αντιστοίχιση των μοτίβων στο επίπεδο.

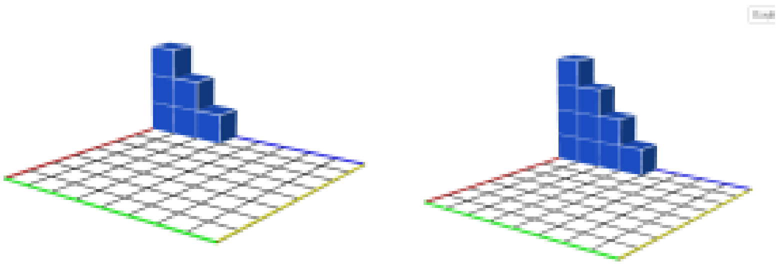
Σε όλη αυτή τη διαδικασία, θεωρούνται καθοριστικές οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού. Η μετάβαση από τη μία περίπτωση στην άλλη ευνοεί τα συμπεράσματα και για γειτονικές περιπτώσεις. Τελικός στόχος είναι να εκφραστεί η μαθηματική ιδιότητα με λόγια και με σύμβολα. Αν και αυτό δεν αποτελεί μια πλήρης μαθηματική απόδειξη, αναμένεται να αποτελέσει μια νοητική σκαλωσιά για αυτή, καθώς οι μαθητές θα περάσουν μέσα από τα εξής στάδια:

- της κατασκευής με κύβους
- της παρατήρησης των επιμέρους περιπτώσεων/αθροισμάτων
- της έκφρασής τους με μαθηματικό συμβολισμό
- της διατύπωσης εικασιών μέσα από τον μετασχηματισμό στο επίπεδο
- της τελικής διατύπωσης της προς απόδειξη σχέσης με τον τυπικό μαθηματικό συμβολισμό.

Οι μαθητές μαζί με τον καθηγητή σε ρόλο συντονιστή, εξετάζουν και συζητούν τα αποτελέσματά τους από την ενασχόλησή τους με τις δραστηριότητες στον Κυβόκοσμο, προκειμένου να συμφωνήσουν στην τελική διατύπωση της προς απόδειξη πρότασης. Στη συνέχεια, εργάζονται ξανά σε ομάδες για την συγγραφή της μαθηματικής απόδειξης και επανέρχονται για την συλλογική συζήτηση της, αλλά και για την εξαγωγή συμπερασμάτων ως προς τις δυσκολίες και ευκολίες που συνάντησαν με τη χρήση των δύο μεθόδων.

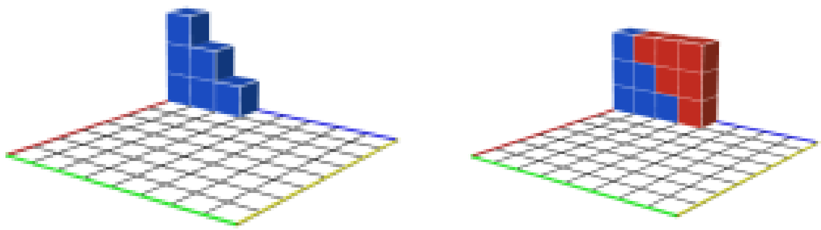
Στο **δεύτερο δόμημα** (Παράρτημα Α.3), οι μαθητές μελετάνε το δόμημα του τριγωνικού πύργου, στο οποίο κάθε γραμμή έχει ένα κύβο λιγότερο από τον προηγούμενο (Σχήμα 3.3.3). Τελικός σκοπός είναι μέσω του δομήματος αυτού οι μαθητές θα υπολογίσουν τελικά το άθροισμα $1+2+3+4+\ldots+\nu$ των ν πρώτων φυσικών αριθμών. Στα πλαίσια αυτής της φάσης οι μαθητές καλούνται να:

1. Διερευνήσουν τον συνολικό αριθμό των κύβων, για δοσμένο αριθμό κύβων που υπάρχουν στη βάση του και αντίστροφα.
2. Επεκτείνουν τον πύργο προσθέτοντας κύβους.
3. Κατασκευάσουν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο συμπληρώνοντας με κύβους διαφορετικού χρώματος τις κενές θέσεις (Σχήμα 3.3.4).
4. Βρουν τις διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και το πλήθος των κύβων.
5. Ανακαλύψουν το μοτίβο και τον μαθηματικό τύπο που αποδεικνύεται.



Π3 Π4

Σχήμα 3.3.3: Αρχικές κατασκευές Π3, Π4 του πύργου που δίνονται στους μαθητές για να ανακαλύψουν και να συνεχίσουν το μοτίβο.



Σχήμα 3.3.4: Συμπλήρωση του δομήματος Π3 για την δημιουργία ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Οι μαθητές, όμοια με την δεύτερη φάση, καλούνται μέσα από την ανάλυση του δομήματος και μέσα από συζήτηση, να αποδείξουν τον αλγεβρικό τύπο $\frac{\nu\left(\nu+1\right)}{2}$ του αθροίσματος των ν πρώτων φυσικών αριθμών.

4 Διεξαγωγή της έρευνας – Αποτελέσματα

Στη συνέχεια παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα της έρευνας ανά στάδιο που αυτή πραγματοποιήθηκε.

4.1 Πρακτικές εκπαιδευτικού πριν την εκπαίδευση του

Αναλυτικά το περιεχόμενο και ο τρόπος με τον οποίο ο εκπαιδευτικός διεξήγαγε το μάθημα πριν από την εκπαίδευση του στον Κυβόκοσμο, παρουσιάζεται στο Παράρτημα Β. Συνολικά έγινε παρακολούθηση τριών ορών διδασκαλίας του πάνω στις Αριθμητικές προόδους. Η διδασκαλία του ακολουθούσε την κλασική μέθοδο: Εισαγωγή σε ένα θέμα, διατύπωση ορισμών και θεωρημάτων και αποδείξεις αυτών. Ο καθηγητής δεν έκανε καθόλου χρήση των νέων τεχνολογιών και ακολούθησε την κλασική μέθοδο συγγραφής στον πίνακα.

Στην 1^{η} διδακτική ώρα πέραν από την ανάπτυξη της θεωρίας παρουσιάστηκαν και ορισμένα παραδείγματα που αφορούσαν απλές εφαρμογές της θεωρίας. Ενώ υπήρχε αλληλεπίδραση με τους μαθητές μέσω ερωτήσεων που τεθέντων για προβληματισμό, ο χρόνος που δινόταν για να σκεφτούν την απάντηση κρίθηκε ελλιπείς. Συνήθως ο λόγος δινόταν αμέσως στους πιο καλούς μαθητές οι οποίοι σήκωναν αμέσως χέρι, και οι οποίοι πιθανότητα γνώριζαν ήδη την απάντηση. Συνεπώς δεν υπήρχε χρόνος για πραγματικό στοχασμό από κάποιον που μόλις είχε εισαχθεί σε ένα καινούργιο θέμα. Ο όγκος επίσης της θεωρίας που διατυπώθηκε στη 1^{η} κιόλας διδακτική ώρας κρίθηκε υπερβολικός για πλήρη κατανόηση από τους μαθητές, καθώς ουσιαστικά διδάχτηκε όλη η θεωρία της ενότητας μαζί. Συνεπώς αν και η ροή του μαθήματος ήταν ομαλή, με συνέχεια και σύνδεση των διαφορετικών κομματιών που παρουσιαστήκανε, ο βαθμός κατανόησης από τους μαθητές ίσως δεν ήταν ο επιθυμητός.

Η 2^{η} διδακτική ώρα αφιερώθηκε αρχικά στον έλεγχο των ασκήσεων που είχαν δοθεί στους μαθητές για επίλυση στο σπίτι και στην επίλυση αποριών, ενώ στη συνέχεια έγινε επίλυση ασκήσεων που απαιτούν συγκεκριμένη μεθοδολογία-τρόπο σκέψης. Ο τρόπος διδασκαλίας έμεινε ο ίδιος με τον καθηγητή να απευθύνεται με ερωτήσεις στη τάξη πριν δώσει αυτός την σωστή απάντηση. Η συμμετοχή των μαθητών κρίθηκε ικανοποιητική ενώ παρατηρήθηκαν δυσκολίες στην προσέγγιση της σωστής απάντηση από τους μαθητές όταν οι ερωτήσεις απαιτούσαν πιο βαθιά κατανόηση της θεωρίας. Οι ασκήσεις που προτάθηκαν για το σπίτι περιλάμβαναν και προβλήματα. Μέσα από τα προβλήματα, στα οποία πολύ μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες, οι μαθητές καλούνται να προσπαθήσουν να αναπτύξουν οι ίδιοι τις απαραίτητες αλγεβρικές σχέσεις και να εντοπίσουν – αντιστοιχίσουν – μεταφράσουν τις ποσότητες που περιγράφονται στο πρόβλημα λεκτικά με τις αντίστοιχες μαθηματικές έννοιες. Η λύση ενός προβλήματος απαιτεί την σε βάθος κατανόηση της αντίστοιχης θεωρίας και κρίνεται αναγκαία ειδικά στο κεφάλαιο των αριθμητικών προόδων.

Στην 3η διδακτική ώρα, αρχική έγινε πάλι έλεγχος των ασκήσεων που είχαν δοθεί στους μαθητές για επίλυση στο σπίτι και ακολούθησαν απορίες των μαθητών πάνω σε αυτές. Στη συνέχεια έγιναν ασκήσεις του βιβλίου οι οποίες αφορούσα πολλαπλάσια αριθμών και πρόβλημα παρεμβολής όρων. Μεγάλο μέρος του μαθήματος αφιερώθηκε στην μελέτη των σταθερών αθροισμάτων που αναπτύσσονται σε ένα άθροισμα του οποίου οι όροι αποτελούν μέλη μίας αριθμητικής προόδου, όταν προσθέτουμε ακραίους όρους. Δόθηκαν παραδείγματα τόσο από άθροισμα με άρτιο αριθμό προσθετέων όσο και με περιττό. Η παρουσίαση των αθροισμάτων παρατηρήθηκε ότι συμβάλλει στο γνωστικό κομμάτι των μαθητών καθώς:

- Οι μαθητές απέκτησαν μια εποπτική αντίληψη του προβλήματος. Συνεπώς ο τύπος του αθροίσματος ν όρων αριθμητικής προόδου γίνεται πιο φιλικός για τον μαθητή κάνοντας την απομνημόνευσή του πιο εύκολη.
- Η διαδικασία αυτή, καλύπτει την έλλειψη της απόδειξης (όπως προτείνεται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής) για το άθροισμα ν-πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου. Έτσι, ο μαθητής έχει μια ευκαιρία, να κατανοήσει καλύτερα το πως προκύπτει ο τύπος του συγκεκριμένου αθροίσματος και να μην τον απομνημονεύει απλά μηχανικά.

Παρόλα αυτά, κρίνοντας από τη συμμετοχή των μαθητών στην τάξη, μια μεγάλη μερίδα των μαθητών παράμεινε απαθής στην παραπάνω παρουσίαση δίνοντας την εντύπωση είτε ότι είχε χαθεί το ενδιαφέρον τους είτε ότι και πάλι αδυνατούσαν να κατανοήσουν την μέθοδο και την σύνδεση με τον τύπο του αθροίσματος.

Ως προς τον τρόπο διδασκαλίας, τα βασικά χαρακτηριστικά που προέκυψαν από το μάθημα του εκπαιδευτικού ήταν ότι:

- Υπήρχε σύνδεση του καινούργιου με το παλιό μάθημα
- Υπήρχε διατύπωση των στόχων του μαθήματος με σαφήνεια, ακρίβεια και πληρότητα.
- Υπήρχε διερεύνηση προϋπάρχουσας γνώσης πριν την εισαγωγή στο καινούργιο θέμα
- Υπήρχε ενημέρωση των μαθητών για τον τρόπο με τον οποία οργανώνεται η διδασκαλία

- Υπήρχε επικοινωνία με τους μαθητές μέσω συχνών ερωτήσεων και απαντήσεων

4.2 Ημιδομημένη συνέντευξη – Συζήτηση με τον εκπαιδευτικό

Μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων, πραγματοποιήθηκε συνέντευξη-συζήτηση με τον εκπαιδευτικό που αφορούσε πρωτίστως τις εκπαιδευτικές του πρακτικές. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα βασικά ευρήματα της συνέντευξης χωρισμένα ανά θεματική ενότητα.

4.2.1 Στόχοι διδασκαλίας

Αρχικά, ο εκπαιδευτικός ρωτήθηκε για τους **στόχους** που θέτει στο μάθημα και για το κατά πόσο αυτοί διατυπώνονται στους μαθητές. Ο καθηγητής ξεκίνησε λέγοντας ότι γενικός στόχος ως προς τον τρόπο που γίνεται η διδασκαλία του είναι να κάνει όσο το δυνατόν πιο κατανοητό το μάθημα στους μαθητές, κεντρίζοντας το ενδιαφέρον τους. Βασικός του στόχος είναι να προσπαθήσει να καλύψει τις ανάγκες όλων των μαθητών, τόσο των πιο αδυνάτων στα μαθηματικά όσο και των πιο ικανών.

Ως προς τους επί μέρους στόχους της κάθε διδακτικής ενότητας, τόνισε ότι κατά την έναρξη μιας καινούργια ενότητας φροντίζει να διατυπώσει με ακρίβεια και σαφήνεια τους στόχους του μαθήματος στους μαθητές, καθώς και τους τρόπους που θα χρησιμοποιήσουν για να τους πετύχουν. Στην επιλογή και στην διατύπωση των στόχων ο εκπαιδευτικός λαμβάνει υπόψη του το επίπεδο των μαθητών, το ρυθμός μάθησης, τα υπάρχοντα προβλήματα, τη διαθέσιμη υλικοτεχνική υποδομή, καθώς και τις διδακτικές ικανότητες του ίδιου.

Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται:

- στην προαγωγή της αυτενέργειας των μαθητών,
- στην μεταξύ τους συνεργασίας,
- στην ανάπτυξη καλών διαπροσωπικών σχέσεων ανάμεσα στους μαθητές και μεταξύ των μαθητών και του εκπαιδευτικού,
- στην καλλιέργεια της κριτικής σκέψης, στη δημιουργία φιλικού κλίματος και ομαδικού πνεύματος κλπ.
- στην ανάπτυξη ικανοτήτων που σχετίζονται με την επιστημονική μέθοδο και τον επιστημονικό τρόπο σκέψης (διατύπωση ερωτημάτων και υποθέσεων, σχεδιασμός και πραγματοποίηση πειραμάτων, συλλογή και ερμηνεία δεδομένων, διατύπωση συμπερασμάτων)
- στην ανάπτυξη κριτικής σκέψης και ικανότητας διερεύνησης

4.2.2 Τρόπος διδασκαλίας

Αναφερόμενος στα μέσα και στις τεχνικές διδασκαλίας ο εκπαιδευτικός δήλωσε ότι ακολουθεί τα παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας με χρήση του πίνακα. Το μάθημα γίνεται κυρίως με την μορφή ερωτοαπαντήσεων.

Για την επίτευξη των στόχων ο εκπαιδευτικός δήλωσε ότι φροντίζει να παραδώσει ένα άρτια οργανωμένο μάθημα με δομή και συνέχεια. Κατά την έναρξη της διδασκαλίας γίνεται πάντα τη σύνδεση του καινούργιου μαθήματος με το προηγούμενο. Έτσι οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να θυμηθούν αυτά που έγιναν στο προηγούμενο μάθημα, να κατανοήσουν το πώς αυτά συσχετίζονται με το νέο και να διαπιστώσουν την συνέχεια της διδασκαλίας. Κατά την έναρξη της διδασκαλίας επίσης γίνεται συνήθως έλεγχος των τετραδίων των μαθητών για να διαπιστωθεί το κατά πόσο διάβασαν για το μάθημα της ημέρες και στο αν δυσκολεύτηκαν να ολοκληρώσουν τις ασκήσεις που τους είχαν ανατεθεί. Αν δει ότι υπάρχουν δυσκολίες θα ζητήσει από κάποιον μαθητή εθελοντικά να λύσει κάποια από τις ασκήσεις στον πίνακα. Απευθύνει ερωτήσεις στους μαθητές, τόσο κλειστού όσο και ανοιχτού τύπου ώστε να διαπιστώσει τον βαθμό στον οποίο έχουν κατανοήσει το προηγούμενο μάθημα και το κατά πόσο είναι έτοιμοι να προχωρήσουν στο επόμενο.

Όταν γίνεται εισαγωγή σε ένα καινούργιο κομμάτι της θεωρίας, ο εκπαιδευτικός προσπαθεί καταρχάς να το συνδέσει με προηγούμενα κομμάτια της. Κατά την διδασκαλία της θεωρίας ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να διατηρήσει το ενδιαφέρον των μαθητών κάνοντας τους συνεχώς ερωτήσεις. Μέσα από τις ερωτήσεις ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να δώσει τα ερεθίσματα έτσι ώστε οι μαθητές να ανακαλύψουν σιγά σιγά την καινούργια θεωρία μόνοι τους με φυσικό τρόπο. Φυσικά δεν λείπουν οι αυστηρές μαθηματικές αποδείξεις καθώς ο εκπαιδευτικός θεωρεί ότι αυτός είναι ορθός τρόπος διδασκαλίας των μαθηματικών.

Μεγάλο βάρος δίνεται στη λύση ασκήσεων. Ο εκπαιδευτικός επιλύει ασκήσεις διαβαθμισμένης δυσκολίας έτσι ώστε να καλύψει από τον πιο αδύναμο έως τον πιο δυνατό μαθητή. Οι ασκήσεις επιλέγονται αρχικά από το σχολικό εγχειρίδιο, ξεκινώντας από τις ασκήσεις που αφορούν απλή εφαρμογή της θεωρίας και στη συνέχεια συνεχίζοντας με πιο σύνθετες. Όπου κρίνει σκόπιμο διατυπώνει συγκεκριμένες μεθοδολογίες λύσεων για ορισμένου τύπου ασκήσεις. Επίσης, σε ορισμένες ενότητες, μοιράζει φυλλάδια με ερωτήσεις τύπου συμπλήρωσης κενών, πολλαπλής επιλογής και σωστού λάθους. Ασκήσεις τέτοιας μορφής είναι πιο εύκολες και προσιτές στα παιδιά και αναδεικνύουν τον βαθμό στον οποίο οι μαθητές έχουν κατανοήσει τα σημαντικά σημεία της θεωρίας. Τέλος, κατά την ολοκλήρωση κάποιας ενότητες δίνει στους μαθητές φυλλάδιο με επιπλέον ασκήσεις οι οποίες βρίσκονται στην πλειοψηφία τους στη τράπεζα θεμάτων, με σκοπό την καλύτερη προετοιμασία τους για τις τελικές εξετάσεις. Σύμφωνα με τον εκπαιδευτικό πολλές ασκήσεις από την τράπεζα δυσκολεύουν ακόμα και τους καλούς μαθητές. Έχει διαπιστώσει ότι ο τρόπος με τον οποίο διατυπώνεται μια άσκηση μπορεί να αποτελέσει σημαντικό παράγοντα για το αν ο μαθητής καταφέρει να την επιλύσει.

Κατά την λήξη του μαθήματος, ο εκπαιδευτικός κάνει μια ανακεφαλαίωση του επικεντρώνοντας στα σημαντικά κομμάτια. Κάνει ερωτήσεις προς τους μαθητές για να δει αν υπάρχουν ακόμη αμφισβητούμενα σημεία στο μάθημα που διεξήχθη και δέχεται τις ερωτήσεις αυτών. Τέλος, αναθέτει στους μαθητές ασκήσεις προς επίλυση για το επόμενο μάθημα.

Στην ερώτηση πόσο χρόνο διαθέτουν οι μαθητές για να διερευνήσουν τα ερωτήματα που τους θέτει, ο εκπαιδευτικός παραδέχτηκε ότι ο χρόνος που τους δίνει δεν είναι πολύς και ότι συνήθως δίνει τον λόγο στους πρώτους μαθητές που θα προθυμοποιηθούν. Αυτό γίνεται του περιορισμένου χρόνο που υπάρχει σε σύγκριση με τον όγκο της ύλης. Υπάρχει ενθάρρυνση από τον ίδιο για μεγαλύτερη συμμετοχή ενώ προσπαθεί να καθοδηγήσει τους μαθητές για να απαντήσουν ερωτήσεις που έχει κάνει όταν αυτοί δυσκολεύονται. Επίσης είναι υπέρ της συνεργασίας των μαθητών. Όπως αναφέρει όμως η ανάθεση ομαδικής εργασίας την ώρα του μαθήματος οδηγεί συχνά σε απόσπαση της προσοχής από κάποιους μαθητές και σε διατάραξη της ησυχίας.

4.2.3 Νέες τεχνολογίες

Στη συνέχεια ο εκπαιδευτικός ερωτήθηκε για τις νέες τεχνολογίες, και την γνώμη του για τη χρήση λογισμικού στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Ο εκπαιδευτικός εξέφρασε την εκτίμηση, ότι η παρουσίαση μαθηματικών ενοτήτων με χρήση λογισμικού, δεν εξυπηρετεί την παιδαγωγική και γνωστική ικανότητα των μαθητών στο πλαίσιο της διδασκαλίας του μαθήματος των μαθηματικών. Οι μαθητές, χάνουν πολύτιμο χρόνο από το μάθημα για να ανοίξουν τους υπολογιστές και να εγκλιματιστούν στην εκάστοτε ηλεκτρονική εφαρμογή. Ακόμα, πολλές φορές, έχουν διάσπασή προσοχής, καθώς συζητούν μεταξύ τους, δεν δίνουν τη δέουσα προσοχή και ασχολούνται με άλλα αντικείμενα πέραν της συγκεκριμένης παρουσίασης (περιήγηση στο διαδίκτυο κλπ). Όλα τα παραπάνω, οδηγούν στο φαινόμενο οι μαθητές να μην έχουν κατανοήσει την ενότητα, η οποία διδάσκεται.

Γενικά, η μέθοδος διδασκαλίας που πιστεύει ότι πρέπει να ακολουθείται, θα πρέπει να βασίζεται στο παραδοσιακό μοντέλο (πίνακας), με παρουσίαση της θεωρίας και αποδείξεων αυτής, επίλυση εφαρμογών, ερωτήσεις προς τους μαθητές σε καίρια σημεία, ώστε να αναρωτηθούν και να παρουσιάσουν αυτόνομη κριτική σκέψη και στο τέλος ανάθεση εργασιών για το σπίτι.

Παρόλα αυτά, ο εκπαιδευτικός παραδέχτηκε ότι δεν έχει ποτέ δοκιμάσει να διδάξει με την βοήθεια των νέων τεχνολογιών καθώς δεν έχει εμπειρία από αυτές, και ότι αν και είναι επιφυλακτικός, θα ήθελα να δώσει μια ευκαιρία δοκιμάζοντας τον Κυβόκοσμο στη διδασκαλία των αριθμητικών προόδων.

4.3 Συνεδριάσεις εξοικείωσης του εκπαιδευτικού με τον Κυβόκοσμο

4.3.1 Πρώτη συνεδρίαση

Αρχικά έγινε μια ενημέρωση του εκπαιδευτικού για τον Κυβόκοσμο:

«Ο Κυβόκοσμος είναι μια εφαρμογή που κατασκευάστηκε στα πλαίσια του εμπλουτισμού των ψηφιακών σχολικών βιβλίων των μαθηματικών το 2013 με φορέα υλοποίησης το ΙΤΥΕ -Διόφαντος. Υπεύθυνος της ομάδας των μαθηματικών ήταν ο καθηγητής του ΕΚΠΑ Χρόνης Κυνηγός και η εφαρμογή κατασκευάστηκε από τον Θωμά Παπαδόπουλο (μαθηματικό-προγραμματιστή). Η ιδέα της κατασκευή προήλθε από το Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education (http://www.fisme.science.uu.nl /toepassingen/00724/) και η βασική του χρήση είναι για την κατανόηση βασικών εννοιών της γεωμετρίας του χώρου. Ο κυβόκοσμος είναι μια διαδικτυακή μηχανή σχεδιασμού που επιτρέπει την εύκολη κατασκευή τρισδιάστατων μοντέλων τοποθετώντας σε μια τρισδιάστατη σκηνή κύβους συγκεκριμένου μεγέθους. Τα αρχεία κώδικα του λογισμικού είναι δομημένα με τρόπο που να επιτρέπει σε κάποιον με μικρή γνώση προγραμματισμού να σχεδιάσει συγκεκριμένες δραστηριότητες ή πρότυπα δραστηριοτήτων, κυρίως για τρισδιάστατη γεωμετρία. Ως εκ τούτου, ακόμα και αν ο εκπαιδευτικός δεν είχε ευχέρεια με τους υπολογιστές δεν αναμένεται να αντιμετωπίσει ιδιαίτερα προβλήματα στην εκμάθηση του».

Στη συνέχεια έγινε εκπαίδευση που αφορούσε την περιήγηση στην ιστοσελίδα του κυβόκοσμου και στην αλληλεπίδραση με συγκεκριμένες δραστηριότητες. Ο εκπαιδευτικός έμαθε πως μπορούν να προστίθενται και να αφαιρούνται οι κύβοι, να αλλάζει ο χρωματισμός τους, να περιστρέφει το σχήμα, να το μεγεθύνει, και να βλέπει πληροφορίες για την κατασκευή του όπως το συνολικό πλήθος των κύβων. Στη συνέχει ο εκπαιδευτικός εκτέλεσε με επιτυχία τα παραδείγματα που υπάρχουν στην ιστοσελίδα (*Συμπλήρωσε το σχήμα, Φτιάχνω το τρισδιάστατο σχήμα, Χτίζοντας μια αυλή, Ερειπωμένο κάστρο*).

Ο εκπαιδευτικός έδειξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για το περιβάλλον του Κυβόκοσμου, τονίζοντας ότι του άρεσε η αίσθηση των τριών διαστάσεων του χώρου. Αν και δεν είχε ιδιαίτερη εμπειρία με τους υπολογιστές, εγκλιματίστηκε αμέσως στην εφαρμογή και έφερε σε πέρας όλα τα παραδείγματα που του δόθηκαν. Ο εκπαιδευτικός έκανε την εκτίμηση ότι τα παιδιά θα έδειχναν ενδιαφέρον για τη χρήση του αφού θα το έβλεπαν σαν παιχνίδι, και ως εκ τούτου θα μπορούσαν ίσως να κατανοήσουν μέσα από αυτό το μάθημα καλύτερα.

Κατά την διάρκεια της πρώτης συνεδρίασης έγινε επίσης εκπαίδευση όσο αφορά το πρώτο φύλλο εργασίας που θα δοθεί στους μαθητές, το οποίο αφορούσε την εύρεση του τύπου αθροίσματος των περιττών αριθμών. Δόθηκε στον εκπαιδευτικό το φύλλο εργασίας και του ζητήθηκε να φέρει εις πέρας την δραστηριότητα. Ο εκπαιδευτικός δεν αντιμετώπισε κάποια ιδιαίτερη δυσκολία απαντώντας σε όλα τα ερωτήματα του. Στο τέλος εξέφρασε την άποψη ότι ο τρόπος με τον οποίο αναπτύσσεται το θέμα θα φανεί ενδιαφέρον στα παιδιά οδηγώντας τους σε μια κατανοητή (οπτική) απόδειξη του τύπου του αθροίσματος.

Παρόλα αυτά εξέφρασε προβληματισμό στο κατά πόσο είναι απαραίτητη η χρήση προγράμματος στον ηλεκτρονική υπολογιστή για αυτή τη δραστηριότητα, καθώς αυτή θα μπορούσε να υλοποιηθεί και στην τάξη με χρήση πραγματικών κύβων. Η απάντηση που του δόθηκε ήταν ότι αυτό θα απαιτούσε τον εφοδιασμό με συγκεκριμένο διδακτικό υλικό στο οποίο οι μαθητές δεν θα είχαν πρόσβαση από το σπίτι. Από την άλλη ο Κυβόκοσμος είναι προσβάσιμος σε κάθε μαθητή που έχει έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή. Επίσης στον Κυβόκοσμο μπορούν να γίνουν γρήγορα αλλαγές και διορθώσεις βοηθώντας τον πειραματισμό των μαθητών, κάτι που η χρήση των πραγματικών κύβων υστερεί. Η προσθήκη επίσης διαφορετικών χρωμάτων είναι μια ιδιότητα που αρέσει στα παιδιά καθώς μπορούν να δώσουν στις κατασκευές τους την αισθητική που προτιμούν, αναδεικνύοντας έτσι την αίσθηση παιχνιδιού.

Ο εκπαιδευτικός τέλος ενημερώθηκε για τους στόχους των δραστηριοτήτων. Μέσα από τις δραστηριότητες οι μαθητές αναμένεται να μάθουν να λύνουν ένα πρόβλημα της Άλγεβρας με γεωμετρικό τρόπο, να μάθουν να αναγνωρίζουν μαθηματικά μοτίβα που σχετίζονται με την Αριθμητική Πρόοδο, να μάθουν να κάνουν γενικεύσεις για τυχαίο πλήθος αριθμών «ν», να μάθουν να αποδεικνύουν τον τύπο για τον οποίο έκαναν εικασία με τη βοήθεια του Κυβόκοσμου και να μάθουν αξιοποιούν την έννοια της Αριθμητικής Προόδου για την μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.

4.3.2 Δεύτερη συνεδρίαση

Στη δεύτερη συνεδρίαση έγινε αρχικά επίδειξη του δεύτερου φύλλου εργασίας το οποία θα δοθεί στους μαθητές. Ο εκπαιδευτικός και πάλι δεν αντιμετώπισε δυσκολίες στην περάτωση της εφαρμογής αυτής.

Στη συνέχεια έγινε εκπαίδευση του πως θα μπορούσε κάποιος να δημιουργήσει τη δική του δραστηριότητα στον Κυβόκοσμο, δημιουργώντας μια δική του αρχική δομή σε έναν καμβά των διαστάσεων που επιθυμούσε. Αυτό το στάδιο απαιτεί απλές προγραμματιστικές δεξιότητες τις οποίες όμως ο εκπαιδευτικός δεν είχε με αποτέλεσμα την δυσκολία του στην υλοποίηση δικής του δομής. Αν και κατανόησε τις αλλαγές που πρέπει να πραγματοποιήσει στο αρχείο έτσι ώστε να επιτύχει αυτό που ήθελε, εξέφρασε την άποψη ότι αυτές ήταν πολλές σε πλήθος και περίπλοκες. Η κύρια ανησυχία του ήταν στο ότι αν συνέβαινε το παραμικρό λάθος (π.χ. παράβλεψη ενός αριθμού) στον κώδικα τότε η εφαρμογή δεν μπορούσε να ξεκινήσει χωρίς να υπάρχουν ενδείξεις για το πιο ήταν το λάθος. Συνεπώς εξέφρασε την άποψη ότι θα χρειαζόταν να αφιερώσει αρκετό χρόνο έτσι ώστε να εγκλιματιστεί πλήρως με τον προγραμματισμό του κυβόκοσμου. Συνεπώς ζήτησε την βοήθεια της ερευνήτριας για να δοκιμάσει να υλοποιήσει κάποια δική του δραστηριότητα διδασκαλίας με τον κυβόκοσμο.

4.4 Παρατήρηση του μαθήματος του εκπαιδευτικού με τα έτοιμα δομήματα

Μετά την προετοιμασία του εκπαιδευτικού για το μάθημα με τον Κυβόκοσμο, έγινε παρακολούθηση του μαθήματος του στην αίθουσα υπολογιστών του σχολείου, χωρίς να υπάρχει παρέμβαση από την ερευνήτρια. Ο ερευνητής χώρισε τους μαθητές σε ομάδες των 2 ατόμων, επιλέγοντας αυτός τα άτομα σε κάθε ομάδα.

Αρχικά ο καθηγητής έκανε μια εισαγωγή στο θέμα που θα διαπραγματευόντουσαν. Τους ανέφερε τα αθροίσματα τα οποία θα έπρεπε να υπολογίσουν και τους ενημέρωσε ότι θα έπρεπε οι ίδιοι να ανακαλύψουν τον γενικό τύπο του αθροίσματος μέσα από την ενασχόληση τους με τον Κυβόκοσμο. Στη συνέχεια ζήτησε από τους μαθητές να μπουν στην ιστοσελίδα του Κυβόκοσμου και να εκτελέσουν κάποια απλά παραδείγματα για να εξοικειωθούν με αυτόν. Τους έδειξε πως μπορούν να προσθέτουν και να αφαιρούν τουβλάκια, να περιστρέφουν την κατασκευή τους και να αλλάζουν τον χρωματισμό. Όλοι οι μαθητές φάνηκε να εξοικειώνονται γρήγορα με τον Κυβόκοσμο και να μην αντιμετωπίζουν δυσκολίες.

Στη συνέχεια ο καθηγητής ζήτησε από τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο με τη πρώτη δραστηριότητα και να εκτελέσουν τα βήματα που αναγραφόντουσαν στα Φύλλα Εργασίας που υπήρχαν σε κάθε θέση εργασίας. Κατά την διάρκεια του σταδίου αυτού ο ρόλος του εκπαιδευτικού ήταν συμβουλευτικός και μετακινούταν από θέση εργασίας σε θέση εργασίας προσπαθώντας να επιλύσει απορίες των μαθητών. Οι απορίες των μαθητών στο στάδιο αυτό ήταν αρκετές, και αφορούσαν τόσο τεχνικά κομμάτια (όπως το πως παίρνω στιγμιότυπο οθόνης από τον υπολογιστή) όσο και κομμάτια των ερωτήσεων του Φύλλου εργασίας όπως «τι εννοείται να περιγράψουμε το μοτίβο». Παρόλα αυτά όλες ομάδες κατάφεραν να φέρουν εις πέρας τη δραστηριότητα αυτή. Στην ερώτηση «να μαντέψουν το πλήθος των κύβων για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό ν», ένα εντυπωσιακά μεγάλο ποσοστό των ομάδων έδωσε την σωστή απάντηση, 85%. Από την άλλη μεριά μόνο δύο ομάδες κατάφεραν δώσουν μια αλγεβρική απόδειξη του τύπου.

Αφού όλες οι ομάδες είχαν ολοκληρώσει το πρώτο φύλλο εργασίας, ο εκπαιδευτικός έδωσε εντολή να περάσουν στο δεύτερο, αυτό του αθροίσματος των φυσικών αριθμών. Εδώ οι μαθητές, όντας περισσότερο εξοικειωμένοι με τον Κυβόκοσμο και με την λογική των Φύλλων Εργασίας, αντιμετώπισαν λιγότερες δυσκολίες με πριν. Παρόλα αυτά οι περισσότερες ομάδες δεν κατάφεραν να ολοκληρώσουν την δραστηριότητα καθώς η διδακτική ώρα τελείωσε.

Στα **θετικά** των δραστηριοτήτων ήταν ότι ενισχύθηκε το συνεργατικό κλίμα των μαθητών, καθώς πολλοί μαθητές βοηθούσαν τους συμμαθητές τους στα προβλήματα και στις απορίες που είχαν, είτε αυτοί άνηκαν στην ίδια ομάδα είτε όχι. Επίσης οι μαθητές δεν φάνηκαν να δυσκολεύτηκαν στις δραστηριότητες που τους δόθηκαν βρίσκοντας με επιτυχία τον τύπο των αθροισμάτων. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με το γεγονός ότι περισσότεροι μαθητές δεν κατάφεραν να αποδείξουν αλγεβρικά τον ζητούμενο τύπο κατέστησε τη δραστηριότητα επιτυχές, καθώς μέσα από την οπτικοποίηση του προβλήματος οι μαθητές κατάφεραν να φέρουν εις πέρας μια γεωμετρική απόδειξη και να βρουν τον ζητούμενο τύπο.

Στα **αρνητικά** ήταν ότι η διάρκεια της μιας εκπαιδευτικής ώρας τελικά αποδείχτηκε λίγη καθώς οι περισσότερες ομάδες δεν κατάφεραν να ολοκληρώσουν και το δεύτερο φύλλο εργασίας.

4.5 Σχεδιασμός νέας δραστηριότητας από τον εκπαιδευτικό

Ο εκπαιδευτικός δημιούργησε το δικό του δόμημα προς διδασκαλία στη τάξη. Η ιδέα που είχε μετά την ενασχόληση με τα έτοιμα δομήματα, ήταν να χρησιμοποιήσει τον Κυβόκοσμο για να δείξει το πώς μπορεί να υπολογιστεί άθροισμα $S = 3+6+9+12+15$ το οποίο είχε διδάξει στο τελευταίο του μάθημα στη τάξη. Μέσα από αυτό το παράδειγμα, ο εκπαιδευτικός ήθελε να δείξει στους μαθητές πως τελικά προκύπτει ο τύπος του αθροίσματος $S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$.

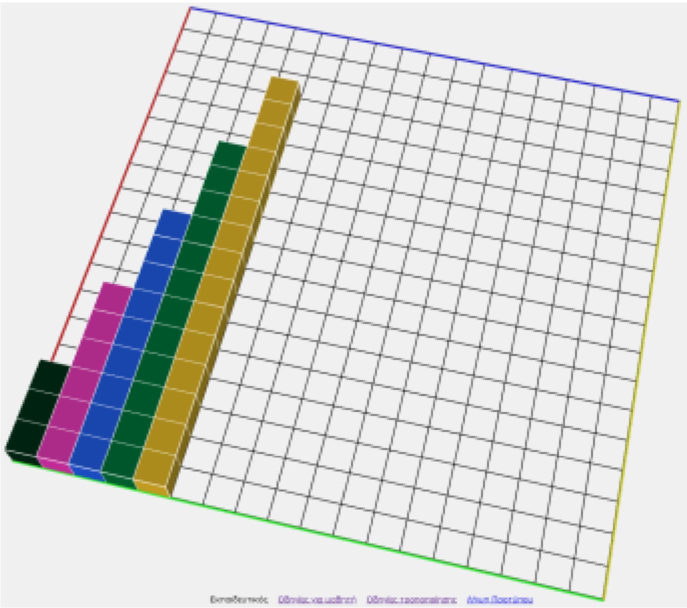
Στη συνέχεια παραθέτουμε την αναλυτική περιγραφή της δραστηριότητας, όπως αυτή έγινε από τον εκπαιδευτικό, με απαντήσεις των ερωτημάτων που θέτει. Ο σκοπός της αναλυτικής αυτής περιγραφής είναι να δοθεί για χρήση από όποιον εκπαιδευτικό επιθυμεί να εφαρμόσει την δραστηριότητα στη τάξη. Το Φύλλο Εργασίας του μαθητή παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α.4.

4.5.1 Αναλυτική περιγραφή δραστηριότητας

Στην εργασία αυτοί θα δώσουμε μια σχηματική απόδειξη της σχέσης $\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)$ του αθροίσματος των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου.

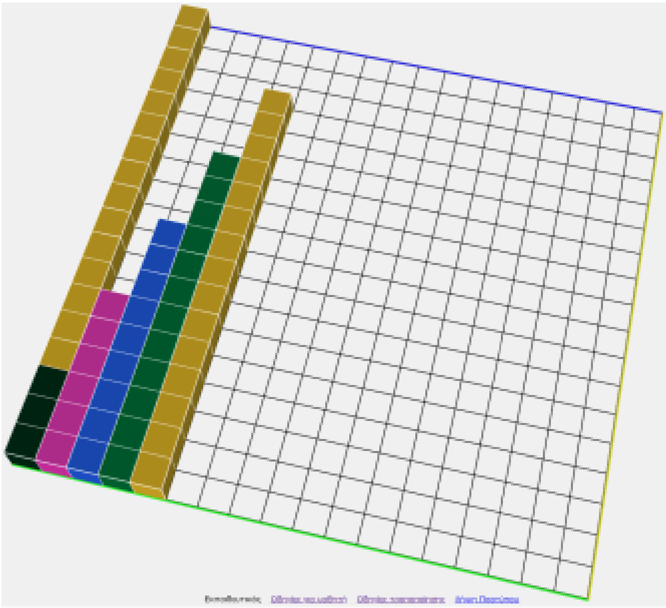
Αρχικά θα υπολογίσουμε το άθροισμα των 5 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου που έχει πρώτο όρο το 3 και διαφορά 3. Θα υπολογίσουμε δηλαδή το άθροισμα: $S=3+6+9+12+15$. Στη συνέχεια θα γίνει η γενίκευση για ν αριθμούς.

Θα αναπαραστήσουμε στον Κυβόκοσμο τους αριθμούς αυτούς. Σε κάθε στήλη του Κυβόκοσμου θα τοποθετήσουμε τόσους κύβους όσος είναι και ο αριθμός του όρου της προόδου. Συνεπώς στη πρώτη στήλη θα τοποθετήσουμε 3 κύβους, στη δεύτερη 6 κ.ο.κ. Χρησιμοποιείστε διαφορετικό χρώμα σε κάθε στήλη. Το σχήμα που θα δημιουργηθεί θα πρέπει να μοιάζει με το ακόλουθο.



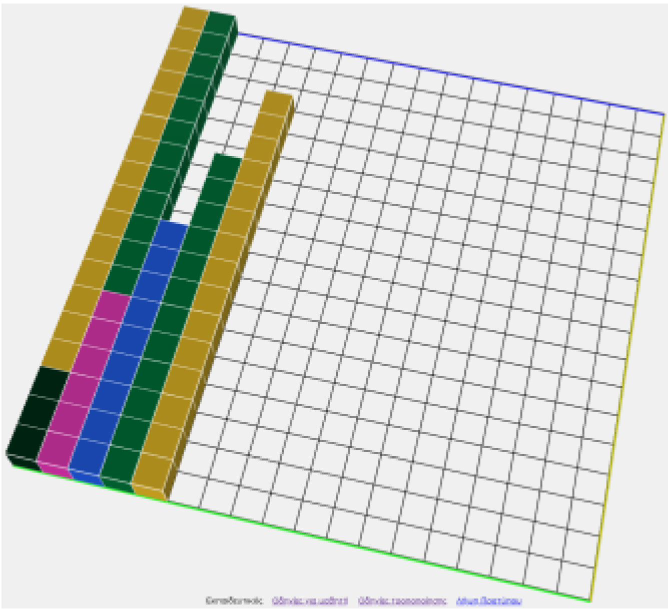
Σχήμα 4.5.1: Αρχικό δόμημα εκπαιδευτικού

Στη συνέχεια **θα διπλασιάσουμε τους κύβους <u>κάθε χρώματος</u>, τοποθετώντας τους κατάλληλα ώστε να σχηματιστεί ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο**. Θα ξεκινήσουμε από την πρώτη στήλη. Πάνω από αυτή τη στήλη θα προσθέσουμε το πλήθος των κύβων που βρίσκονται στη τελευταία στήλη, δηλαδή πάνω από τους μαύρους κύβους θα προσθέσουμε 15 κίτρινους κύβους (15 είναι ο 5^{ος} όρος του αθροίσματος). Έτσι η κατασκευή που δημιουργείται είναι η ακόλουθη (Σχήμα 4.5.2).



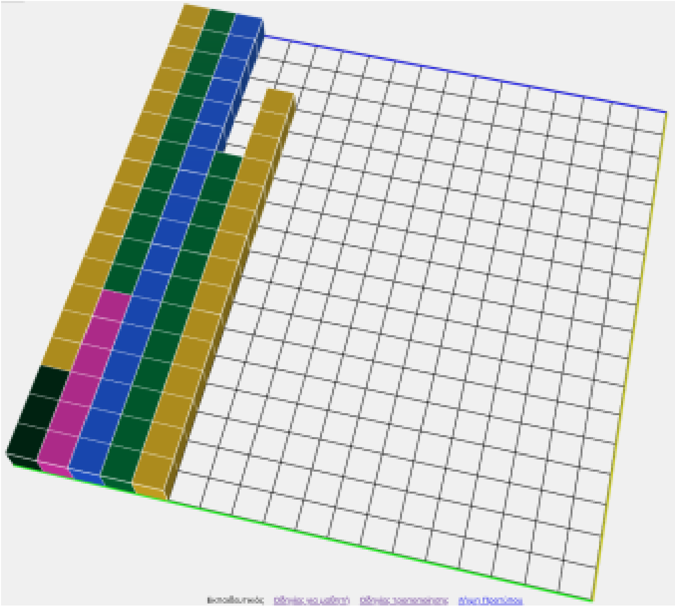
Σχήμα 4.5.2: Προσθήκη των κίτρινων κύβων στην πρώτη στήλη

Ομοίως στη συνέχεια πάνω από τη δεύτερη στήλη, θα προσθέσουμε πράσινους κύβους, τόσους σε πλήθους όσοι είναι οι πράσινοι κύβοι που υπάρχουν στη προτελευταία στήλη, δηλαδή 12 (που είναι και ο $4^{ος}$ όρος του αθροίσματος). Έτσι η κατασκευή που δημιουργείται είναι η ακόλουθη (Σχήμα 4.5.3).



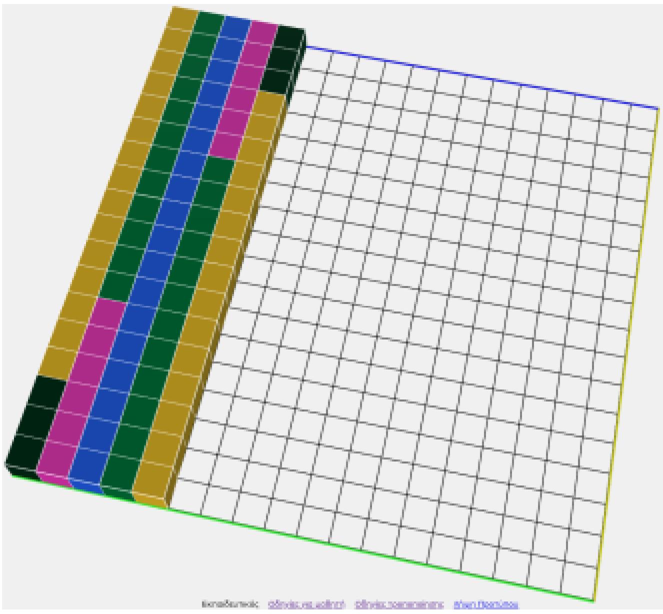
Σχήμα 4.5.3: Προσθήκη των πράσινων κύβων στην δεύτερη στήλη

Παρατηρούμε ότι το ύψος της δεύτερης στήλης γίνεται ίσο με αυτό της πρώτης! Συνεχίζουμε με την ίδια λογική. Στην τρίτη στήλη, θα προσθέσουμε το πλήθος των κύβων που είναι στη τρίτη από το τέλος στήλη, που εδώ είναι πάλι η τρίτη στήλη. Άρα θα προσθέσουμε ίσο αριθμό μπλε κύβων με αυτά που ήδη βρίσκονται στη τρίτη στήλη, δηλαδή 9 (που είναι ο $3^{ος}$ όρος του αθροίσματος). Έτσι η κατασκευή παίρνει τη μορφή που βλέπουμε στο Σχήμα 4.5.4.



Σχήμα 4.5.4: Προσθήκη των μπλε κύβων στην τρίτη στήλη

Παρατηρούμε ότι το ύψος της τρίτης στήλης γίνεται ίσο με αυτό των δύο πρώτων! Συνεχίζοντας, στη τέταρτη στήλη (δεύτερη από το τέλος) θα προσθέσουμε το πλήθος των κύβων που βρίσκονταν αρχικά στη δεύτερη στήλη (ροζ κύβοι), και στη τελευταία στήλη θα προσθέσουμε το πλήθος των κύβων που βρίσκονταν αρχικά στην πρώτη στήλη (μαύροι κύβοι). Η κατασκευή που τελικά δημιουργείται απεικονίζεται στο Σχήμα 4.5.5.



Σχήμα 4.5.5: Τελικό δόμημα μετά την προσθήκη των ροζ και μαύρων κύβων στην τέταρτη και πέμπτη στήλη αντίστοιχα

Παρατηρούμε ότι σχηματίζεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, καθώς και ότι το πλήθος των κύβων από κάθε χρώμα έχει διπλασιαστεί σε σχέση με το αρχικό δόμημα. Για να φτάσουμε στον τελικό στόχο, θα πρέπει να απαντήσουμε στις εξής ερωτήσεις:

1. Πόσο είναι το συνολικό πλήθος των κύβων του σχήματος σε σχέση με το αρχικό;
2. Πόσους κύβους έχει κάθε διάσταση του δομήματος;
3. Από ποια σχέση δίνεται το άθροισμα $S=3+6+9+12+15$;

Απαντήσεις ερωτήσεων:

1. Όπως είδαμε, το τελικό δόμημα το φτιάξαμε χρησιμοποιώντας το **διπλάσιο** σε πλήθος αριθμό κύβων από αυτό του αρχικού δομήματος. Στο αρχικό σχήμα το πλήθος των κύβων ήταν $S=3+6+9+12+15$, συνεπώς το πλήθος των κύβων στη τελικά κατασκευή θα είναι το διπλάσιο, δηλαδή $2S$.
2. Παρατηρούμε ότι η οριζόντια διάσταση έχει 5 κύβους, ενώ η κάθετη έχει 18 κύβους (3 μαύρους και 15 κίτρινους).
3. Το πλήθος των κύβων του παραλληλογράμμου θα είναι ίσο με το γινόμενο των διαστάσεων του δηλαδή $5 \cdot 18 = 90$. Όμως είπαμε ότι το πλήθος ισούται με $2S$ δηλαδή είναι διπλάσιο του αθροίσματος που θέλαμε να υπολογίσουμε. Συνεπώς το ζητούμενο άθροισμα είναι: $2S=90 \Leftrightarrow S=45$.

Γενίκευση παραδείγματος

Για να γενικεύσουμε το εύρημα μας, θα πρέπει να απαντήσουμε στα ακόλουθα ερωτήματα:

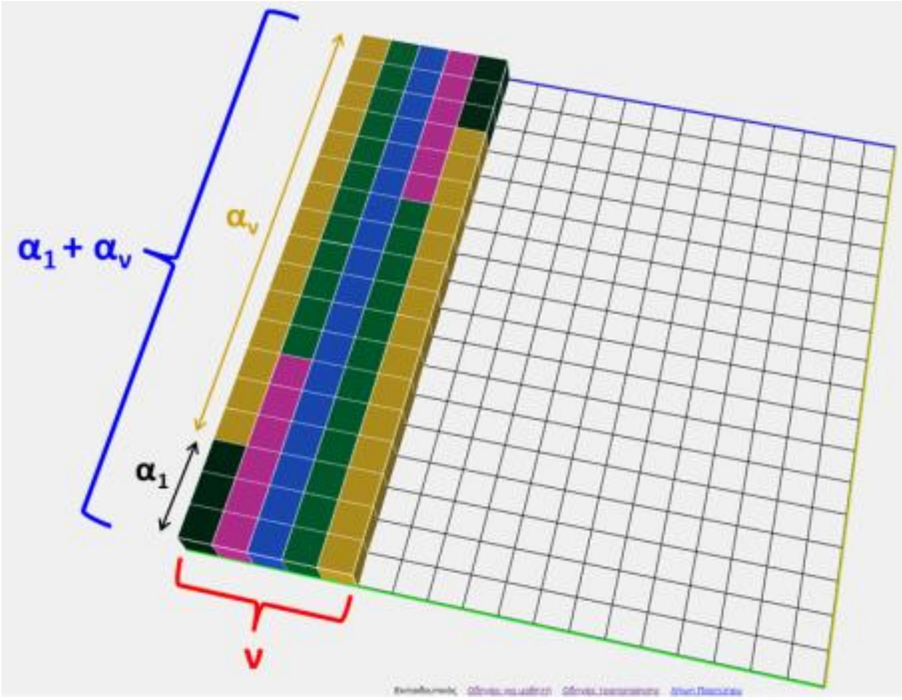
1. Μπορείτε να βρείτε το συνολικό πλήθος των κύβων του σχήματος σε σχέση με το αρχικό;
2. Μπορείτε να γενικεύσετε τις διαστάσεις που έχει το παραλληλόγραμμο χρησιμοποιώντας μεταβλητές αντί για νούμερα;
3. Μπορείτε να γενικεύσετε τον τύπο του αθροίσματος;

Απαντήσεις ερωτήσεων:

1. Όπως και πριν, αν το αρχικό άθροισμα ήταν S, το τελικό θα ήταν $2S$ αφού το πλήθος των κύβων έχει διπλασιαστεί.
2. Για να δώσουμε απάντηση στο δεύτερο ερώτημα, θα πρέπει να ξανά δούμε πως φτιάχτηκε η παραπάνω δομή.
    - Το πλήθος των στηλών, ήταν το πλήθος των προσθετέων, το οποίο το συμβολίζουμε στις προόδους συνήθως με ν.
    - Το πλήθος των κύβων της πρώτης στήλης, προέκυψε από τον αριθμό του πρώτου όρου της προόδου μας (το 3 – μαύροι κύβοι), προσθέτοντας τον αριθμό του τελευταίου όρου της προόδου (το 15 –

κίτρινοι κύβοι). Ο πρώτος όρος της προόδου συμβολίζεται με α_1 ενώ ο τελευταίος με α_ν.

- Τα ευρήματα αυτά απεικονίζονται στο Σχήμα 4.5.6.



Σχήμα 4.5.6: Γενικευμένες διαστάσεις παραλληλογράμμου

3. Από το σχήμα προκύπτει το πλήθος των κύβων του παραλληλογράμμου είναι $\nu\cdot(\alpha_1+\alpha_\nu)$. Όμως είπαμε ότι το πλήθος ισούται με $2S$ δηλαδή είναι διπλάσιο του αθροίσματος που θέλαμε να υπολογίσουμε. Συνεπώς το ζητούμενο άθροισμα είναι: $2S=\nu\cdot(\alpha_1+\alpha_\nu)\Leftrightarrow S=\frac{\nu\cdot(\alpha_1+\alpha_\nu)}{2}\Leftrightarrow S=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)$

Γενίκευση τρόπου τοποθέτησης κύβων

Αν ν είναι το συνολικό πλήθος των όρων του αθροίσματος, δηλαδή το πλήθος των στηλών στο παραπάνω σχήμα, και k είναι η αρίθμηση μιας τυχαίας στήλης, τότε ο γενικός κανόνας που ακολουθούμε είναι ο εξής:

Στην στήλη k, προσθέτουμε τόσους κύβους όσους έχει η στήλη ν-k+1 του αρχικού δομήματος

Συνεπώς, στη περίπτωση μας όπου έχουμε *ν=5*, το πλήθος των κύβων που προσθέτω στη κάθε στήλη *k* ακολουθεί τον κανόνα

Στην στήλη k, προσθέτουμε τόσους κύβους όσους έχει η στήλη 6-k του αρχικού δομήματος

Συνεπώς, ο κανόνας με τον οποίο έγινε η πρόσθεση των κύβων είναι ο εξής:

Στη στήλη k	Προσθέτω ότι είχε αρχικά η στήλη
$1^η$	$6-1 = 5^η$
$2^η$	$6-2 = 4^η$
$3^η$	$6-3 = 3^η$
$4^η$	$6-4 = 2^η$
$5^η$	$6-5 = 1^η$

Ομοίως, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας για τη περίπτωση που έχω 8 προσθετέους (άρτιος αριθμός)

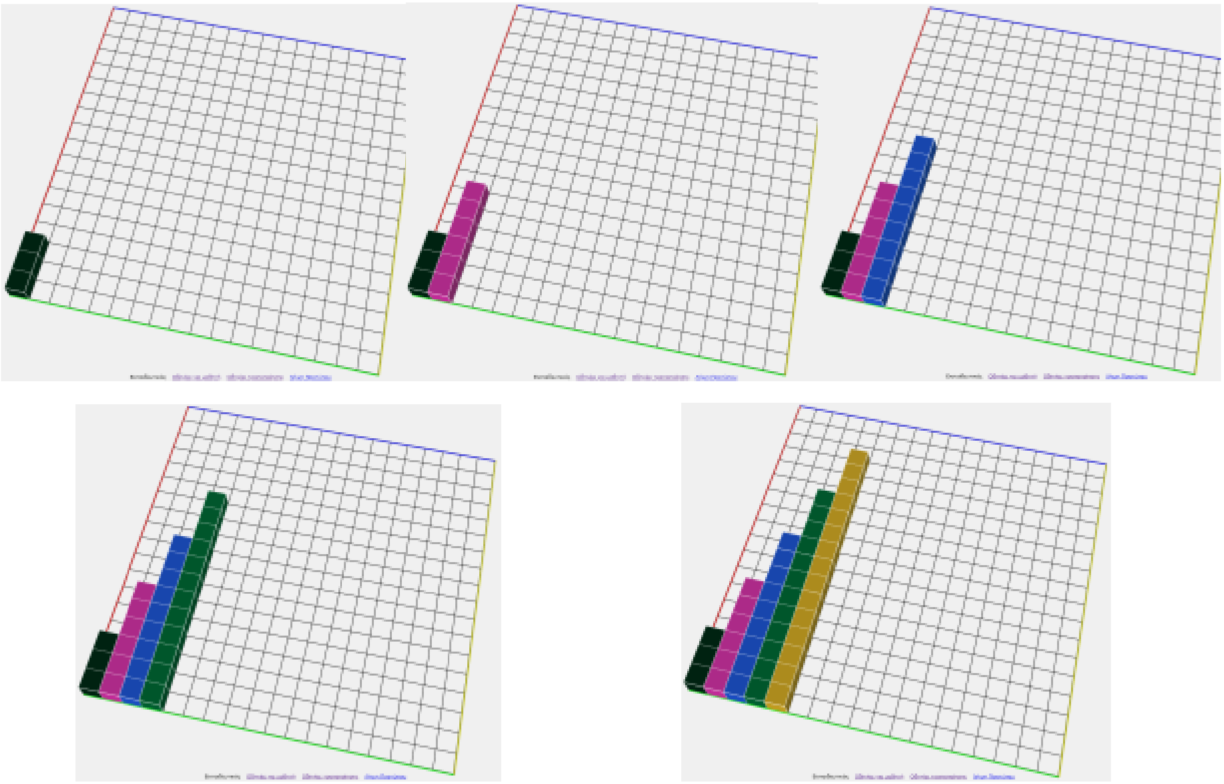
Στη στήλη k	Προσθέτω ότι είχε αρχικά η στήλη
$1^η$	$9-1 = 8^η$
$2^η$	$9-2 = 7^η$
$3^η$	$9-3 = 6^η$
$4^η$	$9-4 = 5^η$
$5^η$	$9-5 = 4^η$
$6^η$	$9-6 = 3^η$
$7^η$	$9-7 = 2^η$
$8^η$	$9-8 = 1^η$

4.6 Παρατήρηση του μαθήματος του εκπαιδευτικού με το δικό του δόμημα

Ο εκπαιδευτικός, λόγω έλλειψης διαθέσιμων ωρών μαθημάτων, επέλεξε τελικά το επόμενο μάθημα του να το πραγματοποιήσει στην φυσική αίθουσα και όχι στην αίθουσα υπολογιστών. Αποφάσισε όμως την μισή διδακτική ώρα να την αφιερώσει στον Κυβόκοσμο και στο δόμημα που είχε δημιουργήσει. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποίησε έναν φορητό υπολογιστή του σχολείου και έναν βιντεοπροβολέα.

Στην ώρα που αφιέρωσε για το Κυβόκοσμο, ο εκπαιδευτικός έκανε μια γρήγορη ανασκόπηση του φύλλου εργασίας που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα. Οι ερωτήσεις του φύλλου εργασίας έγιναν προφορικά στους μαθητές χωρίς όμως να τους δίνεται αρκετός χρόνος για στοχασμό. Παρόλα αυτά τα Φύλλα Εργασίας που σχεδίασε τα έδωσε στους μαθητές με σκοπό, όποιος θέλει, να τα συμπληρώσει στο σπίτι χρησιμοποιώντας τον Κυβόκοσμο.

Προκειμένου να εξοικονομήσει χρόνο, ο εκπαιδευτικός επέλεξε να δείξει έτοιμα τα στάδια του δομήματος του με φωτογραφίες που είχε αποθηκεύσει. Ξεκίνησε το μάθημα λέγοντας ότι αρχικός σκοπός είναι να υπολογιστεί με τη βοήθεια του Κυβόκοσμου το άθροισμα $S=3+6+9+12+15$. Εξήγησε στους μαθητές την λογική με την οποία θα δημιουργήσει το αρχικό δόμημα, δείχνοντας τους διαδοχικά τα βήματα του δομήματος (Σχήμα 4.6.1).



Σχήμα 4.6.1: Βήματα για την δημιουργία του αρχικού δομήματος

Στη συνέχεια εξήγησε την διαδικασία με την οποία θα συμπληρωθεί το αρχικό δόμημα, έτσι ώστε να δημιουργηθεί ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, δείχνοντας διαδοχικά το Σχήμα 4.5.2, Σχήμα 4.5.3, Σχήμα 4.5.4 και Σχήμα 4.5.5 . Οι μαθητές έμοιασαν να κατανοούν την διαδικασία. Έτσι στην ερώτηση πόσο είναι το συνολικό πλήθος των κύβων του τελικού σχήματος σε σχέση με το αρχικό, παραπάνω από το 50% της τάξης προθυμοποιήθηκε να απαντήσει. Το ίδιο συνέβη και στην ερώτηση πόσους κύβους έχει κάθε διάσταση του δομήματος. Στην ερώτηση όμως πόσο είναι τελικά το άθροισμα των όρων της προόδου, κάποιοι μαθητές μπερδεύτηκαν καθώς δε σκέφτηκαν ότι έπρεπε να διαιρέσουν με το 2. Ο καθηγητής τους θύμισε ότι το τελικό δόμημα έχει διπλάσιους κύβους από τους αρχικούς δείχνοντας τους πάλι κάποιες από τις φωτογραφίες και οι μαθητές φάνηκε να κατανοούν την απάντηση.

Στη συνέχεια ο καθηγητής προχώρησε στην γενίκευση των συμπερασμάτων, ρωτώντας τους μαθητές να πουν τι αντιπροσωπεύει το πλήθος των μαύρων κύβων, των κίτρινων, και τέλος το πλήθος των στηλών του σχήματος. Οι μαθητές με τη βοήθεια του καθηγητή οδηγήθηκαν τελικά στις σωστές απαντήσεις. Έτσι ο καθηγητή εμφάνισε την απάντηση δείχνοντας το Σχήμα 4.5.6. Η εργασία ολοκληρώθηκε τελικά στον πίνακα, με τον καθηγητή να δείχνει τις πράξεις που χρειάζεται να γίνουν έτσι ώστε να καταλήξουμε τελικά στη γενική σχέση του αθροίσματος όρων μιας αριθμητικής προόδου. Το τελευταίο μέρος του φύλλου εργασίας που αφορά την γενίκευση του τρόπου τοποθέτησης των κύβων αφέθηκε σαν άσκηση στους μαθητές για το επόμενο μάθημα.

Η μελέτη του μαθήματος καταδεικνύει το γεγονός ότι ο καθηγητής ασπάστηκε σε μεγάλο βαθμό τα διδακτικά πλεονεκτήματα που έχουν οι νέες τεχνολογίες και συγκεκριμένα ο Κυβόκοσμος στην διδασκαλία των μαθηματικών. Ο εκπαιδευτικός δεν έκανε το παραδοσιακό του μάθημα αλλά χρησιμοποίησε για πρώτη φορά φορητό υπολογιστή στη τάξη για να επιδείξει την δραστηριότητα με τον Κυβόκοσμο. Την διδασκαλία αυτή μάλιστα την συνδύασε με την παραδοσιακή διδασκαλία του πίνακα καθώς και με το περιεχόμενο του προηγούμενου μαθήματος του. Οι μαθητές έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στο μάθημα, ενώ φάνηκε ότι κατανόησαν πλήρως το περιεχόμενο της διδασκαλίας.

4.7 Τελική συνέντευξη

Ύστερα από την διεκπεραίωση των δραστηριοτήτων στον χώρο του υπολογιστικού εργαστηρίου, ο εκπαιδευτικός ερωτήθηκε για την εμπειρία που είχε, το πόσο επιτυχημένο πιστεύει ότι ήταν το εγχείρημα και για την γνώμη που έχει τώρα για τη χρήση των νέων τεχνολογιών στην διδασκαλία των μαθηματικών. Τα βασικά σημεία των απαντήσεων του συνοψίζονται στα ακόλουθα σημεία:

- Ο εκπαιδευτικός εξέφρασε την άποψη ότι η παρουσίαση μαθηματικών ενοτήτων με χρήση λογισμικού μπορεί να συνεισφέρει τελικά στην κατανόηση του μαθηματικού αντικειμένου και μπορεί να χρησιμοποιηθεί επικουρικά της κλασικής διδασκαλίας, σε αντίθεση με την άποψη που είχε πριν από τις συνεδριάσεις με τον Κυβόκοσμο.
- Παραδέχτηκε ότι στην κλασική διδασκαλία, οι μαθητές πολλές φορές χάνουν το ενδιαφέρον τους καθώς υπάρχουν μεγάλα χρονικά διαστήματα στα οποία είναι απλοί παρατηρητές. Αυτό κουράζει τους μαθητές και τους κάνει πολλές φορές να χάνουν την συγκέντρωση τους. Πρέπει να ληφθεί υπόψη η συνολική κόπωση των μαθητών από όλα τα μαθήματα.
- Η χρήση του λογισμικού συμβάλει στην ενεργή συμμετοχή των μαθητών καθώς τους αποβάλει τον ρόλο των απλών ακροατών. Οι μαθητές συμμετέχουν ενεργά και ανακαλύπτουν οι ίδιοι σχέσεις και ιδιότητες. Αυτός ο τρόπος μάθησης συνεισφέρει στην εμπέδωση της γνώσης, σε σύγκριση με την στείρα απομνημόνευση αποδείξεων και τύπων.
- Οι μαθητές μαθαίνουν να συνεργάζονται μεταξύ τους και να βοηθάει ο ένας τον άλλον, κάτι που αποτελούσε και για αυτόν στόχο εξαρχής για το μάθημα, καθώς με αυτόν τον τρόπο αυξάνονται οι γνώσεις και οι δεξιότητες τους.

- Παρόλα αυτά εμφανίστηκαν κάποιες από τις δυσκολίες τις οποίες και είχε προβλέψει. Υπήρξε από κάποιους μαθητές διάσπασή προσοχής, καθώς συζητούσαν μεταξύ τους μη δίνοντας την δέουσα προσοχή στο μάθημα. Συνεπώς η ησυχία στη τάξη δεν ήταν η επιβεβλημένη πράγμα που δε βοηθούσε κάποιους μαθητές να συγκεντρωθούν στη δραστηριότητα τους. Το γεγονός ότι ο ίδιος ήταν απασχολημένος σε άλλες θέσεις εργασίας προκειμένου να επιλύσει απορίες, συνέβαλε στην κατάσταση αυτή. Συνεπώς, κατά τον ίδιο, η ύπαρξη κάποιου βοηθού κατά την διάρκεια του εργαστηρίου ο οποίος θα επιλύει τα τεχνολογικά κυρίως προβλήματα των μαθητών είναι που σημαντική, έτσι ώστε ο ίδιος ο καθηγητής να έχει πιο εποπτικό ρόλο επιβάλλοντας την ησυχία στη τάξη.
- Αν και σχημάτισε θετική άποψη για τον Κυβόκοσμο, εξέφρασε τον προβληματισμό του στο κατά πόσο θα ήταν πρακτικό να χρησιμοποιηθεί για μελέτη προβλημάτων με μεγαλύτερους αριθμούς. Η διαδικασία επέκτασης του πλέγματος έτσι ώστε να αυξηθεί το συνολικό πλήθος των κύβων είναι επίπονη και απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή καθώς τυχών αβλεψία μπορεί να καταλήξει σε αποτυχία φόρτισης του δομήματος, ενώ η εύρεση του λάθος στον κώδικα δεν είναι πάντα προφανείς και μπορεί να χρειαστεί αρκετή ώρα μέχρι αυτό να εντοπιστεί.
- Ο εκπαιδευτικός επέμενε στην άποψη του ότι η μέθοδος διδασκαλίας που πρέπει να ακολουθείται, πρέπει να βασίζεται στο παραδοσιακό μοντέλο του πίνακα, με παρουσίαση της θεωρίας και αποδείξεων αυτής, επίλυση εφαρμογών και ερωτήσεις προς τους μαθητές σε καίρια σημεία. Παρόλα αυτά, η διδασκαλία αυτή μπορεί να συνεπικουρείται από τη χρήση νέων τεχνολογιών έτσι ώστε ο μαθητής να ανακύπτει μόνος του εποπτικά ορισμένα συμπεράσματα αλλά και να οπτικοποιεί θέματα της θεωρίας τα οποία δεν γίνονται τελείως κατανοητά με την κλασική διδασκαλία. Η αδυναμία των μαθητών να κατανοήσουν σε βάθος θέματα των μαθηματικών γίνεται φανερή στα προβλήματα, όπου ο μαθητής καλείται να συσχετίσει και να εφαρμόσει την στείρα μαθηματική θεωρία με προβλήματα της καθημερινότητας. Επίσης γίνεται ορατή όταν ο μαθητής έρχεται αντιμέτωπος με ασκήσεις που φαίνονται εκ πρώτης όψεως διαφορετικές, όπου όμως επιλύονται με παρόμοιες τεχνικές με αυτές που έχει διδαχτεί και που έχει χρησιμοποιήσει. Ο Κυβόκοσμος και γενικά τα ψηφιακά βοηθήματα μπορούν να βοηθήσουν σημαντικά στους τομείς αυτούς.
- Ο εκπαιδευτικός τέλος, παρόλο που βρήκε τη χρήση των νέων τεχνολογιών χρήσιμη και ουσιώδης στην εκπαιδευτική διαδικασία, εξέφρασε τον προβληματισμό του στο κατά πόσο υπάρχει ο χρόνος για να τις

χρησιμοποιούν εκτενώς στο μάθημα στη διάρκεια μιας σχολικής χρονιάς. Η ύλη που χρειάζεται να καλύψουν, ειδικά στην Άλγεβρα της Α’ λυκείου με την οποία ασχοληθήκαμε, είναι πολύ εκτενείς και τα χρονικά περιθώρια είναι περιορισμένα. Ειδικά με την εισαγωγή της τράπεζας θεμάτων, οι απατήσεις για πλήρη κάλυψη της ύλης και για επίλυση μεγάλης γκάμας ασκήσεων στενεύει ακόμα περισσότερο τα χρονικά περιθώρια κάνοντας ίσως τη χρήση των νέων τεχνολογιών πολυτέλεια. Παρόλα αυτά παραδέχτηκε ότι ίσως μπορεί να βρεθεί μια χρυσή τομή μεταφέροντας την χρήση του Κυβόκοσμου από το εργαστήριο στην κανονική αίθουσα μαθημάτων, όπως έκανες αυτός στο τελευταίο του μάθημα, αφήνοντας σαν άσκηση την εξάσκηση με τον Κυβόκοσμο από τους ίδιους τους μαθητές.

5 Συμπεράσματα

Ο κύριος σκοπός της έρευνας ήταν να εξεταστεί η διαφοροποίηση των πρακτικών ενός εκπαιδευτικού, ο οποίος εφάρμοζε την παραδοσιακή διδασκαλία χωρίς τη χρήση ψηφιακών εκπαιδευτικών προγραμμάτων, στην διδασκαλία των αριθμητικών προόδων Α’ Λυκείου, κατά τη διάρκεια αξιοποίησης του ψηφιακού δομήματος τους Κυβόκοσμου. Για τον σκοπό αυτό:

1. παρακολουθήσαμε το μάθημα του εκπαιδευτικού στη τάξη καταγράφοντας τις πρακτικές του
2. πραγματοποιήσαμε ημιδομημένη συνέντευξη για να κατανοήσουμε τους τρόπους διδασκαλίας και την γνώμη του για τις νέες τεχνολογίες
3. εκπαιδεύσαμε τον εκπαιδευτικό στον Κυβόκοσμο
4. παρατηρήσαμε την εφαρμογή του Κυβόκοσμου στη τάξη
5. συνεπικουρήσαμε στον σχεδιασμό νέας δραστηριότητας με τον Κυβόκοσμο
6. παρατηρήσαμε το μάθημα του εκπαιδευτικού με τη νέα δραστηριότητα στον Κυβόκοσμο
7. πραγματοποιήσαμε τελική συνέντευξη με τον εκπαιδευτικό

Όλα τα στάδια της έρευνας, όπως αυτά είχαν περιγραφεί αρχικά στο χρονοδιάγραμμα, ολοκληρώθηκαν επιτυχώς εξάγοντας χρήσιμα συμπεράσματα. Ως εκ τούτου, ο σκοπός της έρευνας επετεύχθη.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα γενικά συμπεράσματα της εργασίας και προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

5.1 Βασικά αποτελέσματα – Συμπεράσματα

Στη συνέχεια ανακεφαλαιώνουμε τα βασικά αποτελέσματα της έρευνας, ανά φάση που αυτή πραγματοποιήθηκε.

Από την **Α’ Φάση** της έρευνας, δηλαδή την παρακολούθηση του μαθήματος του εκπαιδευτικού πριν την εκπαίδευση του και από την ημιδομημένη συνέντευξη που πραγματοποιήσαμε, προκύπτει ότι ο εκπαιδευτικός:

- ήταν υπέρ της παραδοσιακής διδασκαλίας.
- δεν ήταν εκπαιδευμένος στις νέες τεχνολογίες (β’ επίπεδο).
- είχε πάθος με την διδασκαλία και ήθελε οι μαθητές να μάθουν καλά και σωστά μαθηματικά.

- αν και γνώριζε την ύπαρξη εκπαιδευτικών λογισμικών δεν είχε κάνει χρήση αυτών στη τάξη και δεν πίστευε ότι μπορούσαν να συνεισφέρουν στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Από την **Β’ Φάση** της έρευνας, δηλαδή την εκπαίδευση του εκπαιδευτικού με τον Κυβόκοσμο και την παρατήρηση του εργαστηρίου με αυτόν, προκύπτει ότι:

- Αν και ο εκπαιδευτικός δεν είχε καλές γνώσεις υπολογιστών, δεν δυσκολεύτηκε στην εκμάθηση του λογισμικού.
- Ο εκπαιδευτικός βρήκε ενδιαφέρουσα την οπτικοποίηση των μαθηματικών αποδείξεων μέσω του Κυβόκοσμου.
- Ο εκπαιδευτικός κατάφερε να φέρει εις πέρας τις δραστηριότητες στο εργαστήριο χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία.
- Αναπτύχθηκαν οι δεξιότητες του εκπαιδευτικού καθώς για πρώτη φορά χρησιμοποίησε ψηφιακά εργαλεία στην εκπαίδευση των μαθηματικών.

Από την **Γ’ Φάση** της έρευνας, δηλαδή την δημιουργία νέας δραστηριότητας από τον εκπαιδευτικό, το μάθημα του με αυτή και την τελική συνέντευξη μαζί του προκύπτει ότι:

- Ο εκπαιδευτικός κατάφερε να οργανώσει με επιτυχία την δραστηριότητα χωρίς να αντιμετωπίσει ιδιαίτερες δυσκολίες (αυτοδιαχείριση).
- Ο εκπαιδευτικός για πρώτη φορά έκανε χρήση λογισμικού μέσα στην τάξη.
- Ο εκπαιδευτικός συνδύασε την παραδοσιακή διδασκαλία με την χρήση νέων τεχνολογιών.
- Έγινε μετατόπιση του ρόλου του εκπαιδευτικού καθώς ενισχύθηκε ο επεξηματικός και ο διευκολυντικός ρόλος.
- Ο εκπαιδευτικός αναγνώρισε ότι οι δραστηριότητες στον Κυβόκοσμο:
    - Παρέχουν δυνατότητες οπτικοποίησης και πειραματισμού
    - Βοηθούν στην νοηματοδότιση εννοιών και στην κατανόηση των αποδείξεων
    - Προωθούν την συνεργασία των μαθητών
    - Ενισχύουν την δημιουργικότητα και την κριτική σκέψη
- Η άποψη του εκπαιδευτικού μετατοπίστηκε στο ότι οι νέες τεχνολογίες πρέπει να δρουν επικουρικά της παραδοσιακής διδασκαλίας αλλά δεν μπορούν να την αντικαταστήσουν

Το **γενικό συμπέρασμα** που εξάγεται από όλα τα παραπάνω, είναι ότι οι πρακτικές του εκπαιδευτικού μετασχηματίστηκαν μετά την εκπαίδευση του με τον Κυβόκοσμο.

Επιμέρους συμπεράσματα – προτάσεις που προκύπτουν από τα αποτελέσματα της έρευνας είναι ότι:

- Η προτροπή για εκπαίδευση και η εύκολη πρόσβαση σε αυτήν, μπορεί να οδηγήσουν στην μετατόπιση των πρακτικών ενός εκπαιδευτικού.
- Το μάθημα με τη χρήση νέων τεχνολογιών γίνεται πιο προσιτό και ευχάριστο στους μαθητές. Επίσης συνεισφέρει στην βαθύτερη κατανόηση μαθηματικών αποδείξεων και ιδιοτήτων.
- Ο Κυβόκοσμος μπορεί να αποτελέσει ένα πολύ ισχυρό εργαλείο στην βαθύτερη κατανόηση των αριθμητικών προόδων της Α' Λυκείου.
- Ο Κυβόκοσμος είναι ένα φιλικό προς στον χρήστη εργαλείο, καθώς η εκμάθηση του δεν απαιτεί ιδιαίτερη προσπάθεια ακόμα και από κάποιον που δεν έχει ευχέρεια με τους υπολογιστές. Συνεπώς είναι ένα εργαλείο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί εύκολα τόσο από εκπαιδευτικούς όσο και από μαθητές.

5.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Ως προτάσεις για συνέχιση και επέκτασης της παρούσας έρευνας αναφέρουμε τα παρακάτω σημεία:

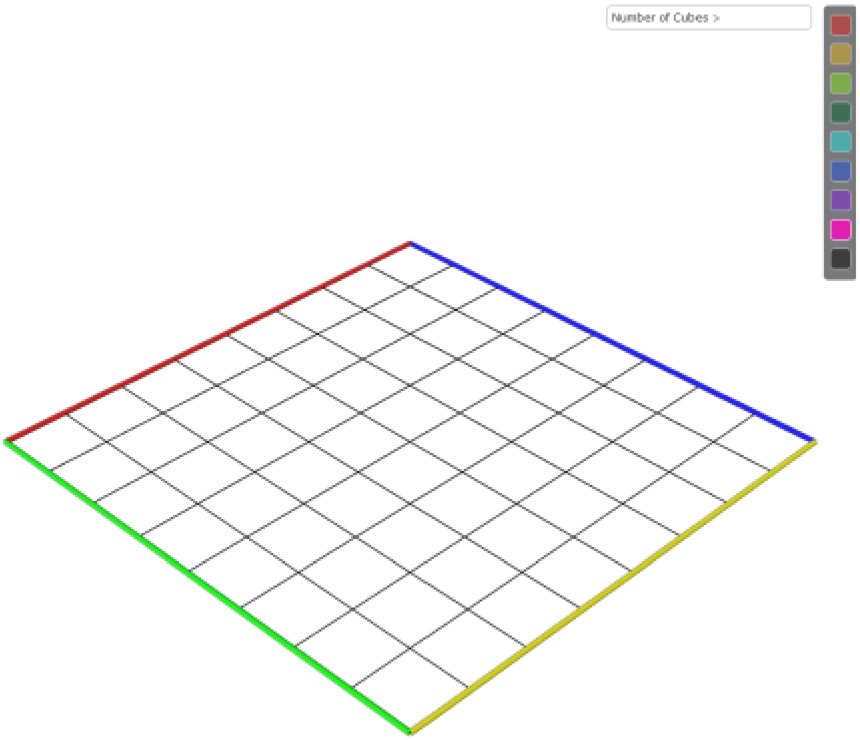
- Εξέταση του ίδιου καθηγητή μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, έτσι ώστε να μελετηθεί σε τι βαθμό συνεχίζει να χρησιμοποιεί τις νέες τεχνολογίες και τον Κυβόκοσμο στις εκπαιδευτικές του πρακτικές.
- Εξέταση επιπλέον περιπτώσεων καθηγητών. Η μελέτη περιπτώσεων καθηγητών με παρόμοιο αλλά και με διαφορετικό προφίλ θα συνείσφερε σημαντικά στην εξαγωγή επιπλέον συμπερασμάτων.
- Διερεύνηση της χρήσης του Κυβόκοσμου σε διαφορετικά μαθηματικά θέματα, όπως είναι οι γεωμετρικές πρόοδοι και οι εξισώσεις.

Παράρτημα Α
Κυβόκοσμος

A.1 Οδηγίες για την εκμάθηση του Κυβόκοσμου

Οδηγίες χρήσεως

Ο καμβάς εργασίας, δηλαδή το πλέγμα και τα κυβάκια που τοποθετείς, δίνει την αίσθηση των τριών διαστάσεων του χώρου και απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Το πλέγμα του σχήματος έχει διαστάσεις 8 x 8 αλλά μπορεί να προσαρμοστεί.



Στα παρακάτω σημεία παρουσιάζονται οι βασικές λειτουργίες του Κυβόκοσμου και ο τρόπος με τον οποίο αυτές επιτυγχάνονται:

- **Πλοήγηση**: Για να πλοηγηθείς στο δόμημα, δηλαδή για να το περιστρέψεις και στις τρεις διαστάσεις αλλάζοντας την οπτική γωνία, κάνεις «drag» με το ποντίκι, δηλαδή μεταφορά του ποντικιού έχοντας πατημένο το αριστερό κουμπί του.
- **Προσθήκη κύβων**: Για να προσθέσεις κύβους πάνω στο πλέγμα ή πάνω σε άλλον κύβο, κάνε κλικ με το αριστερό κουμπί του ποντικιού στο σημείο που θες.

- **Αφαίρεση κύβου**: Για να σβήσεις έναν κύβο, πηγαίνεις το βέλος του ποντικιού πάνω στον κύβο και πατάς το δεξί κουμπί του ποντικιού.
- **Χρωματισμός:** Για να επιλέξεις διαφορετικά χρώματα στους κύβους που θα προσθέσεις, επιλέγεις το χρώμα με δεξί κλικ στην παλέτα που βρίσκεται στο πάνω δεξί μέρος της οθόνης.
- **Επαναφορά δομήματος**: Για να επαναφέρεις τον καμβά στην αρχική του μορφή, για να σβήσουν δηλαδή όλες οι αλλαγές που έκανες, πρέπει να πατήσεις μαζί τα πλήκτρα CTRL και BACKSPACE
- **Μεγέθυνση**: Για να μεγεθύνεις ή να σμικρύνεις («πλησιάζεις ή απομακρύνεσαι») τον καμβά με την ρόδα (wheel) του ποντικιού.
- **Πληροφορίες:** Μερικές φορές υπάρχει πληροφορία για το πλήθος των κύβων, η οποία εμφανίζεται επάνω και προς τα δεξιά της οθόνης. Σε αυτές τις περιπτώσεις, κάνοντας κλικ στο πλαίσιο ανοίγεις και κλείνεις τις λεπτομέρειες.

Δημιουργία νέου μικροπειράματος

Η εφαρμογή αναπτύχθηκε σε JavaScript/html5 και στηρίζεται στο WebGL (http://www.khronos.org/), το οποίο είναι ένα JavaScript API του OpenGL ES 2.0 για το web. Ειδικότερα, χρησιμοποιήθηκε το framework http://threejs.org/ που πρόσφατα έγινε πολύ δημοφιλές. Οι επιλογές του λογισμικού βασίστηκαν σε τρεις βασικούς άξονες:

- Οι εξελίξεις στην τεχνολογία λογισμικού και οι τάσεις της αγοράς.
- Απλή τεχνολογία web, χωρίς την ανάγκη βοηθητικών πρόσθετων εφαρμογών (addons).
- Ελεύθερο ή/και λογισμικό ανοικτού κώδικα.

Δόθηκε βαρύτητα ώστε οι εκπαιδευτικοί να αποκτήσουν ένα εργαλείο ανάπτυξης μικροπειραμάτων για την κατανόηση του χώρου.

Υπάρχουν αρκετές δυνατότητες παραμετροποίησης της εφαρμογής. Αν τις χρησιμοποιήσετε μπορείτε εύκολα να δημιουργήσετε το δικό σας μικροπείραμα και να το αναρτήσετε στο διαδίκτυο.

Στον φάκελο js υπάρχει ένα αρχείο *model.js*. Μπορείτε να το ανοίξετε με οποιονδήποτε text editor, όπως το notepad των windows, για να κάνετε αλλαγές.

Μετά το σχόλιο *TEXT DATA* υπάρχουν 3 μεταβλητές: *titleText*, *problemText* και *authorText*. Αυτές περιέχουν το κείμενο για τον τίτλο του μικροπειράματος (πάνω μέρος παραθύρου), την περιγραφή της προτεινόμενης δραστηριότητας (κάτω αριστερό μέρος) και το όνομά σας (κάτω μέρος). Ο τίτλος πρέπει να περιέχει το πολύ 120 χαρακτήρες, η περιγραφή το πολύ 500 και το όνομα το πολύ 70.

Ακολουθεί το σχόλιο *COLOR*, μετά το οποίο υπάρχει ο πίνακας χρωμάτων *colors* και η μεταβλητή *wireFrame*. Στον πίνακα μπορείτε να καθορίσετε την παλέτα των 9 χρωμάτων που χρησιμοποιούνται από την εφαρμογή. Ο πίνακας περιέχει 10 στοιχεία. Το πρώτο, που έχει δείκτη 0, είναι δεσμευμένο. Τα υπόλοιπα, που έχουν δείκτες από 1 μέχρι 9, μπορείτε να τα αλλάξετε. Οι τιμές για τα χρώματα είναι στο δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης και αυτό δηλώνεται από το πρόθεμα *0x*. Η μεταβλητή *wireFrame* καθορίζει την εμφάνιση ή μη των λευκών ακμών στους κύβους. Όταν έχει τιμή *true* εμφανίζονται, διαφορετικά πρέπει να έχει τιμή *false*.

Μετά το σχόλιο *DIMENSIONING* υπάρχει η μεταβλητή *gridDimension*. Αυτή πρέπει να είναι άρτιο πολλαπλάσιο του 50 που είναι η ακμή των κύβων (αυτό δεν πρέπει να αλλάζει). Αν για παράδειγμα θέσετε την τιμή 400, τότε θα έχετε ένα πλέγμα 8 x 8.

Στη συνέχεια και κάτω από το σχόλιο *COUNTERS*, υπάρχουν 4 μεταβλητές που καθορίζουν την εμφάνιση ή μη των δεικτών πλήθους των κύβων:

- πλήθος κύβων που υπάρχουν στον «μισοψημένο» καμβά από τον εκπαιδευτικό:
  init_show = true;
- πλήθος κύβων που πρόσθεσε ο μαθητής:
  usr_show   = true;
- πλήθος κύβων που διέγραψε ο μαθητής από αυτούς που υπήρχαν στον αρχικό καμβά
  rare_show = true;
- τρέχον σύνολο κύβων
  tot_show = true;

Μετά το σχόλιο *CAMERAS* υπάρχουν 4 μεταβλητές: *planeView*, *redView*, *blueView* και *greenView*. Οι τιμές τους είναι *true* ή *false* και καθορίζουν εάν θα «δουλεύουν» ή όχι οι κάμερες για την κάτοψη και τις 3 όψεις.

Μετά το σχόλιο *MODEL DATA* υπάρχει η μεταβλητή *modelGeometry*. Αυτή είναι ένας πίνακας 3 διαστάσεων και τηρεί δεδομένα για το μοντέλο, δηλαδή την κατασκευή που εμφανίζεται στις όψεις. Η τιμή 0 αντιστοιχεί σε κενό χώρο και οι τιμές 1 έως 9 σε κύβο αντίστοιχου χρώματος. Η διάταξη του πίνακα είναι ορισμένη ως εξής: γραμμή, στήλη, πύργος. Δηλαδή, το πρώτο σετ τιμών αντιστοιχεί στον πύργο της πρώτης γραμμής και πρώτης στήλης. Για παράδειγμα, αν έχετε καμβά 2 x 2 τότε μια πιθανή κατασκευή θα ήταν η εξής:

```
modelGeometry =

[
    [
        [1,0],
        [0,0]
    ],
    [
        [0,1],
        [2,2]
    ]
];
```

Οι τιμές που μπορούν να επεξεργαστούν έχουν χρωματίσει κόκκινες. Οι αγκύλες, τα κόμματα και το ερωτηματικό στο τέλος είναι μέρος της σύνταξης της γλώσσας javascript.

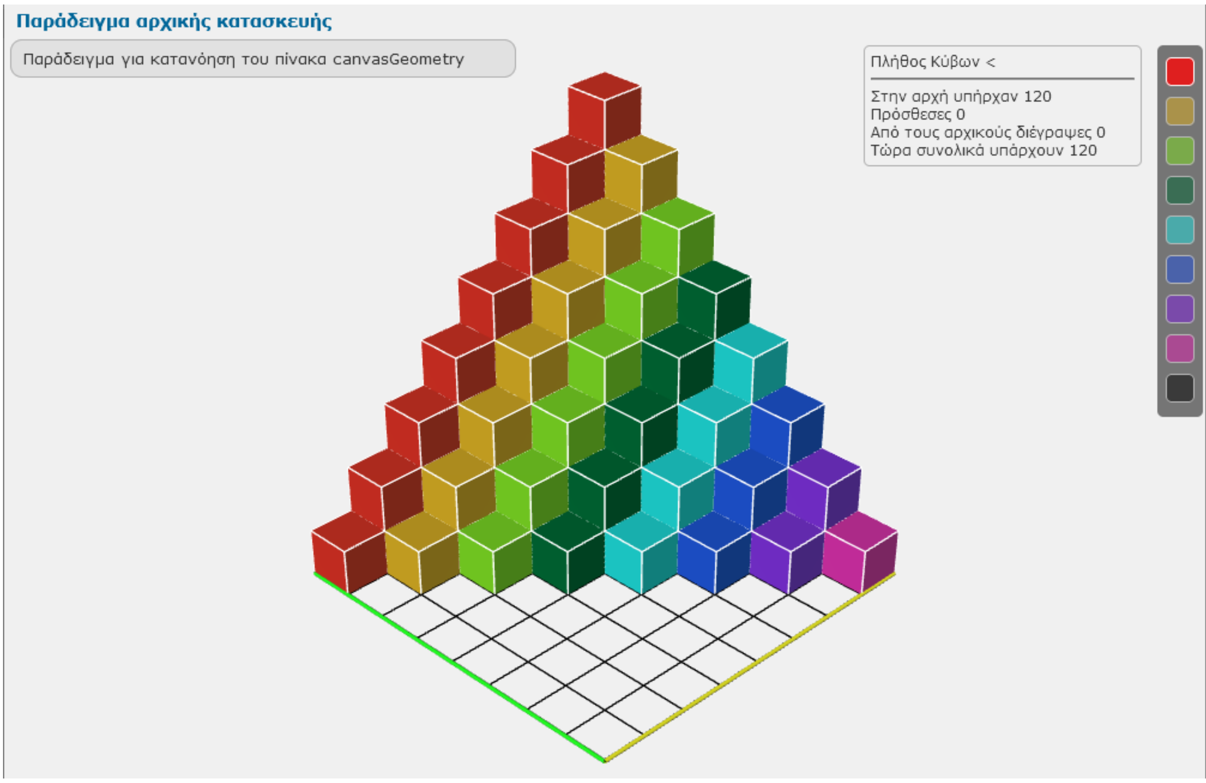
Ακολουθεί η μεταβλητή *canvasGeometry*, κάτω από το σχόλιο *CANVAS DATA*, που αφορά τυχόν «μισοψημένη» (ημιτελή) κατασκευή στον καμβά. Η λογική της επεξεργασίας του πίνακα είναι πανομοιότυπη με αυτήν για τον *modelGeometry*. Αυτήν τη μεταβλητή μπορείτε να την χρησιμοποιήσετε στις περιπτώσεις κατά τις οποίες θέλετε οι μαθητές σας να ολοκληρώσουν κάτι. Το πλήθος των πεδίων θα πρέπει να είναι τόσα όσα είναι και τα κελιά του επιπέδου. Η οργάνωση των πεδίων γίνεται σε στήλες και σε σειρές. Αν ένα κελί έχει τιμή 0 θα πει ότι είναι κενό, ενώ αν έχει τιμές από 1 έως 9 πάει να πει ότι στο κελί υπάρχει κύβος αντίστοιχου χρώματος που έχεις δηλωθεί στην παλέτα χρωμάτων (π.χ. αν δηλωθεί η τιμή 2 τότε θα χρησιμοποιηθεί το δεύτερο χρώμα της παλέτας. Προσοχή: το χρώμα αυτό αντιστοιχίζεται στο τρίτο χρώμα στον πίνακα *colors* καθώς όπως είπαμε το πρώτο χρώμα του πίνακα είναι δεσμευμένο). Στη συνέχεια ακολουθεί ένα παράδειγμα για έναν καμβά 8 x 8.

```
canvasGeometry =
[
        [           // 1st row
                    [1,1,1,1,1,1,1,1],  // tower in 1st column
                    [2,2,2,2,2,2,2,0],  // tower in 2nd column
                    [3,3,3,3,3,3,0,0],  // tower in 3rd column
                    [4,4,4,4,4,0,0,0],  // tower in 4th column
                    [5,5,5,5,0,0,0,0],  // tower in 5th column
                    [6,6,6,0,0,0,0,0],  // tower in 6th column
                    [7,7,0,0,0,0,0,0],  // tower in 7th column
                    [8,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 8th column
        ],
        [           // 2nd row
                    [1,1,1,1,1,1,1,0],  // tower in 1st column
                    [2,2,2,2,2,2,0,0],  // tower in 2nd column
```

```
            [3,3,3,3,3,0,0,0],  // tower in 3rd column
            [4,4,4,4,0,0,0,0],  // tower in 4th column
            [5,5,5,0,0,0,0,0],  // tower in 5th column
            [6,6,0,0,0,0,0,0],  // tower in 6th column
            [7,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 7th column
            [0,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 8th column
],
[           // 3rd row
            [1,1,1,1,1,1,0,0],  // tower in 1st column
            [2,2,2,2,2,0,0,0],  // tower in 2nd column
            [3,3,3,3,0,0,0,0],  // tower in 3rd column
            [4,4,4,0,0,0,0,0],  // tower in 4th column
            [5,5,0,0,0,0,0,0],  // tower in 5th column
            [6,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 6th column
            [0,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 7th column
            [0,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 8th column
],
[           // 4th row
            [1,1,1,1,1,0,0,0],  // tower in 1st column
            [2,2,2,2,0,0,0,0],  // tower in 2nd column
            [3,3,3,0,0,0,0,0],  // tower in 3rd column
            [4,4,0,0,0,0,0,0],  // tower in 4th column
            [5,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 5th column
            [0,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 6th column
            [0,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 7th column
            [0,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 8th column
],
[           // 5th row
            [1,1,1,1,0,0,0,0],  // tower in 1st column
            [2,2,2,0,0,0,0,0],  // tower in 2nd column
            [3,3,0,0,0,0,0,0],  // tower in 3rd column
            [4,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 4th column
            [0,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 5th column
            [0,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 6th column
            [0,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 7th column
            [0,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 8th column
],
[           // 6th row
            [1,1,1,0,0,0,0,0],  // tower in 1st column
            [2,2,0,0,0,0,0,0],  // tower in 2nd column
            [3,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 3rd column
            [0,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 4th column
            [0,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 5th column
            [0,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 6th column
            [0,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 7th column
            [0,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 8th column
],
[           // 7th row
            [1,1,0,0,0,0,0,0],  // tower in 1st column
            [2,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 2nd column
            [0,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 3rd column
            [0,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 4th column
            [0,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 5th column
            [0,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 6th column
            [0,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 7th column
            [0,0,0,0,0,0,0,0],  // tower in 8th column
],
```

```
                [           // 8th row
                            [1,0,0,0,0,0,0,0],   // tower in 1st column
                            [0,0,0,0,0,0,0,0],   // tower in 2nd column
                            [0,0,0,0,0,0,0,0],   // tower in 3rd column
                            [0,0,0,0,0,0,0,0],   // tower in 4th column
                            [0,0,0,0,0,0,0,0],   // tower in 5th column
                            [0,0,0,0,0,0,0,0],   // tower in 6th column
                            [0,0,0,0,0,0,0,0],   // tower in 7th column
                            [0,0,0,0,0,0,0,0],   // tower in 8th column
                ],
        ];
}
```

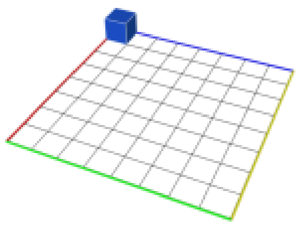
Ο παραπάνω κώδικας παράγει το αρχικό δόμημα που απεικονίζεται στο παρακάτω Σχήμα.



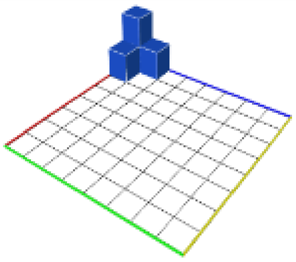
Α.2 Φύλλο εργασίας 1 – Πρώτο δόμημα ερευνήτριας

Αποκτούμε πρόσβαση στο περιβάλλον του Κυβόκοσμου, ανοίγοντας το αρχείο ΚΥΒΟΚΟΣΜΟΣ-1 που βρίσκεται αποθηκευμένο στα τοπικά αρχεία του υπολογιστή της τάξης και εκτελούμε την παρακάτω δραστηριότητα:

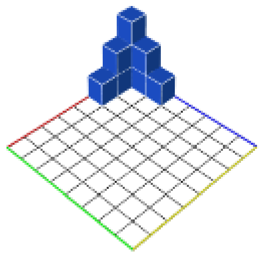
Δίνονται οι πύργοι Π1, Π2, Π3.



Π1



Π2



Π3

1. Προσπαθήστε να κατασκευάσετε τους πύργους Π4 και Π5
   Τραβήξτε στιγμιότυπο οθόνης από το αποτέλεσμα και επικολλήστε το εδώ:

2. Μπορείτε να περιγράψετε το μοτίβο που παρατηρείτε;

………
………
………
………

3. Από πόσους ορόφους θα αποτελείται ο Π6;

………
………
………
………

Πόσα κυβάκια θα έχει σε κάθε όροφο;

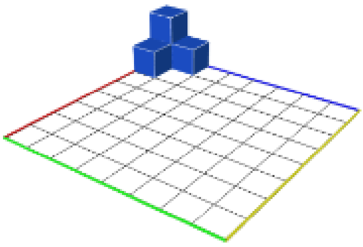
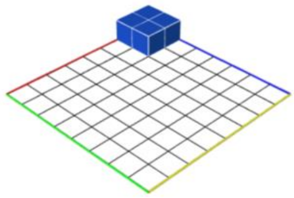
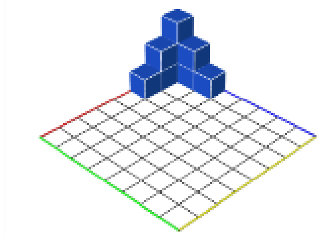
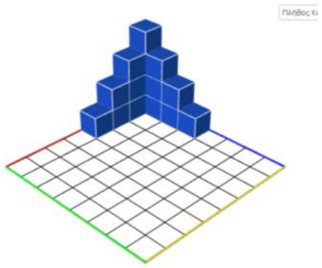
………
………
………
………

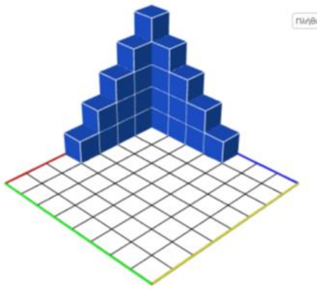
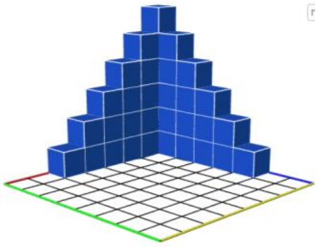
4. Από πόσα κυβάκια αποτελείται ο κάθε πύργος;

Π1	
Π2	
Π3	
Π4	
Π5	
Π6	

Μαντέψτε ένα τύπο για το πλήθος $Σ_ν$ των κύβων του $Π_ν$ για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό ν.

5. Προσπαθήστε να αποδείξετε γεωμετρικά τον τύπο που μαντέψατε με τη βοήθεια του Κυβόκοσμου (για ν = 3, 4, 5, 6) μεταφέροντας κάθε όροφο του $Π_ν$ (για ν = 3, 4, 5, 6) στο ίδιο επίπεδο έτσι ώστε να σχηματιστεί ένα τετράγωνο. Εξηγήστε γιατί αυτή η διαδικασία μπορεί να γίνει για οποιοδήποτε ν.

	Τρισδιάστατη αναπαράσταση	**Μεταφορά στο επίπεδο του καμβά**	**Μαθηματική ισότητα**
Π2			$1+3=2^2$
Π3			
Π4			

Π5			
Π6			

6. Γράψτε έναν τύπο για το άθροισμα Σν=1+3+5+7+…+(2ν-1) των ν πρώτων περιττών αριθμών

……

……

……

……

Μπορείτε να αποδείξετε αυτό τον τύπο αλγεβρικά;

(αν θέλετε μπορείτε να δείτε την υπόδειξη που υπάρχει στην επόμενη σελίδα)

……

……

……

……

……

……

……

……

Παράδειγμα αλγεβρικής απόδειξης για τους τρείς πρώτους όρους

$$\begin{array}{rl} 1+3+5 & \\ 5+3+1 & + \\ \hline 6+6+6=3\cdot 6 & \end{array}$$

2S=18

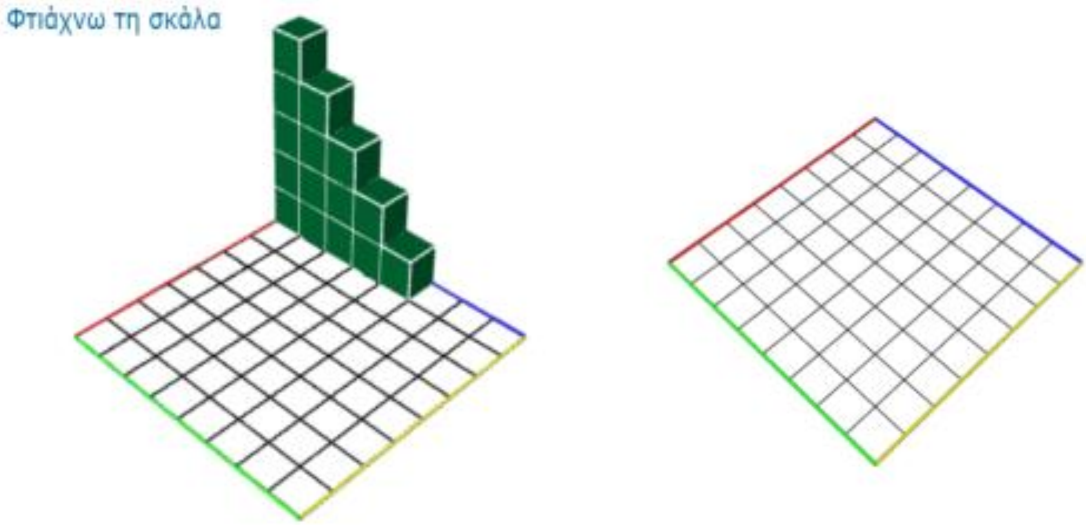
$S=9=3^2$

A.3 Φύλλο εργασίας 2 – Δεύτερο δόμημα ερευνήτριας

Η Νίκη οργανώνει τους κύβους σε ένα τριγωνικό πύργο (όπως φαίνεται στην εικόνα) στον οποίο κάθε γραμμή έχει ένα λιγότερο κύβο από την προηγούμενη. Για παράδειγμα, ο παραπάνω πύργος αποτελείται από 15 συνολικά πύργους όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν ένας πύργος έχει 6 κύβους στη βάση του, πόσους κύβους έχει συνολικά;

β) Αν υπάρχουν 36 κύβοι σε ένα πύργο, πόσοι κύβοι υπάρχουν στη βάση του;

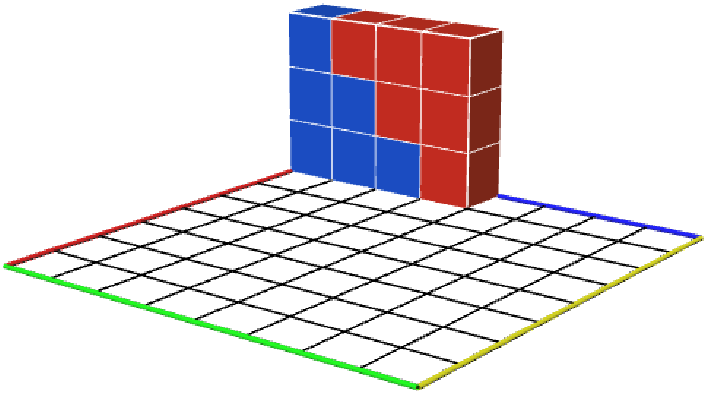


Ονομάζουμε Π2 την σκάλα που έχει 2 κύβους στο 1ο επίπεδο και 1 κύβο στο 2ο .

Ονομάζουμε Π3 την σκάλα που αποτελείται από 3 κύβους στην βάση (1^o επίπεδο) 2 κύβους στο 2^o και 1 κύβο στο 3^o κοκ.

1. Φτιάξτε το Π3.

2. Στη βάση του Π3 πρόσθεσε ένα κύβο <u>διαφορετικού χρώματος</u>.
   Στο 2ο επίπεδο πρόσθεσε 2 κύβους.
   Στο 3ο επίπεδο πρόσθεσε 3 κύβους.
   Το αποτέλεσμα της διαδικασίας φαίνεται στην επόμενη σελίδα



3. Το ορθογώνιο που σχηματίζεται τι διαστάσεις έχει;

………
………

4. Πόσο είναι το πλήθος των κύβων;

………
………

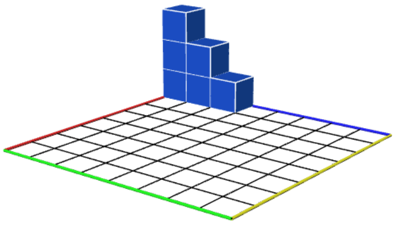
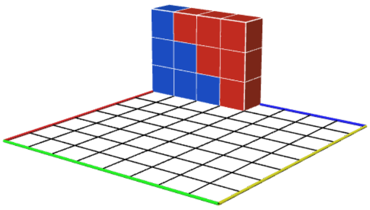
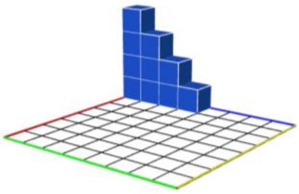
5. Ποιο άθροισμα υπολογίστηκε (ποια ισότητα αποδείχτηκε);

………
………

6. Εκτελέστε την ίδια διαδικασία για τον Π4, Π5, Π6. Τραβήξτε στιγμιότυπα οθόνης από το αποτέλεσμα και επικολλήστε τα στον πίνακα της επόμενης σελίδας.

7. Συμπληρώστε στο σχήμα την στήλη της μαθηματικής ισότητας που προκύπτει. Μπορείτε να βρείτε το μοτίβο; Ποιος μαθηματικός τύπος αποδεικνύεται;

………
………
………
………

	Τρισδιάστατη αναπαράσταση	Μεταφορά στο επίπεδο του καμβά	Μαθηματική ισότητα
Π3			1+2+3=(3·4)/2
Π4			
Π5			
Π6			

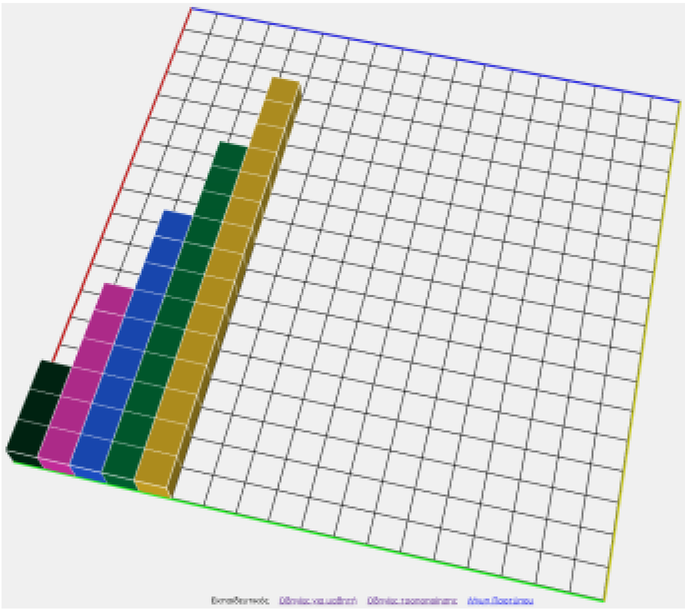
Α.4 Φύλλο εργασίας 3 – Δόμημα εκπαιδευτικού

Στην εργασία αυτοί θα δώσουμε μια σχηματική απόδειξη της σχέσης $\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)$ του αθροίσματος των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου.

Αρχικά θα υπολογίσουμε το άθροισμα των 5 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου που έχει πρώτο όρο το 3 και διαφορά 3. Θα υπολογίσουμε δηλαδή το άθροισμα: $S=3+6+9+12+15$. Στη συνέχεια θα γίνει η γενίκευση για ν αριθμούς.

Θα αναπαραστήσουμε στον Κυβόκοσμο τους αριθμούς αυτούς. Σε κάθε στήλη του Κυβόκοσμου θα τοποθετήσουμε τόσους κύβους όσος είναι και ο αριθμός του όρου της προόδου.

Συνεπώς στη πρώτη στήλη θα τοποθετήσουμε 3 κύβους, στη δεύτερη 6 κ.ο.κ. Χρησιμοποιείστε διαφορετικό χρώμα σε κάθε στήλη (μαύρο, ροζ, μπλε, πράσινο και κίτρινο). Το σχήμα που θα πρέπει να δημιουργηθεί θα πρέπει να μοιάζει με το ακόλουθο.



Στη συνέχεια **θα διπλασιάσουμε τους κύβους κάθε χρώματος, τοποθετώντας τους κατάλληλα ώστε να σχηματιστεί ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο**. Θα ξεκινήσουμε από την πρώτη στήλη. Πάνω από αυτή τη στήλη θα προσθέσουμε το πλήθος των κύβων που βρίσκονται στη τελευταία στήλη, δηλαδή πάνω από τους μαύρους κύβους θα προσθέσουμε 15 κίτρινους κύβους (15 είναι ο 5^{ος} όρος του αθροίσματος).

Ομοίως στη συνέχεια πάνω από τη δεύτερη στήλη, θα προσθέσουμε πράσινους κύβους, τόσους σε πλήθους όσοι είναι οι πράσινοι κύβοι που υπάρχουν στη προτελευταία στήλη, δηλαδή 12 (που είναι και ο 4^{ος} όρος του αθροίσματος).

<u>Ερώτηση 1</u>: Τι παρατηρείτε για το ύψος των δύο πρώτων στηλών του δομήματος που προέκυψε;

………
………
………
………

Συνεχίζουμε με την ίδια λογική. Στην τρίτη στήλη, θα προσθέσουμε το πλήθος των κύβων που είναι στη τρίτη από το τέλος στήλη, που εδώ είναι πάλι η τρίτη στήλη. Άρα θα προσθέσουμε ίσο αριθμό μπλε κύβων με αυτά που ήδη βρίσκονται στη τρίτη στήλη, δηλαδή 9 (που είναι ο $3^{ος}$ όρος του αθροίσματος).

<u>Ερώτηση 2</u>: Τι παρατηρείτε για το ύψος των τριών πρώτων στηλών του δομήματος που προέκυψε;

………
………
………
………

Συνεχίζοντας, στη τέταρτη στήλη (δεύτερη από το τέλος) θα προσθέσουμε το πλήθος των κύβων που <u>βρίσκονταν αρχικά</u> στη δεύτερη στήλη (ροζ κύβοι), και στη τελευταία στήλη θα προσθέσουμε το πλήθος των κύβων που <u>βρίσκονταν αρχικά</u> στην πρώτη στήλη (μαύροι κύβοι).

<u>Ερώτηση 3</u>: Τι σχήμα έχει το τελικό δόμημα;

………
………
………
………

Τραβήξτε στιγμιότυπο οθόνης από το τελικό δόμημα και επικολλήστε στην επόμενη σελίδα:

Ερώτηση 4: Ποιο είναι το συνολικό πλήθος των κύβων του τελικού δομήματος σε σχέση με το αρχικό; Για να απαντήσετε, θυμηθείτε πως προέκυψε το τελικό δόμημα.

……

……

……

……

Ερώτηση 5: Πόσους κύβους έχει η κάθε διάσταση του δομήματος;

……

……

……

……

Ερώτηση 6: Από ποια σχέση δίνεται το άθροισμα $S = 3+6+9+12+15$; Ποιο είναι το αποτέλεσμα του αθροίσματος;

……

……

……

……

Γενίκευση παραδείγματος

Για να γενικεύσουμε το εύρημα μας, θα πρέπει να απαντήσουμε στα ακόλουθα ερωτήματα:

Ερώτηση 7: Ποιο θα είναι πάντα το συνολικό πλήθος των κύβων του τελικού δομήματος σε σχέση με το αρχικό; (δείτε και ερώτηση 4)

……
……
……
……

Ερώτηση 8: Γενικεύστε (χρησιμοποιώντας τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε στις αριθμητικές προόδους) τις διαστάσεις που έχει το τελικό δόμημα (υπόδειξη: δείτε τι αντιπροσωπεύουν τα νούμερα που δώσατε σαν απάντηση στην ερώτηση 5).

……
……
……
……

Ερώτηση 9: Πως προκύπτει τελικά ο γενικός τύπος του αθροίσματος που γνωρίζουμε για τις αριθμητικές προόδους;

……
……
……
……

Γενίκευση τρόπου τοποθέτησης κύβων

Αν ν είναι το συνολικό πλήθος των όρων του αθροίσματος, δηλαδή το πλήθος των στηλών στο τελικό δόμημα, και k είναι η αρίθμηση μιας τυχαίας στήλης, τότε ο γενικός κανόνας που ακολουθούμε είναι ο εξής:

Πάνω από την στήλη k, προσθέτουμε τόσους κύβους όσους έχει η στήλη ν-k+1 του αρχικού δομήματος

Ερώτηση 10: Στη περίπτωση που μελετήσαμε όπου έχουμε ν=5, το πλήθος των κύβων που προσθέτω ποιόν κανόνα ακολουθεί;

………
………
………
………

Ερώτηση 11: Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα. Ο κανόνας με τον οποίο έγινε η πρόσθεση των κύβων είναι:

Στη στήλη k	**Προσθέτω ότι είχε αρχικά η στήλη**
1η	6-1 = 5η
2η	6-2 =
3η	
4η	
5η	

Ερώτηση 12: Συμπληρώστε το παρακάτω πίνακα για τη περίπτωση που έχω άρτιο αριθμό προσθετέων, συγκεκριμένα 8

Στη στήλη k	**Προσθέτω ότι είχε αρχικά η στήλη**
1η	
2η	
3η	
4η	
5η	
6η	
7η	
8η	

Παράρτημα Β
Σημειώσεις από τον κλασικό τρόπο διδασκαλίας του εκπαιδευτικού

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά ο τρόπος με τον οποίο δίδασκε το μάθημα των αριθμητικών προόδων ο εκπαιδευτικός, πριν την ενασχόληση του με τις νέες τεχνολογίες και τον Κυβόκοσμο. Έγινε παρακολούθηση τεσσάρων εκπαιδευτικών ορών και καταγραφή των πρακτικών που ακολούθησε.

Β.1 1η διδακτική ώρα

Γίνεται **εισαγωγή στον ορισμό αριθμητικής προόδου**, μέσω του αναδρομικού της τύπου $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega,\ \omega \in \mathbb{R}$

- Έγινε επεξήγηση και ορισμός των όρων, παρουσιάστηκε πως οι όροι προκύπτουν αναδρομικά με χρήση προηγούμενων όρων, ενώ δόθηκε και ορισμός της διαφοράς ω της προόδου.
- Έμφαση δόθηκε στη σύνδεση του πρόσημου της διαφοράς με την μορφή των όρων της προόδου:
  - $\omega > 0$ → Αύξουσα αριθμητική πρόοδος
  - $\omega < 0$ → Φθίνουσα αριθμητική πρόοδος
  - $\omega = 0$ → Σταθερή αριθμητική πρόοδος

Κατόπιν, τα παιδιά κλήθηκαν να απαντήσουν στην εξής ερώτηση: **Μπορούμε αν έχουμε τον αναδρομικό τύπο ακολουθίας, να υπολογίσουμε εύκολα τον κάθε όρο της**;

- Το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών (60%) απάντησε όχι.
- Ακολούθησε επεξήγηση της δυσκολίας που παρουσιάζεται μέσω του αναδρομικού τύπου, εξηγώντας ότι μπορούμε να βρούμε τον επόμενο όρο μόνο αν γνωρίζουμε τον προηγούμενο.

Με βάση την παραπάνω παρατήρηση, αποδείχτηκε στους μαθητές η σχέση που συνδέει κάθε φορά τον **ν-ιοστό όρο της αριθμητικής προόδου** με τον 1^{ο} όρο της και τη διαφορά ω: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega,\ \omega \in \mathbb{R}$

Στη συνέχεια ακολούθησε μια **αριθμητική εφαρμογή** για κατανόηση της προηγούμενης έννοιας. Δόθηκαν οι αριθμοί -2, 3, 8, 13, 18 και οι μαθητές καλέστηκαν να απαντήσουν στα εξής ερωτήματα:

- Αποτελούν αυτοί οι αριθμοί διαδοχικούς όρους Α.Π.;
- Να βρεθεί ο 1^{ος} όρος και η διαφορά ω.
- Να βρεθεί ο 15^{ος} όρος της προόδου.

Στη συνέχεια έγινε παρουσίαση στους μαθητές του **αριθμητικού μέσο και της πρότασης** «*Τρείς αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., αν και μόνο αν, ισχύει* $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$». Γίνεται απόδειξή της πρότασης, κάνοντας αναφορά ότι εμπεριέχει τη λογική έκφραση «*αν και μονό αν*» η οποία εκφράζεται μέσω της σχέσης ισοδυναμίας, άρα η απόδειξή πρέπει να γίνει απόδειξη του ευθύ και του αντιστρόφου.

Κατόπιν, διατυπώνεται η ερώτηση: **Αν έχουμε τους 100 πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου με α_1=1 και α_{100}=100, πώς θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το άθροισμα τους;**

- Οι μαθητές δυσκολεύονται να απαντήσουν και ο καθηγητής αναφέρετε την Ιστορία υπολογισμού αυτού του αθροίσματος από τον K.F. Gauss εστιάζοντας στα σταθερά ανά δύο αθροίσματα των ακραίων όρων.
- Στη συνέχεια ο καθηγητής παρουσιάζει τις δύο σχέσεις για το άθροισμα των ν πρώτων όρων, $S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$ και $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left(2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right)$, εστιάζοντας στο ποια δεδομένα πρέπει να έχουμε για να χρησιμοποιήσουμε την μια ή την άλλη σχέση.
- Στη συνέχεια ακολούθησε αριθμητική εφαρμογή. Δόθηκαν στους μαθητές οι όροι της αριθμητικής προόδου 2, 6, 10, 14, 18,.... και τους ζητήθηκε να υπολογίσουν το άθροισμα των 50 πρώτων όρων της προόδου. Λίγοι σχετικά μαθητές, αναγνώρισαν επιτυχώς τον δεύτερο τύπο ως πιο κατάλληλο για χρήση στο συγκεκριμένο παράδειγμα, αφού εντόπισαν ότι γνωρίζουν τον 1ο όρο της αριθμητικής προόδου καθώς και την διαφορά ω.

Ολοκληρώνοντας το μάθημα, ο καθηγητής έκανε μια γρήγορη **ανασκόπηση** των τύπων που διδάχτηκαν και στη συνέχεια έδωσε **ασκήσεις** από το σχολικό βιβλίο (2,3,4,8,10 Α΄ ομάδας) προς επίλυση για το σπίτι.

Β.2 2η διδακτική ώρα

Αρχικά, έγινε **έλεγχος των ασκήσεων** που είχαν δοθεί στους μαθητές για επίλυση στο σπίτι και ακολούθησαν **απορίες** των μαθητών πάνω σε αυτές.

Στη συνέχεια έγιναν κάποιες **βασικές ασκήσεις** δίνοντας έμφαση στην διαδικασία σκέψης κάνοντας ανάκληση γνώσεων του θεωρητικού μέρους του μαθήματος που διδάχτηκαν.

- Οι μαθητές καλέστηκαν να απαντήσουν στο ερώτημα, πως θα δείξουν ότι μια τυχαία ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος. Αν και οι απαντήσεις των μαθητών προσέγγισαν τη λύση, αυτή δεν ήταν πλήρης οπότε η απάντηση δόθηκε τελικά από τον καθηγητή.
- Στη συνέχεια, ζητήθηκε από τους μαθητές να πουν τι θα πρέπει να γνωρίζουν για να προσδιορίσουν έναν οποιοδήποτε όρο μιας αριθμητικής προόδου. Οι μαθητές φάνηκε να δυσκολεύονται να κατανοήσουν την ερώτηση και να δώσουν ολοκληρωμένη απάντηση (ότι θα πρέπει να γνωρίζουμε τον πρώτο όρο και τη διαφορά ω).
- Κατόπιν έγινε εφαρμογή εύρεσης της αρίθμησης του όρου ν γνωρίζοντας το ποιος όρος είναι (επίλυση εξίσωσης ν-οστού όρου ως προς ν).
- Στη συνέχεια, ζητήθηκε από τους μαθητές να προσδιορίσουν παράμετρο, ώστε 3 ποσότητες εξαρτημένες από αυτή, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Έτσι έγινε σύνδεση με κατασκευή εξίσωσης μέσω της ισότητας του αριθμητικού μέσου και επίλυση αυτής.
- Έμφαση δόθηκε στην εύρεση αθροίσματος όρων αριθμητικής προόδου. Αρχικά ζητήθηκε από τους μαθητές να υπολογίσουν το άθροισμα 2+5+8+…+60. Εδώ οι μαθητές ερωτήθηκαν, αρχικά αν οι προσθετέοι του αθροίσματος αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Με αυτό το ερέθισμα αναγνώρισαν επιτυχώς ότι οι προσθετέοι αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου και εντόπισαν άμεσα τα $α_1$, ω, ενώ υπήρξε μια δυσκολία στον χαρακτηρισμό του αριθμού 60 σαν $α_ν$. Έγινε υπολογισμός της σειράς ν στην οποία εμφανίζεται ο τελευταίος προσθετέος (το 60) βρίσκοντας έτσι το συνολικό πλήθος του αθροίσματος. Πλέον, κάνοντας αναφορά-ανάκληση γνώσεων από το προηγούμενο μάθημα, τους ζητήθηκε να αναγνωρίσουν τι ποσότητες γνωρίζουν για το άθροισμα αυτό και ποιος είναι ο κατάλληλος τύπος για τον υπολογισμό του.
- Στο τέλος της ώρας, γίνεται ανάθεση ασκήσεων από το σχολικό βιβλίο για εξάσκηση στο σπίτι. Οι ασκήσεις ανήκουν τόσο στην Α' όσο και στην Β' ομάδα ενώ περιλαμβάνουν και προβλήματα.

Β.3 3η διδακτική ώρα

Αρχικά, έγινε **έλεγχος των ασκήσεων** που είχαν δοθεί στους μαθητές για επίλυση στο σπίτι και ακολούθησαν **απορίες** των μαθητών πάνω σε αυτές.

Έπειτα γίνονται οι ασκήσεις που αφορούν πολλαπλάσια και συγκεκριμένα οι ασκήσεις 3i και 5 από την Β’ Ομάδα του σχολικού βιβλίου. Στη συνέχεια το μάθημα επικεντρώνεται στην άσκηση 10 της Β’ ομάδας η οποία αφορά την έννοια της παρεμβολής όρων σε μια αριθμητική πρόοδο.

Με αφορμή το ερώτημα που τίθεται από τη συγκεκριμένη άσκηση, δόθηκαν στους μαθητές 2 αριθμητικές πρόοδοι και τους ζητήθηκε να παρατηρήσουν τι είδους σταθερά αθροίσματα δημιουργούνται.

Η πρώτη πρόοδος που δόθηκε ήταν η 3, 9, 15, 21, 27, 33. Αυτό που ζητήθηκε από τους μαθητές ήταν να βρούνε το πλήθος των όρων της προόδου (άρτιο ή περιττό) και τους δόθηκε το ερέθισμα να εντοπίσουν τι είδους σταθερά αθροίσματα όρων υπάρχουν. Καθώς παρατηρείται δυσκολία από τους μαθητές να απαντήσουν το ερώτημα, τους δίνετε να υπολογίσουν τα αθροίσματα 3+33, 9+27 και 15+21. Έτσι οι μαθητές, παρατηρούνε ότι το άθροισμα των όρων που ισαπέχουν από τους 2 μεσαίους σε μια αριθμητική πρόοδο με άρτιο πλήθος όρων, είναι σταθερό (εδώ ίσο με 36) και ίσο με το άθροισμα των 2 μεσαίων.

Η δεύτερη πρόοδος που τους δόθηκε ήταν η 3, 9, 15, 21, 27 η οποία αποτελείται από τους όρους της προηγούμενης ελαττωμένη κατά έναν όρο, επισημαίνοντας στους μαθητές ότι πλέον έχουν μια αριθμητική πρόοδο με περιττό πλήθος όρων. Ζητείται πάλι να εντοπίσουν τα σταθερά αθροίσματα όρων (ανά 2) που δημιουργούνται. Πλέον οι μαθητές είναι σε θέση να αναγνωρίσουν ότι 3+27=30 και 21+9=30 άλλα δεν εντοπίζουν άμεσα πως σχετίζονται με τον μεσαίο όρο που απομένει. Έτσι, τους υποδεικνύεται ότι το διπλάσιο του μεσαίου όρου είναι ίσο με αυτά τα αθροίσματα, καθώς $2\cdot 15=30$. Μέσα από την παραπάνω διαδικασία οι μαθητές κατανοούν ότι αν η αριθμητική πρόοδος έχει περιττό πλήθος όρων, τότε το άθροισμα των όρων που ισαπέχουν από τον μεσαίο, είναι ίσο με το διπλάσιο αυτού.

Βιβλιογραφία

Ackermann E. (1985). Piaget's Constructivism, Papert's Constructionism: What's the difference?. Retrieved from http://learning.media.mit.edu/content/publications/EA.Piaget%20_%20Papert.pdf

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7 (3), 245-274.

Baker, J.D. (1996). Students'Difficulties with Proof by Mathematical Induction. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association*.

Bayar, A. (2014). The Components of Effective Professional Development Activities in terms of Teachers' Perspective. International Online Journal of Educational Sciences, 2014, Vol. 6, No. 2, p. 319 - 327 ISSN: 1309 -2707. Ανακτήθηκε στις 10 Μαρτίου 2018 από https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED552871.pdf

Clark-Wilson, A., Robutti, O. &Thomas, M. (2020). Teaching with digital technology. *ZDM Mathematics Education* 52, 1223–1242. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01196-0

Cohen, L. & Manion, L. (1997). *Research methods in education*. London: Routledge

Doyle, T., Kutler, L., Miller, R., &Schueller, A. (2014). Proofs without words and beyond. *Convergence*. Retrieved from http://www.maa.org/press/periodicals/convergence/proofs-without-words-and-beyond.

Ernest, P. (1988). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/impact.htm

Ferrara, F., Pratt, D., Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of Algebra and Calculus. Ideas Discussed at PME over the Last 30 Years. In A. Gutiérrez, P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 237–273.

Gibson, D. (1998). Students' use of diagrams to develop proofs in an introductory analysis course. *Issues in Mathematics Education*, *7*, 284-307.

Guest, G., MacQueen, K. M. &Namey, E. E. (2012). Introduction to applied thematic analysis. In *Applied thematic analysis* (pp. 3-20). SAGE Publications, Inc., https://dx.doi.org/10.4135/9781483384436

Hanna,G.(1990).Some Pedagogical Aspects of Proof.*Interchange*,21,1.

Kafai, Y. B., & Burke, Q. (2015). Constructionist gaming: Understanding the benefits of making games for learning. *Educational Psychologist, 50*(4), 313–334. https://doi.org/10. 1080/00461520.2015.1124022.

Kalogiannakis, M. (2010). Training with ICT for ICT from the trainer's perspective. A Greek- case study, Education and Information Technologies, 15(1), 3-17.

Kynigos, C. (2007a). Half-Baked Logo Microworlds as Boundary Objects in Integrated Design, *Informatics in Education*, v.6, n.2, 335-358, Institute of Mathematics and Informatics

Kynigos, C. (2007b). Using half –baked microworlds to challenge teacher educators' knowing, *International* Journal *of Computers for Mathematical Learning*, 12, 87-111

Kynigos, C., Psycharis, G., &Moustaki, F. (2010). Meanings generated while using algebraic-like formalism to construct and control animated models. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 17(1), 17-32.

Kynigos, C., Kalogeria, E. (2012). Boundary Objects for in service Mathematics Teacher Education: the case of Scenarios and Half-baked Microworlds, Sp. Issue in Online Mathematics Education, M. C. Borba, & S. Llinares, (Eds.) *The International Journal of Mathematics Education (ZDM)*, v.44, n.6, 733-745, Karlsruhe: Springer.

Kynigos C. (2015) Constructionism: Theory of Learning or Theory of Design?. In: Cho S. (eds) *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_24

Kynigos, C., Smyrnaiou, Z. and Grizioti,M. (2019). Questioning Simulations to Question Intuitions. In A*ugmented Reality in Educational Settings*, 295–324,https://doi.org/10.1163/9789004408845_013

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strasser, R. (2006). Teaching andLearning Geometry with Technology. In A. Gutierrez, P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, (pp. 275-304), Rotterdam: Sense Publishers.

Laborde, C., Laborde, J.M. (1993). What About a Learning Environment Where Euclidean Concepts are Manipulated with a Mouse. In A. diSessa, C. Hoyles, R. Noss, L. Edwards. (Eds). *Computers and Exploratory Learning*. Berlin, Springer – Verlag, p.241-264

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. New York: Cambridge University Press.

Leatham, K. , Lawrence, K. & Mewborn, D.(2005). Getting started with open- ended assessment. *Teaching Children Mathematics* 11(8) 413-419

Manolis, C. & Kalaitzidou, E. (2014). Personal Learning Environments and Social Networks in the Traditional School System: An Applied Case Study in the Greek Educational System. In G. Mallia (Ed.), *The Social Classroom: Integrating Social Network Use in Education* (pp. 417-440). Hershey, PA

Megalou, E. & Kaklamanis, C. (2014). "Photodentro LOR, the Greek National Learning Object Repository" In Proceeding of INTED2014, the 8th International Technology, Education and Development Conference, pp.309319), Valencia, Spain.

Noss, R., Healy, L., Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics* 33: 203–233.

Papert, S. (1972). Teaching Children to be Mathematicians Versus Teaching About Mathematics. *Journal of Mathematics in Science and Technology*, 31, 249-262.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. Basic Books, Inc.

Ponte, J.P. (2011). Teachers' knowledge, practice, and identity: essential aspects of teachers' learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*,14:413–417

Potari, D. (2021). Mathematics teacher professional learning and teachereducation practices, *Journal of Mathematics Teacher Education* 24:227–230 https://doi.org/10.1007/s10857-021-09501-8

Relaford - Doyle, J., Nunez, R.E. (2017). When does a 'visual proof by induction' serve a proof-like function in mathematics? *Cognitive Science*, 1004-1009.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical concepts: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22:1-36.

Sherry, L. (1998). An integrated technology adoption and diffusion model, International Journal of Educational Telecommunications, 4(2), 113-145.

Sinclair, N., &Robutti, O. (2020). Teaching practices in digital environments. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education*, 2nd ed., 845–849. Dordrecht: Springer.

Sinclair, N., Yerushalmy, M. (2016). Digital Technology in Mathematics Teaching and Learning. *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues,* 235-274.

Sinclair, N., &Robutti, O. (2020). Teaching practices in digital environments. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education*, 2nd ed., 845–849. Dordrecht: Springer.

Sinclair, N., Yerushalmy, M. (2016). Digital Technology in Mathematics Teaching and Learning. *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues,* 235-274.

Twining, P., Heller, R. S., Nussbaum, M., & Tsai, C. C. (2017). Some Guidance on Conducting and Reporting Qualitative Studies. *Computers & Education*, *106*, A1-A9. http://dx.doi.org/10.1016/j.compedu.2016.12.002

Vergnaud, G. (1996). The theory of Conceptual Fields, In L. Steffe et al (eds). *Theories of Mathematical Learning*, Lawrence Erlbaum Associates Pub.

Vosniadou, S., & Kollias, V. (2001). Information and Communication Technology and the Problem of Teacher Training: Myths, Dreams, and the Harsh Reality, Themes in Education, 2(4), 341-365.

Γεωργιάδου Α., Γκάγκαλη Α., Σιδηροπούλου Σ.,(2014). Επιμορφωτικές ανάγκες των εκπαιδευτικών Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης - Έρευνα. Πτυχιακή εργασία του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης. Αλεξανδρούπολη. Ανακτήθηκε http://repo.lib.duth.gr/jspui/bitstream/123456789/790/1/EA641.PDF

Γρηγοριάδου, Μ., Δαγδιλέλης, Β., Κόμης, Β., & Τζιμογιάννης, Α. (2012). Η Επιμόρφωση των Πληροφορικών Β' Επιπέδου: ένας πρώτος απολογισμός και προοπτικές. Στο Θ. Μπρά- τιτσης (επιμ.) *Πρακτικά 6ου Πανελλήνιου Συνέδριου «Διδακτική της Πληροφορικής»*, Φλώρινα: ΕΤΠΕ, 583-586.

Δουκάκης, Σ., Βροντάκης, Μ., Μιχαλοπούλου, Γ. & Διαμάντης Χ. (2013). Διερεύνηση απόψεων μαθητών/τριών Γυμνασίου για την διαδικασία μάθησης Μαθηματικών με τη χρήση μικροπειραμάτων μέσω ΤΠΕ.

Καλογιαννάκης, Μ., & Παπαδάκης, Στ. (2012). Αποτίμηση του έργου «Επιμόρφωση εκπαιδευτικών για τη βέλτιστη αξιοποίηση των ΤΠΕ και των εκπαιδευτικών λογισμικών». Μια μελέτη περίπτωσης για την Περιφέρεια Κρήτης, *Νέα Παιδεία*, 144, 98-112.

Καρακασίδης, Π. (2005). Η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στη χρήση των τεχνολογιών της πληροφορίας και της επικοινωνίας στα Κέντρα Στήριξης της Επιμόρφωσης, *Διπλωματική Εργασία, Πάτρα: ΕΑΠ.*

Κυνηγός, Χ. (2002). Η ανάπτυξη μαθηματικών μικρόκοσμων ως διαδικασία κατάρτισης επιμορφωτών. Στο Χ. Κυνηγός, Ε. Δημακαράκη (επιμ.). (2002). Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά Μέσα. Παιδαγωγική Αξιοποίηση της Σύγχρονης Τεχνολογίας για τη Μετεξέλιξη της Εκπαιδευτικής Πρακτικής, Αθήνα: Καστανιώτης, 233-254

Κυνηγός, Χ., Δημακαράκη, Ε. (επιμ.). (2002). Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά Μέσα. Παιδαγωγική Αξιοποίηση της Σύγχρονης Τεχνολογίας για τη Μετεξέλιξη της Εκπαιδευτικής Πρακτικής, Αθήνα: Καστανιώτης

Κυνηγός, Χ. (2014). Το ψηφιακό σχολειό ως όχημα για τον πειραματισμό και το μαστόρεμα στα μαθηματικά, *Πρακτικά 5ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ),* Φλώρινα (ISSN: 1792-8494)

Κυνηγός, Χ., Γριζιώτη, Μ., Λάτση, Μ., Φακούδης, Β. (2019). Πλαίσιο για το σχεδιασμό και την ανάπτυξη μικροπειραμάτων μαθηματικών. Στο Γ. Κουτρομάνος, Γαλάνη Λ. (επιμ.), *Πρακτικά Εργασιών 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου «Ένταξη και Χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία»*, σ. 272-283, Π.Τ.Δ.Ε., ΕΚΠΑ. ISBN 978-618-83186-4-9.

Λαδιάς Α., Μικρόπουλος Α., Παναγιωτακόπουλος Χ., Παρασκευά Φ., Πιντέλας Π., Πολίτης Π., Ρετάλης Σ., Σάμψων Δ., Φαχαντίδης Ν., Χαλκίδης Α. (επιμ.), *Πρακτικά Εργασιών 3ου Πανελλήνιου Συνεδρίου «Ένταξη των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία» της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης ΤΠΕ στην Εκπαίδευση (ΕΤΠΕ),* Τμήμα Ψηφιακών

Συστημάτων, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Πειραιάς, (http://www.etpe.gr/custom/pdf/etpe2051.pdf.

Σταματοπούλου, Μ., Μπαλιάμης, Π. & Παπαδοπούλου, Μ., (2017). Η αξιολόγηση επιμορφωτικών προγραμμάτων ΤΠΕ για Εκπαιδευτικούς ως προς την Αποτελεσματικότητά τους σε Επίπεδο Γνώσεων. Η περίπτωση των φιλολόγων του Ν. Μεσσηνίας. 9η διεθνής διάσκεψη στην Ανοικτή & Εξ' Αποστάσεως Μάθηση. Νοέμβριος 2017. Αθήνα. Ανακτήθηκε από https://eproceedings.epublishing.ekt.gr/index.php/openedu/article/viewFile/1086/1229

Σιπητάνου,Α. Α., Σαλπιγγίδης, Α.Ε. & Πλατσίδου, Μ. (2012). Οι επιμορφωτικές ανάγκες των εκπαιδευτικών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης. Συνέδριο " Η ποιότητα στην εκπαίδευση: Τάσεις και Προοπτικές", Πανεπιστήμιο Αθηνών. Ανακτήθηκε στις 10 Ιανουαρίου 2018 από https://www.academia.edu/

Τζιμογιάννης, Α., & Κόμης, Β. (2004). Στάσεις και αντιλήψεις εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με την εφαρμογή των ΤΠΕ στη διδασκαλία τους. Στο Μ. Γρηγοριάδου, Α. Ράπτης, Σ. Βοσνιάδου & Χ. Κυνηγός (επιμ.), *Πρακτικά 4ου Πανελληνίου Συνεδρίου «Οι ΤΠΕ στην Εκπαίδευση»*, Αθήνα: ΕΤΠΕ, 165-176.

Τζιμόπουλος, Ν. (2003). Η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στις νέες τεχνολογίες Πληροφορίας και επικοινωνιών. Η περίπτωση των προγραμμάτων εισαγωγικής επιμόρφωσης του νομού Κυκλάδων**,** Διπλωματική *εργασία, Πάτρα: ΕΑΠ.*

Τσούλιας Ν., (2010).Αναγκαία η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών. («ΤΟ ΑΡΘΡΟ», Σε δύο συνέχειες: 27.6.10, 4.7.10).Ανακτήθηκε στις 12 Σεπτεμβρίου 2017 από https://anthologio.wordpress.com/2011/06/06/%CE%AF-%CF%8C-i/

Τραψιώτη, Α., Δοδοντσής, Μ., & Χατσιούλης, Θ. (2009). Η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών πληροφορικής έγινε. Πέτυχε; Διερεύνηση των απόψεων των επιμορφούμενων για τη συμμετοχή τους σε επιμορφωτικό πρόγραμμα της ειδικότητάς τους. *Πρακτικά του 5ου Πανελληνίου Συνεδρίου των Εκπαιδευτικών για τις ΤΠΕ,* Σύρος, 8-10 Μαΐου 2009.

Νέο Πρόγραμμα Σπουδών. ΦΕΚ Β' 2281 (στη σελίδα http://digitalschool.minedu.gov.gr.

Φακούδης, Ε., Λάτση, Μ. & Παπαδόπουλος, Θ. (2014). Μικροπειράματα στα πλαίσια της εφαρμογής «Κυβόκοσμος», Σαμαρά Θ., Κουσλόγλου Ε., Σαλονικίδης Ι., & Τζιμόπουλος Ν. (Επιμ.) *3ο Πανελλήνιο Εκπαιδευτικό* Συνέδριο Ημαθίας για την αξιοποίηση των ΤΠΕ στη διδακτική πράξη. *Σελ.319-332, Ημαθία, Νάουσα*

Φακούδης, Ε., Λάτση, Μ., Παπαδόπουλος, Θ. (2014). Μικροπειράματα στα πλαίσια της εφαρμογής «Κυβόκοσμος». Στα *Πρακτικά 3ουΠανελλήνιου Συνεδρίου Ημαθίας*, 319-332.

Φιλοκώστα Θ., (2010). Αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για την επιμόρφωση τους. Διπλωματική Εργασία Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών Οργάνωση και Διοίκηση της Εκπαίδευσης. Ανακτήθηκε στις 14 Σεπτεμβρίου 2017 από http://ir.lib.uth.gr/bitstream/handle/11615/14334/P0014334.pdf?sequence=1&isAllowed

Φωτόδεντρο (http://photodentro.edu.gr)

Ψηφιακό Σχολείο» (http://dschool.edu.gr/),