Ψηφιακός
Μετασχηματισμός
και Εκπαιδευτική Πράξη

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Υπολογιστών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σχεδιασμός και υλοποίηση πρωτότυπων δραστηριοτήτων στο μάθημα των Μαθηματικών με χρήση εστιασμένων συγγραφικών εργαλείων: Η περίπτωση του «Πολύζυγου»

Χρήστος Γ. Μάλλιαρης

Α.Μ.: 20010

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: **Χρόνης Κυνηγός,** Καθηγητής

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ: **Μαρία Λάτση,** Συνεργάτης του ΠΜΣ / Εκπαιδευτικός Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης
Παναγιώτης Καρκαζής, Συνεργάτης του ΠΜΣ

Ιούλιος 2022

Ψηφιακός Μετασχηματισμός και Εκπαιδευτική Πράξη

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

Σχεδιασμός και υλοποίηση πρωτότυπων δραστηριοτήτων στο μάθημα των Μαθηματικών με χρήση εστιασμένων συγγραφικών εργαλείων: Η περίπτωση του «Πολύζυγου»

Η μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία εξετάστηκε επιτυχώς από την κάτωθι Εξεταστική Επιτροπή:

Α/α	ΟΝΟΜΑ ΕΠΩΝΥΜΟ	ΒΑΘΜΙΔΑ/ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΨΗΦΙΑΚΗ ΥΠΟΓΡΑΦΗ
	Χρόνης Κυνηγός	Καθηγητής	Polychronis Kynigos Digitally signed by Polychronis Kynigos Date: 2022.07.08 15:35:24 +03'00'
	Μαρία Λάτση	Συνεργάτης του ΠΜΣ	Maria Latsi Digitally signed by Maria Latsi Date: 2022.07.08 20:21:49 +03'00'
	Παναγιώτης Καρκαζής	Συνεργάτης του ΠΜΣ	Panagiotis Karkazis Digitally signed by Panagiotis Karkazis Date: 2022.07.12 13:23:00 +03'00'

ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο κάτωθι υπογεγραμμένος Μάλλιαρης Χρήστος του Γεωργίου, με αριθμό μητρώου *20010* φοιτητής του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών *Ψηφιακός Μετασχηματισμός και Εκπαιδευτική Πράξη* του Τμήματος *Μηχανικών Πληροφορικής και Υπολογιστών* της Σχολής *Μηχανικών* του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής, δηλώνω ότι: «Είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της, είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, οι όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε ακριβώς είτε παραφρασμένες, αναφέρονται στο σύνολό τους, με πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία έχει συγγραφεί από μένα αποκλειστικά και αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου, όσο και του Ιδρύματος.
Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του πτυχίου μου».

*****_Επιθυμώ την απαγόρευση πρόσβασης στο πλήρες κείμενο της εργασίας μου μέχρι …………………… και έπειτα από αίτηση μου στη Βιβλιοθήκη και έγκριση του επιβλέποντα καθηγητή._

Ο Δηλών
Μάλλιαρης Χρήστος

*** Ονοματεπώνυμο /Ιδιότητα**

Ψηφιακή Υπογραφή Επιβλέποντα

**** Εάν κάποιος επιθυμεί απαγόρευση πρόσβασης στην εργασία για χρονικό διάστημα 6-12 μηνών (embargo), θα πρέπει να υπογράψει ψηφιακά ο/η επιβλέπων/ουσα καθηγητής/τρια, για να γνωστοποιεί ότι είναι ενημερωμένος/η και συναινεί. Οι λόγοι χρονικού αποκλεισμού πρόσβασης περιγράφονται αναλυτικά στις πολιτικές του Ι.Α. (σελ. 6):***
https://www.uniwa.gr/wp-content/uploads/2021/01/%CE%A0%CE%BF%CE%BB%CE%B9%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%B5%CC%81%CF%82_%CE%99%CE%B4%CF%81%CF%85%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%BF%CF%85%CC%81_%CE%91%CF%80%CE%BF%CE%B8%CE%B5%CF%84%CE%B7%CF%81%CE%B9%CC%81%CE%BF%CF%85_final.pdf

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η προτεινόμενη διπλωματική εργασία εντάσσεται στη γνωστική περιοχή της διδακτικής των Μαθηματικών. Η εργασία θα κινηθεί στην περιοχή της Άλγεβρας μιας και οι δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν και δόθηκαν προς χρήση στους μαθητές αποσκοπούν στην επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων και μέσω της διαδικασίας επίλυσής τους θα μελετηθεί ο τρόπος νοηματοδότησης εννοιών από τους μαθητές, όπως η εξίσωση, η λύση εξίσωσης, η λύση προβλήματος, αλλά και σύνδεση εννοιών από τη Γεωμετρία, όπως το εμβαδό επίπεδων σχημάτων αλλά και η έννοια των ισοδύναμων επίπεδων σχημάτων και όλα αυτά μέσω χρήσης ψηφιακών εργαλείων και εκπαιδευτικού λογισμικού.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Εκπαιδευτική Τεχνολογία

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Εστιασμένα συγγραφικά εργαλεία, Μαθηματικά Έργα, Μικρόκοσμοι, Πολύζυγο, Ψηφιακά Δομήματα.

ABSTRACT

The proposed thesis is part of the cognitive area of didactics of Mathematics. The work will move in the area of Algebra since the activities that will be designed and given for use to students will aim at solving a realistic problem and through the process of solving it will be studied the way of meaning concepts by students, such as equation, equation solution but also connection of concepts from geometry, such as the area of flat shapes but also the concept of equivalent flat shapes and all this through the use of digital tools and educational software.

SUBJECT AREA: Educational Technology

KEYWORDS: focused authoring tools, Mathematical Works, Microcosms, Polyzygo, Digital Structures.

Αφιερώνεται στην Έφη, στο Γιώργο και τον Άρη

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή κ. Χρόνη Κυνηγό, για τις σημαντικές και καίριες παρεμβάσεις του κατά τη διάρκεια συγγραφής της εργασίας αλλά και για τις στιγμές έμπνευσης που μου προσέφερε στη διάρκεια αυτών των δύο ετών στις διδασκαλίες των μαθημάτων του.

Το πιο μεγάλο ευχαριστώ όμως ανήκει στη γυναίκα μου και τους δυο γιους μας για την υπομονή που έκαναν όλο αυτό το διάστημα που εγώ ήμουν απασχολημένος με τις παρακολουθήσεις, τις εργασίες και τη μελέτη.

Από τα μέλη της κοινότητας του μεταπτυχιακού προγράμματος «Ψηφιακός Μετασχηματισμός και Εκπαιδευτική Πράξη» θα ήθελα να ευχαριστήσω τις συμφοιτήτριές μου κ. Εύα Αντωνιάδη και κ. Ελένη Χούσου για την απρόσμενα όμορφη συνεργασία και βοήθεια που μου πρόσφεραν όλο αυτό το διάστημα.

Μάλλιαρης Χρήστος

1 Ιουλίου 2022

Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο της ολοκλήρωσης του κύκλου των σπουδών μου στο Π.Μ.Σ. «Ψηφιακός Μετασχηματισμός και Εκπαιδευτική Πράξη».

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Η προβληματική της έρευνας

Οι μαθητές στα πρώτα τους βήματα στη διδασκαλία των Μαθηματικών έρχονται σε επαφή με την Αριθμητική και στη συνέχεια ως επέκτασή της γνωρίζουν την Άλγεβρα, οι δυσκολίες που συναντούν στην κατανόηση εννοιών που διαπραγματεύεται η Άλγεβρα σχετίζονται σε αυτή τη σύνδεση με την Αριθμητική, όπου τα μαθηματικά αντικείμενα είναι πιο συγκεκριμένα. Απεναντίας τα μαθηματικά αντικείμενα στην Άλγεβρα είναι γενικευμένοι αριθμοί, ενώ οι μεταξύ τους σχέσεις δηλώνουν το ρυθμό με τον οποίο αλλάζουν οι τιμές που είναι δυνατόν να πάρει ένας γενικευμένος αριθμός σε σχέση με κάποιο άλλο. Δημιουργείται έτσι η ανάγκη υποστήριξης της διδασκαλίας της Άλγεβρας από ψηφιακά εργαλεία, τα οποία βοηθούν στην κατανόηση των εννοιών της, των αυστηρών και αφηρημένων συμβολισμών κάτι που τα στατικά μέσα διδασκαλίας στον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας δεν μπορούν να το επιτύχουν (Ψυχάρης κ.α, 2010, σ.38).

Οι Ferrara, Pratt, Robutti (2006, σ.238) αναφέρουν ότι η τεχνολογία από το 1990 και έπειτα έχει διαμορφώσει τον τρόπο που η Άλγεβρα γίνεται αντιληπτή γιατί επιτρέπει στους μαθητές να εξερευνήσουν τη συμβολική της γλώσσα, να την χρησιμοποιήσουν ως εργαλείο κατανόησης των εννοιών της, αλλά και ως υπολογιστικό εργαλείο.

Η έρευνα αποκτά ενδιαφέρον αν μελετήσουμε τις κατευθύνσεις της ψηφιακής ατζέντας για την Ευρώπη 2020 (Megalou, E. 2018), τις διεθνείς τάσεις αλλά και τα έργα που έχουν σχεδιαστεί (Ψηφιακό Σχολείο, Φωτόδεντρο, Διαδραστικά Σχολικά Βιβλία κ.α.) για την εκπαιδευτική κοινότητα, όπου είναι φανερό ότι γίνεται προώθηση του ρόλου του εκπαιδευτικού ως δημιουργού ψηφιακού περιεχομένου (Megalou, E. 2018).

Το αντικείμενο της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση των διαδικασιών αξιοποίησης ψηφιακών εργαλείων στη διδασκαλία του μαθήματος των μαθηματικών. Συγκεκριμένα θα μελετήσουμε με ποιον τρόπο μπορεί ο εκπαιδευτικός στο μάθημα των μαθηματικών να χρησιμοποιήσει το εστιασμένο συγγραφικό εργαλείο «Πολύζυγο» για να σχεδιάσει, να υλοποιήσει και να εμπλέξει τους μαθητές τους σε πρωτότυπες δραστηριότητες μέσα από μαθηματικά έργα που ο ίδιος έχει δημιουργήσει. Η έρευνα θα κινηθεί στην περιοχή της Άλγεβρας αλλά το ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι η εμπλοκή των μαθητών θα προκύψει μέσω της ενασχόλησής τους με γεωμετρικά προβλήματα και συγκεκριμένα με προβλήματα που σε πρώτη ανάγνωση φαίνεται να διαπραγματεύονται γεωμετρικές έννοιες και συγκεκριμένα εμβαδά επίπεδων σχημάτων, στην πορεία υλοποίησης των δραστηριοτήτων προκύπτουν αρκετές έννοιες από την Άλγεβρα κάτι το οποίο καθιστά πρόκληση την υλοποίηση της έρευνας.

Ο σχεδιασμός κατάλληλου υλικού αρχικά και η αξιοποίησή του από τους μαθητές στη συνέχεια, με στόχο τη δημιουργία νοημάτων μέσα από τη λύση απλών αλλά και διερευνητικών ρεαλιστικών προβλημάτων που υλοποιούνται στο ψηφιακό περιβάλλον του «Πολύζυγου» θα δώσει τη δυνατότητα μελέτης της νοηματοδότησης εννοιών όπως της λύσης μιας εξίσωσης αλλά και της λύσης ενός προβλήματος, τι ακριβώς δηλώνει η ισορροπία των ζυγών στο συγκεκριμένο περιβάλλον και πως αυτό μπορεί να μετασχηματιστεί σε μαθηματικές σχέσεις αλλά και αντίστροφα. Ο σχεδιασμός τέτοιων δραστηριοτήτων αποτελεί πρόκληση για τον εκπαιδευτικό, ο οποίος χωρίς να διαθέτει υψηλού επιπέδου τεχνολογικές γνώσεις θα αξιοποιήσει το συγκεκριμένο συγγραφικό εργαλείο που θα του επιτρέψει δευτερογενή σχεδιασμό δομημάτων που θα τα βάλει σε χρήση μέσα στη σχολική τάξη (Κυνηγός, Χ. κ.ά. 2019).

1.2. Ερευνητικά Ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα που προκύπτουν από την παραπάνω προβληματική που περιγράψαμε και πάνω σε αυτά σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε η έρευνα είναι τα εξής:

<u>Πρώτο ερευνητικό ερώτημα</u>

Στρατηγικές που επινοούν και εφαρμόζουν οι μαθητές κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων στο ψηφιακό περιβάλλον του «Πολύζυγου».

<u>Δεύτερο ερευνητικό ερώτημα</u>

Ο ρόλος των λειτουργικοτήτων του «Πολύζυγου» στις διαδικασίες ανάπτυξης αυτών των στρατηγικών.

1.3. Επισκόπηση των κεφαλαίων

Στο <u>δεύτερο κεφάλαιο</u> αναλύεται το θεωρητικό πλαίσιο πάνω στο οποίο στηρίχθηκε ο σχεδιασμός και η υλοποίηση της έρευνας

Στο <u>τρίτο κεφάλαιο</u> αναλύεται η μεθοδολογία της έρευνας και συγκεκριμένα γίνεται αναφορά στην επιλογή της ερευνητικής μεθόδου που επιλέχθηκε, στο ψηφιακό εργαλείο

«Πολύζυγο» που αξιοποιήθηκε, στον τρόπο υλοποίησης της έρευνας, στη διαδικασία συλλογής των δεδομένων και τέλος στη μέθοδο που επιλέχθηκε για την ανάλυση των δεδομένων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται αρχικά η παρουσίαση των δραστηριοτήτων που περιέχονται στα Μαθηματικά Έργα και πως αυτές υλοποιήθηκαν στη σχολική τάξη και στη συνέχεια γίνεται ανάλυση των δραστηριοτήτων με βάση τα ευρήματα από την εφαρμογή.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της έρευνας μετά τη συλλογή και ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν κατά την υλοποίηση.

2. ΤΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

2.1. Μαθηματικά και Μαθηματική Εκπαίδευση

Τα μαθηματικά αναγνωρίζονται ως ένας από τους πλέον κρίσιμους τομείς του ανθρώπινου πολιτισμού, εξαιτίας του ισχυρού τρόπου ερμηνείας του κόσμου που προσφέρουν και της σημαντικής, ως συνέπεια, συνεισφοράς τους στην ανάπτυξη της ατομικής αλλά και της συλλογικής σκέψης. Αυτή η παρατήρηση αιτιολογεί την κεντρική θέση που κατέχουν τα μαθηματικά διαχρονικά στα Προγράμματα Σπουδών (ΠΣ) όλων των εκπαιδευτικών συστημάτων, καθιστώντας την επιτυχημένη σχολική μαθητεία σε αυτά καθοριστικό παράγοντα της γνωστικής και ακαδημαϊκής ανάπτυξης, της επαγγελματικής ανέλιξης και της κοινωνικής επιτυχίας κάθε πολίτη και κατ’ επέκταση την εξέλιξη των κοινοτήτων στις οποίες αυτός συμμετέχει.

Αντικείμενο των μαθηματικών είναι η μελέτη δομών και σχέσεων, η κατανόηση των οποίων χαρακτηρίζει αυτό που ονομάζουμε μαθηματικό τρόπο σκέψης και συλλογισμού. Βασικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής σκέψης είναι η εξειδίκευση (διερεύνηση ειδικών περιπτώσεων), η γενίκευση – αφαιρετικότητα (αναζήτηση ευρύτερων κανονικοτήτων και σχέσεων), η δημιουργία υποθέσεων και εικασιών, η χρήση συνδέσεων μεταξύ εννοιών και αναπαραστάσεων (η οπτικοποίηση αποτελεί μέρος αυτής) και η αναζήτηση της αιτολόγησης (Lobato et al., 2012)**.** Η μαθηματική σκέψη προϋποθέτει γενικές συλλογιστικές ικανότητες και γνώση ευρετικών στρατηγικών. Ορισμένες θεωρήσεις της ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης επικεντρώνουν στο διαμεσολαβητικό ρόλο των εργαλείων, καθώς και στην αντιμετώπιση της ως διαδικασία που αναδεικνύεται ή παράγεται στα πλαίσια της κοινωνικής αλληλεπίδρασης (Cole, 1996; Fish & Persaud, 2012). Σε αυτήν την προσέγγιση η μαθηματική σκέψη και πράξη ταυτίζονται με τη συμμετοχή σε έναν μαθηματικό διάλογο, δηλαδή, γίνεται αντιληπτή ως ένα είδος μαθηματικής επικοινωνίας με τους άλλους και τον εαυτό (Sfard, 2008).

Σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης δράσης η χρήση της μαθηματικής γνώσης είναι κρίσιμη κι έτσι είναι σημαντικό κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών να δημιουργούνται περιβάλλοντα μάθησης που δίνουν τη δυνατότητα, αφ’ ενός, στο να δημιουργούνται συνδέσεις μεταξύ της γνώσης του περιεχομένου των μαθηματικών και της εφαρμογής των εννοιών και των διαδικασιών και, αφετέρου, στο να οδηγούν στην ανάπτυξη υψηλού επιπέδου μαθηματικού συλλογισμού, μαθηματικών ικανοτήτων διατύπωσης και επίλυσης ολοένα και πιο περίπλοκων προβλημάτων, στη διαμόρφωση στάσεων και πεποιθήσεων που βοηθούν τους μαθητές να αντιμετωπίσουν με αποτελεσματικό τρόπο προβλήματα στα μαθηματικά όπως και εκτός αυτών. Οι διαδικασίες μάθησης που λαμβάνουν χώρα στην τάξη των μαθηματικών συνδέονται στενά με την έννοια του μαθηματικού γραμματισμού. Ο μαθηματικός γραμματισμός αφορά την ικανότητα κάποιου α) να αναλύει, να ερμηνεύει και να επεμβαίνει στο κοινωνικό του περιβάλλον χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τα μαθηματικά και β) να αναλύει και ερμηνεύει τον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά για τη λήψη αποφάσεων στο κοινωνικό περιβάλλον. Ο εκπαιδευτικός οφείλει να σχεδιάζει διαδικασίες κατά τη διδασκαλία του, ώστε να προσφέρει ευκαιρίες για πολλαπλούς τρόπους συμμετοχής στη μαθηματική δραστηριότητα μέσα στη σχολική τάξη αναδεικνύοντας τα μαθηματικά που είναι «χρήσιμα» που όμως «παραμένουν μαθηματικά» δηλαδή πλούσια σε μαθηματικά νοήματα. Η μάθηση των μαθηματικών είναι μια δυναμική, σταδιακή και συνεχής διαδικασία στην οποία ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι καθοριστικός και καίριας σημασίας, επιπλέον και ο ρόλος του μαθητή σε αυτή τη διαδικασία είναι σύνθετος αφού οι μαθητές με διαφορετικούς τρόπους νοηματοδοτούν τις εμπειρίες τους και τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των μαθηματικών στη σχολική τάξη. Οι μαθητές διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τον τρόπο και τον ρυθμό που μαθαίνουν, τα ενδιαφέροντά τους, τις προηγούμενες γνώσεις τους και τις εμπειρίες τους, την κουλτούρα τους και τη γλώσσα τους. Συνεπώς, ο κάθε μαθητής και μαθήτρια, ανάλογα με τις γνωστικές ή άλλες ανάγκες του, προσκαλείται να εμπλακεί σε έργα μάθησης που οδηγούν σε αυθεντική μαθηματική δραστηριότητα, η οποία προσφέρει προκλήσεις ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης και ταυτόχρονα συμβολής τους στη συλλογική συγκρότηση του μαθηματικού νοήματος μέσα από τη συμμετοχή στα δρώμενα της τάξης.

Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να σχεδιάζει τη διδασκαλία του κατά τέτοιο τρόπο ώστε να προσφέρει σε όλους τους μαθητές την ευκαιρία να είναι σε θέση, μέσα από τη συμμετοχή στα μαθήματα να:

- Αναπτύσσουν μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές, όπως ο συλλογισμός, η μοντελοποίηση, η επικοινωνία και ο αναστοχασμός, που ενδυναμώνουν τη μάθηση των μαθηματικών και υποστηρίζουν σημαντικές ικανότητες και δεξιότητες για τον πολίτη του 21^{ου} αιώνα.
- Αξιοποιούν ποικιλία πόρων και εργαλείων, όπως η γλώσσα, τα σύμβολα, τα χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία για να διαχειριστούν κατάλληλα μέσα από προσεγγίσεις διερεύνησης αλλά και μαθητείας, αλλαγές, κρίσεις και προκλήσεις στον ακαδημαϊκό, προσωπικό, επαγγελματικό και κοινωνικό περιβάλλον δράσης τους. Τα

διάφορα «εργαλεία» ενέχουν πολλαπλές ερμηνείες και είναι απαραίτητα για έναν ενεργό διάλογο με το περιβάλλον.

- Αναγνωρίζουν συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών και άλλων πεδίων της ανθρώπινης γνώσης και δράσης και εκτιμούν τα μαθηματικά ως προσπελάσιμο και ενδιαφέρον πεδίο μελέτης.
- Χρησιμοποιούν με αυτοπεποίθηση και εμπιστοσύνη τα μαθηματικά για να κατανοούν με κριτικό τρόπο τον κόσμο γύρω τους. Στην κατεύθυνση αυτή συλλέγουν, αναλύουν, οργανώνουν και αξιολογούν δεδομένα ελέγχοντας τις πηγές προέλευσής τους και υπερασπίζονται τις απόψεις τους. Έτσι δρουν ως υπεύθυνοι πολίτες στους χώρους δράσης τους, συμβάλλοντας δυναμικά στην δημοκρατική και ισότιμη ανάπτυξη των κοινωνιών σε μικρο -και μακρο – επίπεδο.

Κατανοούν και είναι σε θέση να αξιοποιήσουν τον μαθηματικό λόγο (mathematical discourse) εντοπίζοντας κρίσιμες μαθηματικές ιδέες, αναλύοντας και ερμηνεύοντας διαφορετικά αναπαραστασιακά συστήματα. Μια τέτοια προσέγγιση βοηθά τους μαθητές να αναπτύσσουν πολυτροπικές προσεγγίσεις στην επικοινωνία και να χρησιμοποιούν τη μαθηματική γλώσσα με ακρίβεια και ευελιξία.

2.2. Μαθηματικές και Κοινωνικο-πολιτισμικές διεργασίες και πρακτικές

Ως Μαθηματικές Πρακτικές εννοούμε τις νοητικές εκείνες διεργασίες που εμπλέκονται στην ανάπτυξη γνώσης και κατανόησης, όπως η σκέψη, η μνήμη, η επίλυση προβλήματος κ.ά. Οι μαθηματικές διεργασίες αποτελούν σημαντικές όψεις της μάθησης και της κατανόησης των μαθηματικών αλλά και της μαθηματικής πράξης, για το λόγο αυτό η εμπλοκή των μαθητών στις παραπάνω γνωστικές διεργασίες θεωρούνται ως μαθηματικές πρακτικές. Η χρήση εργαλείων όπως ο άβακας και ο κανόνας, αποτελεί κοινή πρακτική στην ιστορία των μαθηματικών, Η χρήση τεχνουργημάτων (artefacts), απτικών και ψηφιακών, προσφέρει ευκαιρίες αποτελεσματικής διατύπωσης και διερεύνησης εικασιών και προβλημάτων, κατάλληλης αναπαράστασης μιας μαθηματικής ιδέας η και μοντελοποίηση μιας κατάστασης.

Οι μαθητές, μέσω της μετάβασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης σε ένα άλλο, αναγνωρίζουν τις σχέσεις και δημιουργούν συνδέσεις μεταξύ των διαφόρων συστημάτων αναπαράστασης (π.χ. εικονιστικών, γεωμετρικών, συμβολικών, κ.λπ.). Είναι σαφές ότι η απλή παρουσία εργαλείων (π.χ. ψηφιακών) δεν διασφαλίζει την μαθηματική κατανόηση, καθώς πολλοί μαθητές δυσκολεύονται στη χρήση τους (ακόμα και σε απλές περιπτώσεις, όπως του διαβήτη ή του μοιρογνωμονίου), ενώ συχνά η λειτουργική τους ενσωμάτωση στη διαδικασία μάθησης αποδεικνύεται μια εξαιρετικά δύσκολη υπόθεση.

2.3. Μαθηματικές Ικανότητες, μαθηματικές δεξιότητες και στάσεις

Ο βαθμός επίτευξης των στόχων ενός μαθηματικού έργου, μιας δραστηριότητας, καταγράφεται μέσα από τις ικανότητες, τις δεξιότητες (συνδέονται κυρίως με θέματα γνώσεων και μαθηματικών πρακτικών) και τις στάσεις (συνδέονται κυρίως με κοινωνικό-πολιτισμικές-πρακτικές) που αναπτύσσει ο μαθητής.

Μαθηματική ικανότητα (competence). Αφορά τον βαθμό επίτευξης γνώσεων και μαθηματικών πρακτικών. Συγκεκριμένα, περιλαμβάνει συνδυασμό δυνατοτήτων / ικανοτήτων επικοινωνίας, μαθητικοποίησης, αναπαράστασης, συλλογισμού και επιχειρηματολογίας, στρατηγικής σκέψης και, τέλος, χρήσης συμβόλων, τυπικής και τεχνικής γλώσσας, καθώς και πράξεων-λειτουργιών.

Δεξιότητα (Skill). Υποδηλώνει την εξειδίκευση που αναπτύσσεται στη διάρκεια μιας κατάρτισης ή μιας εμπειρίας. Ειδικότερα, η μαθηματική δεξιότητα αναφέρεται συνήθως στην επιτέλεση και εφαρμογή διαδικαστικού τύπου ενεργειών, όπως η εκτέλεση ενός αλγόριθμου ή μιας προκαθορισμένης τεχνικής. Βασικό χαρακτηριστικό κάθε δεξιότητας είναι ότι όποιος την ασκεί πρέπει να ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις του αντίστοιχου έργου και αυτό προϋποθέτει την επιλογή και εφαρμογή κατάλληλης στρατηγικής. Μια δεξιότητα δεν μπορεί να εξηγηθεί με λόγια, μπορεί μόνο να επιδειχθεί. Έτσι, ο μόνος τρόπος εκμάθησης μιας δεξιότητας είναι μέσω μαθητείας και πραγματοποιείται κατά τη εμπλοκή των μαθητών σε επιλεγμένες μαθηματικές πρακτικές όπως η πρακτική επιλογής και χρήσης κατάλληλων εργαλείων.

Στάση (attitude). Γενικά, αφορά σε τρόπους δράσης, «αισθάνεσθαι», σκέψης που δείχνουν τη διάθεση, τη γνώμη κ.ά. ενός ατόμου για κάποιον ή κάτι. Από ψυχολογική σκοπιά, πρόκειται για μια νοητική και συναισθηματική οντότητα που κληρονομεί ή χαρακτηρίζει ένα άτομο, η οποία οριοθετείτε μέσω εμπειριών. Ειδικότερα η στάση στα μαθηματικά (mathematical attitudes) αφορά στις συναισθηματικές αντιδράσεις που περιλαμβάνουν θετικά ή αρνητικά συναισθήματα μέτριας έντασης και λογικής σταθερότητας. Διακρίνονται τρεις διαστάσεις στη στάση απέναντι στα μαθηματικά: συναισθηματική διάθεση, όραμα των μαθηματικών και αντιληπτή ικανότητα. Οι στάσεις αφορούν κυρίως τον βαθμό επίτευξης των κοινωνικό-συναισθηματικών πρακτικών.

2.4. Επιλογή μαθηματικών έργων και διαχείριση της μαθηματικής δραστηριότητας στην τάξη

Αρχικά θα πρέπει να γίνει μια προσπάθεια διαχωρισμού του μαθηματικού έργου από τη μαθηματική δραστηριότητα. Το μαθηματικό έργο είναι το έργο ή η εργασία που αναθέτει ο εκπαιδευτικός στους μαθητές του, ενώ η μαθηματική δραστηριότητα αφορά τη δράση που προκύπτει στην πορεία εκπόνησης του μαθηματικού έργου που έχει ανατεθεί.

Μια κεντρική διδακτική πρακτική του εκπαιδευτικού είναι η επιλογή του μαθηματικού έργου να συνδέεται άμεσα, αλλά όχι αποκλειστικά, με τις μαθηματικές πρακτικές που θα αναπτύξει ο μαθητής. Ο εκπαιδευτικός δεν περιορίζει τις επιλογές του σε έργα που εστιάζουν στην εφαρμογή αλγορίθμων και μαθηματικών τύπων μα επιλέγει έργα που πλησιάζουν στα ενδιαφέροντα ή τις εμπειρίες των μαθητών, έργα που αντλούν προβληματισμούς από πραγματικές καταστάσεις της καθημερινότητας, τα οποία επιδέχονται διαφορετικές μεθόδους επίλυσης και απαιτούν τεκμηριωμένες επεξηγήσεις και παραδοχές (know, et al., 2006; Sullivan, 2003) και γενικότερα που εμπλέκουν τους μαθητές στην αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, στη δημιουργία συνδέσεων και σε δράσεις διερεύνησης, πειραματισμού και αναστοχασμού (Artigue, 2012).

Το μαθηματικό έργο μπορεί να είναι ένα παιχνίδι ή μια άσκηση ή ένα πρόβλημα ή ακόμα και μια ερώτηση που θα θέσει ο εκπαιδευτικός στην τάξη. Τα μαθηματικά έργα διαφοροποιούνται ως προς το μαθηματικό τους περιεχόμενο (π.χ. άλγεβρα ή στοχαστικά μαθηματικά), ως προς την οργάνωση που απαιτούν (ατομικά ή ομαδικά), ως προς τη χρήση εργαλείων που προτείνουν (π.χ. χειραπτικά ή ψηφιακά) και το είδος τους. Το είδος του μαθηματικού έργου μπορεί να αφορά τις γνωστικές απαιτήσεις του και τη συνθετότητά του (π.χ. απομνημόνευση ή διερεύνηση), το πλαίσιο του (π.χ. αυθεντικό ή μαθηματικό), τις δράσεις που ενθαρρύνει (π.χ. απόδειξη ή γεωμετρική κατασκευή) και τις μαθηματικές γνωστικές διεργασίες – πρακτικές που ενδυναμώνει. Οι τελευταίες δύο κατηγορίες συνδέονται άμεσα με τη μαθηματική δραστηριότητα που θα αναπτύξει ο μαθητής (Τζεκάκη, 2011). Γενικότερα, ως μαθηματική δραστηριότητα εννοούμε τις μαθηματικές δράσεις τις οποίες αναπτύσσει ο μαθητής (π.χ. αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, αναγνώριση και αναζήτηση κανονικοτήτων και μαθηματικής δομής, αναζήτηση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων), αξιοποιώντας μια ποικιλία εργαλείων (φυσικών, όπως ένα μοιρογνωμόνιο ή νοητικών, όπως μια γραφική παράσταση) με σκοπό να διαχειριστεί και να απαντήσει στο μαθηματικό έργο που του έθεσε ο εκπαιδευτικός. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να τονίσουμε ότι η απλή εμπλοκή των μαθητών με ένα μαθηματικό έργο (π.χ.

επίλυση εξίσωσης), δεν είναι αρκετό για να θεωρηθεί ότι ο μαθητής αναπτύσσει μια πλούσια μαθηματική δραστηριότητα. Μια πλούσια μαθηματική δραστηριότητα προσφέρει στους μαθητές την ευκαιρία να αναπτύξουν μια ποικιλία μαθηματικών πρακτικών που θα τους οδηγήσουν στις μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών (όπως απόδειξη και γενίκευση ή ισοδυναμία και μετασχηματισμοί) και τα αντίστοιχα μαθηματικά νοήματα (Τζεκάκη, 2014). Με την έννοια αυτή, στη μαθηματική δραστηριότητα ο εκπαιδευτικός εστιάζει στο «πως δρα» ο μαθητής ενώ κάποια βασικά ερωτήματα που μπορεί να τον απασχολούν είναι: «τι είδους μαθηματικό έργο να δώσω στους μαθητές ώστε να αναπτύξουν μια πλούσια μαθηματική δραστηριότητα;» ή «με ποιο τρόπο μπορώ να διαφοροποιήσω το μαθηματικό έργο ώστε να ανταποκρίνεται στις ανάγκες όλων των μαθητών της τάξης;» ή «τι είδους εργαλεία θα δώσω στους μαθητές ώστε να τους υποστηρίξω στην ανάπτυξη μαθηματικών δράσεων;» ή «πως θα αξιολογήσω αν μια δράση που ανέπτυξαν οι μαθητές είναι μαθηματική δράση;» ή «πως θα μπορέσω να διαχειριστώ διδακτικά το μαθηματικό έργο; (π.χ. τι είδους ερωτήσεις θα θέσω; Τι είδους επεκτάσεις να κάνω;) ώστε να μην καταλήξουν οι μαθητές σε μια τετριμμένη μαθηματική δραστηριότητα;».

Ενδεικτικά στη βιβλιογραφία προτείνονται τρία στάδια αξιοποίησης ενός μαθηματικού έργου στη σχολική τάξη καθώς και ο ρόλος που έχει ο εκπαιδευτικός σε κάθε ένα στάδιο (Trevisan et al., 2020). Στο πρώτο στάδιο της εισαγωγής του μαθηματικού έργου στην τάξη, ο εκπαιδευτικός βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν το πλαίσιο του έργου και αν κρίνει απαραίτητο και το μαθηματικό του περιεχόμενο. Παράλληλα, ενθαρρύνει τους μαθητές στη χρήση κατάλληλων εργαλείων (π.χ. χειραπτικών, ψηφιακών, οπτικών αναπαραστάσεων) για την υποστήριξη της εμπλοκής όλων των μαθητών (Gonzalez, & Eli, 2017). Στο δεύτερο στάδιο της αυτόνομης εργασίας, οι μαθητές εργάζονται ατομικά ή σε ομάδες, ο εκπαιδευτικός αλληλοεπιδρά μαζί τους για να διαγνώσει τις ανάγκες τους και λαμβάνει αποφάσεις για τον τρόπο δράσης του που μπορεί να διαφοροποιείται ανάλογα με την ομάδα – μαθητή που εκτελεί την αυτόνομη εργασία. Στο τρίτο στάδιο της συζήτησης στην ολομέλεια της τάξης, οι μαθητές παρουσιάζουν τους τρόπους και τις στρατηγικές που ανέπτυξαν και έτσι ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να υποστηρίξει τους μαθητές να προχωρήσουν σε συνδέσεις και επεκτάσεις των μαθηματικών ιδεών που παρουσιάστηκαν (Dooley, 2009; Stein et al., 2008).

2.5. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στη διαμόρφωση της μαθηματικής κουλτούρας στην τάξη

Η στροφή προς τις κοινωνικο-πολιτισμικές αναγνώσεις της μάθησης των μαθηματικών φώτισε αναπόφευκτα την ανάγκη ανάδειξης και μελέτης συνιστωσών της κουλτούρας της τάξης των μαθηματικών, εκείνων των προτύπων διεπαφής με άλλα λόγια που σχηματίζουν την κανονικότητα της ζωής σε μια σχολική τάξη τα οποία επιδρούν στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών (McNeal & Simon, 2000; Nickson, 1994).

Η κουλτούρα είναι όλα όσα κατέχουν, σκέφτονται και πράττουν οι άνθρωποι ως μέλη μιας συλλογικότητας, δηλαδή τα υλικά αγαθά, οι ιδέες, οι αξίες, οι στάσεις και τα πρότυπα συμπεριφοράς τους (Ferraro & Andreatta, 2014). Αυτές οι συνιστώσες είναι αλληλένδετες στο βαθμό που καθίστανται δύσκολο να τις διαχωρίσουμε στις καθημερινές τους εκφάνσεις της κουλτούρας. Η φύση του γνωστικού αντικειμένου, η προσωπική ή η κοινωνική του αξία, ο τρόπος με τον οποίο διδάσκεται και οι ρόλοι των δασκάλων και των μαθητών κατά τη διδασκαλία του, οικοδομούν την κουλτούρα της σχολικής τάξης των μαθηματικών και παράγει αντιλήψεις, συμπεριφορές και στάσεις γύρω από το διδακτικό αντικείμενο και τη διδασκαλία του. Η κουλτούρα αυτή γίνεται έμμεσα αντιληπτή παρατηρώντας την σχολική τάξη «από μέσα» και γνωρίζοντας τους κανόνες της, τον τρόπο που διαπραγματεύεται και οικοδομεί τη γνώση, τις αξίες και στάσεις στις οποίες στηρίζεται, αλλά ταυτόχρονα τις παράγει και αναπαράγει. Με άλλα λόγια η κουλτούρα της σχολικής τάξης των μαθηματικών δεν μπορεί να παρατηρηθεί άμεσα αλλά καθορίζεται από αόρατους μα υπαρκτούς κανόνες και εμπειρίες που εκπαιδευτικοί και μαθητές φέρνουν μαζί τους και επηρεάζουν τις ενέργειες και διεπαφές τους (Feiman-Nemser & Floden, 1986; Nickson, 1994).

Μέσα σε μια σχολική τάξη τα διαθέσιμα αντικείμενα και τα τεχνουργήματα, οι γνώσεις και οι εμπειρίες των συμμετεχόντων, οι αντιλήψεις, οι φιλοδοξίες και τα συναυσθήματα τους, καθώς και η φύση των προτύπων διεπαφής όπως επιτελούνται μεταξύ του δασκάλου και των μαθητών, δημιουργούν διαφορετικές κουλτούρες και -επομένως- διαφορετικές παλισιώσεις για την ενίσχυση της μάθησης των μαθηματικών. Μια αυστηρά δομημένη, ατομικοποιημένη, μετωπική διδασκαλία οικοδομεί μια κουλτούρα που προβάλλει τα μαθηματικά ως μια συλλογή από εννοιολογικά αδιαφανείς διαδικασίες και επιφυλάσσει για τους μαθητές τον ρόλο του καταναλωτή αυτών των διαδικασιών μέσω της εξάσκησης και της απομνημόνευσης. Αντίθετα, μια διδασκαλία που βασίζεται στην διερεύνηση, τη διαπραγμάτευση και τη συζήτηση εκτιμά και υποστηρίζει για τους μαθητές ρόλους που επικεντρώνονται στην κατανόηση συνδεδεμένων μαθηματικών γνώσεων και σχέσεων που κατασκευάζονται μέσω της αλληλεπίδρασης με άλλους.

Έχουν υιοθετηθεί διάφορες μεταφορές για να παρουσιάσουν τον ρόλο του εκπαιδευτικού στην τάξη. Μια μεταφορά από αυτές τον αναγνωρίζει ως «ενορχηστρωτή» (Drijvers, et al., 2010; Smith, et al., 2009) μιας και συντονίζει τη συμμετοχή των μαθητών στις συζητήσεις στην ολομέλεια της τάξης. Μια άλλη μεταφορά παρουσιάζει τον εκπαιδευτικό ως «διακριτικό βοηθό και πλοηγό» που υποστηρίζει και πλοηγεί την προσοχή των μαθητών σε θέματα μάθησης (Lin, 2000). Επίσης, ο Radford (2014) για να δώσει έμφαση στην αλληλεπίδραση εκπαιδευτικού – μαθητών που «δουλεύουν μαζί» για να πετύχουν ένα κοινό στόχο, την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης, παρομοιάζει τη σχέση αυτή με τη σχέση «μαέστρου - ορχήστρας» (Radford, 2014, p. 11). Ακριβώς όπως ο μαέστρος ο οποίος μπορεί να γνωρίζει τη 10^{η} Συμφωνία του Σοστακόβιτς από την πρώτη νότα έως την τελευταία χρειάζεται την ορχήστρα για να δώσει ζωή στις νότες και να γίνουν αντικείμενο των αισθήσεών μας, έτσι και ο εκπαιδευτικός μπορεί να έχει άριστη μαθηματική γνώση αλλά μόνο αλληλεπιδρώντας με τους μαθητές αυτή η γνώση μπορεί να γίνει αντικείμενο μάθησης.

Παρότι οι παραπάνω μεταφορές αδυνατούν να αποδώσουν όλες τις πτυχές του ρόλου του εκπαιδευτικού την τάξη, δείχνουν ότι ο ρόλος του είναι πολυδιάστατος και απαιτητικός. Η βασική προϋπόθεση είναι να μετασχηματίσει τη μαθηματική γνώση σε σχολική μαθηματική γνώση.

Παράλληλα ο εκπαιδευτικός οργανώνει και διαχειρίζεται τη μαθησιακή διαδικασία αναπτύσσοντας στρατηγικές διαφοροποίησης και συμπερίληψης, προσαρμόζοντας για παράδειγμα τη μαθηματική πρόκληση σύμφωνα με τις ανάγκες των μαθητών. Επιπρόσθετα ενισχύει τις συναισθηματικές πτυχές της μάθησης, όπως την αυτοεκτίμηση και αυτοπεποίθηση των μαθητών, ενώ αξιοποιεί την ετερότητα των μαθητών στην αλληλεπίδραση και την επικοινωνία στην τάξη. Ταυτόχρονα με τα προηγούμενα, ο εκπαιδευτικός έχει την ευθύνη του σχεδιασμού (ή επανα-σχεδιασμού) των μαθηματικών έργων (Trigueros et al., 2014) αλλά και της επικύρωσης και της αξιολόγησης της μαθηματικής γνώσης των μαθητών (Morgan, 2000). Όλα τα παραπάνω θέτουν νέες προκλήσεις για τον εκπαιδευτικό καθώς χρειάζεται όχι μόνο να σχεδιάσει και να οργανώσει τη μαθησιακή διαδικασία αλλά και να ερμηνεύσει μη αναμενόμενες καταστάσεις και να δράσει άμεσα και ανάλογα. Εξάλλου, μπορεί η μάθηση να είναι μια διαδικασία που αναπτύσσεται και εξελίσσεται σε βάθος χρόνου, η διδασκαλία όμως διαδραματίζεται σε πραγματικό χρόνο και αυτό θέτει καθημερινές προκλήσεις για τον κάθε εκπαιδευτικό.

2.6. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στη διαμόρφωση εκπαιδευτικού υλικού

Ο εκπαιδευτικός θεωρείται ως ένας επιστήμονας – επαγγελματίας που σχεδιάζει τη διδασκαλία του με ευαισθησία απέναντι στις γνωστικές, συναισθηματικές, κοινωνικές ανάγκες των μαθητών του, τα διαφορετικά ενδιαφέροντα και τις ικανότητές τους, το διαφορετικό γλωσσικό, μαθησιακό, πολιτισμικό και κοινωνικό τους υπόβαθρο. Ο εκπαιδευτικός επεξεργάζεται τους στόχους της διδασκαλίας του και επιλέγει, τροποποιεί και δημιουργεί το υλικό και τα εργαλεία που εξυπηρετούν αυτούς τους στόχους (Choppin, 2011).

Συνεπώς ο εκπαιδευτικός ως επαγγελματίας αναπτύσσεται συνεχώς. Η επαγγελματική ανάπτυξη του εκπαιδευτικού δεν συνδέεται μόνο με την ενημέρωσή του για τις σύγχρονες εξελίξεις στο πεδίο της εκπαιδευτικής έρευνας αλλά κυρίως με τον συνεχή κριτικό αναστοχασμό του για τη διδασκαλία του. Ο αναστοχασμός του εκπαιδευτικού αποτελεί μέρος της ίδιας της διδασκαλίας και πραγματώνεται μέσα από τη συνεργασία μεταξύ ομότιμων – συναδέλφων. Αυτή η συνεργασία μπορεί να πάρει διαφορετικές μορφές και σχήματα και οδηγεί στον από κοινού σχεδιασμό και την κριτική διερεύνηση της διδασκαλίας με συστηματικό τρόπο (Jaworski, 2006).

2.7. Το πλαίσιο TRUmath

Ένας προβληματισμός που υπάρχει στην εκπαιδευτική κοινότητα και αφορά και το μάθημα των μαθηματικών είναι το «ποια μαθηματικά πρέπει να διδάσκουμε στους μαθητές μας;», είναι δυνατόν να δημιουργηθούν Προγράμματα Σπουδών ώστε να απαντηθεί εύκολα το ερώτημα αυτό και επίσης η εφαρμογή στην καθημερινή σχολική διαδικασία να είναι κάτι εφικτό; Τον εκπαιδευτικό που καθημερινά έρχεται σε επαφή με τους μαθητές τους τον βασανίζουν και άλλα ερωτήματα, όπως το «τι πραγματικά έχει σημασία να υλοποιείται, να συμβαίνει στη σχολική τάξη κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών;», υπάρχουν άραγε κάποιες συγκεκριμένες καλά καθορισμένες πρακτικές ή τεχνικές που όταν εφαρμοστούν στη σχολική τάξη οι μαθητές τα πάνε καλά; Και αν είναι δυνατόν πάνω σε αυτές τις τεχνικές οι εκπαιδευτικοί να υποστηριχθούν ώστε να γίνουν πιο καλοί στην εφαρμογή και υλοποίησή τους; Σύμφωνα με τον Alan H. Schoenfeld στο “Teaching for Robust Understanding of Essential Mathematics” (2015)

> *…αν για παράδειγμα υπήρχαν δεκάδες βασικές ανησυχίες για την τάξη και δεν υπήρχε ένας απλός τρόπος οργάνωσής τους, θα ήταν εξαιρετικά δύσκολο να σχεδιάσει κανείς αποτελεσματική διδασκαλία ή να βελτιώσει την πρακτική του. Από πού άραγε θα ξεκινούσε κανείς; Επιπλέον, το να λέμε ότι ένας μικρός αριθμός πραγμάτων «μετράει» δεν αρκεί, τα πράγματα θα πρέπει να είναι «βελτιώσιμα», δηλαδή θα πρέπει αρχικά να είναι αναγνωρίσιμα στην πράξη, ώστε να μπορούν να εντοπιστούν εύκολα και στη συνέχεια θα πρέπει αν είναι δυνατόν να εξετάζει κανείς την πρακτική του και να βρίσκει τρόπους να τα βελτιώνει.*

ως απάντηση σε αυτό τον προβληματισμό σχεδιάστηκε το πλαίσιο TRU Math, η λογική του και η εξέλιξή του βρίσκεται στο Schoenfeld (2013, 2014, 2015). Στη βιβλιογραφία υπάρχει μεγάλος αριθμός πλαισίων ανάλυσης της τάξης, ορισμένα από αυτά εξαιρετικά τα οποία όμως εστιάζουν σε μία ή δύο βασικές διαστάσεις της πρακτικής της τάξης και επιπλέον δεν είναι ολοκληρωμένα, επίσης κάποια άλλα πλαίσια ευρέως χρησιμοποιούμενα δεν είναι ειδικά για το μάθημα των μαθηματικών, κάτι το οποίο κρίνεται απαραίτητο στην περίπτωσή μας.

Οι πέντε διαστάσεις του πλαισίου Teaching for Robust Understanding of Mathematics (TRUmath) δίνονται παρακάτω (εικόνα 1).

The Five Dimensions of Mathematically Powerful Classrooms

The Mathematics	Cognitive Demand	Access to Mathematical Content	Agency, Authority, and Identity	Formative Assessment
The extent to which the mathematics discussed is focused and coherent, and to which connections between procedures, concepts and contexts (where appropriate) are addressed and explained. Students should have opportunities to learn important mathematical content and practices, and to develop productive mathematical habits of mind.	*The extent to which classroom interactions create and maintain an environment of productive intellectual challenge conducive to students' mathematical development. There is a happy medium between spoon-feeding mathematics in bite-sized pieces and having the challenges so large that students are lost at sea.*	*The extent to which classroom activity structures invite and support the active engagement of all of the students in the classroom with the core mathematics being addressed by the class. No matter how rich the mathematics being discussed, a classroom in which a small number of students get most of the "air time" is not equitable.*	*The extent to which students have opportunities to conjecture, explain, make mathematical arguments, and build on one another's ideas, in ways that contribute to their development of agency (the capacity and willingness to engage mathematically) and authority (recognition for being mathematically solid), resulting in positive identities as doers of mathematics.*	*The extent to which the teacher solicits student thinking and subsequent instruction responds to those ideas, by building on productive beginnings or addressing emerging misunderstandings. Powerful instruction "meets students where they are" and gives them opportunities to move forward.*

Εικόνα 1: Το πλαίσιο TRUmath. Οι πέντε διαστάσεις των ισχυρών μαθηματικών τάξεων

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό του πλαισίου είναι ότι επικεντρώνεται στη μαθηματική εμπειρία στην τάξη από την οπτική γωνία του μαθητή. Σίγουρα, το τι λέει και τι κάνει ο εκπαιδευτικός στη σχολική τάξη των μαθηματικών είναι κεντρικής σημασίας αλλά αυτό που έχει σημασία είναι το πώς ο μαθητής το αντιλαμβάνεται, το πώς αντιδρά σε αυτό που λαμβάνει χώρα στη σχολική τάξη. Οι ενέργειες του εκπαιδευτικού αν και κεντρικές, αποτελούν μόνο ένα μέρος της εκπαιδευτικής διαδικασίας.

Όπως βλέπουμε στην εικόνα 1, υπάρχουν πέντε κύριες διαστάσεις στο πλαίσιο TRU. Η $1^{η}$ διάσταση, *τα μαθηματικά* (the Mathematics), έχει να κάνει με την ποιότητα των μαθηματικών που βιώνει ο μαθητής. Είναι αυτονόητο ότι όσο περισσότερο ο εκπαιδευτικός παρέχουν ουσιαστική πρόσβαση σε «πλουσιότερα» μαθηματικά, τόσο μεγαλύτερες είναι οι ευκαιρίες που έχουν οι μαθητές να εξελιχθούν σε ισχυρούς μαθηματικούς «στοχαστές». Η $2^{η}$ διάσταση, *η γνωστική απαίτηση* (Cognitive Demand), αφορά το βαθμό στον οποίο το περιβάλλον παρέχει στους μαθητές ευκαιρίες για παραγωγή νοημάτων με στόχο τη μαθηματική τους εξέλιξη. Είναι περιττό να πούμε ότι η εύρεση του «σωστού» επιπέδου πρόκλησης για τους μαθητές είναι δύσκολη, κανένας μαθητής δεν είναι «μέσος», πράγμα που σημαίνει ότι μια προσέγγιση του περιεχομένου ώστε να ταιριάζει σε όλους είναι βέβαιο ότι θα είναι προβληματική. Η αλληλουχία των λύσεων έχει τη δυνατότητα τόσο να συνδέσει διαφορετικές ιδέες των μαθητών όσο και να «συμπαρασύρει» τους μαθητές που μπαίνουν στη συζήτηση όταν αυτή γίνεται στην ολομέλεια (Smith, M., & Stein, M. K. 2011). Η $3^{η}$ διάσταση, αφορά την ισότιμη *πρόσβαση σε μαθηματικό περιεχόμενο* (Access to Mathematical Content), δηλαδή την ενεργό εμπλοκή και συμμετοχή του συνόλου των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία. Η $4^{η}$ διάσταση σχετίζεται με θέματα *Οργανισμού, Εξουσίας και Ταυτότητας* (Agency, Authority and Identity). Το ερώτημα που διατυπώνεται εδώ είναι: «πως οι μαθητές βλέπουν τους εαυτούς τους ως στοχαστές μαθηματικών;» Στη διάσταση αυτή στους μαθητές δίνεται η δυνατότητα να «πατήσουν» στις ιδέες των συμμαθητών τους και να «χτίσουν» τις δικές τους ιδέες, δίνονται δυνατότητες για εικασίες και διατύπωση μαθηματικών επιχειρημάτων, αναπτύσσεται η αυτενέργεια (agency) των μαθητών, δηλαδή δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να «κάνουν» μαθηματικά, άρα οι ίδιοι γίνονται δημιουργοί και οι κατασκευές τους, οι απαντήσεις τους αποκτούν «ταυτότητα». Τέλος η $5^{η}$ διάσταση, η *διαμορφωτική αξιολόγηση* (Formative Assessment), αφορά τις ευκαιρίες που έχουν οι μαθητές να δείχνουν το βαθμό κατανόησης των εννοιών που διαπραγματεύονται στη σχολική τάξη των μαθηματικών, έτσι ο εκπαιδευτικός μπορεί ανά πάσα στιγμή να γνωρίζει το βαθμό κατανόησης των εννοιών που μελετούν και επεξεργάζονται και να εντοπίζει πιθανές παρανοήσεις ώστε να παρεμβαίνει με στόχο πάντα την βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Το TRUmath είναι ένα πλαίσιο διερεύνησης της πρακτικής στην τάξη και προσφέρει ένα κοινό δίαυλο επικοινωνίας για συζήτηση των πιο σημαντικών πτυχών της πρακτικής στη σχολική τάξη. Υποστηρίζει ότι αν μια τάξη έχει ορισμένα χαρακτηριστικά οι μαθητές που θα βγουν από αυτή την τάξη θα είναι ισχυροί «στοχαστές» μαθηματικών και λύτες προβλημάτων, δεν ισχυρίζεται ότι θα μας δώσει λύσεις στο πως θα επιτευχθούν οι στόχοι της διδασκαλίας, δεν καθορίζει κάποιο συγκεκριμένο στυλ διδασκαλίας ή δραστηριοτήτων στην τάξη, γιατί όπως είναι γνωστό στην εκπαιδευτική διαδικασία υπάρχουν διαφορετικού τρόποι επίτευξης των ίδιων στόχων. Η ιδέα του πλαισίου TRUmath είναι όταν σχεδιάζω μαθήματα, όταν διδάσκω, όταν παρατηρώ και αναστοχάζομαι πάνω σε αυτά, εξετάζω τις μαθηματικές ευκαιρίες που προσφέρονται στους μαθητές, εξετάζω αν οι δραστηριότητες στην τάξη παρέχουν ευκαιρίες για παραγωγή νοημάτων και πως μπορούν να προσαρμοστούν ή πως προσαρμόστηκαν, ώστε να ταιριάζουν στις ατομικές δυνατότητες των μαθητών, αναζητώ ευκαιρίες ώστε όλοι οι μαθητές να ασχοληθούν και να συζητήσουν με τους συμμαθητές στους στην ολομέλεια γύρω από μαθηματικές έννοιες και να νιώσουν ικανοποίηση για τη συμμετοχή τους. Η μέθοδος TRUmath πλαισιώνει τον τρόπο με τον οποίο ένας εκπαιδευτικός σχεδιάζει και αποτιμά τη διδασκαλία του.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω το TRUmath είναι μια υπόθεση εργασία, για να ελέγξουμε αυτή την υπόθεση χρειαζόμαστε δεδομένα και για να συγκεντρώσουμε αυτά τα δεδομένα. Χρειαζόμαστε τρόπους βαθμολόγησης των τάξεων ανάλογα με τον τρόπο αξιοποίησης ή υλοποίησης του πλαισίου TRUmath. Για το λόγο αυτό δημιουργήθηκε η ρουμπρίκα βαθμολόγησης TRU (Schoenfeld, Floden, & the Algebra Teaching Study and Mathematics Assessment Project, 2014), η οποία για διαφορετικές δομές δραστηριοτήτων στην τάξη (ολόκληρη η τάξη, μικρές ομάδες μαθητών, ατομική εργασία κλπ) προσδιορίζει το «σκορ» της μέτρησης (εικόνα 2).

Όπως φαίνεται και από τις 5 διαστάσεις, το βασικό χαρακτηριστικό του πλαισίου είναι ότι επικεντρώνεται στη μαθησιακή εμπειρία της τάξης από την πλευρά και την οπτική του μαθητή, ενώ για τον εκπαιδευτικό αποτελεί ένα πλαίσιο σκέψης για τη διδασκαλία του πριν και μετά την εκπαιδευτική πράξη.

	The Mathematics	Cognitive Demand	Access to Mathematical Content	Agency, Authority, and Identity	Formative Assessment
	How accurate, coherent, and well justified is the mathematical content?	*To what extent are students supported in grappling with and making sense of mathematical concepts?*	*To what extent does the teacher support access to the content of the lesson for all students?*	*To what extent are students the source of ideas and discussion of them? How are student contributions framed?*	*To what extent is students' mathematical thinking surfaced; to what extent does instruction build on student ideas when potentially valuable or address misunderstandings when they arise?*
1	Classroom activities are unfocused or skills-oriented, lacking opportunities for engagement in key practices such as reasoning and problem solving.	Classroom activities are structured so that students mostly apply memorized procedures and/or work routine exercises.	There is differential access to or participation in the mathematical content, and no apparent efforts to address this issue.	The teacher initiates conversations. Students' speech turns are short (one sentence or less), and constrained by what the teacher says or does.	Student reasoning is not actively surfaced or pursued. Teacher actions are limited to corrective feedback or encouragement.
2	Activities are primarily skills-oriented, with cursory connections between procedures, concepts and contexts (where appropriate) and minimal attention to key practices.	Classroom activities offer possibilities of conceptual richness or problem solving challenge, but teaching interactions tend to "scaffold away" the challenges, removing opportunities for productive struggle.	There is uneven access or participation but the teacher makes some efforts to provide mathematical access to a wide range of students.	Students have a chance to explain some of their thinking, but "the student proposes, the teacher disposes": in class discussions, student ideas are not explored or built upon.	The teacher refers to student thinking, perhaps even to common mistakes, but specific students' ideas are not built on (when potentially valuable) or used to address challenges (when problematic).
3	Classroom activities support meaningful connections between procedures, concepts and contexts (where appropriate) and provide opportunities for engagement in key practices.	The teacher's hints or scaffolds support students in productive struggle in building understandings and engaging in mathematical practices.	The teacher actively supports and to some degree achieves broad and meaningful mathematical participation; OR what appear to be established participation structures result in such engagement.	Students explain their ideas and reasoning. The teacher may ascribe ownership for students' ideas in exposition, AND/OR students respond to and build on each other's ideas.	The teacher solicits student thinking and subsequent instruction responds to those ideas, by building on productive beginnings or addressing emerging misunderstandings.

Εικόνα 2: Η ρουμπρίκα TRUmath

2.8. Το μοντέλο BSCS 5E ή 5Es

Το εκπαιδευτικό μοντέλο BSCS 5E ή 5Es, αποτελεί τον προκάτοχο του κύκλου μάθησης Science Curriculum Improvement Study (SCIS) (Karplus & Their, 1967). Αυτό το μοντέλο αποτελείται από τις ακόλουθες 5 φάσεις (εικόνα 3):

- Δέσμευση (Engagement)
- Εξερεύνηση (Exploration)
- Εξήγηση (Explanation)
- Επεξεργασία (Elaboration)
- Αξιολόγηση (Evaluation)

Κάθε φάση έχει μια συγκεκριμένη λειτουργία και συμβάλλει στη συνεκτική διδασκαλία του εκπαιδευτικού και στη διαμόρφωση από τους μαθητές μιας καλύτερης κατανόησης των επιστημονικών και τεχνολογικών γνώσεων, στάσεων και δεξιοτήτων. Το μοντέλο πλαισιώνει μια ακολουθία και οργάνωση προγραμμάτων, μονάδων και μαθημάτων.

Phase	Summary
Engagement	The teacher or a curriculum task accesses the learners' prior knowledge and helps them become engaged in a new concept through the use of short activities that promote curiosity and elicit prior knowledge. The activity should make connections between past and present learning experiences, expose prior conceptions, and organize students' thinking toward the learning outcomes of current activities.
Exploration	Exploration experiences provide students with a common base of activities within which current concepts (i.e., misconceptions), processes, and skills are identified and conceptual change is facilitated. Learners may complete lab activities that help them use prior knowledge to generate new ideas, explore questions and possibilities, and design and conduct a preliminary investigation.
Explanation	The explanation phase focuses students' attention on a particular aspect of their engagement and exploration experiences and provides opportunities to demonstrate their conceptual understanding, process skills, or behaviors. This phase also provides opportunities for teachers to directly introduce a concept, process, or skill. Learners explain their understanding of the concept. An explanation from the teacher or the curriculum may guide them toward a deeper understanding, which is a critical part of this phase.
Elaboration	Teachers challenge and extend students' conceptual understanding and skills. Through new experiences, the students develop deeper and broader understanding, more information, and adequate skills. Students apply their understanding of the concept by conducting additional activities.
Evaluation	The evaluation phase encourages students to assess their understanding and abilities and provides opportunities for teachers to evaluate student progress toward achieving the educational objectives.

Εικόνα 3: Το εκπαιδευτικό μοντέλο BSCS 5E

Ας δούμε μια πιο αναλυτική παρουσίαση των 5 φάσεων του μοντέλου αυτού:

- *Δέσμευση (Engagement)*:

  Σε αυτή την $1^{η}$ φάση του μοντέλου οι μαθητές εμπλέκονται σε νέες έννοιες μέσα από δραστηριότητες:

  - Πρόκλησης της περιέργειας των μαθητών
  - Με νόημα για τους ίδιους
  - Που εμφανίζουν την προηγούμενη γνώση στο προσκήνιο

- *Εξερεύνηση (Exploration)*:

  Στη $2^{η}$ φάση του μοντέλου υπάρχει κοινή βάση δραστηριοτήτων και δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να εντοπίσουν πιθανές παρανοήσεις εννοιών και λάθη που κάνουν ώστε να «χτίσουν» μόνοι τους και να κατανοήσουν τη νέα γνώση. Οι μαθητές μαθαίνουν νέα εργαλεία, εξερευνούν νέες καταστάσεις. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι βοηθός της υλοποίησης των δραστηριοτήτων.

- *Εξήγηση (Explanation):*

Στη 3η φάση του μοντέλου γίνεται εστίαση της προσοχής σε συγκεκριμένη πτυχή της εμπλοκής και εξερεύνησης και δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να αναδείξουν τις δεξιότητές τους μέσα από την κατανόηση καταστάσεων και παρουσίασης τους στην ολομέλεια. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού σε αυτή τη φάση είναι διευκολυντής της γνώσης.

- *Επεξεργασία (Elaboration):*

  Στην 4η φάση δίνονται από τον εκπαιδευτικό επιπλέον δραστηριότητες για βαθύτερη και πιο ολοκληρωμένη κατανόηση των εννοιών που μελετήθηκαν στα προηγούμενα στάδια. Υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των ομάδων και ανταλλαγή απόψεων. Ο εκπαιδευτικός συντονίζει και παρακολουθεί τις συζητήσεις τόσο στις ομάδες όσο και στην ολομέλεια και παρεμβαίνει διακριτικά όπου κρίνει ότι χρειάζεται.

- *Αξιολόγηση (Evaluation):*

  Στο 5ο και τελευταίο στάδιο του μοντέλου συναντάμε την αξιολόγηση μέσω των μαθησιακών εμπειριών που απέκτησαν οι μαθητές. Ο εκπαιδευτικός αξιολογεί την πρόοδο των μαθητών ως προς την επίτευξη των μαθησιακών στόχων.

3. Η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1. Επιλογή Ερευνητικής Μεθόδου

Η Έρευνα Σχεδιασμού ή «Design Research» (Kelly, 2003; Κυνηγός, 2006) επιλέχθηκε ως η πλέον κατάλληλη για την πρότασή μας. Είναι μια ποιοτική μέθοδος έρευνας η οποία αξιοποιείται από ερευνητές της εκπαίδευσης που μελετούν καινοτόμες διδακτικές πρακτικές, περιγράφεται ως η μελέτη δραστηριοτήτων στο χώρο εργασίας (Κυνηγός, 2006) και έχει ως στόχο να γεφυρώσει το χάσμα μεταξύ θεωρίας και εκπαιδευτικής πράξης και να προβληματίσει αναφορικά με τη φύση της μάθησης, τη δημιουργία βελτιωμένων μαθησιακών περιβαλλόντων και την ανάπτυξη θεωριών μάθησης (Λάτση, 2021). Η έρευνα σχεδιασμού έχει ποιοτικά χαρακτηριστικά και δεν εντάσσεται στις διαγνωστικού τύπου έρευνες (Κυνηγός, 2006). Δεν πραγματοποιεί σύγκριση ομάδων ελέγχου και πειραματισμού όπως στα κλασικά πειράματα, επιπλέον το πείραμα λαμβάνει χώρα μέσα στη σχολική τάξη, στο χώρο δηλαδή που υλοποιείται η καθημερινή μαθησιακή διαδικασία.

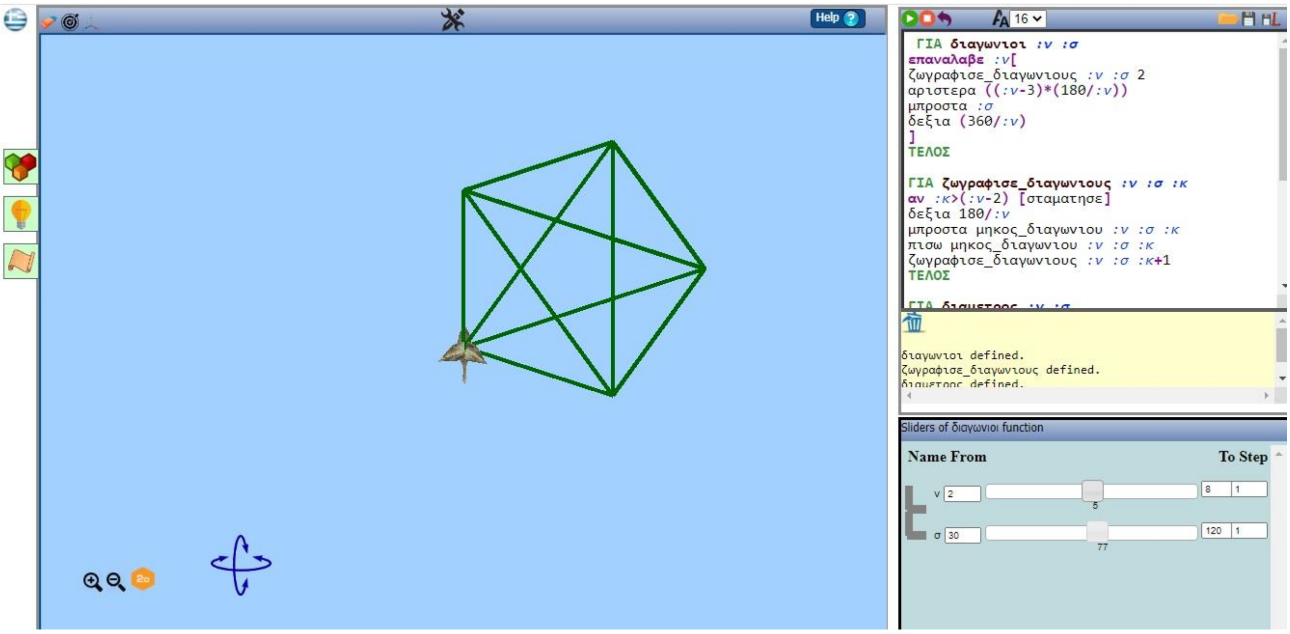
Η έρευνα σχεδιασμού προσφέρει τη δυνατότητα εξαγωγής συμπερασμάτων μιας και είναι ανοιχτή σε συμπεράσματα που θα προκύψουν αφού ο ερευνητής εξαρχής δεν έχει προκαθορίσει τα ερωτήματά του, άρα δεν αναμένει θετικές ή αρνητικές απαντήσεις σε αυτά. Μελετάει και προσπαθεί να κατανοήσει πως το περιβάλλον με τα διαθέσιμα εργαλεία επηρεάζει την πορεία της έρευνάς του, δηλαδή της εφαρμογής, έτσι λοιπόν κάθε φορά επανακαθορίζει την τακτική που θα ακολουθήσει στην επόμενη εφαρμογή του. Έχει βέβαια αρχικά σχεδιάσει – υποθέσει μια πορεία υλοποίησης η οποία αναμένεται κατά την υλοποίηση να ανατραπεί.

Πλεονέκτημα της έρευνας σχεδιασμού είναι ότι κατά την υλοποίηση των διαφόρων σταδίων της έρευνας η αλληλεπίδραση μεταξύ των μελών της ομάδας, μεταξύ των διαθέσιμων εργαλείων δίνει στον ερευνητή τη δυνατότητα να προβεί σε συνεχείς βελτιωτικές διορθώσεις του σχεδιασμού του (Collins, Joseph, & Bielaczyz, 2009) εξαιτίας της συνεχούς ανατροφοδότησης που λαμβάνει από τη συνεχιζόμενη εφαρμογή. Επιπλέον υπάρχει και το χαρακτηριστικό της εφαρμοσιμότητας των αποτελεσμάτων, αφού οι θεωρίες που παράγονται κατά την εφαρμογή και έχουν προκύψει από τη «δοκιμή» μέσα στη σχολική τάξη μπορούν να ελεγχθούν άμεσα. Τέλος, ένας επιπλέον λόγος επιλογής της συγκεκριμένης ερευνητικής μεθόδου αποτέλεσε το γεγονός ότι η έρευνα σχεδιασμού έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς τα τελευταία χρόνια σε έρευνες που αποσκοπούν στη μελέτη της μαθησιακής δραστηριότητας μέσα από καινοτόμες εκπαιδευτικές πρακτικές. Στην περίπτωση μας, δεν θα πρέπει να μην αναφέρουμε και τη δυσκολία που υπήρξε, η οποία ξεπεράστηκε σχετικά εύκολα, που ήταν ο διτός ρόλος του εκπαιδευτικού που ταυτόχρονα ήταν ο διδάσκων και ο ερευνητής.

3.2. Οι μηχανές σχεδιασμού

Μηχανή σχεδιασμού θεωρείται το περιβάλλον εκείνο που παρέχει τα κατάλληλα εργαλεία για την ανάπτυξη ψηφιακών προτύπων (templates) που θα επιτρέπουν με τη σειρά τους το σχεδιασμό σειράς δραστηριοτήτων ή και μικροπειραμάτων, για τις ανάγκες μιας γνωστικής περιοχής. Διαδικτυακές μηχανές σχεδιασμού θεωρούνται:

- Malt2: Διαδικτυακή πλατφόρμα προγραμματισμού τρισδιάστατων δυναμικών αναπαραστάσεων. Το περιβάλλον του υποστηρίζει τη χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Logo για την κατασκευή μοντέλων σε μια σκηνή τριών διαστάσεων. Επιπλέον η λειτουργικότητα των μεταβολέων δίνει τη δυνατότητα στην χρήση να χειριστεί δυναμικά τα μοντέλα που έχουν σχεδιαστεί στη σκηνή αλλάζοντας τις τιμές των παραμέτρων τους (εικόνα 4).



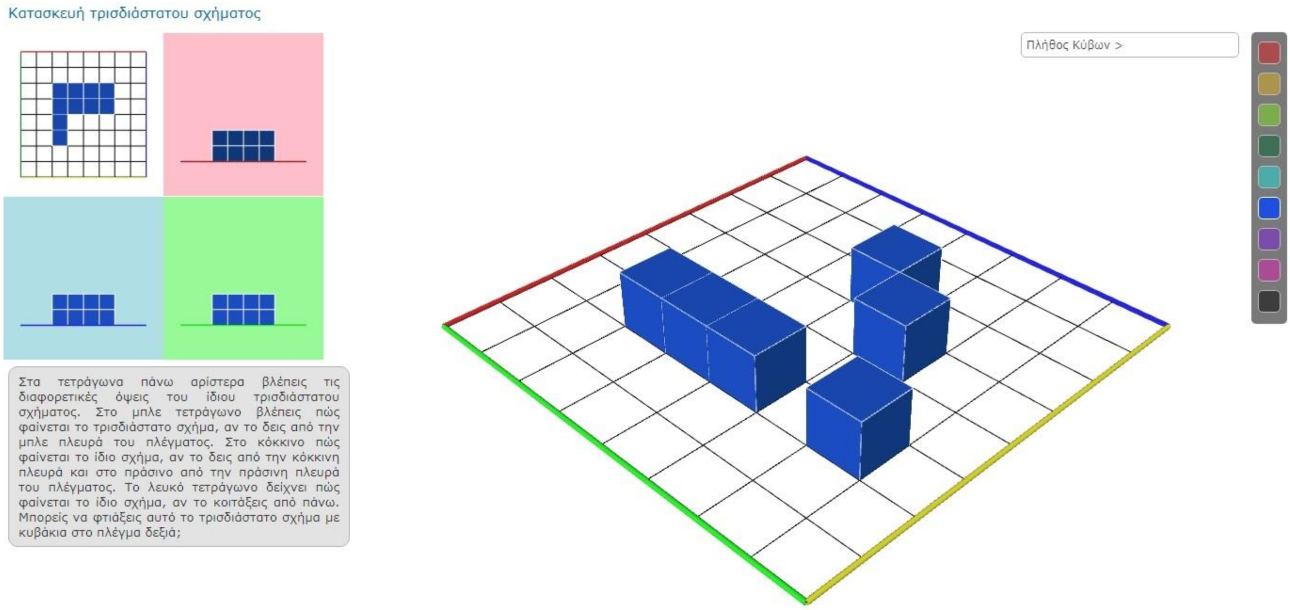
Εικόνα 4: Στιγμιότυπο από μικροπείραμα στο περιβάλλον του «malt2»

- ChoiCo (Choices with Consequences): Διαδικτυακή μηχανή σχεδιασμού παιχνιδιών προσομοίωσης και στρατηγικής. Στα παιχνίδια αυτά κάνει διαδοχικές επιλογές οι οποίες επιφέρουν επιπτώσεις στις παραμέτρους του παιχνιδιού. Στόχος είναι να διατηρήσει τις παραμέτρους του παιχνιδιού εντός συγκεκριμένων ορίων χωρίς να χάσει (εικόνα 5).

Εικόνα 5: Στιγμιότυπο από μικροπείραμα στο περιβάλλον του «ChoiCo»

- GeoGebra: Λογισμικό Μαθηματικών που επιτρέπει τον σχεδιασμό διαδραστικών αναπαραστάσεων και μοντέλων για ένα μεγάλο εύρος γνωστικών περιοχών.
- Κυβόκοσμος: Διαδικτυακή μηχανή σχεδιασμού που επιτρέπει την κατασκευή τρισδιάστατων μοντέλων τοποθετώντας σε μια τρισδιάστατη σκηνή κύβους συγκεκριμένου μεγέθους. Τα αρχεία κώδικα του λογισμικού έχουν δομηθεί με τρόπο που να επιτρέπει σε κάποιον με μικρή γνώση προγραμματισμού να σχεδιάσει συγκεκριμένες δραστηριότητες ή πρότυπα δραστηριοτήτων, κυρίως για τρισδιάστατη γεωμετρία (εικόνα 6).

Μια μηχανή σχεδιασμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί από έμπειρους εκπαιδευτικούς ή ειδικούς του μαθησιακού αντικειμένου αλλά ενδέχεται να δυσκολέψει έναν μαθητή ή εκπαιδευτικό χωρίς τις απαραίτητες γνώσεις (π.χ. γλώσσα προγραμματισμού υψηλού επιπέδου, σχεδιασμός γραφικών) (Κυνηγός, Χ. κ.ά. 2019). Οι μηχανές σχεδιασμού προσφέρουν τα απαραίτητα εργαλεία για την ανάπτυξη εστιασμένων ψηφιακών δομημάτων.



Εικόνα 6: Στιγμιότυπο από μικροπείραμα στο περιβάλλον του «Κυβόκοσμου»

3.3. Τα εστιασμένα συγγραφικά εργαλεία

Το «εστιασμένο συγγραφικό εργαλείο» είναι ένα ψηφιακό συγγραφικό δόμημα εστιασμένο σε μια γνωστική περιοχή, το οποίο ενσωματώνει λειτουργικότητες που επιτρέπουν την κατασκευή ψηφιακών δομημάτων για έννοιες αυτής της περιοχής (π.χ. αφαίρεση, πρόσθεση). Δεν αποτελεί μαθησιακό αντικείμενο αλλά ένα ενδιάμεσο βήμα για τον τελικό σχεδιασμό ενός εστιασμένου ψηφιακού δομήματος. Πρόκειται δηλαδή για ένα καλούπι που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον σχεδιασμό διαφορετικών δομημάτων συγκεκριμένου τύπου.

Τα εστιασμένα συγγραφικά εργαλεία σχεδιάστηκαν με έμφαση σε γνωστικές και εποικοδομιστικές προσεγγίσεις αξιοποίησης της ψηφιακής τεχνολογίας όπως η παροχή αλληλεξαρτώμενων πολλαπλών αναπαραστάσεων, λειτουργικοτήτων που υποστηρίζουν τη μαθηματική διερευνητική δραστηριότητα και την καλλιέργεια του αναστοχασμού.

Έχουν σχεδιαστεί, αναπτυχθεί και υποστηρίζονται από το Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας (Ε.Ε.Τ.) του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών (http://etl.eds.uoa.gr/to-ergastirio.html) και επιτρέπουν το δευτερογενή σχεδιασμό ψηφιακών δομημάτων χωρίς να απαιτούν από το σχεδιαστή υψηλού επιπέδου τεχνολογικές γνώσεις (π.χ. προγραμματισμό). Με χρήση της μηχανής σχεδιασμού GeoGebra αναπτύχθηκαν τα παρακάτω 4 πρότυπα:

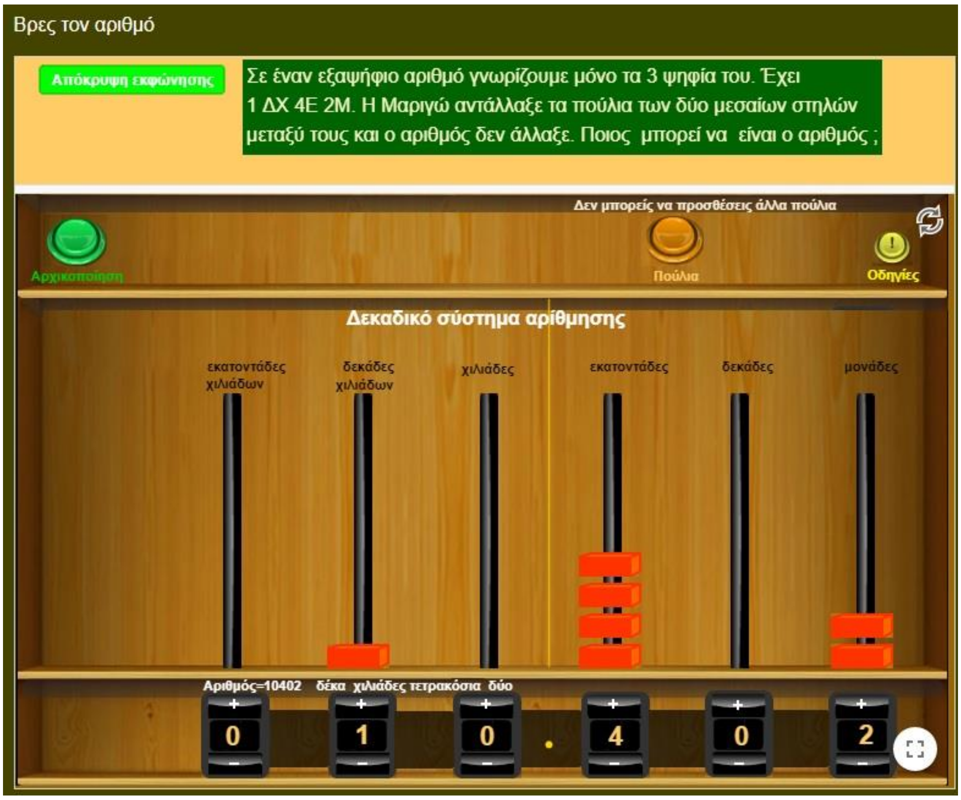
- Άβακας

- Αριθμογραμμή
- Πολύζυγο
- Χαλασμένη Αριθμομηχανή

Συνοπτικά αναφέρουμε τις λειτουργικότητες που ενσωματώνουν τα τρία από αυτά (για το «Πολύζυγο» θα αναφερθούμε αναλυτικά στην επόμενη παράγραφο).

- *Άβακας*

Είναι ένα εστιασμένο συγγραφικό εργαλείο (πρότυπο), το οποίο συνδυάζει δυναμικά το δεκαδικό-θεσιακό σύστημα αρίθμησης και την ανάλυση και σύνθεση αριθμών από πλήθος ψηφίων με τη συμβολική και τη λεκτική αναπαράσταση αυτήν των αριθμών (εικόνα 7).



Εικόνα 7: Στιγμιότυπο από μικροπείραμα στο περιβάλλον του «Άβακα»

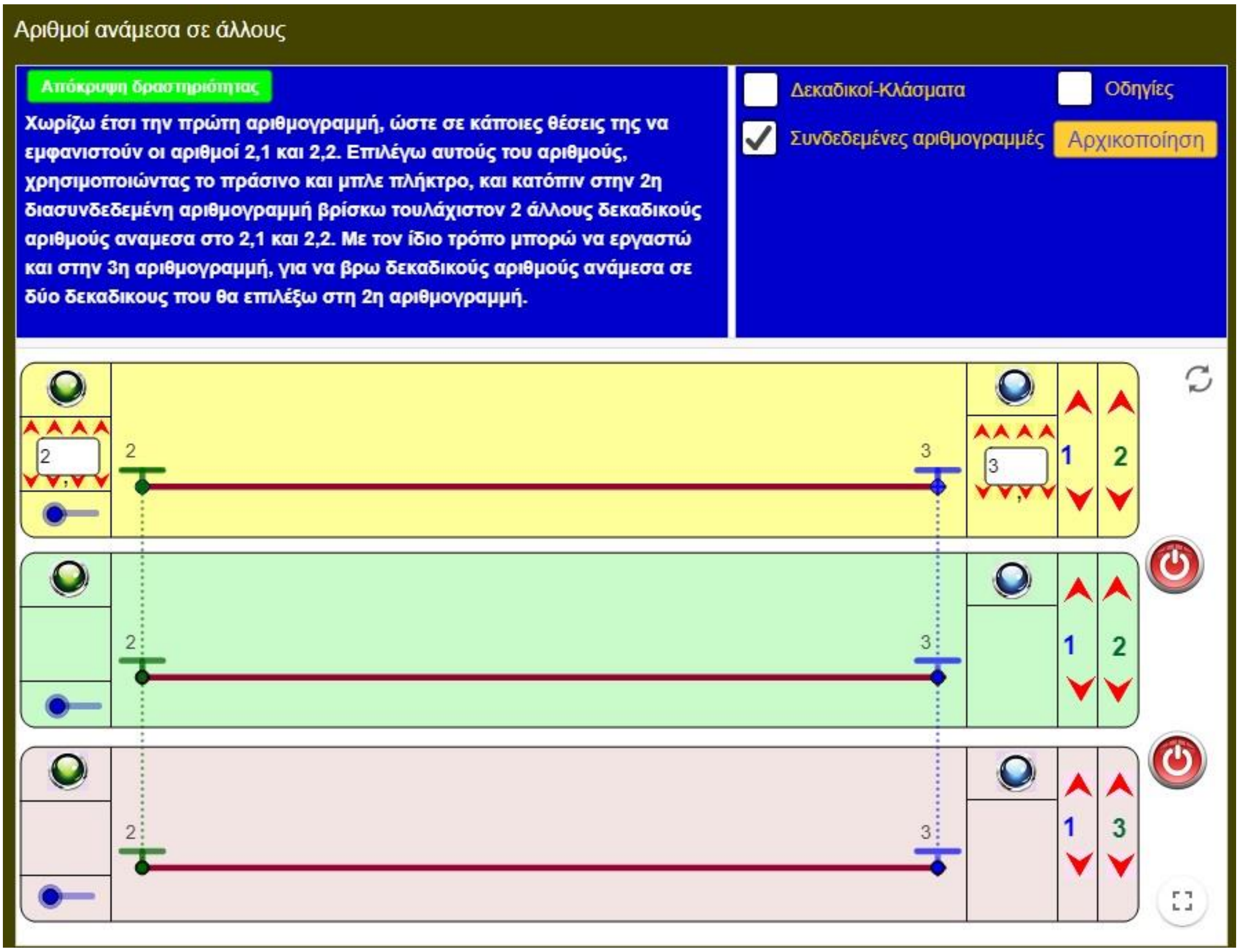
- *Αριθμογραμμή*

Είναι ένα εστιασμένο συγγραφικό εργαλείο (πρότυπο), που συνδυάζει στη διεπαφή του:

  - τη δυνατότητα πολλαπλών διαμερίσεων της αριθμογραμμής και καθορισμού των άκρων της,
  - τη δυνατότητα παράλληλης χρήσης φυσικών, δεκαδικών και κλασματικών αριθμών,

- τη δυνατότητα ταυτόχρονης εμφάνισης περισσοτέρων της μίας αριθμογραμμής και
- τη χρήση διαφορετικών εργαλείων σύγκρισης

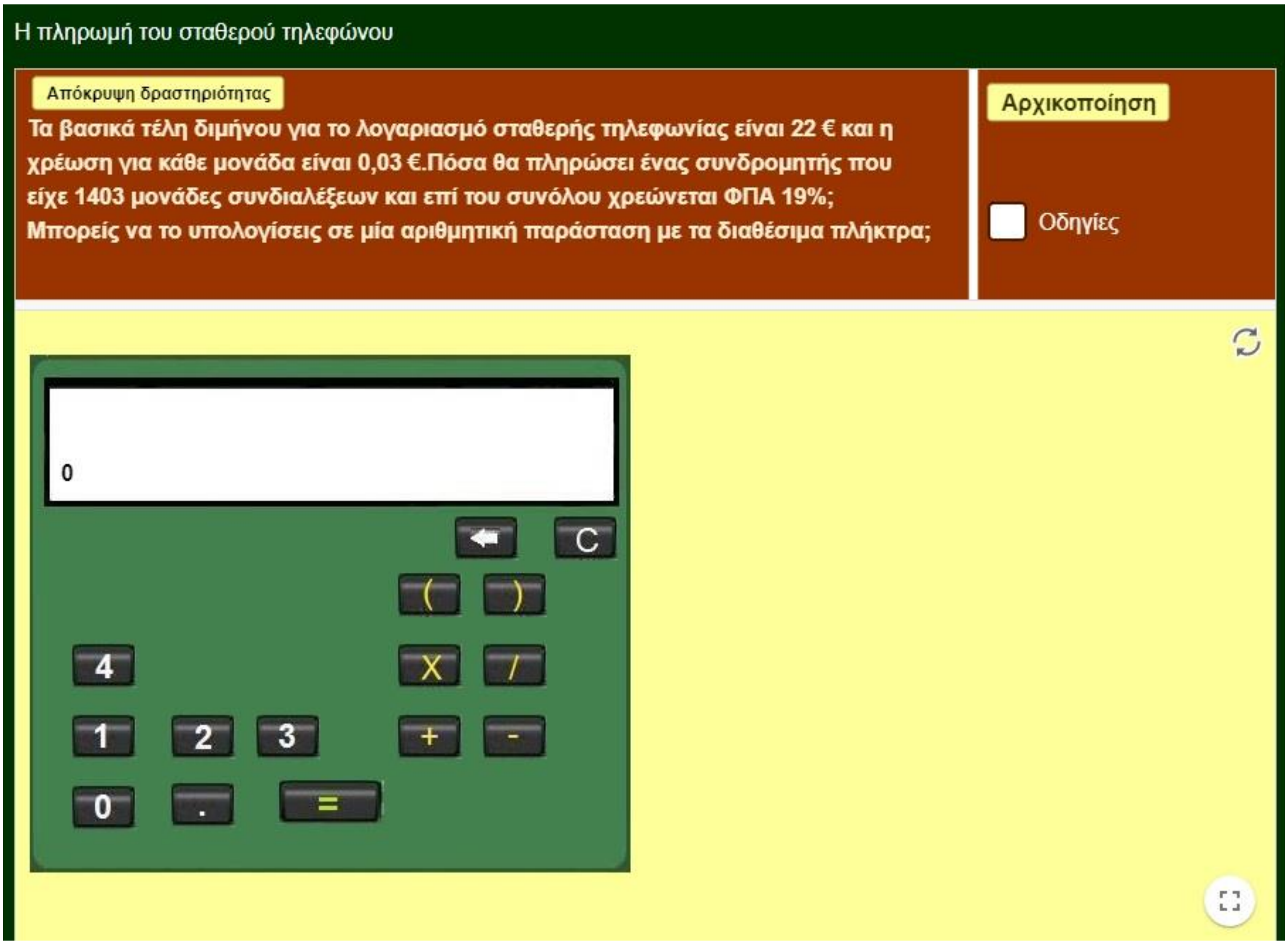
Με το πρότυπο της αριθμογραμμής ο σχεδιαστής μπορεί να αναπτύξει διαδραστικές δραστηριότητες με στόχο την καλλιέργεια και ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού, της αξίας θέσης και των αριθμητικών υπολογισμών (εικόνα 8).



Εικόνα 8: Στιγμιότυπο από μικροπείραμα στο περιβάλλον της «Αριθμογραμμής»

- *Χαλασμένη Αριθμομηχανή*

Είναι ένα εστιασμένο συγγραφικό εργαλείο (πρότυπο), που επιτρέπει τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων και μικροπειραμάτων στα οποία ο χρήστης πρέπει να αναζητήσει εναλλακτικούς τρόπους υπολογισμού των αριθμών λόγω της απουσίας ή της μη λειτουργίας συγκεκριμένων πλήκτρων της αριθμομηχανής. Οι δραστηριότητες που αναπτύσσονται με αυτό το πρότυπο στοχεύουν στη νοηματοδότηση της αξίας θέσης του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης και την ανάλυση και σύνθεση αριθμών, καθώς και με στόχο την εμπλοκή των μαθητών σε διαδικασίες επίλυσης προβλήματος (εικόνα 9).

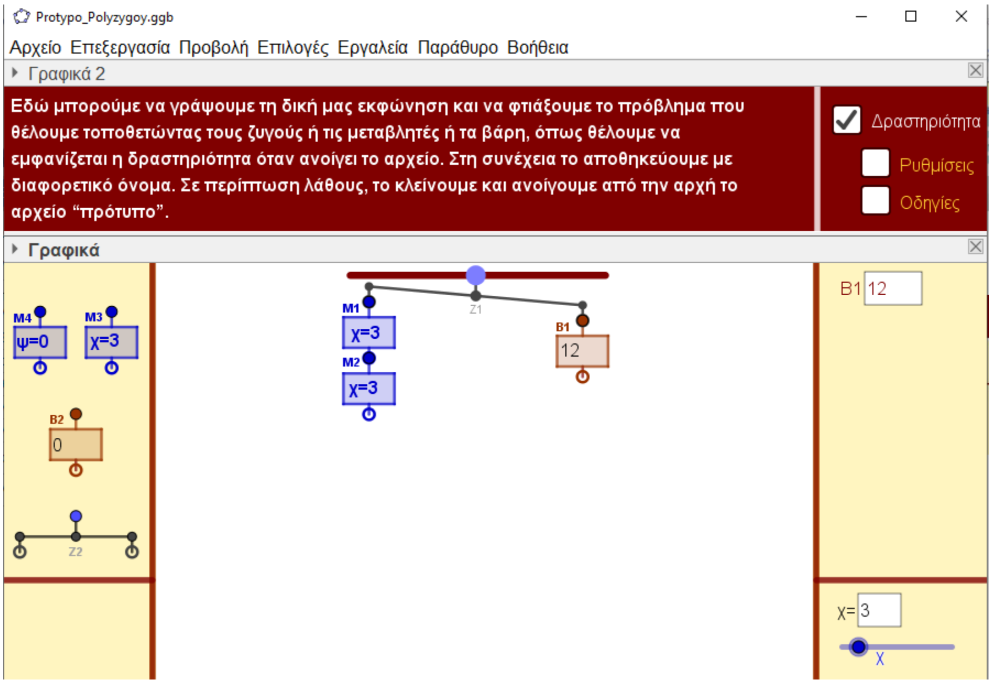


Εικόνα 9: Στιγμιότυπο από μικροπείραμα στο περιβάλλον της «Χαλασμένης Αριθμομηχανής»

3.2.1. Το εστιασμένο συγγραφικό εργαλείο «Πολύζυγο»

Το «Πολύζυγο» είναι ένα εστιασμένο συγγραφικό εργαλείο (πρότυπο) στο οποίο μπορούν να αναπαρασταθούν δυναμικά εκφάνσεις της ζυγαριάς με διαφορετικά βάρη και σε διαφορετικά επίπεδα (εικόνα 10) κάνοντας χρήση είτε ακέραιων είτε δεκαδικών είτε κλασματικών αριθμών.

Με το πρότυπο αυτό έχουν αναπτυχθεί μέχρι τώρα 15 μικροπειράματα για τα Διαδραστικά Σχολικά Βιβλία μαθηματικών, που εστιάζουν στη διερεύνηση σχέσεων ισοδυναμίας σε ακέραιους και ρητούς καθώς και στην επίλυση προβλήματος με τη χρήση μεταβλητών. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω το «Πολύζυγο» δεν αποτελεί μαθησιακό αντικείμενο αλλά ένα ενδιάμεσο βήμα για το τελικό παραγόμενο ενός εστιασμένου ψηφιακού δομήματος. Πρόκειται για ένα καλούπι που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον σχεδιασμό διαφορετικών δομημάτων συγκεκριμένου τύπου που μπορούν οι εκπαιδευτικοί να χρησιμοποιήσουν ώστε να μπουν στο ρόλο του σχεδιαστή ή του διασκευαστή και να δημιουργήσουν δικά τους ψηφιακά δομήματα χρησιμοποιώντας τα (Hoyles 2005) και παράλληλα με αυτό οι μαθητές να «κάνουν» Μαθηματικά μέσω της χρήσης του.



Εικόνα 10: Το περιβάλλον του «Πολύζυγου»

Το μοντέλο της ζυγαριάς στην επίλυση προβλημάτων που διαπραγματεύονται διαδικασίες γύρω από την επίλυση εξίσωσης, την κατανόηση του ρόλου της λύσης μιας εξίσωσης αλλά και τον τρόπο νοηματοδότησης και χρήσης εννοιών όπως η μεταβλητή, είναι ένα μοντέλο που το βρίσκουμε συχνά σε διδακτικές προτάσεις, βέβαια μία σημαντική αδυναμία είναι το αδιέξοδο που εμφανίζεται στη χρήση αρνητικών βαρών (αριθμών) (Otten M., Van den Huevel-Panhuizen M., 2019) κάτι το οποίο στην περίπτωση χρήσης του «Πολύζυγου» μπορεί να ξεπεραστεί μιας και οι τιμές των ολισθητών μπορούν να πάρουν και αρνητικές τιμές.

Στο ψηφιακό περιβάλλον του «Πολύζυγου» οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν τόσο με εξισώσεις επαλήθευσης (evaluation equations) όπως η 2x=10 αλλά και με εξισώσεις χειρισμού (manipulation equations) όπως η 2x+1=3x-7 (Tall D., De Lima R., Healy L., 2010). Στις δεύτερες μάλιστα απαιτείται αυξημένη μαθηματική εμπειρία αφού πρέπει να γίνουν απλοποιήσεις μέσω αλγεβρικών μετασχηματισμών (Filloy E., Rojano T., 1989), το οποίο χαρακτηρίζετε ως «διδακτική τομή» (“didactic cut”) μιας που το σύμβολο της ισότητας “=” οι μικροί κυρίως μαθητές, το αναγνωρίζουν ως σύμβολο διαδικασίας λόγω αριθμητικής που όπως αναφέραμε παραπάνω υπάρχει η άποψη ότι η Άλγεβρα είναι η συνέχεια της Αριθμητικής.

Η ανάπτυξη των ψηφιακών μέσων που αφορούν στα διάφορα αντικείμενα του αναλυτικού προγράμματος, στην περίπτωσή μας στην Άλγεβρα, έχουν να προσφέρουν λύσεις που διευρύνουν τα πεδία κατανόησης και μάθησης. Βασική καινοτομία που προσφέρει η αξιοποίησή τους είναι η υπέρβαση των εμποδίων που δημιουργούν παρανοήσεις στους μαθητές. Οι Ψυχάρης κ.ά (2010, σ. 44) αναφέρουν ότι η διδασκαλία της Άλγεβρας με ψηφιακά μέσα μπορεί να βοηθήσει να ξεπεραστούν προβλήματα στην κατανόηση των αλγεβρικών εννοιών που εντοπίζονται:

- Στο υψηλό επίπεδο αφαίρεσης συμβόλων
- Στην έλλειψη σύνδεσης των συμβόλων με άλλες έννοιες ώστε να αποκτήσουν νόημα
- Στα στατικά μέσα που χρησιμοποιούνται κατά τη διδασκαλία της Άλγεβρας

Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις μιας μαθηματικής έννοιας αποτελούν μια επιπλέον δυνατότητα των ψηφιακών τεχνολογιών, που συμβάλλει στον μετασχηματισμό της αντίληψης μας για την έννοια αυτή, χωρίς να βασίζεται σε μια αυστηρά καθορισμένη σειρά ενεργειών. Στην πρότασή μας ο μαθητής – χρήστης του λογισμικού μπορεί να αναπαραστήσει τις τιμές του άγνωστου μεγέθους που αναζητά και αποτελεί λύση του προβλήματος είτε δίνοντας του τιμές μέσω του ολισθητή, είτε καταχωρώντας πιθανές τιμές στο πεδίο που αντιστοιχεί στο «βάρος» του είτε μέσω του σχήματος μετακινώντας ένα σημείο και αλλάζοντας ταυτόχρονα το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος, με αυτόν τον τρόπο δημιουργεί και αναπτύσσει προσωπικά νοήματα μέσα από ελέγχους, εικασίες και συνεχείς τροποποιήσεις (Κυνηγός, 2007) έτσι κάνει ελέγχους, τροποποιεί και παρατηρεί τις αλληλεξαρτώμενες αναπαραστάσεις ενέργειες που ενδιαφέρουν τη διδακτική των Μαθηματικών (Κυνηγός, 2007).

Η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να μεταβαίνουν από μια αναπαράσταση σε μια άλλη τους βοηθάει να κατανοήσουν καλύτερα την υπό διαπραγμάτευση έννοια καθώς επίσης να αποκτήσουν μεγαλύτερη ευελιξία στην επίλυση προβλημάτων τα οποία μπορούν να μετασχηματίσουν εύκολα σε μαθηματικά προβλήματα (Bodemer 2006, Panasuk and Beyranevand 2010).

Η χρήση αλγεβρικού συμβολισμού είναι από τα σημαντικότερα κομμάτια της μετάβασης από την Αριθμητική στην Άλγεβρα, τα γράμματα που χρησιμοποιούνται ως μεταβλητές καθιστούν την εξίσωση για τους μαθητές ιδιαίτερα προκλητική. Οι παρανοήσεις που δημιουργούνται οδηγούν σε δυσκολίες στη νοηματοδότηση εννοιών της Άλγεβρας στο σύνολό της και μπορούν να παραμείνουν για χρόνια αν δεν αναγνωριστούν και διορθωθούν

(Mac Gregor & Stacey, 1997). Ένα επιπλέον ζήτημα που αναδεικνύει η βιβλιογραφία είναι η περιορισμένη εννοιολογική κατανόηση του συμβόλου της ισότητας που δημιουργεί αρκετά προβλήματα στη διδασκαλία της Άλγεβρας (Knuth et al., 2006, Carpenter et al., 2003) μιας και οι μαθητές δεν μπορούν να κατανοήσουν εξαρχής ότι το σύμβολο της ισότητας αντιπροσωπεύει μια σχέση ισοδυναμίας (Knuth et al., 2006).

3.4. Η υλοποίηση της έρευνας

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο Πρότυπο Γενικό Λύκειο της Βαρβακείου Σχολής το σχολικό έτος 2021-2022 σε τμήμα της Α΄ Λυκείου και συγκεκριμένα του μήνες Φεβρουάριο – Μάϊο 2022. Οι μαθητές του συγκεκριμένου σχολείου είναι μαθητές που προέρχονται από το Πρότυπο Γυμνάσιο της Βαρβακείου Σχολής όπου η εισαγωγή τους έχει γίνει με γραπτές εξετάσεις, συνεπώς το γνωστικό τους επίπεδο μπορεί να θεωρηθεί υψηλό σε σχέση με το μέσο όρο των μαθητών που φοιτούν στα Δημόσια Γενικά Λύκεια της χώρας.

Το δείγμα μας αποτελείτο από τους 24 μαθητές ενός τμήματος της Α΄ Λυκείου οι οποίοι, για τις ανάγκες της έρευνας, χωρίστηκαν εξαρχής σε 6 ομάδες των 4 μελών η καθεμιά, στους κηδεμόνες των μαθητών είχε δοθεί ενημερωτικό σημείωμα για την υλοποίηση της έρευνας και την αξιοποίηση των δεδομένων που θα προκύψουν μετά την εφαρμογή ώστε να υπάρξει η συναίνεση τους, κάτι το οποίο συνέβη χωρίς να υπάρξουν δυσκολίες μιας και τέτοιου είδους δράσεις είναι συνηθισμένες στο πλαίσιο της σχολικής πρακτικής στη συγκεκριμένη σχολική μονάδα.

Οι φάσεις οργάνωσης της έρευνας μας ήταν οι εξής:

- Προετοιμασία και σχεδιασμός
- Υλοποίηση
- Ανάλυση της υλοποίησης

Ο αναστοχασμός και ο επανασχεδιασμός της έρευνας είναι χαρακτηριστικά του κυκλικού χαρακτήρα της έρευνας σχεδιασμού (Bakker, 2018) τα οποία υπήρξαν και στη δική μας περίπτωση. Κατά τη διάρκεια υλοποίησης υπήρξαν δυσκολίες κατανόησης, σε διάφορα σημεία της εφαρμογής, οι οποίες αντιμετωπίσθηκαν με ιδιαίτερη προσοχή και κυρίως δεν χαρακτηρίστηκαν ως αποτυχία των συμμετεχόντων, υπήρξε τροποποίηση του υλικού και επανασχεδιασμός της δραστηριότητας, άλλωστε αυτό αποτελεί χαρακτηριστικό της έρευνας σχεδιασμού. Τέλος να αναφέρουμε ότι σε όλη τη διάρκεια υλοποίησης ο ερευνητής προσέγγιζε τους μαθητές/τριες ως συνεργάτης και όχι ως κριτής – αξιολογητής, επίσης στο στάδιο της ανάλυσης των δεδομένων ο ερευνητής παρουσίασε με «ειλικρίνεια» τα τεκτενόμενα των παρεμβάσεων του ώστε να αποτυπωθούν με ακρίβεια αυτά που συνέβησαν.

3.5. Διαδικασία συλλογής δεδομένων

Η διαδικασία συλλογής των δεδομένων ήταν το πιο σημαντικό στοιχείο της έρευνάς μας, αφού συνέβαλε τόσο στον επανασχεδιασμό της, όπου χρειάστηκε, όσο και στην εγκυρότητα και αξιοπιστία της. Τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν ήταν:

- Καταγραφή ήχου
- Βίντεο παρατήρησης
- Ημερολόγιο

Καταγραφή ήχου:

Κατά τη διάρκεια υλοποίησης των δραστηριοτήτων υπήρχαν ψηφιακές συσκευές καταγραφής ήχου σε όλες τις ομάδες εργασίες, με την ολοκλήρωση κάθε συνάντησης γινόταν απομαγνητοφώνηση ώστε να εντοπιστούν τα σημεία εκείνα που επιλέχθηκαν να αναλυθούν.

Βίντεο παρατήρησης:

Στην αίθουσα διδασκαλίας ή στο εργαστήριο πληροφορικής κατά τη διάρκεια υλοποίησης των δραστηριοτήτων υπήρχε ψηφιακή κάμερα που κατέγραφε την εξέλιξη της διαδικασίας, ο χειριστής της κάμερας σε κάποιες περιπτώσεις, μετά από υπόδειξη του ερευνητή, εστίαζε σε συγκεκριμένη ομάδα ώστε να είναι πιο ευκρινές το υλικό με το οποίο εκείνη την ώρα οι μαθητές αλληλοεπιδρούν, σε κάποιες περιπτώσεις υλοποίησης στο εργαστήριο υπολογιστών, χρησιμοποιήθηκε παράλληλα λογισμικό καταγραφής της οθόνης ώστε να μελετηθεί η αλληλεπίδραση κάθε ομάδας αναλυτικά με το ψηφιακό υλικό. Με την ολοκλήρωση της εφαρμογής γινόταν θέαση των στιγμιότυπων που καταγράφηκαν και έτσι υπήρξε διεξοδική ερμηνεία των ενεργειών των μαθητών, πληροφορία που αξιοποιήθηκε τόσο στον επανασχεδιασμό μας, όπου χρειάστηκε, αλλά και στην εξαγωγή των τελικών μας συμπερασμάτων.

Ημερολόγιο:

Μετά από κάθε συνάντηση (πραγματοποιήθηκαν 3 δίωρες συναντήσεις) ο ερευνητής συμπλήρωνε το ημερολόγιο καταγραφής που αποτέλεσε μια σημαντική πηγή δεδομένων.

Στο ημερολόγιο κατέγραφε όλες εκείνες τις πληροφορίες της υλοποίησης που θα του φανούν χρήσιμες στο επόμενο στάδιο της ανάλυσης και επεξεργασίας των δεδομένων, πληροφορίες που έχουν να κάνουν κυρίως με γεγονότα (ερωτήσεις, διάλογοι, αντιδράσεις μαθητών) που συνέβησαν κατά την υλοποίηση και χαρακτηρίζονται ως σημαντικά ή ενδιαφέροντα.

Η αξιοπιστία της έρευνας εξασφαλίστηκε και από τα κοινά Φ.Ε που δόθηκαν σε όλους τους μαθητές στα διάφορα στάδια της εφαρμογής, με σκοπό να υπάρξει ευκολότερη ομαδοποίηση των απαντήσεών τους στο στάδιο της απομαγνητοφώνησης αλλά και μεταγραφής των δεδομένων εικόνας.

Τέλος σύμφωνα με τον Hoepfl (1997) μια από τις βασικές μορφές συλλογής δεδομένων είναι η παρατήρηση (η άλλη είναι η συνέντευξη), η οποία μπορεί να οδηγήσει σε βαθύτερη κατανόηση του πλαισίου μέσα στο οποίο λαμβάνουν χώρα τα γεγονότα και μπορεί να δώσει τη δυνατότητα στον ερευνητή να εντοπίσει πράγματα που πιθανόν να μην αντιλαμβάνονται ή να μη θέλουν να συζητήσουν ούτε οι ίδιοι οι συμμετέχοντες (Patton, 1990).

3.6. Μέθοδος ανάλυσης δεδομένων

Η ανάλυση των δεδομένων πραγματοποιήθηκε στα εξής 6 στάδια (Λάτση, 2021):

- Εξοικείωση με τα δεδομένα
- Κωδικοποίηση
- Αναζήτηση θεμάτων
- Ανασκόπηση θεμάτων
- Ορισμός θεμάτων
- Συγγραφή

Εξοικείωση με τα δεδομένα:

Πραγματοποιήθηκε μετεγγραφή και απομαγνητοφώνηση των αρχείων καταγραφής. Στο στάδιο αυτό θα χρησιμοποιηθεί η θεωρία των κρίσιμων συμβάντων (Maher, 2002; Maher & Martino, 2000) ή κρίσιμων περιστατικών (critical incidents) που θα αναλυθεί διεξοδικά στην επόμενη παράγραφο.

Κωδικοποίηση:

Τα κρίσιμα συμβάντα που επιλέχθηκαν αντιστοιχίστηκαν με συγκεκριμένο κωδικό, υπήρξαν κρίσιμα συμβάντα στα οποία δόθηκαν περισσότεροι του ενός κωδικοί.

Αναζήτηση θεμάτων:

Στο στάδιο αυτό γίνεται μετάβαση από τους κωδικούς στο επίπεδο των θεμάτων, έτσι θα υπάρξει μια ευρύτερη σύνδεση νοημάτων και σύνδεσης εννοιών.

Ανασκόπηση θεμάτων:

Στο στάδιο αυτό πραγματοποιείται αξιολόγηση που αφορά το σύνολο των δεδομένων αλλά και των συμπερασμάτων που έχουν προκύψει από τα προηγούμενα στάδια της ανάλυσης.

Ορισμός θεμάτων:

Στο στάδιο αυτό γίνεται λεπτομερής ανάλυση του κάθε θέματος.

Συγγραφή:

Στο στάδιο αυτό που είναι και το τελικό της ανάλυσης, γίνεται η παράθεση των αποσπασμάτων με σκοπό να τεκμηριωθούν τα ευρήματα και να γίνει ενοποίηση όλων των σταδίων της ανάλυσης.

3.7. Τα κρίσιμα περιστατικά

Αυτό που οι άνθρωποι κάνουν, σκέφτονται, λένε και αισθάνονται είναι ενσωματωμένο σε κοινωνικές δομές και τις περισσότερες φορές είναι αόρατες αλλά όχι λιγότερο πραγματικές (Miles & Huberman 1994). Αυτές οι κοινωνικές δομές είναι πολύπλοκες, πολυεπίπεδες με πτυχές εξουσίας και συνήθως θεωρούνται δεδομένες. Καθώς οι ερευνητές βυθίζονται στο πεδίο της έρευνας, συγκεκριμένες προσεγγίσεις για τη συλλογή και την ανάλυση δεδομένων, όπως η χρήση των κρίσιμων περιστατικών (Tripp 1993), μπορούν να δημιουργήσουν ευκαιρίες για γνώση, προβληματισμό και αξιολόγηση, τόσο για τους συμμετέχοντες (μαθητές) όσο και για τους ερευνητές. Η εστίαση στα κρίσιμα περιστατικά, τόσο κατά τη συλλογή όσο και κατά την ανάλυση των δεδομένων, μπορεί να δημιουργήσει χώρους για γνώση μέσω «μιας συνεχούς διαδικασίας κριτικού ελέγχου και ερμηνείας» (Guillemin & Gillam 2004, 275).

Στη βιβλιογραφία, ο όρος «κρίσιμο περιστατικό» (critical incident), έχει οριστεί με διάφορους τρόπους όπως: ένα καθημερινό γεγονός που ξεχωρίζει (Martin 1996), ζωντανά γεγονότα που θεωρούνται σημαντικά ή αξιομνημόνευτα (Brookfield 1995, Woods 1993), μια προβληματική κατάσταση που παρουσιάζεται ως μοναδική περίπτωση και προωθεί τον προβληματισμό (Schon 1987), ή «ιδιαίτερα φορτισμένες στιγμές και επεισόδια που έχουν τεράστιες συνέπειες για την προσωπική αλλαγή και ανάπτυξη» (Sikes, Measor & Woods 1985, 432).

Σύμφωνα με τους Don Halquist & Sandra I. Musanti (2010) δίνεται ολοένα και μεγαλύτερη έμφαση στην ενσωμάτωση των κρίσιμων περιστατικών στον τομέα της εκπαίδευσης και των ποιοτικών ερευνητικών μελετών. Ενώ οι εκπαιδευτικοί ερευνητές έχουν αναλύσει τα κρίσιμα περιστατικά για να βελτιώσουν τις διδακτικές πρακτικές (Brookfield 1995; Learning and Teaching Centre n.d.; Martin 1996; Smyth 1991; Thiel 1999; Tripp 1993), αρκετοί εκπαιδευτικοί έχουν συνδυάσει τη μεθοδολογία των κρίσιμων περιστατικών με τις θεωρίες της αυτομελέτης και της έρευνας δράσης για να εμπλουτίσουν την πρακτική τους στην τάξη.

Ο ορισμός και η προσέγγιση των κρίσιμων περιστατικών του Tripp (1993) είναι αυτός που είναι πιο χρήσιμος. Σύμφωνα με τον Tripp:

> *Τα κρίσιμα περιστατικά δεν είναι «πράγματα» που υπάρχουν ανεξάρτητα από έναν παρατηρητή και περιμένουν την ανακάλυψή τους όπως τα χρυσά ψήγματα ή τα έρημα νησιά, αλλά όπως όλα τα δεδομένα, τα κρίσιμα περιστατικά δημιουργούνται. Συμβάντα συμβαίνουν, αλλά τα κρίσιμα περιστατικά παράγονται από τον τρόπο με τον οποίο βλέπουμε μια κατάσταση.*

κατά συνέπεια, η ερμηνεία μας για τη σημασία ενός γεγονότος το καθιστά κρίσιμο. Προκειμένου να μετατρέψουμε ένα γεγονός σε κρίσιμο συμβάν, κάνουμε περισσότερα από το να το κατηγοριοποιήσουμε ή να το χαρακτηρίσουμε. Για να είναι κρίσιμο ένα συμβάν πρέπει να αποδειχθεί ότι έχει ένα γενικότερο νόημα και ότι υποδηλώνει κάτι άλλο σημαντικό σε ένα ευρύτερο πλαίσιο, έτσι, τα κρίσιμα περιστατικά δεν παρατηρούνται απλώς, δημιουργούνται κυριολεκτικά.

Επιπλέον, ο Tripp τονίζει ότι, σε μεγάλο βαθμό, η πλειοψηφία των κρίσιμων περιστατικών δεν είναι καθόλου προφανή. Μόνο μέσω της ανάλυσης αυτά τα μάλλον τυπικά περιστατικά καθίστανται κρίσιμα. Σε ένα ερευνητικό πλαίσιο, ο χαρακτηρισμός των περιστατικών ως κρίσιμων περιλαμβάνει την ανάγκη να ανακαλυφθεί το υποκείμενο νόημα αυτού που συνήθως θεωρείται δεδομένο και συνεπάγεται την ερμηνεία των γεγονότων που αποτέλεσαν την σημεία καμπής, άλλαξαν τις συζητήσεις της ομάδας ή αποκάλυψαν κάτι που ήδη συνέβαινε χωρίς να το εντοπίζουμε ή να το αναγνωρίζουμε.

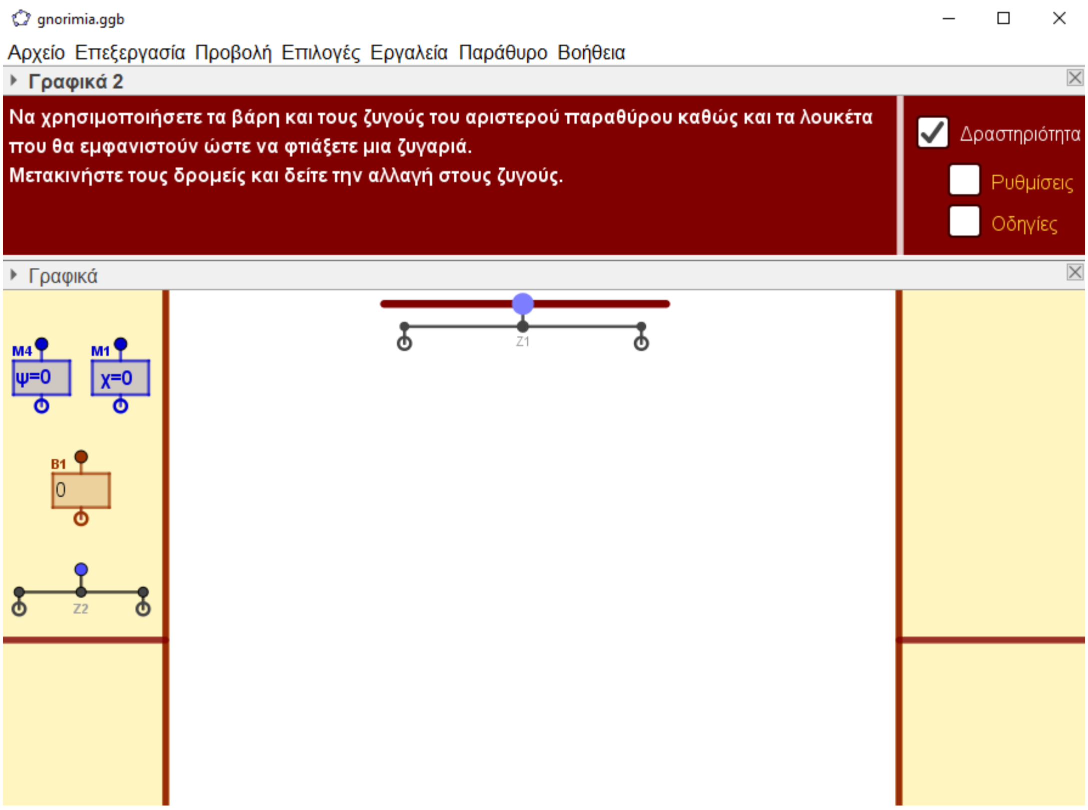
Από την οπτική του Tripp (1993), τα κρίσιμα περιστατικά πρέπει να ασκούν κριτική στον τρόπο με τον οποίο λειτουργούν κανονικά τα πράγματα. Η χρήση των κρίσιμων περιστατικών, λοιπόν, καλεί τους συμμετέχοντες ερευνητές σε μια διαδικασία αναστοχασμού, στη δική μας περίπτωση όπου θα συναντήσουμε τον όρο «κρίσιμα περιστατικά ή συμβάντα» εννοούμε τις δυσκολίες που μπορεί να συναντήσει ο/η εκπαιδευτικός κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας του ή τις μη αναμενόμενες απαντήσεις/δράσεις των μαθητών/τριών ή μια πρωτότυπη λύση των μαθητών/τριων ή τη μη συμμετοχή των μαθητών/τριων στην εκπαιδευτική διαδικασία.

4. ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΡΓΑ

4.1. Εισαγωγή

Η διάρκεια υλοποίησης των τριών Μαθηματικών Έργων που σχεδιάστηκαν είναι 3 δίωρα, τα οποία υλοποιήθηκαν στο εργαστήριο πληροφορικής του Προτύπου ΓΕΛ της Βαρβακείου Σχολής με ένα τμήμα μαθητών της Α΄ Λυκείου. Πριν την «επίσημη» εφαρμογή είχε προηγηθεί για όλα τα Μαθηματικά Έργα μια «ανεπίσημη» εφαρμογή ώστε να υπάρξει η αναγκαία ανατροφοδότηση και ο απαραίτητος αναστοχασμός σε μαθητές της Α΄ Λυκείου που παρακολουθούσαν τον όμιλο αριστείας που υλοποιούσε ο εκπαιδευτικός - ερευνητής.

4.2. Γνωριμία με το περιβάλλον του «Πολύζυγου»



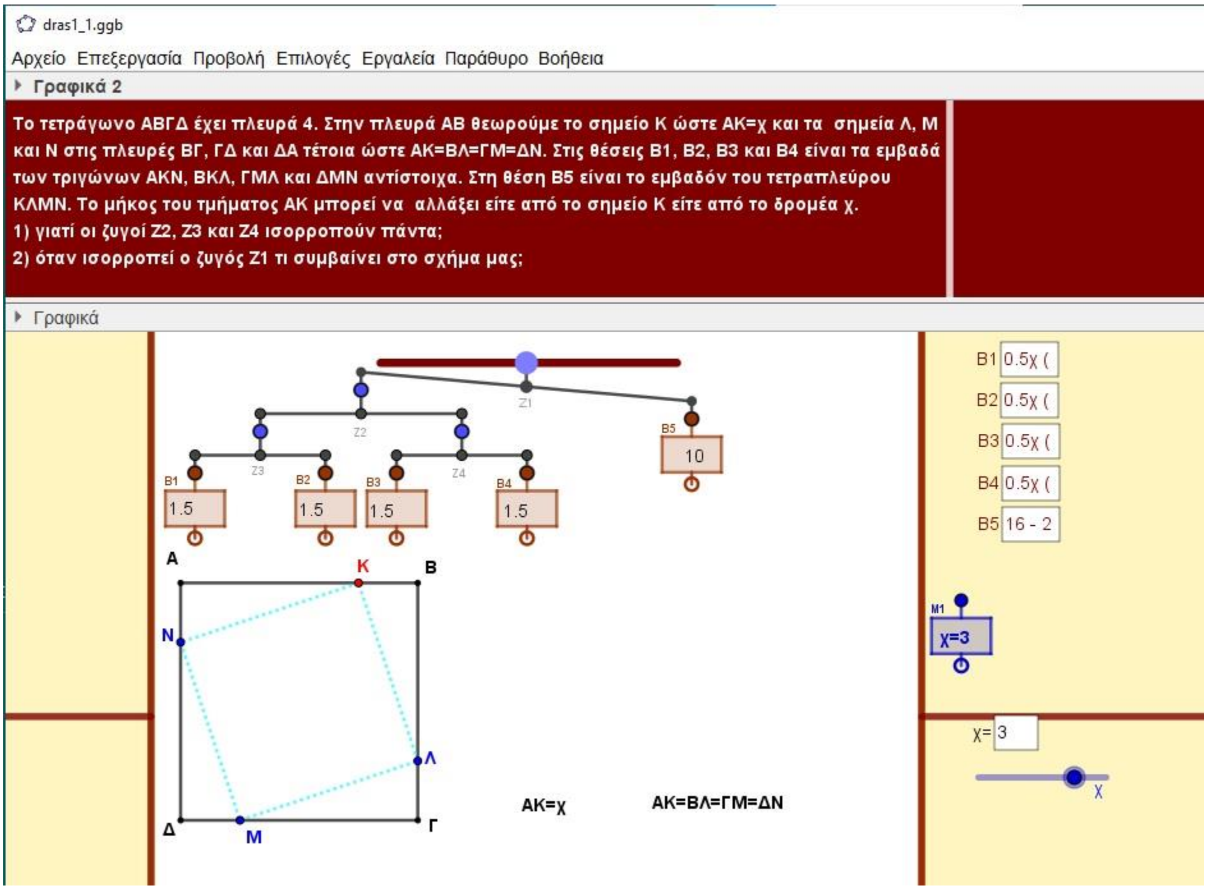
Εικόνα 11: Γνωριμία με το περιβάλλον του «Πολύζυγου»

Στους μαθητές/τριες αρχικά δόθηκε ένα κενό, πρότυπο αρχείο στο Πολύζυγο με οδηγίες (εικόνα 11) για το τι θα μπορούσαν να κάνουν ώστε να έχουν μια πρώτη επαφή με το ψηφιακό περιβάλλον με το οποίο θα υλοποιηθούν όλες οι δραστηριότητες στα Μαθηματικά Έργα που θα ακολουθήσουν. Ζητάμε από τους μαθητές/τριες να βάλουν σε χρήση τα διαθέσιμα εργαλεία (ζυγούς, βάρη) και να διαπιστώσουν μέσα από τη χρήση τους το ρόλο του καθενός αντικειμένου. Η κατασκευή της κάθε ομάδας όταν ολοκληρώνεται παρουσιάζεται στην ολομέλεια και γίνεται συζήτηση στην οποία συμμετέχουν όλοι οι μαθητές αφού το λογισμικό, αν και δεν το γνωρίζουν, τους έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον και μετασχηματίζουν τις ιδέες τους σε κατασκευές. Η στόχευση είναι σε αυτή τη φάση της εργασίας οι μαθητές/τριες να αναγνωρίζουν το ρόλο των δυνατοτήτων που προσφέρει το εργαλείο και συγκεκριμένα να αντιληφθούν τη διαφορά των «μπλε» και «κόκκινων» βαρών (μεταβλητά βάρη, σταθερά βάρη αντίστοιχα) και πως η αλλαγή των τιμών στα βάρη επηρεάζει την «ισορροπία» των ζυγών. Επίσης να εντοπίζουν πειραματιστούν με τις τιμές των μεταβλητών «μπλε» βαρών, είτε αλλάζοντας τις τιμές μέσω του δρομέα της κάθε μεταβλητής, είτε βάζοντας την τιμή που επιθυμούν στο αντίστοιχο κουτάκι.

4.3. Παρουσίαση των Μαθηματικών Έργων

4.3.1. 1ο Μαθηματικό Έργο

<u>1η δραστηριότητα:</u> Εύρεση σημείου ισορροπίας των ζυγών και ερμηνεία



Εικόνα 12: 1η Δραστηριότητα – 1ο Μαθηματικό Έργο

Στους μαθητές/τριες δίνεται το παρακάτω πρόβλημα:

Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά 4. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε το σημείο Κ ώστε ΑΚ=χ και τα σημεία Λ, Μ και Ν στις πλευρές ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ τέτοια ώστε

ΑΚ=ΒΛ=ΓΜ=ΔΝ. Στις θέσεις Β1, Β2, Β3 και Β4 είναι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΚΝ, ΒΚΛ, ΓΜΛ και ΔΜΝ αντίστοιχα. Στη θέση Β5 είναι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ. Το μήκος του τμήματος ΑΚ μπορεί να αλλάξει είτε από το σημείο Κ είτε από το δρομέα χ.

1) γιατί οι ζυγοί Ζ2, Ζ3 και Ζ4 ισορροπούν πάντα;

2) όταν ισορροπεί ο ζυγός Ζ1 τι συμβαίνει στο σχήμα μας;

Αρχικά γίνεται περιγραφή του σχήματος ώστε όλοι οι μαθητές/τριες να κατανοήσουν τα βασικά στοιχεία της κατασκευής, δηλαδή ότι έχουμε σχηματίσει 4 ορθογώνια τρίγωνα με την κορυφή της ορθής γωνίας του τριγώνου να είναι σε καθένα από αυτά μία από τις 4 κορυφές του τετραγώνου και οι κάθετες πλευρές του κάθε τριγώνου έχουν μήκη χ και 4-χ αντίστοιχα. Τα εμβαδά των 4 ορθογωνίων τριγώνων έχουν τοποθετηθεί στις θέσεις Β1, Β2, Β3 και Β4 και το εμδαδόν του τετραπλεύρου που αποκόπτεται στο εσωτερικό του τετραγώνου έχει τοποθετηθεί στη θέση Β5. Το μεταβλητό μήκος χ του τμήματος ΑΚ (καθώς και των τμημάτων ΒΛ, ΓΜ και ΔΝ) αλλάζει είτε από το μετακινώντας το σημείο Κ, είτε από το δρομέα χ και κάθε φορά η τιμή του εμφανίζεται δεξιά της οθόνης. Ζητάμε από τους μαθητές/τριες να πειραματιστούν με τις τιμές της μεταβλητής χ και να παρατηρήσουν την ισορροπία των ζυγών Ζ2, Ζ3 και Ζ4 και αναμένουμε μια εξήγηση για αυτό που συμβαίνει, ενδιαφέρον έχει η απάντηση μιας ομάδας (ομάδα 5) τα μέλη της οποίας απάντησαν ότι τα εμβαδά των τριγώνων που είναι «κρεμασμένα» στις θέσεις Β1, Β2, Β3 και Β4, είναι εμβαδά ίσων τριγώνων συνεπώς δικαιολογείται η ισορροπία που εμφανίζεται, ενδιαφέρον έχει η απουσία της έκφρασης «ισοδύναμα» σχήματα από το σύνολο των απαντήσεων ώστε να δικαιολογήσουν την ισορροπία των ζυγών Ζ2, Ζ3 και Ζ4, έκφραση η οποία θα προκύψει αναγκαστικά στη συνέχεια της δραστηριότητας όπου ζητάμε να εντοπίσουν τιμή ή τιμές της μεταβλητής χ ώστε να ισορροπεί και ο ζυγός Ζ1. Με πειραματισμούς για την τιμή της μεταβλητής χ σχετικά εύκολα εντοπίζουν τις δύο τιμές (χ=1 και χ=3) για τις οποίες επιτυγχάνεται ισορροπία του ζυγού Ζ1 και ζητάμε από τους μαθητές/τριες να μας περιγράψουν το τι συμβαίνει σε αυτή την περίπτωση ισορροπίας. Εδώ αναγκαστικά προέκυψε η έννοια των ισοδύναμων σχημάτων μιας και τα 4 τρίγωνα δεν είναι ίσα (όπως συνέβαινε στο ερώτημα 1) με την ισορροπία των ζυγών) με το τετράπλευρο ΚΛΜΝ, αλλά και τα 4 μαζί μας δίνουν επιφάνεια ίση με την επιφάνεια που καλύπτει το τετράπλευρο ΚΛΜΝ. Τις τιμές για την μεταβλητή χ που ανακάλυψαν με πειραματισμό και παρατήρηση μέσω του λογισμικού οι μαθητές/τριες τις επιβεβαιώνουν και με αλγεβρικό τρόπο, επιπλέον αποδεικνύουν ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο μέσω της σύγκρισης των ορθογωνίων τριγώνων.

<u>2η δραστηριότητα:</u> Διερεύνηση ισορροπίας ζυγών και ερμηνεία

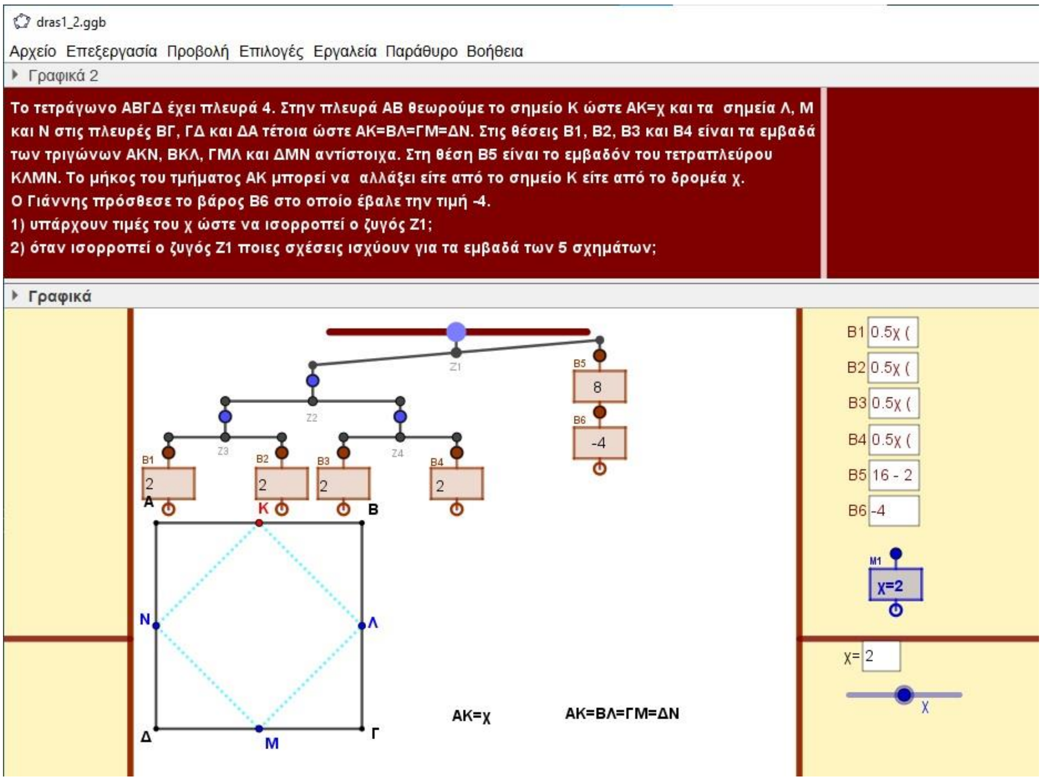
Στη 2η δραστηριότητα παρέμεινε το ίδιο σχήμα και η διάταξη των βαρών και των ζυγών αλλά προστέθηκε ένα ακόμα στοιχείο, έτσι το πρόβλημα είναι το εξής:

Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά 4. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε το σημείο Κ ώστε ΑΚ=χ και τα σημεία Λ, Μ και Ν στις πλευρές ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ τέτοια ώστε ΑΚ=ΒΛ=ΓΜ=ΔΝ. Στις θέσεις Β1, Β2, Β3 και Β4 είναι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΚΝ, ΒΚΛ, ΓΜΛ και ΔΜΝ αντίστοιχα. Στη θέση Β5 είναι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ. Το μήκος του τμήματος ΑΚ μπορεί να αλλάξει είτε από το σημείο Κ είτε από το δρομέα χ.

Ο Γιάννης πρόσθεσε το βάρος Β6 στο οποίο έβαλε την τιμή -4.

1) υπάρχουν τιμές του χ ώστε να ισορροπεί ο ζυγός Ζ1;

2) όταν ισορροπεί ο ζυγός Ζ1 ποιες σχέσεις ισχύουν για τα εμβαδά των 5 σχημάτων;

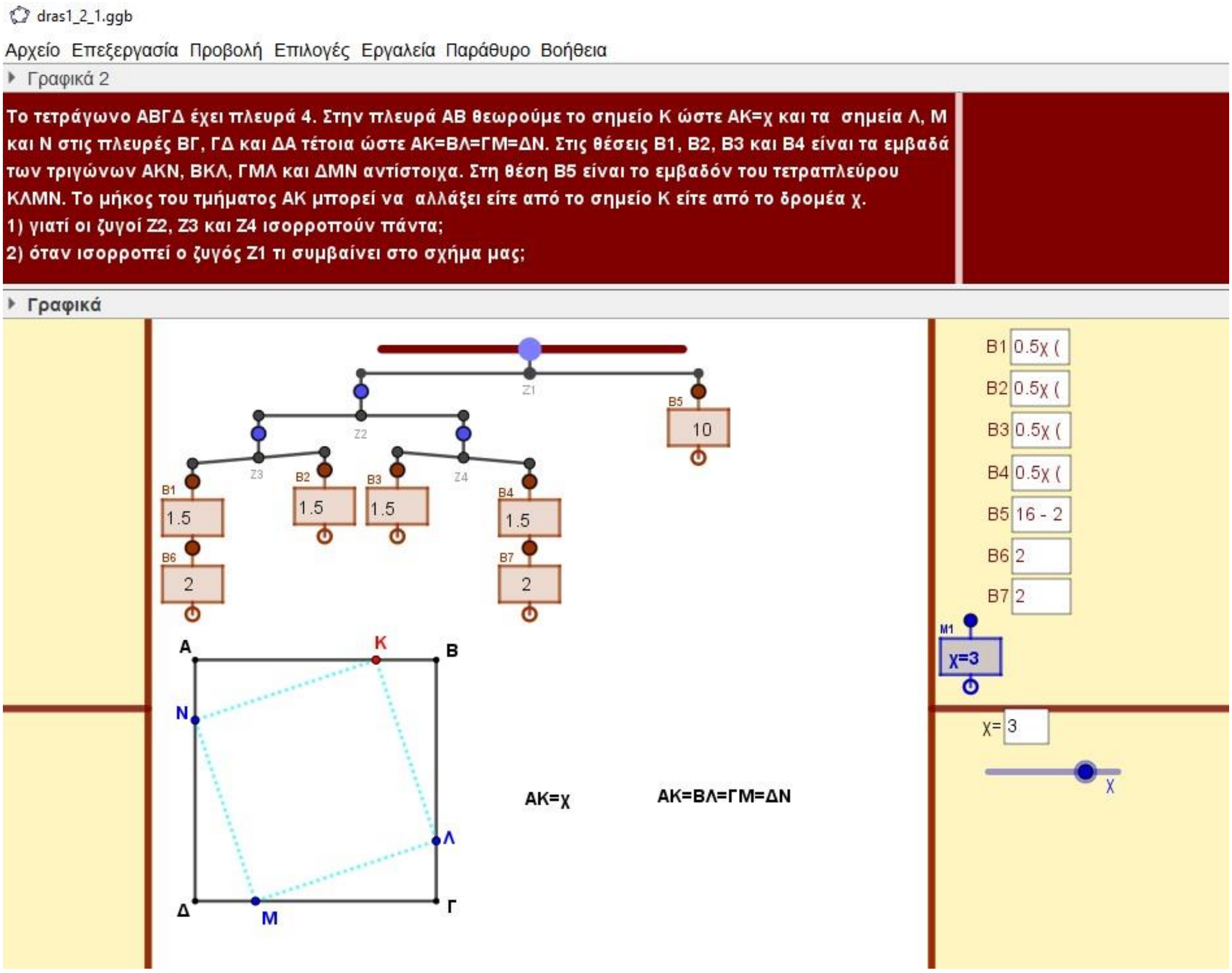


Εικόνα 13: 2η Δραστηριότητα – 1ο Μαθηματικό Έργο

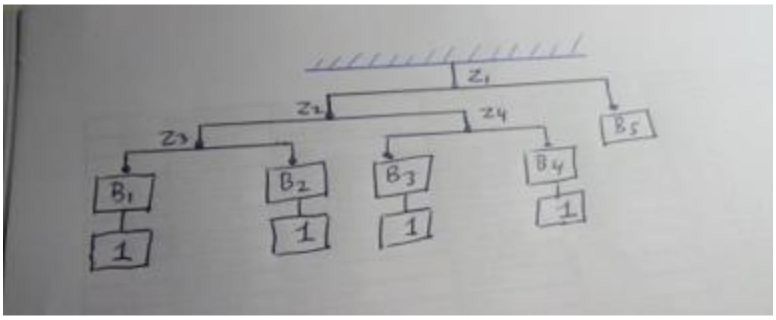
Επιλέξαμε να «κρεμάσουμε» ένα επιπλέον βάρος, το Β6, στο δεξιό μέρος του ζυγού Ζ1 κάτω από το βάρος Β5 και μάλιστα βάζουμε αρνητική τιμή το -4. Αρχικά η ύπαρξη του αρνητικού αριθμού στη θέση ενός «βάρους» δε φαίνεται να «ενοχλεί» τους μαθητές/τριες, όταν όμως επιτυγχάνεται η ισορροπία του ζυγού Ζ1 για τις τιμές 1 και 3 της μεταβλητής χ και ζητάμε να περιγράψουν τη συνθήκη που ισχύει με τα εμβαδά των 5 σχημάτων αρχίζουν να εμφανίζονται δυσκολίες στις εκφράσεις των μαθητών που περιγράφουν την ισορροπία του ζυγού Ζ1. Συγκεκριμένα δυσκολεύονται να διατυπώσουν το εξής ορθό συμπέρασμα: «το άθροισμα των εμβαδών των 4 ορθογωνίων τριγώνων είναι κατά 4 μονάδες μεγαλύτερο από το άθροισμα του εμβαδού του τετραγώνου ΚΛΜΝ, όταν η μία κάθετη πλευρά του κάθε τριγώνου έχει μήκος 1 ή 3» και το οποίο οφείλεται στο «αρνητικό» βάρος Β6, κάτι το οποίο δεν είναι μέσα στο πλαίσιο διδασκαλίας του μοντέλου της ζυγαριάς όπως το έχουν συναντήσει μέχρι τώρα στα σχολικά βιβλία.

Ενδιαφέρον αποκτά όταν δίνουμε στους μαθητές τη δυνατότητα να τροποποιήσουν το ψηφιακό δόμημα χωρίς όμως να αλλάξουν τα δεδομένα του προβλήματος. Η προσοχή όλων των ομάδων εστιάζεται στο να αφαιρέσουν το «αρνητικό» βάρος και να μετασχηματίσουν το δόμημα σε κάποιο άλλο ισοδύναμο όπως το παρακάτω (εικόνα 14) της ομάδας 2. Όταν η συγκεκριμένη διασκευή της αρχικής δραστηριότητας παρουσιάστηκε στην ολομέλεια μέσω του διαδραστικού πίνακα και έγινε αντιληπτό ότι οι τιμές 1 και 3 της μεταβλητής χ εξακολουθούν να ισορροπούν το ζυγό Ζ1, ήταν πιο εύκολο να περιγράψουν τη συνθήκη ισορροπίας λέγοντας ότι: «το άθροισμα των εμβαδών των 4 ορθογωνίων τριγώνων είναι αυξημένο κατά 4 μονάδες από το εμβαδόν του τετραγώνου ΚΛΜΝ».

Η ομάδα 5 διατύπωσε την έντονη διαφωνία της για την ορθότητα της περιγραφής και η ένσταση τους εντοπίστηκε στο ότι η ορθή έκφραση για την περιγραφή της εικόνας 14 θα έπρεπε να είναι: «το άθροισμα των εμβαδών των 4 ορθογωνίων τριγώνων είναι κατά 4 μονάδες μεγαλύτερο από το εμβαδό του τετραγώνου ΚΛΜΝ, όταν η μία κάθετη πλευρά του κάθε τριγώνου έχει μήκος 1 ή 3 και επιπλέον τα εμβαδά των τριγώνων ΑΚΝ και ΔΝΜ είναι κατά 2 μονάδες μεγαλύτερα από τα εμβαδά των άλλων δύο τριγώνων ΒΚΛ και ΓΛΜ». Μετά από αυτή τη συζήτηση οι ομάδες άρχισαν να δοκιμάζουν τροποποίηση του ψηφιακού υλικού ώστε να περιγράφει ακριβώς τη συνθήκη: «το άθροισμα των εμβαδών των 4 ορθογωνίων τριγώνων είναι κατά 4 μονάδες μεγαλύτερο από το άθροισμα του εμβαδού του τετραγώνου ΚΛΜΝ, όταν η μία κάθετη πλευρά του κάθε τριγώνου έχει μήκος 1 ή 3» και ενδεικτικά παρουσιάζουμε κάποιες από τις ιδές του ζωγραφισμένες στο χαρτί μιας και το λογισμικό χρειάζεται αρκετές τροποποιήσεις ώστε να αυξηθεί ο αριθμός των βαρών ή των ζυγών που μπορούν να ενεργοποιηθούν.



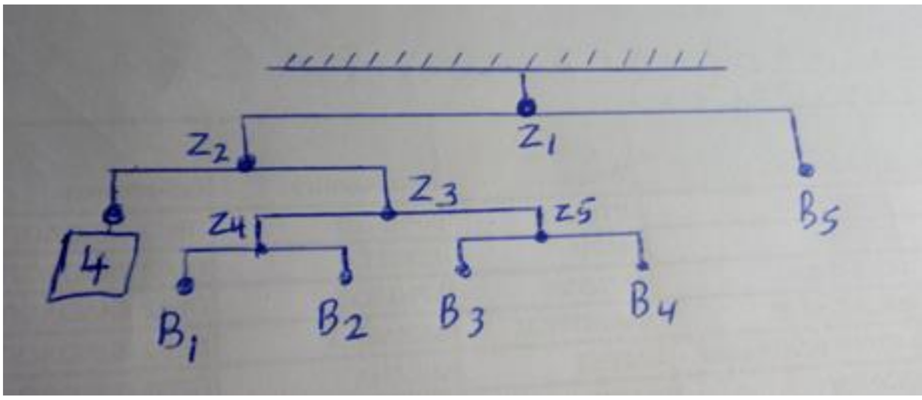
Εικόνα 14: $2^η$ Δραστηριότητα – $1^ο$ Μαθηματικό Έργο (διασκευή ομάδας 2)



Εικόνα 15: $2^η$ Δραστηριότητα – $1^ο$ Μαθηματικό Έργο (διασκευή ομάδας 3)

Μετά τη συζήτηση η ομάδα 3 τροποποίησε την διασκευή της ομάδας 2 (εικόνα 14) και θέλησε να μοιράσει το βάρος και στα 4 τρίγωνα ώστε να παρατηρείτε «ομοιομορφία», η ιδέα της δεν μπορούσε να αποτυπωθεί στο λογισμικό μιας και χρειάζονται 9 βάρη και η αρχική ρύθμιση στο πρότυπο «Πολύζυγο» διαθέτει 8 βάρη, έτσι τη σχεδίασαν στο τετράδιό τους (εικόνα 15).

Η ομάδα 5 που διαφωνούσε με την τοποθέτηση των βαρών κάτω από τα 4 τρίγωνα, (εικόνα 15) πρότειναν κάτι «ισοδύναμο» που το ζωγράφισαν στο τετράδιό τους (εικόνα 16) και μάλιστα το περιέγραψαν ως εξής: ….τα δύο άκρα του ζυγού Ζ1 είναι τα 2 μέλη μιας εξίσωσης, όταν βάζουμε στο 2° μέλος το βάρος -4 (εικόνα 13) θα μπορούσαμε να το εκφράσουμε ισοδύναμα με το να το βγάλουμε το βάρος -4 και να τοποθετήσουμε ένα νέο βάρος στο αριστερό μέρος του ζυγού Ζ1 που να είναι ίσο με 4 (εικόνα 16) και εδώ το λογισμικό δεν μπορεί να αποτυπώσει τη σκέψη των μαθητών μιας και χρειάζονται 5 ζυγοί και η αρχική ρύθμιση διαθέτει 4 ζυγούς.



Εικόνα 16: 2η Δραστηριότητα – 1ο Μαθηματικό Έργο (διασκευή ομάδας 5)

4.3.2. 2ο Μαθηματικό Έργο

<u>1η δραστηριότητα:</u> Κατανόηση του προβλήματος αποτύπωση στο λογισμικό και διερεύνηση

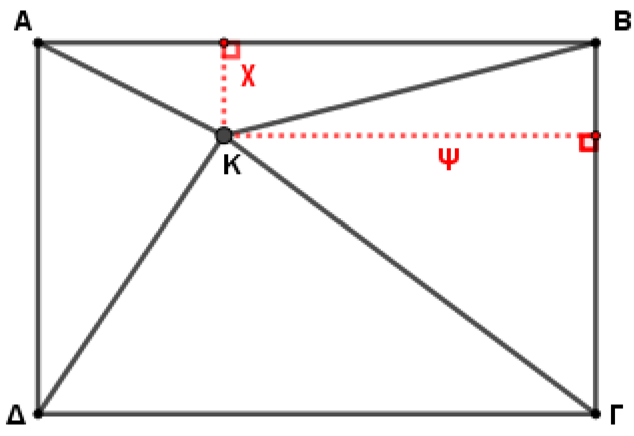
Στους μαθητές/τριες δίνεται το παρακάτω ρεαλιστικό πρόβλημα:

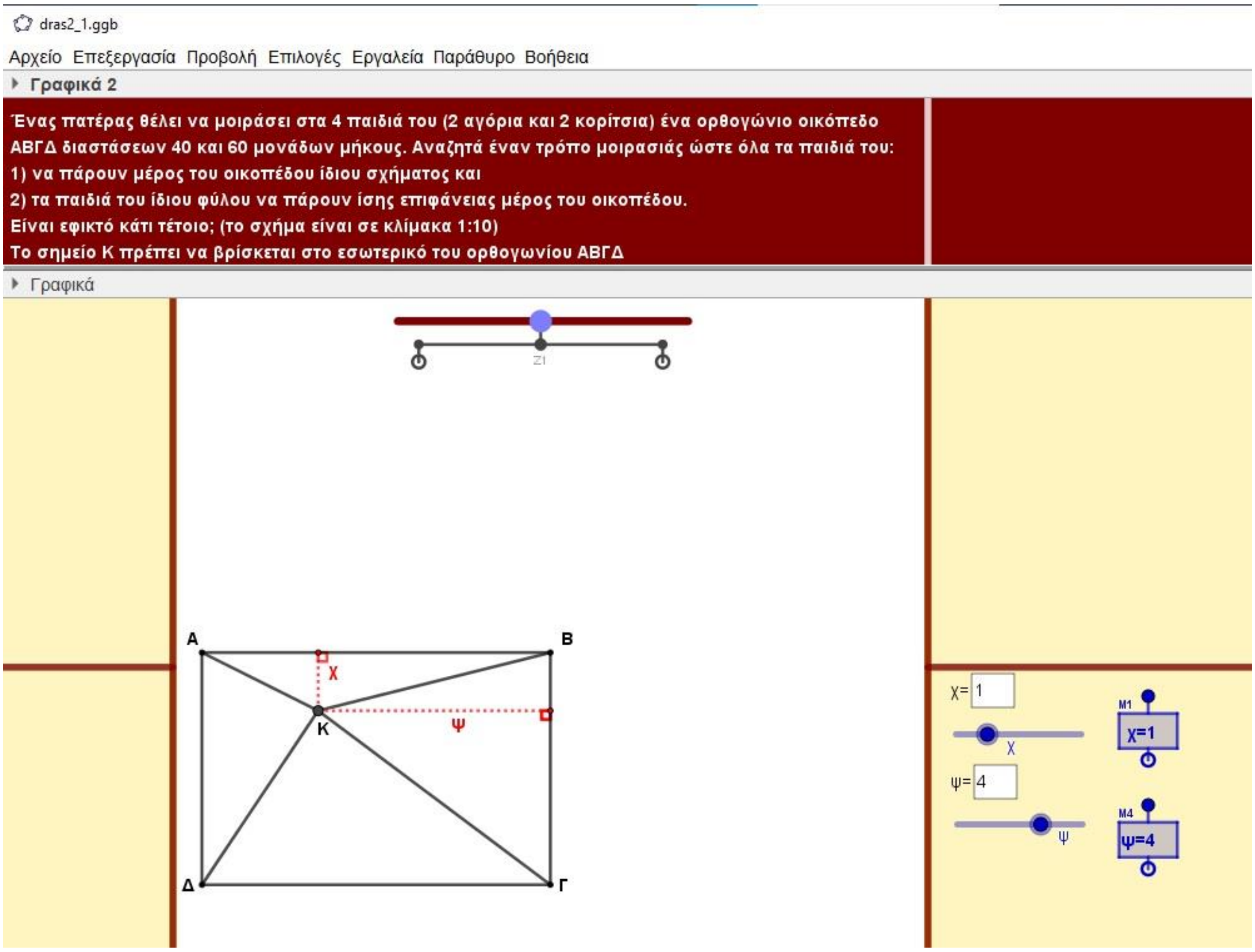
Ένας πατέρας θέλει να μοιράσει στα 4 παιδιά του (2 αγόρια και 2 κορίτσια) ένα ορθογώνιο οικόπεδο ΑΒΓΔ διαστάσεων 40 και 60 μονάδων μήκους. Αναζητά έναν τρόπο μοιρασιάς ώστε όλα τα παιδιά του:

1) να πάρουν μέρος του οικοπέδου ίδιου σχήματος και

2) τα παιδιά του ίδιου φύλου να πάρουν ίσης επιφάνειας μέρος του οικοπέδου.

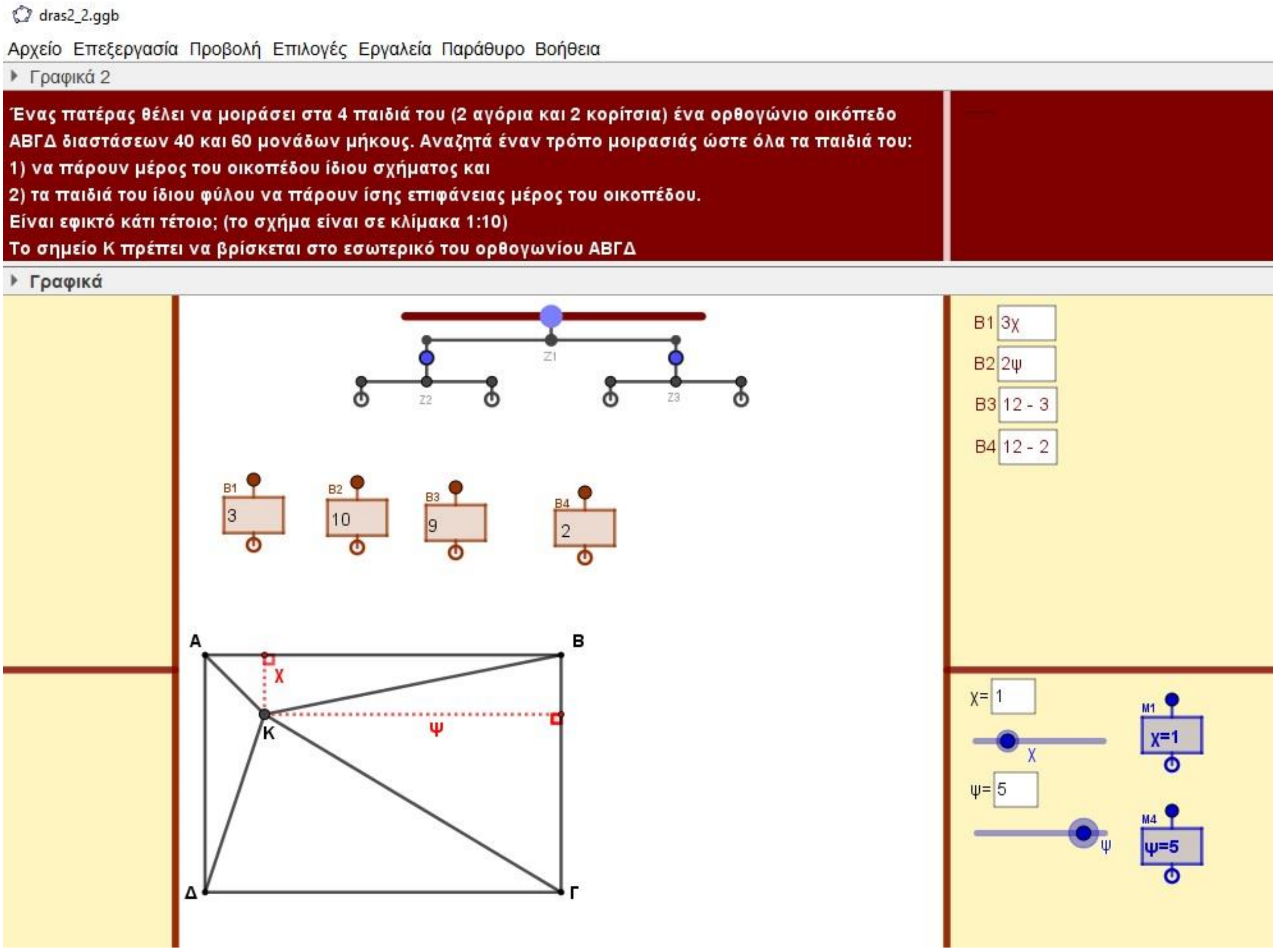
Είναι εφικτό κάτι τέτοιο; (το σχήμα είναι σε κλίμακα 1:10)





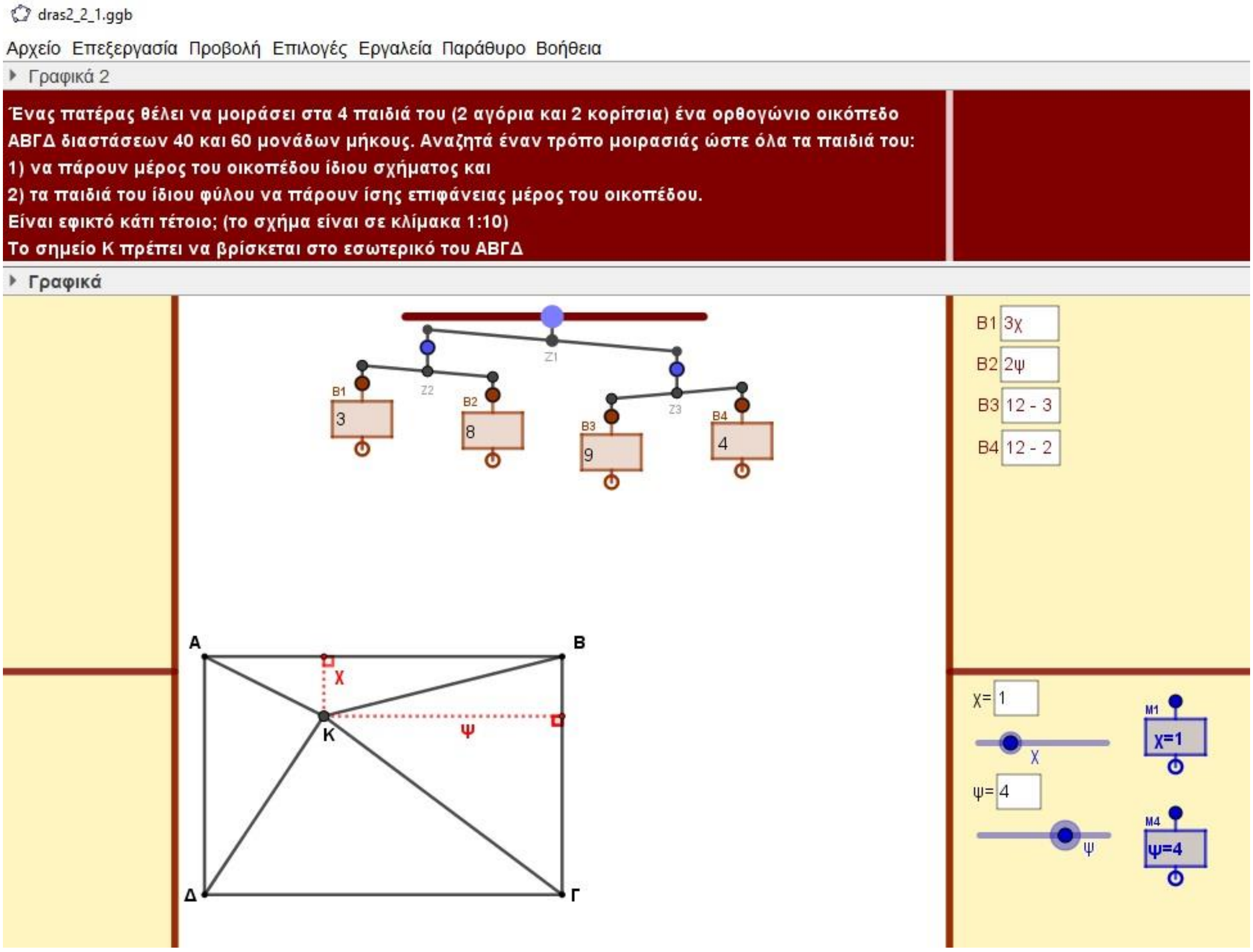
Εικόνα 17: 1η Δραστηριότητα – 2ο Μαθηματικό Έργο

Στο λογισμικό έχει κατασκευαστεί το παραπάνω σχήμα (εικόνα 17) όπου η θέση του σημείου Κ μπορεί να αλλάξει είτε από τους δρομείς χ και ψ (οι τιμές των οποίων δηλώνουν τις συντεταγμένες του, αλλά δεν το αναφέρουμε πουθενά) είτε με σύρσιμο του ίδιου του σημείου στο εσωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. Αρχικά ζητάμε να εντοπίσουν τη συνθήκη που θα πρέπει να ικανοποιεί το σημείο Κ ώστε το αρχικό οικόπεδο να χωρίζεται σε 4 ίδιου «είδους» σχήματα, π.χ να σχηματίζονται πάντα 4 ορθογώνια τρίγωνα. Μετά από συζήτηση και διάφορες προτάσεις που ακούστηκαν όλες οι ομάδες συμφώνησαν ότι ένα είδος «ίδιων» σχημάτων είναι τα 4 τρίγωνα με δύο κορυφές του καθενός να είναι αυτές του ορθογωνίου και η Τρίτη κορυφή να είναι το σημείο Κ (προτάθηκε και η ιδέα των ορθογωνίων παραλληλογράμμων αλλά τους φάνηκε πολύ απλή και εγκαταλείφθηκε, θα το δούμε στην ανάλυση των δραστηριοτήτων παρακάτω). Αναφερόμαστε λοιπόν στα τρίγωνα ΑΒΚ, ΒΓΚ, ΓΔΚ και ΔΑΚ με αντίστοιχα εμβαδά Ε1, Ε2, Ε3 και Ε4 (εικόνα 17). Στη συνέχεια ερχόμαστε στο λογισμικό και όλες οι ομάδες βάζουν στο περιβάλλον του πολύζυγου συνολικά 3 ζυγούς, τους Ζ1, Ζ2 και Ζ3 και 4 βάρη, τα Β1, Β2, Β3 και Β4 (εικόνα 18) που αντιστοιχούν στα εμβαδά των 4 τριγώνων.



Εικόνα 18: 1η Δραστηριότητα – 2ο Μαθηματικό Έργο (πριν γίνει η σύνδεση βαρών και ζυγών)

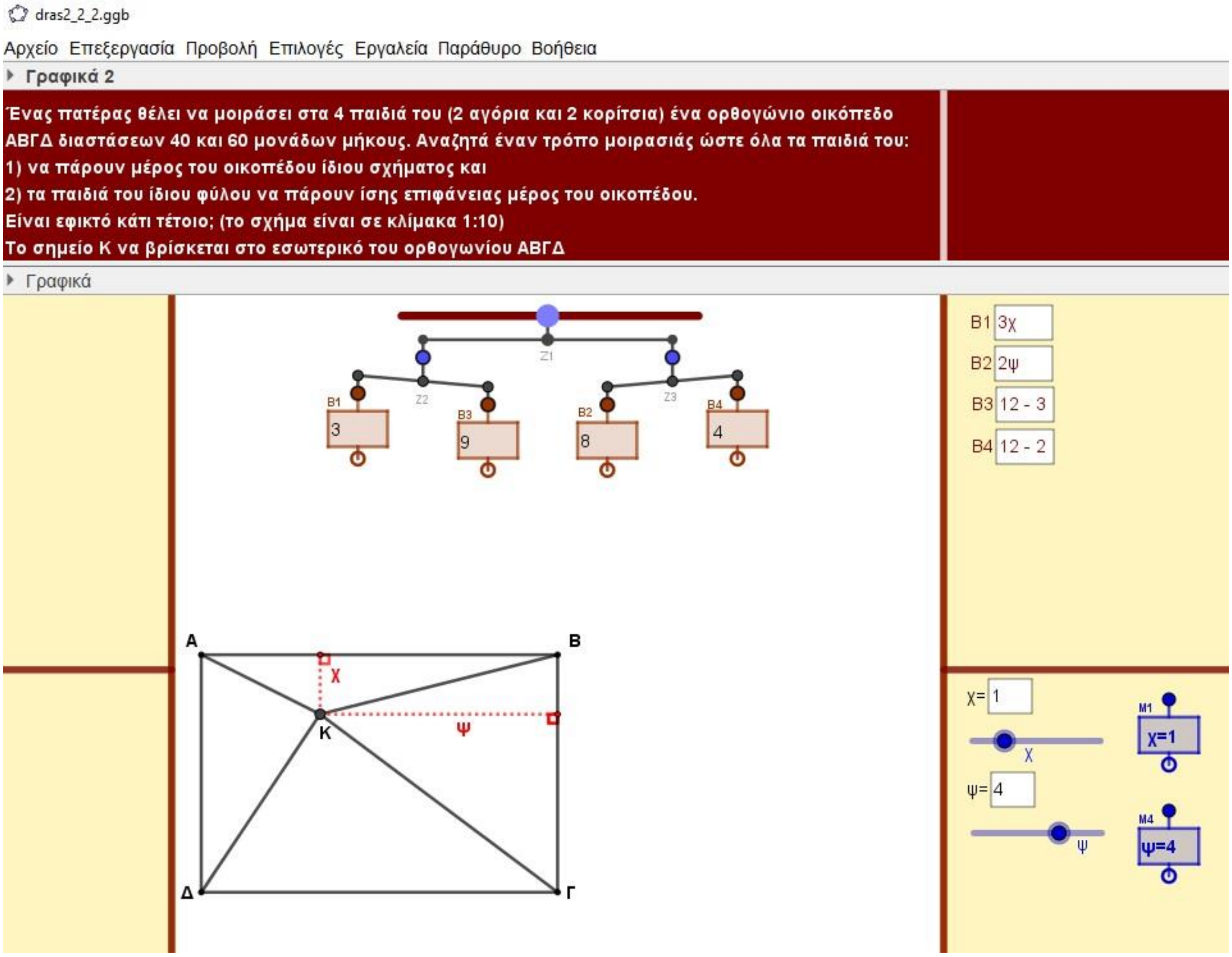
Αυτό που πρέπει να καθοριστεί είναι με ποια σειρά θα τοποθετηθούν τα 4 βάρη στο πολύζυγο. Η κάθε ομάδα διατυπώνει την πρότασή της και μετά από συζήτηση στην ολομέλεια καταλήγουν ομόφωνα ότι υπάρχουν 3 διαφορετικοί συνδυασμοί τους οποίους και αποφασίζουν να διερευνήσουν – μελετήσουν ανά ζευγάρια ομάδων, έτσι θα υπάρχει συνεργασία 2 ομάδων για κάθε περίπτωση και στο τέλος τα ευρήματα θα συζητηθούν στην ολομέλεια.



Εικόνα 19: 1η Δραστηριότητα – 2ο Μαθηματικό Έργο (διερεύνηση ομάδων 1 και 2)

Η 1η περίπτωση την οποία μελετούν οι ομάδες 1 και 2 έχει την τοποθέτηση των βαρών B1 και B2 στο ζυγό Z2 και τα βάρη B3 και B4 στο ζυγό Z3 (εικόνα 19), αυτό σημαίνει ότι αναζητούν τη θέση του σημείου K ή αντίστοιχα τιμές των μεταβλητών χ και ψ, ώστε τα βάρη B1, B2 να είναι ίσα καθώς και τα B3, B4 να είναι ίσα ή ισοδύναμα τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΚ και ΒΓΚ να είναι μεταξύ τους ίσα και των ΓΔΚ και ΔΑΚ να είναι και αυτά ίσα μεταξύ τους.

Οι ομάδες 3 και 4 επιλέγουν να αναζητήσουν αν υπάρχει δυνατότητα ισορροπίας του ζυγού Z2 έχοντας βάλει στα 2 άκρα του τα βάρη B1 και B3 και ισορροπία για το ζυγό Z3 που στα άκρα του έχουν τοποθετηθεί τα βάρη B2 και B4 (εικόνα 20).

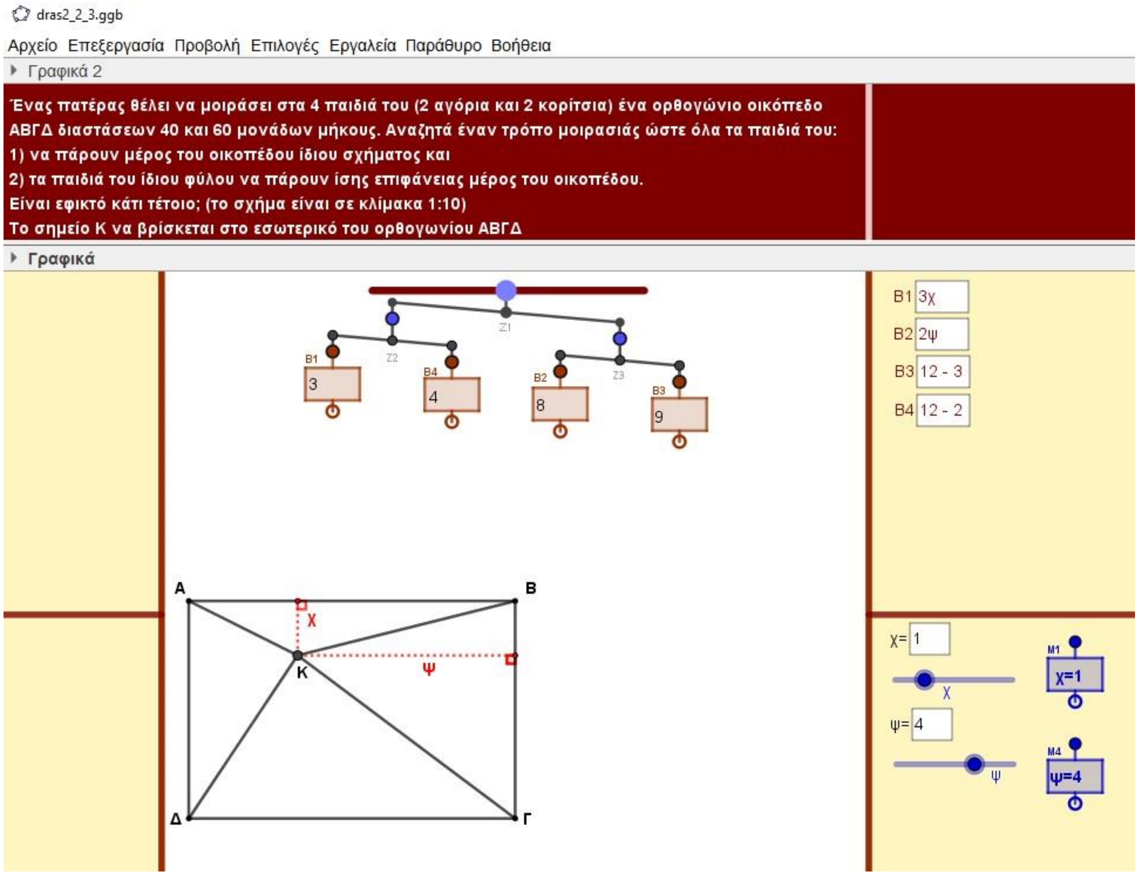


Εικόνα 20: 1η Δραστηριότητα – 2ο Μαθηματικό Έργο (διερεύνηση ομάδων 3 και 4)

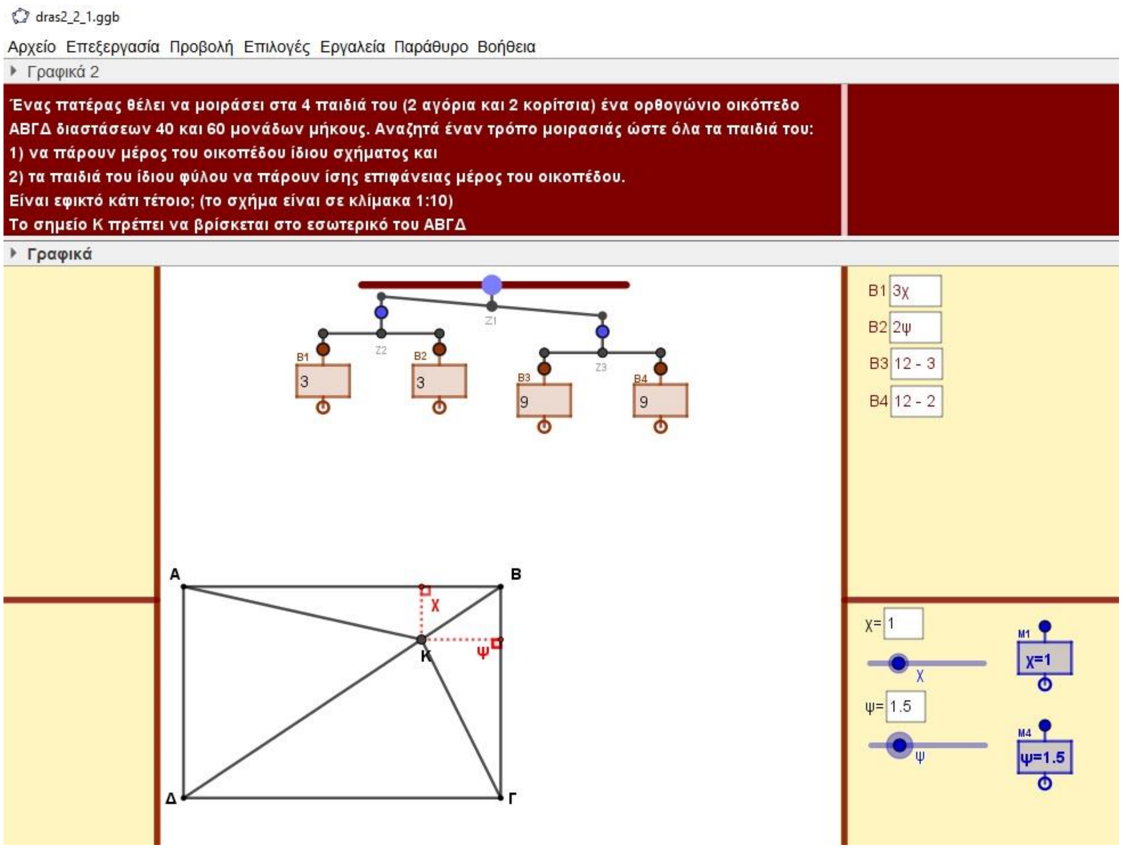
Τέλος οι ομάδες 5 και 6 διερευνούν το ενδεχόμενο ισορροπίας του ζυγού Ζ2 με τοποθετημένα στα άκρα του τα βάρη Β1 και Β4 και την ισορροπία του ζυγού Ζ3 με τα βάρη Β2 και Β3 στα άκρα του (εικόνα 21), που ισοδύναμα σημαίνει ότι αναζητούν πιθανή ισότητα εμβαδών για τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΔΑΚ καθώς και για τα εμβαδά των τριγώνων ΒΓΚ και ΓΔΚ. Όλες οι ομάδες εργάζονται στο περιβάλλον του πολύζυγου και συνεργάζονται μεταξύ τους ανά δυο (η 1η με τη 2η, η 3η με την 4η και η 5η με την 6η), σημειώνουν τα ευρήματά τους στο Φ.Ε που τους έχει δοθεί και στο τέλος τα παρουσιάζουν στην ολομέλεια.

Επισημαίνουμε ότι σε κάθε περίπτωση τα ευρήματα της κάθε ομάδας ελέγχονται ως προς την ορθότητά τους και με αλγεβρικό τρόπο και έτσι επιβεβαιώνεται η ορθότητα της εικασίας που προέκυψε από τη χρήση του λογισμικού ή απορρίπτεται.

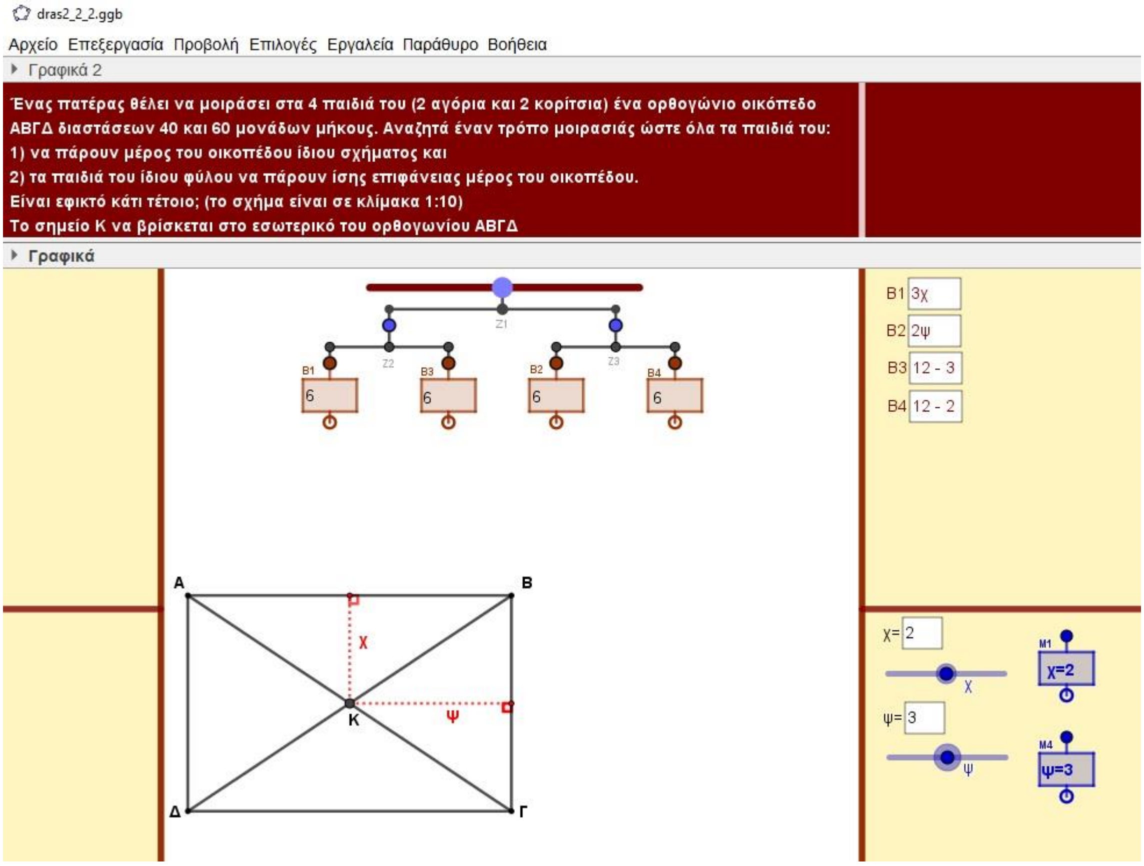
Ακολουθούν κάποια στιγμιότυπα από την ισορροπία που κατάφεραν οι ομάδες με χρήση του λογισμικού.



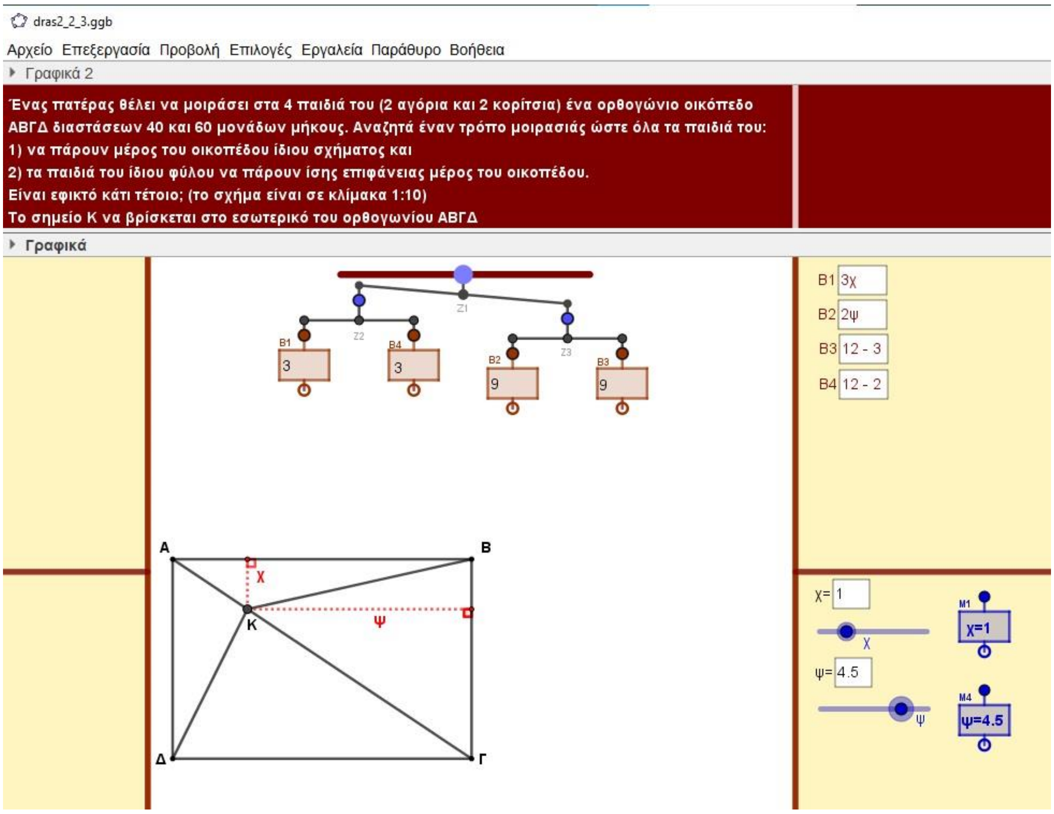
Εικόνα 21: 1η Δραστηριότητα – 2ο Μαθηματικό Έργο (διερεύνηση ομάδων 5 και 6)



Εικόνα 22: 1η Δραστηριότητα – 2ο Μαθηματικό Έργο (λύση των ομάδων 1 και 2)

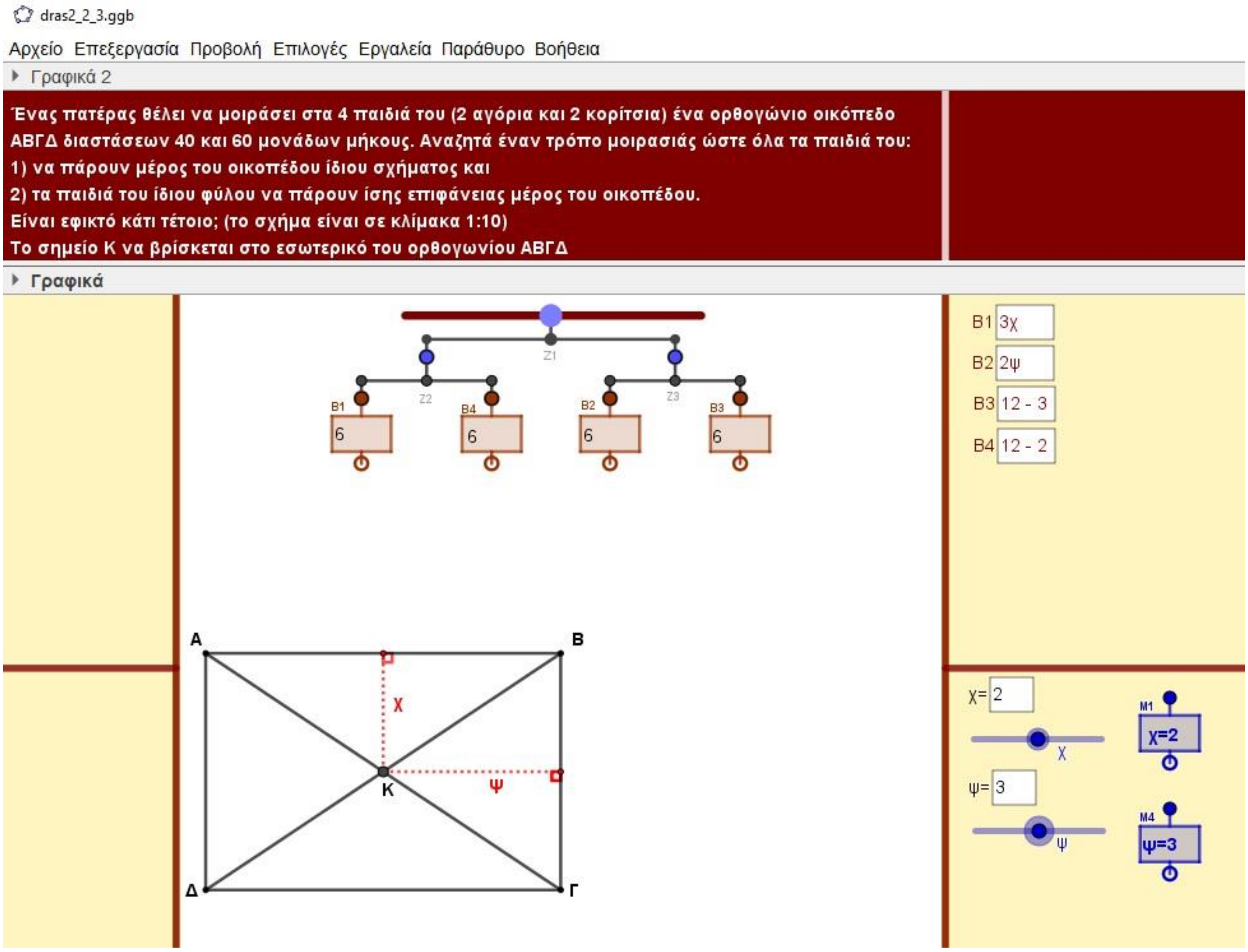


Εικόνα 23: 1η Δραστηριότητα – 2ο Μαθηματικό Έργο (λύση των ομάδων 3 και 4)



Εικόνα 24: 1η Δραστηριότητα – 2ο Μαθηματικό Έργο (λύση των ομάδων 5 και 6)

Πριν προχωρήσουμε στην αλγεβρική λύση των περιπτώσεων που μελέτησαν τα ζευγάρια των ομάδων τέθηκαν κάποια επιπλέον ερωτήματα προς όλες τις ομάδες, συγκεκριμένα ζητήθηκε να γίνει μια γεωμετρική ερμηνεία της λύσης που «φάνηκε» με χρήση του λογισμικού καθώς και αν είναι εύκολο να γνωρίζουμε το πλήθος των πιθανών λύσεων πριν προχωρήσουμε στην αλγεβρική επίλυση. Ενδιαφέρον αποκτούν οι απαντήσεις της ομάδας 5 (είναι η ομάδα που έχει κάνει εύστοχα σχόλια και σε άλλες δραστηριότητες) που αφορούσε τη λύση που παρουσίασαν οι ομάδες 3 και 4 (εικόνα 23), συγκεκριμένα τα μέλη της ομάδας 5 ισχυρίστηκαν ότι είναι φανερό ότι στην περίπτωση των ομάδων 3 και 4 που μελετούν την ισότητα των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΚ με ΓΔΚ και ΒΓΚ με ΔΑΚ η λύση είναι μοναδική και αφορά τη θέση του σημείου Κ όταν αυτό βρίσκεται στο κέντρο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, δηλαδή έχουμε 4 ίσα, άρα και ισοεμβαδικά τρίγωνα, λύση η οποία εμφανίζεται και στη δική τους περίπτωση (εικόνα 25) αλλά στη δική τους περίπτωση υπάρχουν και άλλες λύσεις (εικόνα 24).

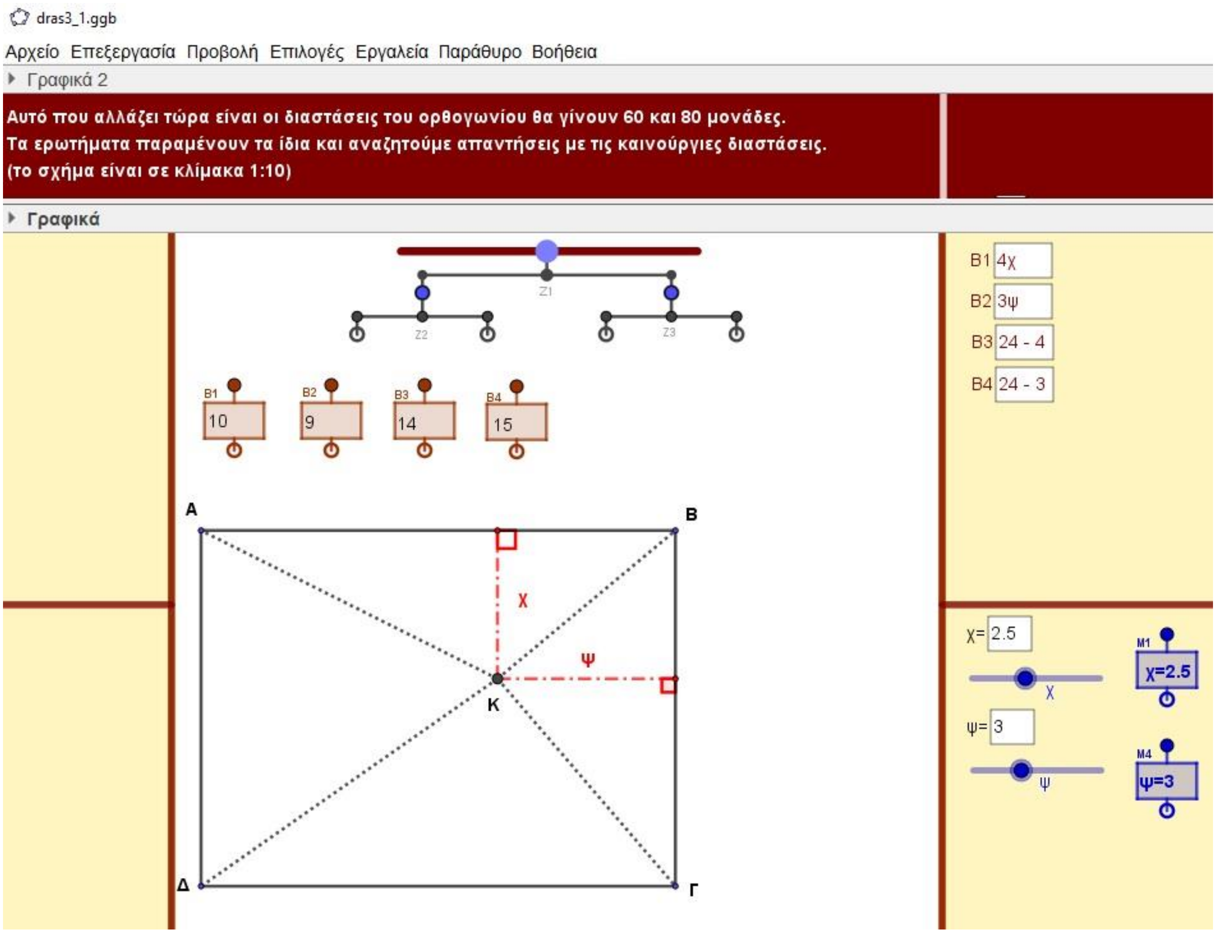


Εικόνα 25: 1η Δραστηριότητα – 2ο Μαθηματικό Έργο (λύση των ομάδων 5 και 6)

Αναφορικά με τη γεωμετρική ερμηνεία της λύσης τους οι ομάδες δεν δυσκολεύτηκαν να ερμηνεύσουν αυτό που προέκυψε από τη διερεύνηση που έκαναν, συγκεκριμένα οι ομάδες 1 και 2 δικαιολόγησαν ότι όταν συμβαίνει ισορροπία των βαρών Β1 και Β2 που ερμηνεύεται ως ισότητα των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΚ και ΒΓΚ τότε θα πρέπει το σημείο Κ ισαπέχει από τα σημεία Α και Γ ώστε να είναι ίσα τα ύψη των τριγώνων ΑΒΚ και ΒΓΚ μιας και θέλουμε να έχουν ίσα εμβαδά και έχουν κοινή πλευρά την ΒΚ, έτσι όμως τα άλλα δύο τρίγωνα ΔΓΚ και ΔΑΚ που έχουν κοινή πλευρά την ΔΚ θα έχουν ίσα ύψη από τις κορυφές Γ και Α αντίστοιχα έτσι δικαιολογείται το γεγονός ότι αν δύο διαδοχικά σχήματα από αυτά που σχηματίσαμε έχουν ίσα εμβαδά θα έχουν υποχρεωτικά και τα άλλα 2, συνεπώς μια λύση ώστε να είναι εφικτή η πρόταση του πατέρα είναι τα παιδιά του ίδιου φύλου να επιλέξουν διαδοχικά «κομμάτια» του αρχικού οικοπέδου.

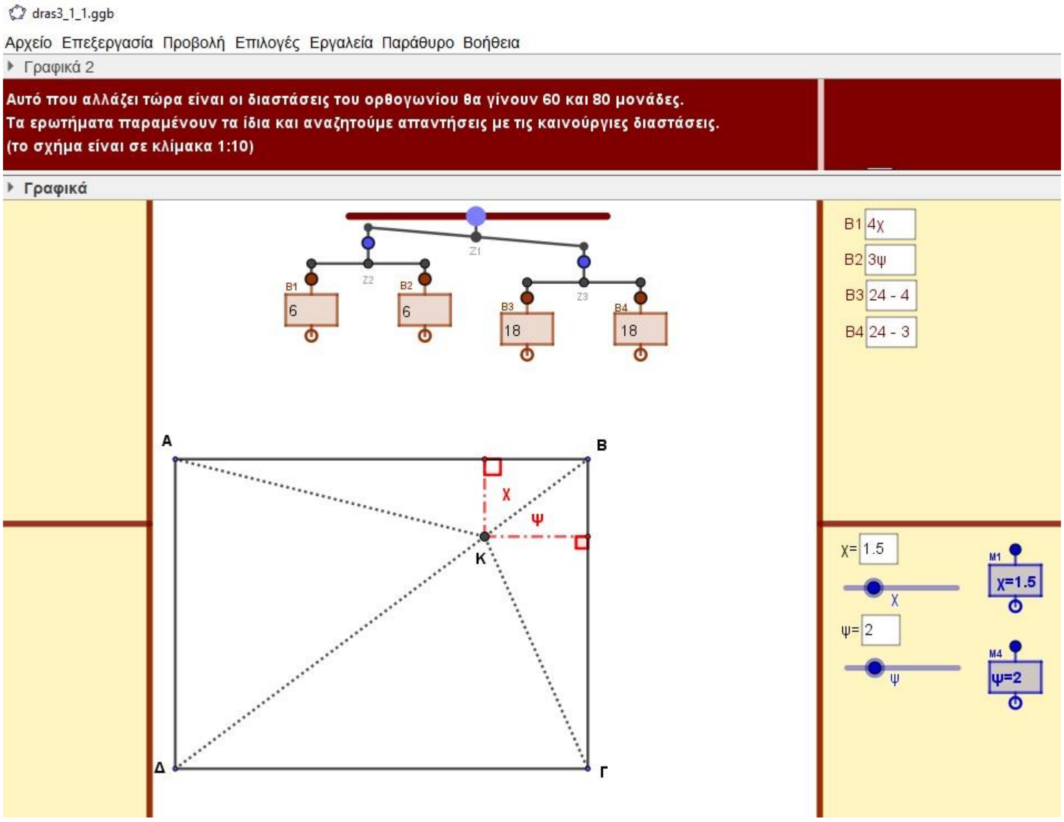
<u>2η δραστηριότητα:</u> Αλλαγή των διαστάσεων του αρχικού ορθογωνίου.

Στους μαθητές δίνεται η 2η δραστηριότητα (εικόνα 26) όπου σε σχέση με την 1η δραστηριότητα έχουμε αλλάξει τις διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε οι κάθε ομάδα να κάνει την ίδια διερεύνηση με στόχο τη γενίκευση.



Εικόνα 26: 2η Δραστηριότητα – 2ο Μαθηματικό Έργο

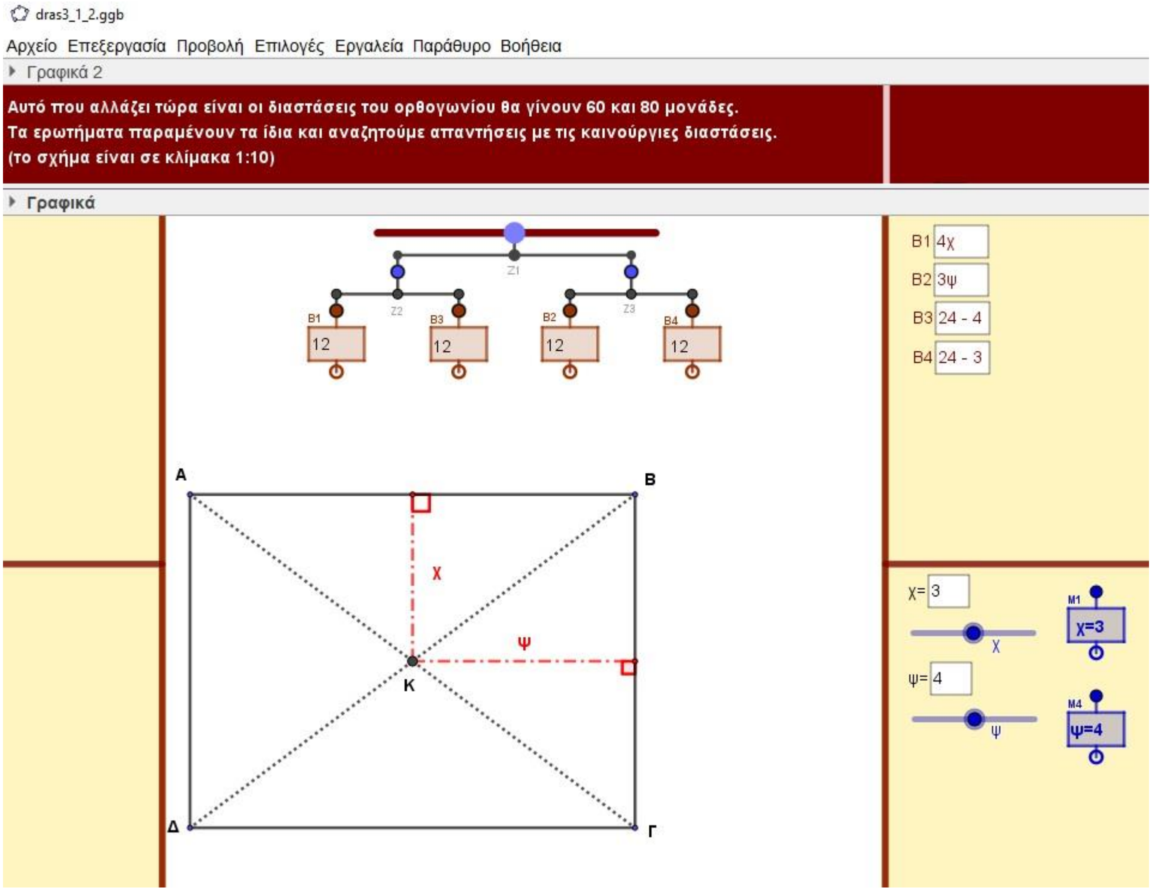
Οι 6 ομάδες πάλι εργάζονται ανά δύο και τοποθετούν τα βάρη Β1, Β2, Β3 και Β4 ακριβώς όπως τα τοποθέτησαν στην 1η δραστηριότητα και αναζητούν απαντήσεις στα ίδια ερωτήματα. Οι αντίστοιχες απαντήσεις των ομάδων φαίνονται στα παρακάτω στιγμιότυπα (εικόνες 27, 28 και 29) τα οποία όταν παρουσιάζονται στην ολομέλεια δημιουργούν την αίσθηση ότι υπάρχει κάποιο μοτίβο το οποίο οι ομάδες καλούνται να εντοπίσουν και να το περιγράψουν στις άλλες ομάδες.



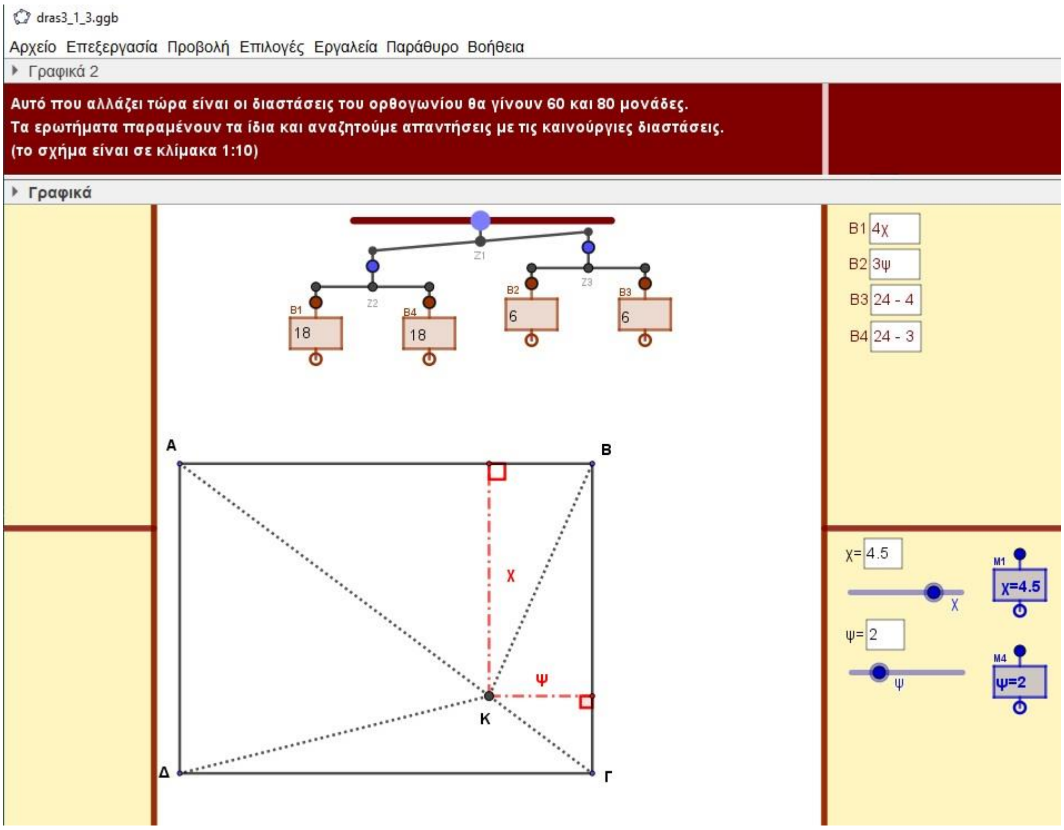
Εικόνα 27: 2η Δραστηριότητα – 2ο Μαθηματικό Έργο (λύση των ομάδων 1 και 2)

Σε κάθε περίπτωση η αναζήτηση του σημείου ισορροπίας των ζυγών στη 2η δραστηριότητα φάνηκε να είναι πιο εύκολη διαδικασία για όλες τις ομάδες των μαθητών.

Με την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων του 2ου Μαθηματικού έργου ζητήθηκε από τους μαθητές να περιγράψουν τη θέση του σημείου Κ αν θέλαμε και τα 4 μέρη να είναι ισοεμβαδικά, πόσες λύσεις υπάρχουν και αν την απάντηση μπορούμε με βεβαιότητα να την δώσουμε μέσω γεωμετρικής ερμηνείας ποια θα ήταν η αιτιολόγηση, σε αυτό το σημείο να πούμε ότι σχεδόν το σύνολο των μαθητών μπόρεσε να περιγράψει τη ζητούμενη θέση του σημείου Κ ως το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.



Εικόνα 28: 2η Δραστηριότητα – 2ο Μαθηματικό Έργο (λύση των ομάδων 3 και 4)



Εικόνα 29: 2η Δραστηριότητα – 2ο Μαθηματικό Έργο (λύση των ομάδων 5 και 6)

4.3.3. 3ο Μαθηματικό Έργο

1η δραστηριότητα: Κατανόηση του προβλήματος

Στους μαθητές/τριες δίνεται το παρακάτω πρόβλημα:

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 4 μονάδες μήκους. Θεωρούμε τα σημεία Κ, Λ στις ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα ώστε: (ΑΚ)=(ΒΛ)=χ και τα σημεία Μ, Ν στις ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα, ώστε: (ΓΜ)=(ΔΝ)=ψ.

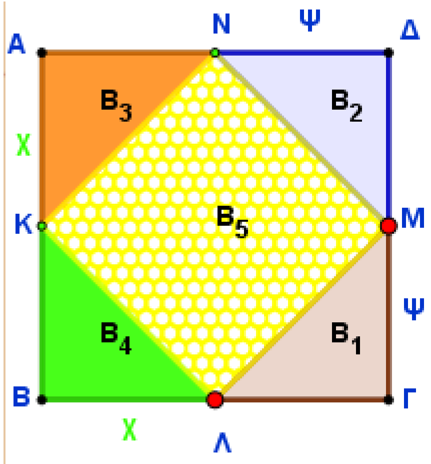
Επιπλέον ορίζουμε τα εμβαδά: Β1=(ΜΓΛ), Β2=(ΜΔΝ), Β3=(ΚΑΝ), Β4=(ΚΒΛ) και Β5=(ΚΛΝΜ).

α) Να γράψετε στις θέσεις των Β1, Β2, Β3 και Β4 τα εμβαδά των αντίστοιχων τριγώνων.

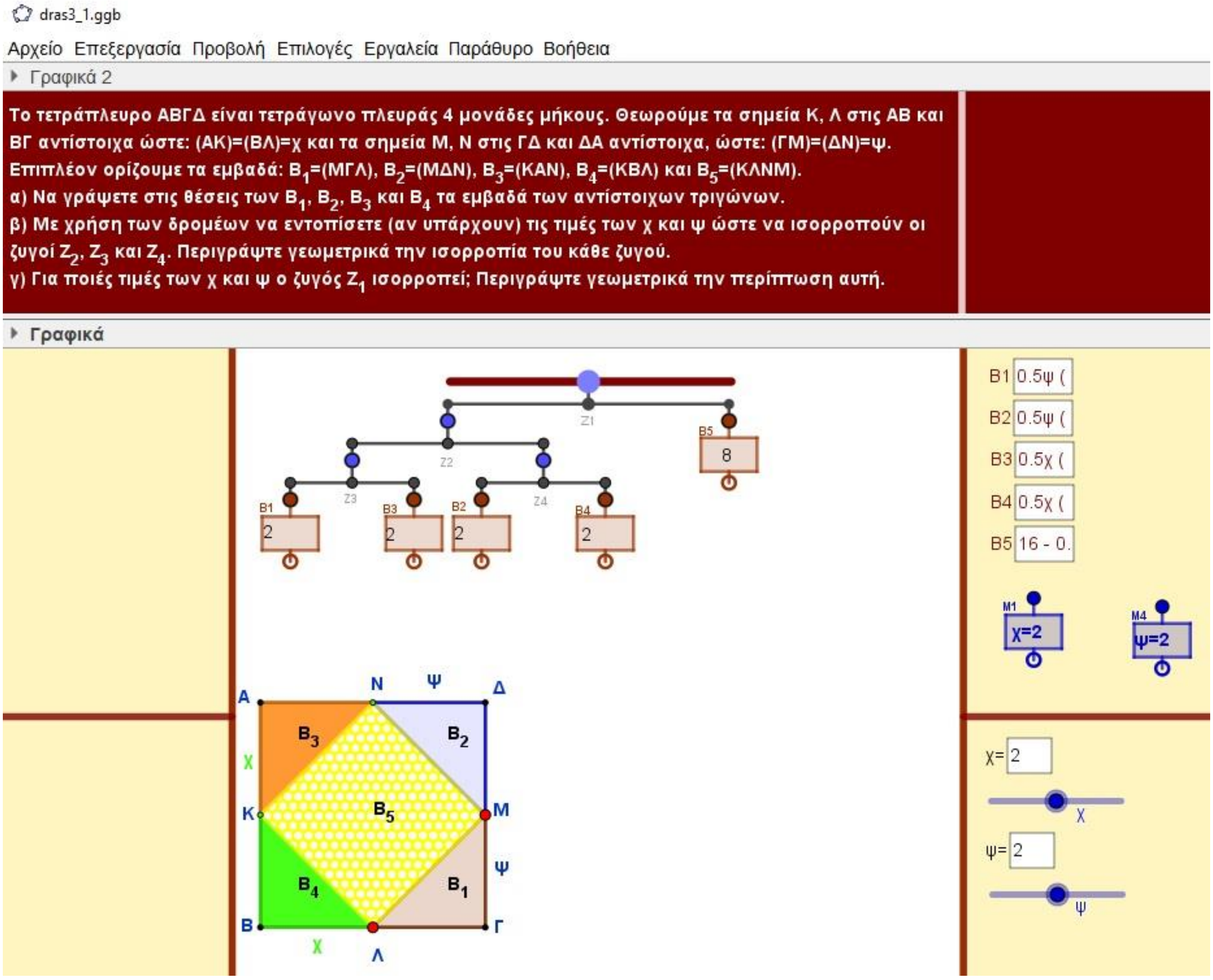
β) Με χρήση των δρομέων να εντοπίσετε (αν υπάρχουν) τις τιμές των χ και ψ ώστε να ισορροπούν οι

ζυγοί Ζ2, Ζ3 και Ζ4. Περιγράψτε γεωμετρικά την ισορροπία του κάθε ζυγού.

γ) Για ποιες τιμές των χ και ψ ο ζυγός Ζ1 ισορροπεί; Περιγράψτε γεωμετρικά την περίπτωση αυτή.

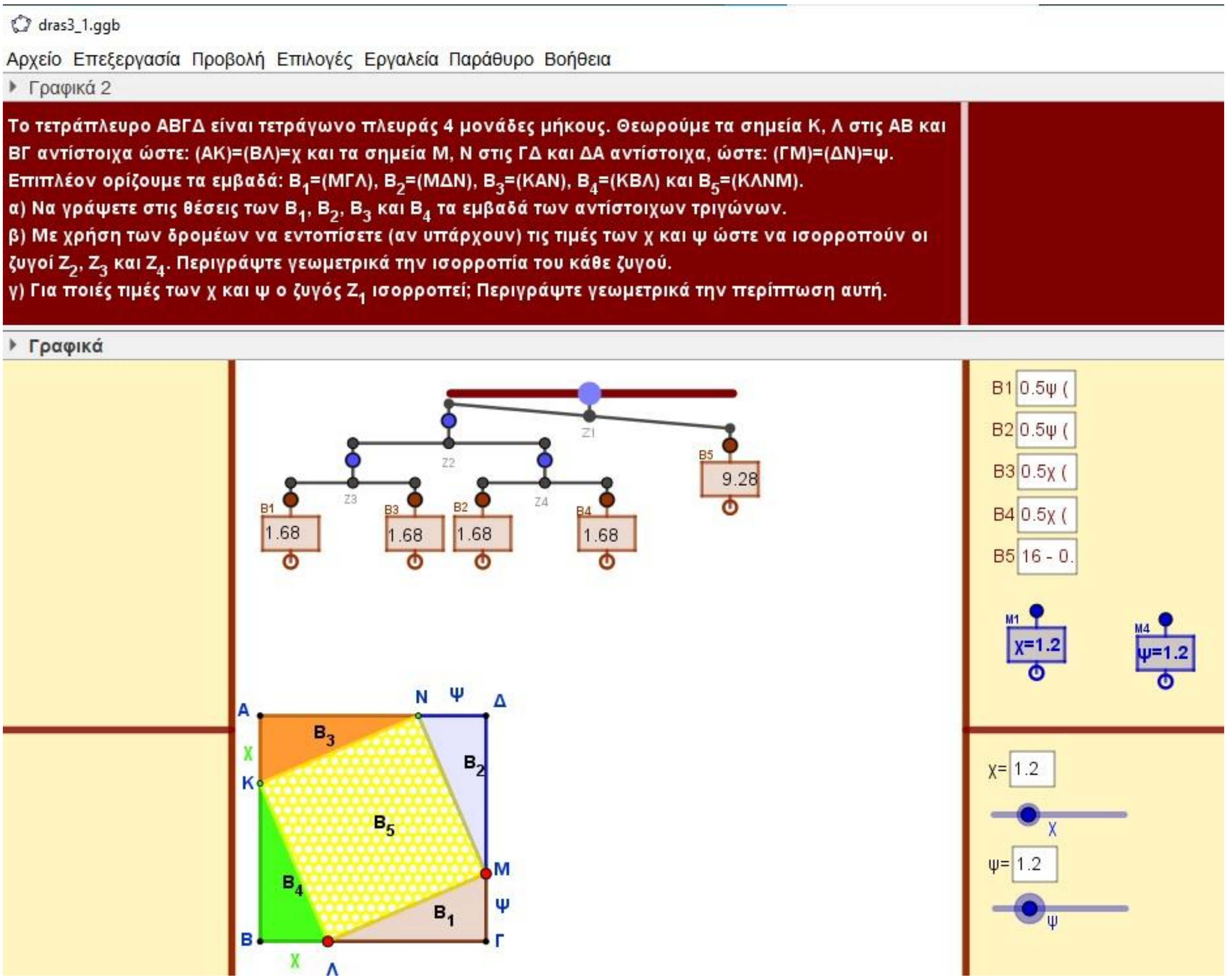


Στο περιβάλλον του «Πολύζυγου» υπάρχουν γεωμετρικά σχήματα και δεδομένες συνθήκες που ικανοποιούνται και θέλουμε με χρήση του λογισμικού οι μαθητές/τριες να εντοπίσουν τη λύση του προβλήματος. Υπάρχουν έτοιμοι στο λογισμικό 4 ζυγοί, οι Ζ1, Ζ2, Ζ3 και Ζ4 και 4 βάρη τα Β1, Β2, Β3 και Β4 που αντιστοιχούν στα εμβαδά των ορθογωνίων τριγώνων ΛΓΜ, ΜΔΝ, ΝΑΚ και ΚΒΛ και το βάρος Β5 που αντιστοιχεί στο εμβαδόν του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ.



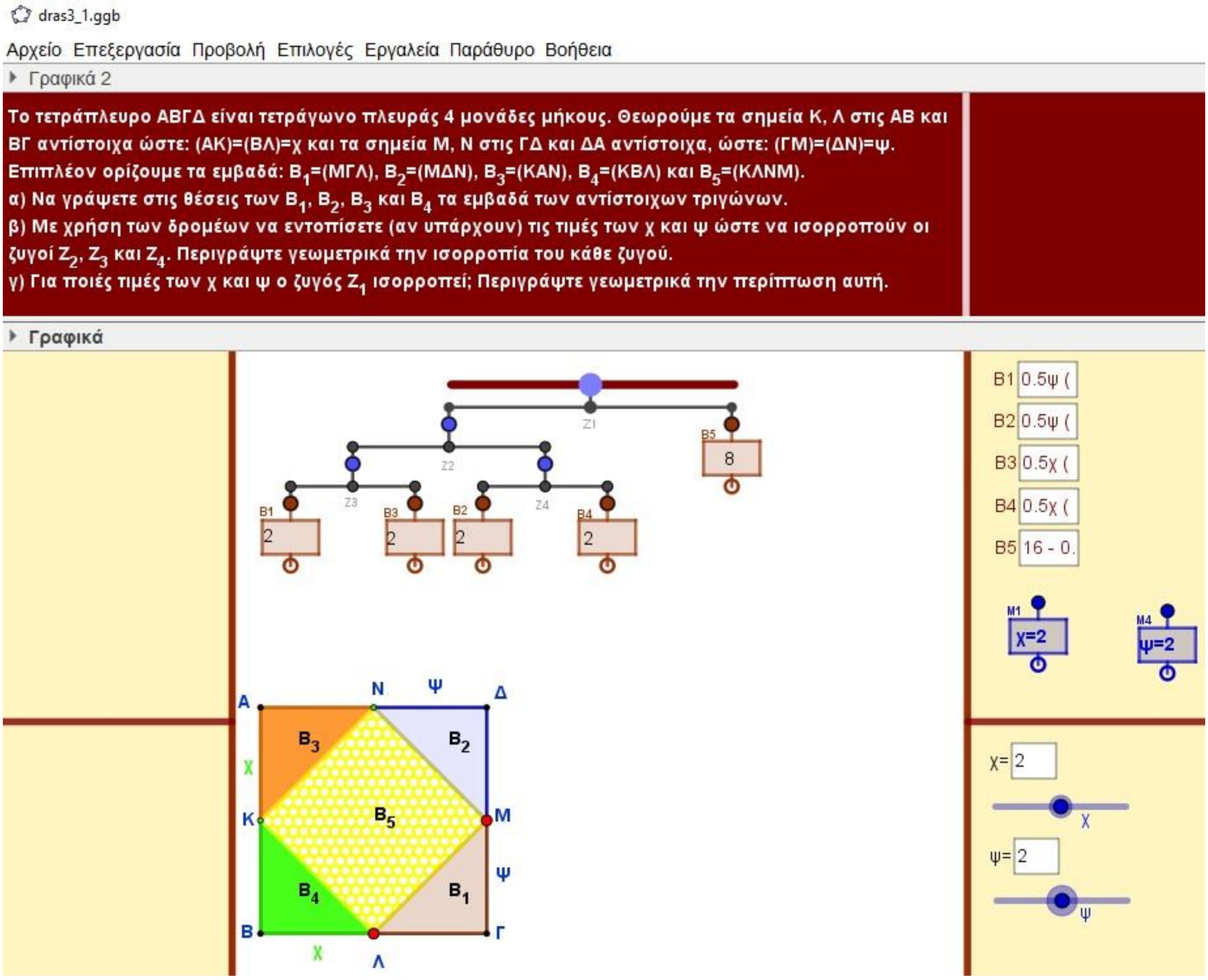
Εικόνα 30: 1η Δραστηριότητα – 3ο Μαθηματικό Έργο

Αρχικά ζητάμε από τους μαθητές/τριες να καταχωρίσουν στις θέσεις των βαρών B1, B2, B3 και B4 το εμβαδό του αντίστοιχου τριγώνου σα συνάρτηση των χ και ψ (εικόνα 30) και με χρήση των δρομέων να προσπαθήσουν να εντοπίσουν τιμές των μεταβλητών χ και ψ για τις οποίες ισορροπούν οι ζυγοί Ζ2, Ζ3 και Ζ4 και όταν συμβεί αυτό να προσπαθήσουν να περιγράψουν γεωμετρικά τη συνθήκη που ισχύει για τις τιμές εκείνες των μεταβλητών. Οι 6 ομάδες δούλεψαν ξεχωριστά και στο τέλος συνεργάζονται ανά δύο (1η και 2η, 3η και 4η και 5η και 6η) και παρουσιάζουν τις απαντήσεις τους στην ολομέλεια. Παρακάτω βλέπουμε (εικόνες 31, 32 και 33) κάποια στιγμιότυπα από τις απαντήσεις των ομάδων, ενδιαφέρον αποκτά η περιγραφή της γεωμετρικής ερμηνείας της ισορροπίας των ζυγών από τις ομάδες των μαθητών/τριων και πως μετασχηματίζουν την ισότητα των ζυγών. Αρχικά να πούμε ότι οι ομάδες καθώς υλοποιούσαν τη δραστηριότητα χρησιμοποιούσαν τις δυνατότητες του λογισμικού με διαφορετικό τρόπο, από την απλή χρήση (ομάδα 3) αλλαγής των τιμών των μεταβλητών χ και ψ με πληκτρολόγηση στα αντίστοιχα κουτάκια αλλά και της πιο σύνθετης χρήσης (ομάδα 5) όπου οι τιμές των μεταβλητών χ και ψ άλλαζαν μέσω της μετακίνησης των σημείων Λ και Μ αντίστοιχα. Οι υπόλοιπες 4 ομάδες άλλαζαν τις τιμές των μεταβλητών χ και ψ μέσω των δρομέων που προσέφερε το λογισμικό.



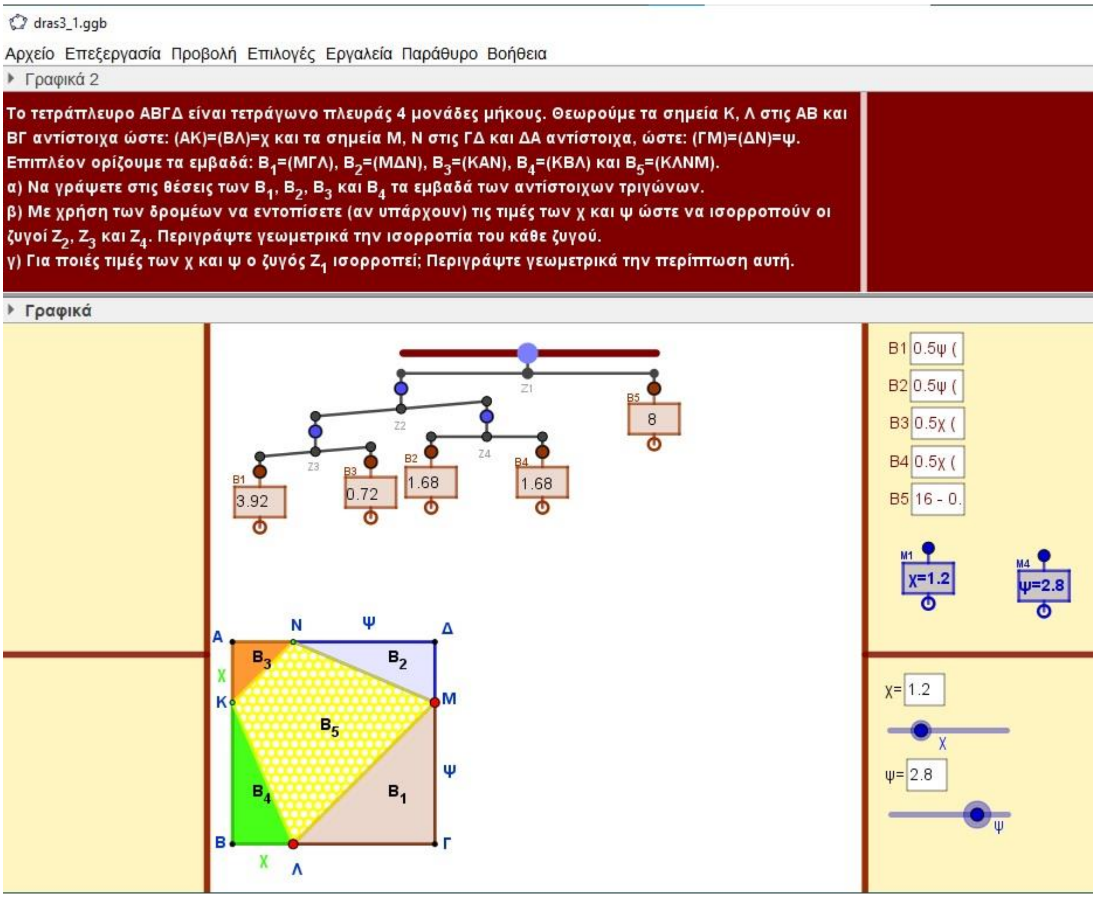
Εικόνα 31: 1η Δραστηριότητα – 3ο Μαθηματικό Έργο (λύση των ομάδων 1 και 2)

Όλες οι ομάδες σχετικά εύκολα κατάφεραν να εντοπίσουν τη συνθήκη ισορροπίας του ζυγού Ζ1 (ερώτημα γ) και έδωσαν ως απάντηση χ=ψ=2 (εικόνα 32) αλλά όταν ζητήθηκε να ερμηνεύσουν γεωμετρικά τη συνθήκη αυτή εντοπίστηκαν τα πρώτα προβλήματα και συγκεκριμένα, ενώ όλες οι ομάδες «είδαν» την ισότητα των 4 ορθογωνίων τριγώνων, τα οποία όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν ότι είναι και ισοσκελή, μόνο οι ομάδες 1, 5 και 6 αναγνώρισαν ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο. Μετά από συζήτηση στην ολομέλεια όλες οι ομάδες συμφώνησαν για το είδος του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ και ζητήσαμε από τους μαθητές/τριες και συγκεκριμένα από την ομάδα 3 να μας πει πόσο είναι η πλευρά του τετραγώνου. Η απάντησή της ήταν σωστή και προέκυψε μέσω της μέτρησης του εμβαδού του σχήματος που εμφανίζεται στο βάρος Β5 (εικόνα 30), δηλαδή αφού το εμβαδόν είναι 8 τότε η πλευρά θα είναι ίση με την τετραγωνική ρίζα του 8, άρα $2 \cdot \sqrt{2}$.

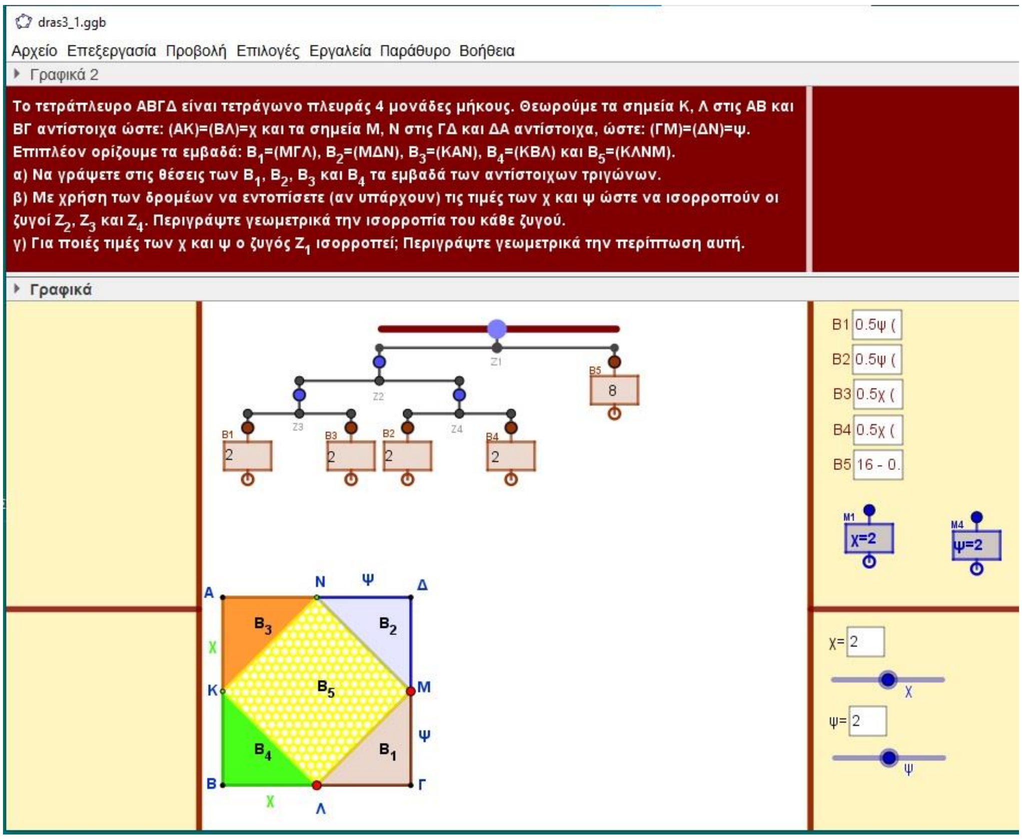


Εικόνα 32: 1η Δραστηριότητα – 3ο Μαθηματικό Έργο (λύση των ομάδων 3 και 4)

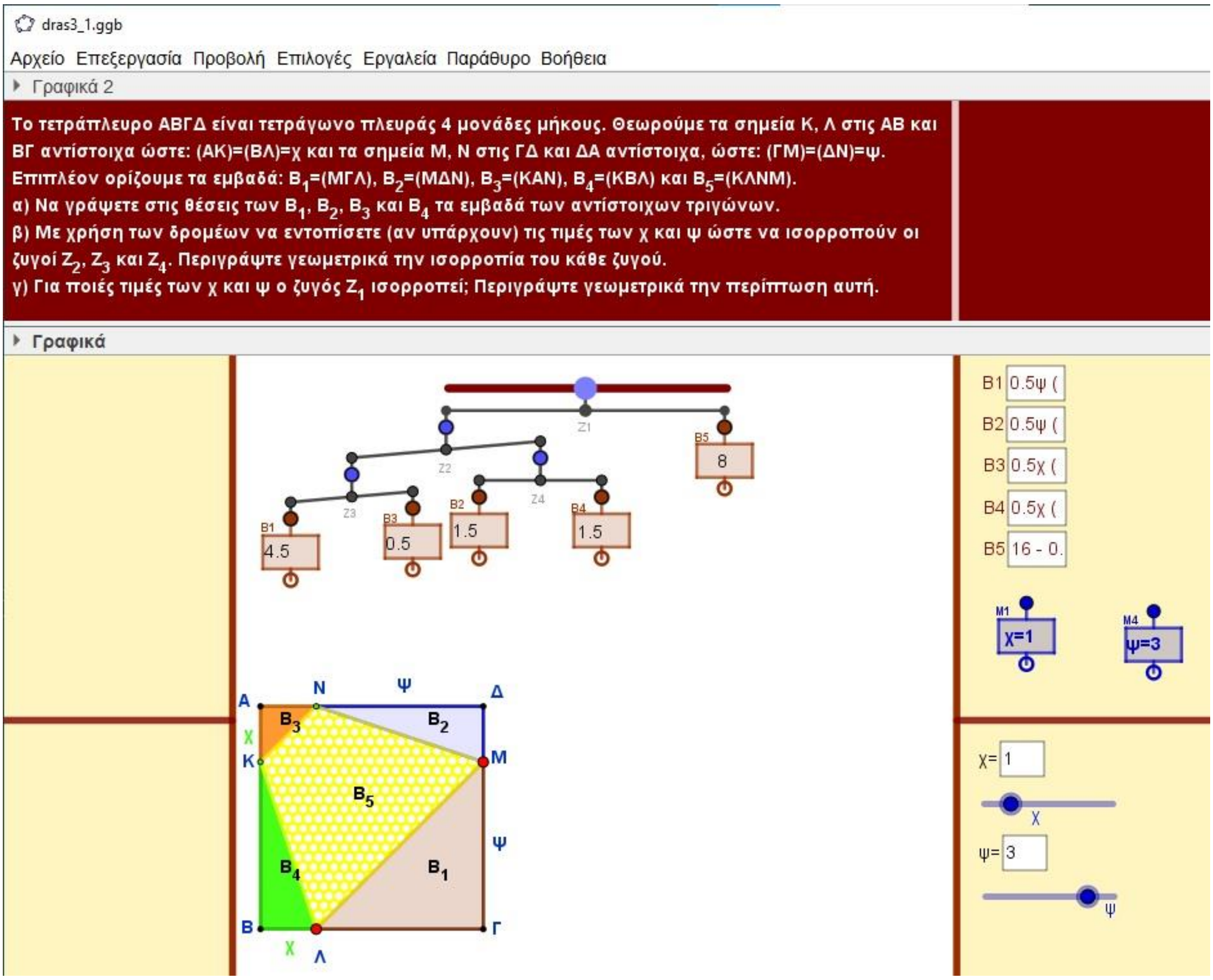
Η ομάδα 6 υπολόγισε την πλευρά του τετραγώνου ΚΛΜΝ με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος σε ένα από τα ισοσκελή και ορθογώνια τρίγωνα. Τα πράγματα φάνηκαν τα περιπλέκονται όταν η ομάδα 5 εμφάνισε τη λύση της στο ερώτημα (γ) της 1ης δραστηριότητας (εικόνα 33), όπου όλες οι ομάδες έκαναν την υπόθεση ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο αλλά όταν ζητήθηκε να το αποδείξουν μόνο η ομάδες 5 και 6 το κατάφεραν.



Εικόνα 33: 1η Δραστηριότητα – 3ο Μαθηματικό Έργο (λύση των ομάδων 5 και 6)



Εικόνα 34: 1η Δραστηριότητα – 3ο Μαθηματικό Έργο (ισορροπία ζυγού Ζ1)



Εικόνα 35: 1η Δραστηριότητα – 3ο Μαθηματικό Έργο (ισορροπία ζυγού Ζ1, ομάδα 5)

Το συμπέρασμα που προκύπτει σε αυτό το σημείο είναι ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να μετασχηματίσουν μια πληροφορία που τους δίνεται ή που προέκυψε από τη διερεύνησή τους και να τη χρησιμοποιήσουν για να προχωρήσουν παρακάτω. Είδαν την ισορροπία των ζυγών για τις τιμές χ=ψ=2 και δεν αναζήτησαν άλλες πιθανές λύσεις, η ομάδα 5 όμως που η διερεύνησή της γινόταν από την κίνηση των σημείων Λ και Μ αλλά και από τους δρομείς κατάφερε να εντοπίσει και νέες θέσεις ισορροπίας και μάλιστα να προσδιορίσει τα χαρακτηριστικά που θα έπρεπε να είχαν, δηλαδή χ+ψ=4. Με αυτό πλέον ως δεδομένο ζητήσαμε από όλες τις ομάδες να προσπαθήσουν να αποδείξουν το είδος του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ και μάλιστα να το προσπαθήσουν στο γνωστό πλαίσιο με χειραπτικά μέσα σχεδιάζοντας στα τετράδιά τους και χρησιμοποιώντας τις γνωστές σχέσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, τελικά οι ομάδες 4, 5 και 6 κατάφεραν να αποδείξουν ότι όταν συμβαίνει η ισορροπία του ζυγού Ζ1 το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Η ομάδα 5 συμπλήρωσε ότι όταν ισορροπούν παράλληλα και οι ζυγοί Ζ2, Ζ3 και Ζ4 (εικόνα 34) τότε δεν είναι ισοσκελές τραπέζιο το ΚΛΜΝ αλλά τετράγωνο που αποτελεί και την ολοκληρωμένη απάντηση στο ερώτημα (γ) της 1ης δραστηριότητας του 2ου Μαθηματικού Έργου.

<u>2η δραστηριότητα:</u> Κατανόηση του προβλήματος και αξιοποίηση του λογισμικού

Στους μαθητές δίνεται το παρακάτω πρόβλημα:

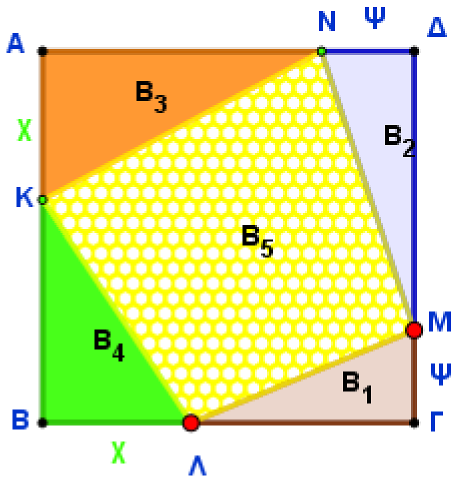
Το τετράγωνο οικόπεδο ΑΒΓΔ ένας πατέρας θέλει να το μοιράσει στα 5 παιδιά του ως εξής:

1) Ο μικρότερος γιος να πάρει το Β1 που να έχει διπλάσια έκταση από το Β4 που θα πάρει ο 4ος γιος.

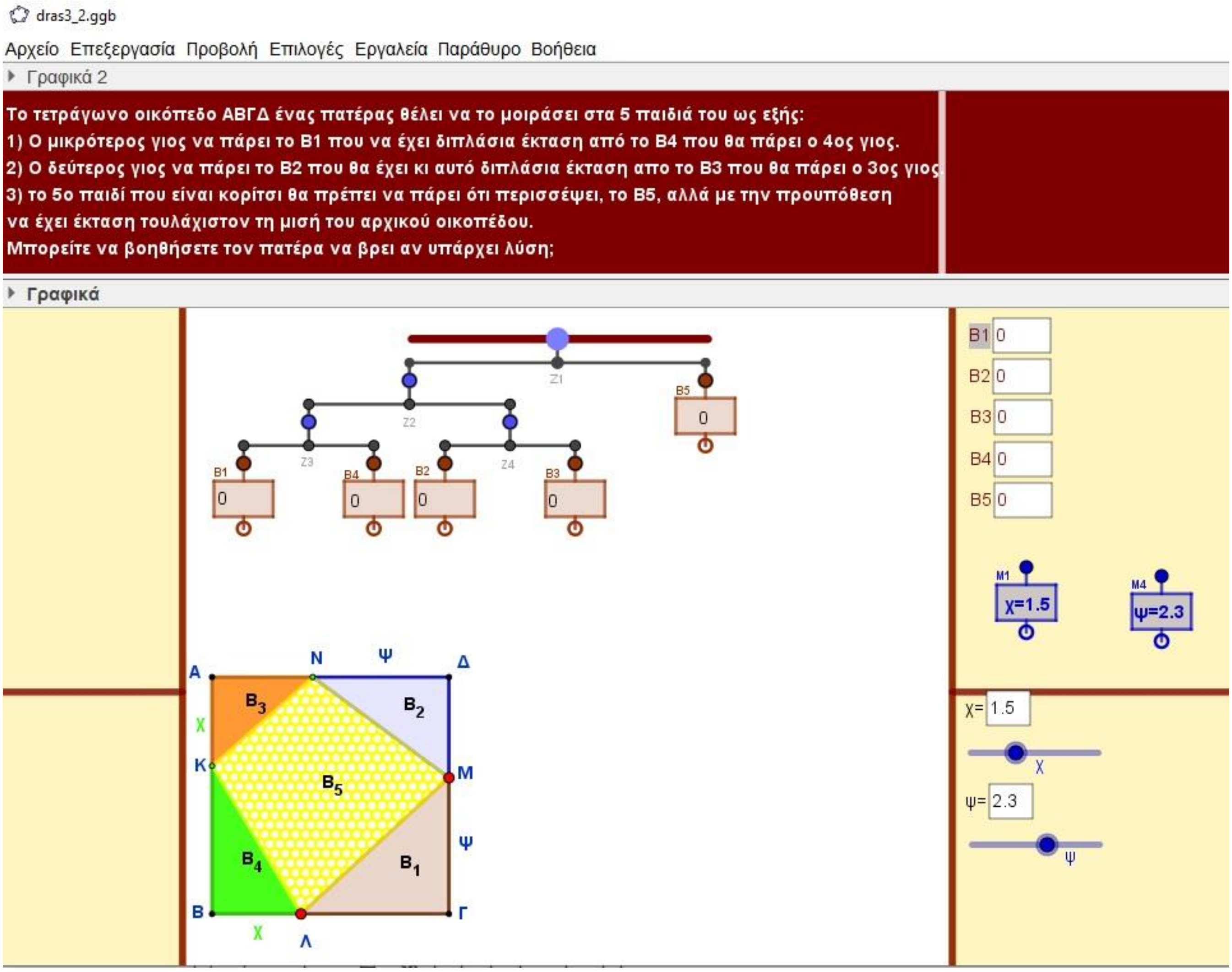
2) Ο δεύτερος γιος να πάρει το Β2 που θα έχει κι αυτό διπλάσια έκταση από το Β3 που θα πάρει ο 3ος γιος.

3) το 5ο παιδί που είναι κορίτσι θα πρέπει να πάρει ότι περισσέψει, το Β5 δηλαδή, αλλά με την προϋπόθεση να έχει έκταση τουλάχιστον τη μισή του αρχικού οικοπέδου.

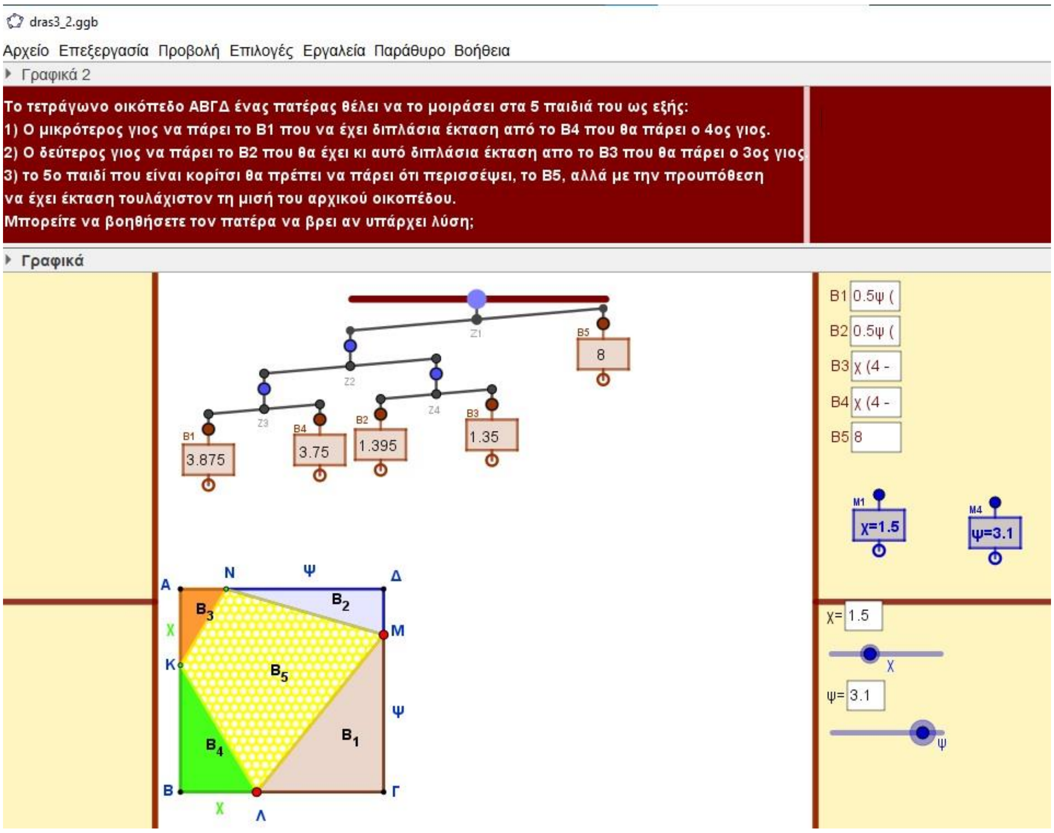
Μπορείτε να βοηθήσετε τον πατέρα να βρει, αν υπάρχει λύση;



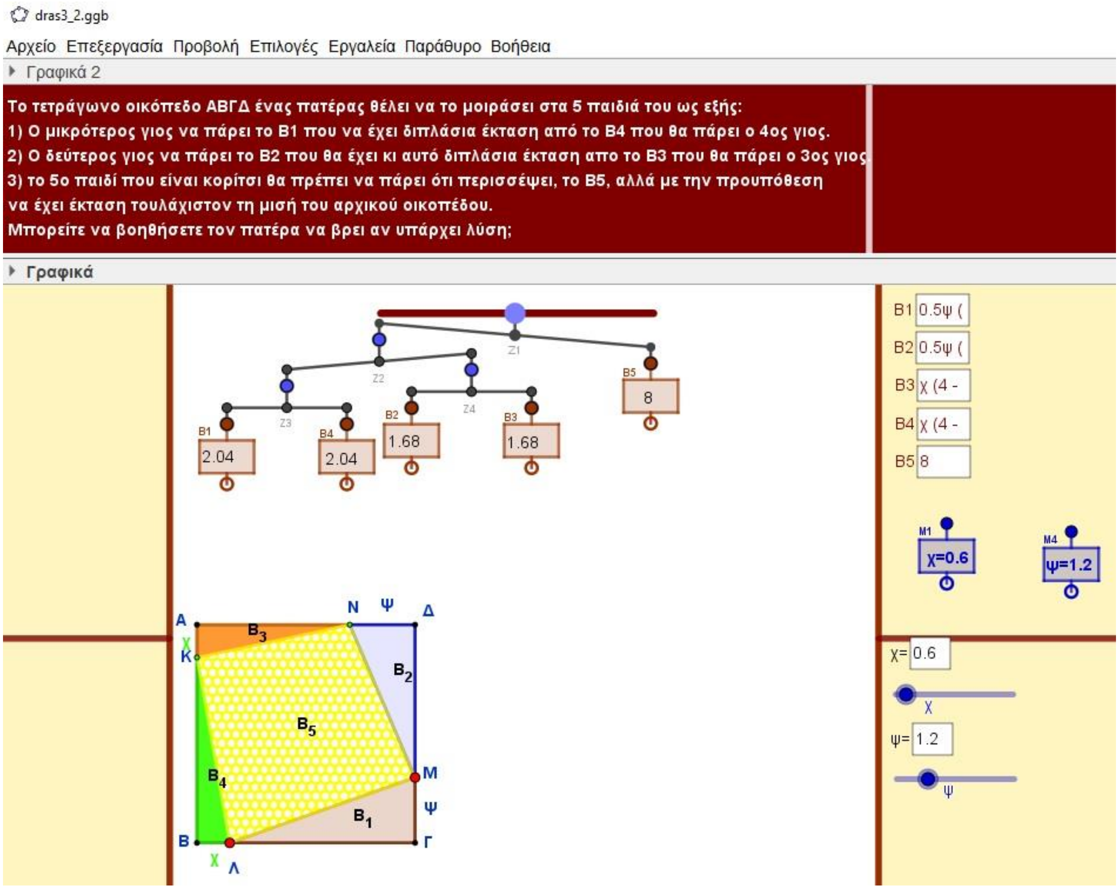
Αρχικά ζητάμε να χρησιμοποιήσουν το λογισμικό ώστε να κάνουν τη διερεύνηση του προβλήματος με τα εργαλεία που τους προσφέρει αυτό. Μελετώντας τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται όλες οι ομάδες συμφώνησαν να τοποθετήσουν 3 ζυγούς, τους Ζ2, Ζ3 και Ζ4 και επίσης να τοποθετήσουν 4 βάρη Β1, Β2, Β3 και Β4 ώστε να ικανοποιούνται οι δεσμεύσεις που θέτει το πρόβλημα και συγκεκριμένα να ισχύει Β1=2Β4 και Β2=2Β3 αλλά η τελευταία συνθήκη δυσκόλεψε το σύνολο των μαθητών για τον τρόπο που θα περαστεί στο λογισμικό. Συμφώνησαν να τοποθετήσουν και ένα 5ο βάρος Β5 (εικόνα 26) αλλά υπήρχε διαφωνία σχετικά με το τι πρέπει να περιέχει το κουτί του βάρους αυτού. Η δυσκολία εντοπίστηκε στο πως θα περαστεί στο βάρος Β5 η συνθήκη «τουλάχιστον» το μισό της έκτασης της αρχικής επιφάνειας. Μετά από συζήτηση και διάφορες δοκιμές κατέληξαν να τοποθετήσουν στη θέση Β5 τον αριθμό 8 και όταν ο ζυγός Ζ1 ισορροπούσε αυτό θα δήλωνε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ είναι ίσο με 8 μονάδες άρα το μισό του αρχικού συνεπώς αποδεκτή λύση, αν ο ζυγός Ζ1 έγερνε προς τα αριστερά (εικόνα 37), η μη ισορροπία του ζυγού θα δήλωνε ότι η ποσότητα Β5 (το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ) είναι μικρότερη από την τιμή 8 (ενδιαφέρον αποτελεί η αιτιολόγηση αυτής της συνθήκης, το οποίο θα δούμε αναλυτικά στην επόμενη παράγραφο ανάλυσης, των επιλεγμένων κρίσιμων περιστατικών) που έχουμε τοποθετήσει άρα δεν είναι αποδεκτή λύση και τέλος αν ο ζυγός Ζ1 έγερνε προς τα δεξιά (εικόνα 38) σήμαινε ότι οι τιμές αυτές των μεταβλητών χ και ψ αποτελούν λύση του προβλήματος μας, αφού το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ είναι μεγαλύτερο από τις 8 μονάδες, δηλαδή μεγαλύτερο από τη μισή έκταση του αρχικού οικοπέδου.



Εικόνα 36: 2η Δραστηριότητα – 3ο Μαθηματικό Έργο

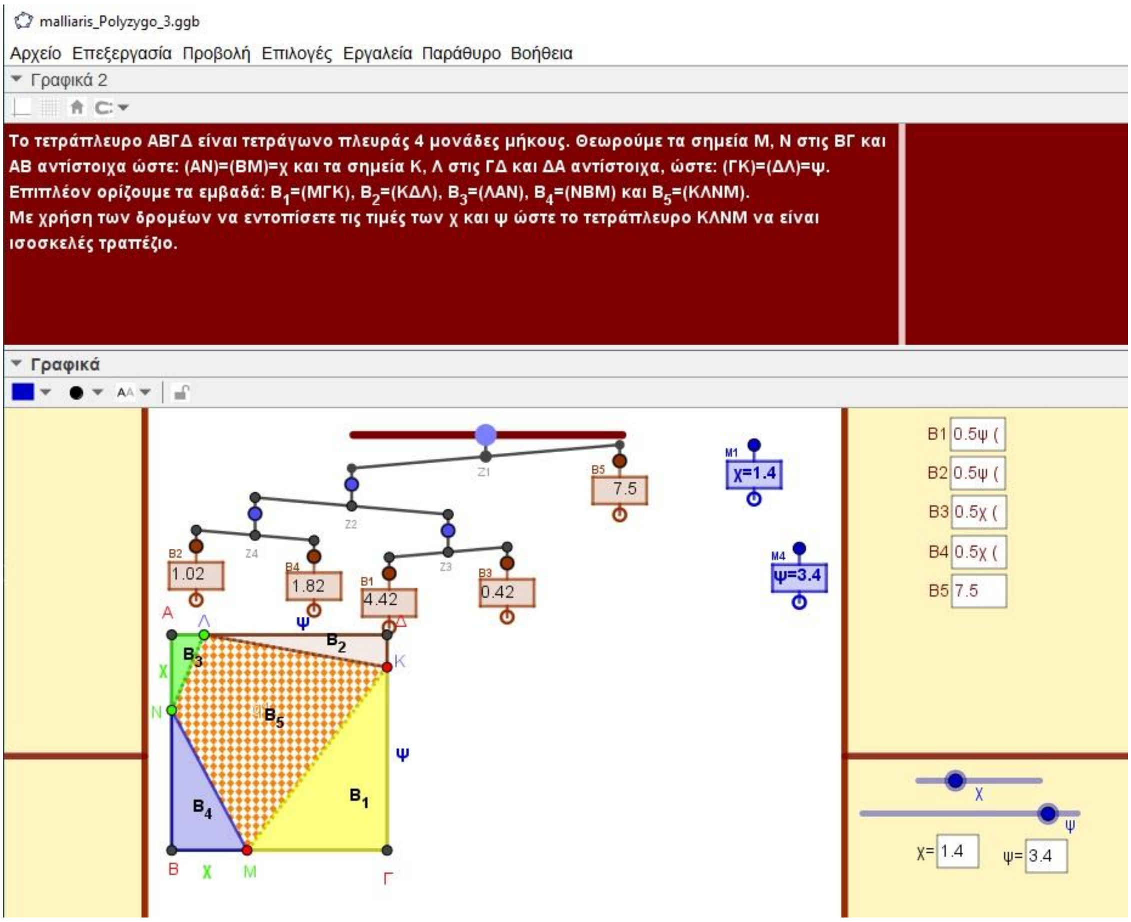


Εικόνα 37: 2η Δραστηριότητα – 3ο Μαθηματικό Έργο (μη αποδεκτή λύση)



Εικόνα 38: 2η Δραστηριότητα – 3ο Μαθηματικό Έργο (αποδεκτή λύση)

Αξίζει να αναφέρουμε εδώ και τη λύση που πρότεινε η ομάδα 3 που ήταν να προσθέτει κάθε φορά τις τιμές που εμφανίζονται στα βάρη Β1, Β2, Β3 και Β4 (δηλαδή να προσθέτει τα εμβαδά των τριγώνων ΛΓΜ, ΜΔΝ, ΝΑΚ και ΚΒΛ) και εφόσον το άθροισμα είναι μεγαλύτερο του 8 (που είναι το μισό του αρχικού εμβαδού) οι τιμές των μεταβλητών χ και ψ δεν θα ήταν αποδεκτές, δεν θα αποτελούν λύσεις του προβλήματος, ενώ όταν το άθροισμα των Β1, Β2, Β3 και Β4 γίνει μικρότερο ή ίσο του 8 τότε θα ήταν αποδεκτές οι τιμές των μεταβλητών χ και ψ.



Εικόνα 39: Αρχική μορφή 1ης Δραστηριότητας – 3ο Μαθηματικό Έργο

Ολοκληρώνοντας την περιγραφή της υλοποίησης των Μαθηματικών έργων χρειάζεται να αναφερθεί ότι τα παραπάνω είναι τα τελικά υλικά που προέκυψαν μετά την εφαρμογή στην πιλοτική ομάδα, εφαρμογή που είχε σαν στόχο να εντοπιστούν λάθη στο σχεδιασμό ή ασαφή σημεία στις δραστηριότητες που δυσκόλευαν τους μαθητές και τα οποία βελτιώνονταν και έπαιρναν την τελική τους μορφή που παρουσιάσαμε παραπάνω. Ενδεικτικό σημείο τροποποίησης του αρχικού σχεδιασμού μετά την πιλοτική εφαρμογή αποτελεί η 1η δραστηριότητα του 3ου Μαθηματικού Έργου (εικόνα 30) όπου η αρχική δραστηριότητα φαίνεται παραπάνω (εικόνα 39). Όταν υλοποιήθηκε η δραστηριότητα αυτή στην πιλοτική ομάδα παρατηρήθηκαν αρκετές δυσκολίες στο σύνολο των μαθητών, έτσι λοιπόν τροποποιήθηκε η δραστηριότητα όχι ως προς τα ζητούμενα που παρέμειναν τα ίδια αλλά προστέθηκαν κάποια ενδιάμεσα ερωτήματα ώστε να δοθεί η δυνατότητα στους μαθητές να ασχοληθούν αρχικά όλοι με το πρόβλημα, να απαντήσουν στα επιπλέον ερωτήματα που τέθηκαν και να δημιουργηθούν οι συνθήκες συζήτησης και διαλόγου στην ολομέλεια μεταξύ των ομάδων που οδήγησε στην εύρεση της λύσης από κάποιες τουλάχιστον ομάδες μαθητών.

4.4. Ανάλυση των Μαθηματικών Έργων

4.4.1. Εισαγωγή

Η ανάλυση των Μαθηματικών Έργων και συγκεκριμένα των δραστηριοτήτων που υλοποιήθηκαν σε αυτά θα γίνει υπό το πρίσμα των ερευνητικών μας ερωτημάτων, δηλαδή πως το περιβάλλον του «Πολύζυγου» δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να επινοήσουν και να εφαρμόσουν τεχνικές επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος και επίσης πως οι λειτουργικότητες που προσφέρει το ψηφιακό περιβάλλον του «Πολύζυγου» εννοούν την ανάπτυξη αυτών των τεχνικών – στρατηγικών, παράλληλα θα γίνει αναφορά σε κάποια χαρακτηριστικά κρίσιμα περιστατικά που ο ερευνητής έκρινε σκόπιμο παρουσιαστούν στην παρούσα εργασία.

4.4.2. 1ο Μαθηματικό Έργο

Στο 1ο μαθηματικό έργο μέσα από τις 2 δραστηριότητες οι μαθητές/τριες έρχονται σε επαφή με γεωμετρικές έννοιες όπως:

- ισότητα τριγώνων,
- εμβαδό τριγώνου,
- εμβαδό τετραγώνου

αλλά και αλγεβρικές έννοιες όπως:

- εξισώσεις
- εξισώσεις 2ου βαθμού
- παραμετρικές εξισώσεις

Στην 1η δραστηριότητα και συγκεκριμένα στο 1ο ερώτημα οι μαθητές εύκολα περιγράφουν την ισορροπία των ζυγών Ζ3 και Ζ4 μέσω της ισότητας των ορθογωνίων τριγώνων, ενδεικτικό είναι το παρακάτω απόσπασμα διαλόγων των μελών της ομάδας 3:

Απόσπασμα 1

M13: *στις θέσεις B1 και B2 είναι κρεμασμένα τα εμβαδά δύο «διπλανών» τριγώνων άρα…*

M33: *και τι σχέση έχει που είναι «διπλανά»;*

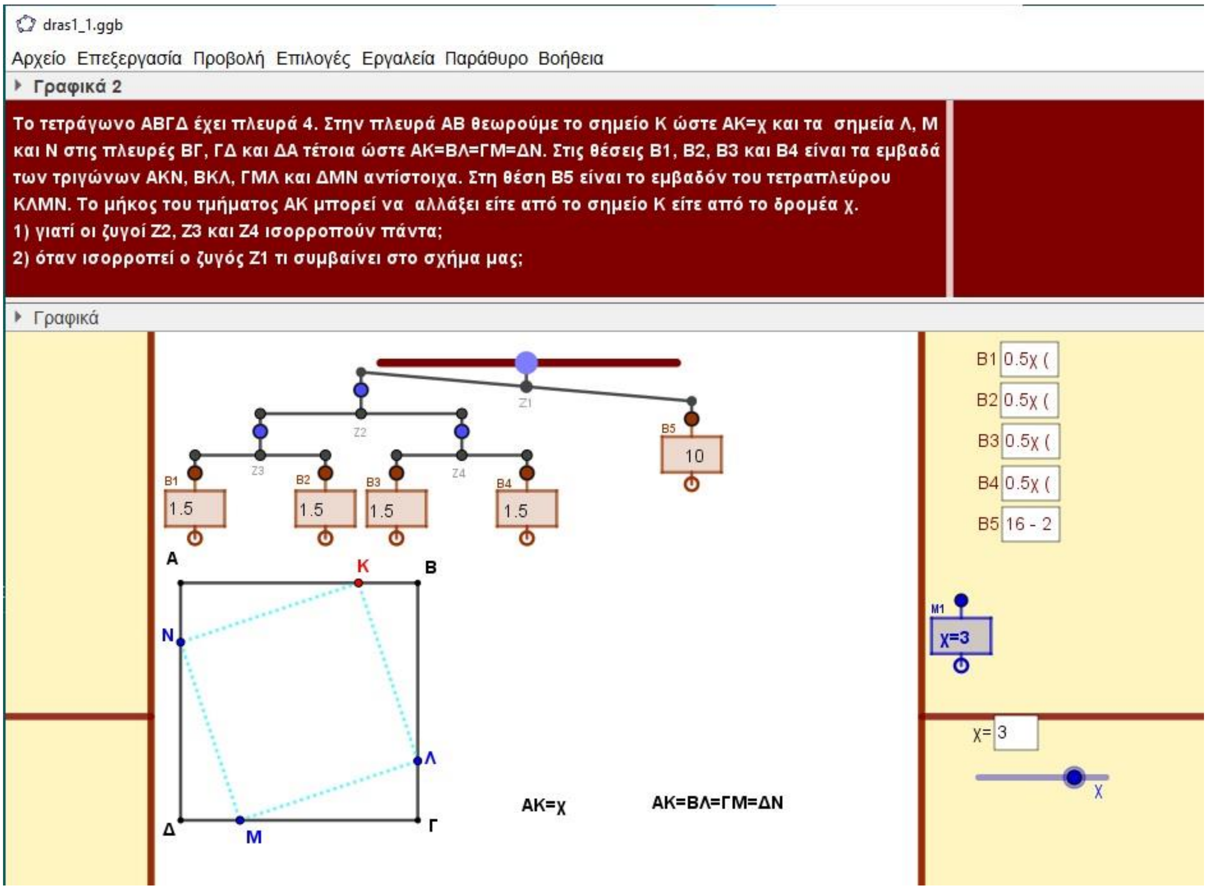
M13: *…..*

M23: *μήπως να πούμε ότι είναι κρεμασμένα εμβαδά ίσων τριγώνων, αφού τα τρίγωνα αυτά είναι πάντα ίσα μεταξύ τους;*

M13: *αυτό είναι καλύτερο και μάλιστα ισχύει και για τα τρίγωνα που είναι κρεμασμένα στις θέσεις B3 και B4. Οι ζυγοί Z3 και Z4 ισορροπούν αφού έχουν κρεμασμένα εμβαδά τριγώνων που είναι ίσα μεταξύ τους.*

M13: *(πειράζει τους δρομείς στο λογισμικό και παρατηρεί την συνεχή ισορροπία των ζυγών Z3 και Z4) ….παιδιά εδώ κάτι δεν πάει καλά όσο και να αλλάξω τα νούμερα δεν μπορώ να «χαλάσω» την ισορροπία*

M33: *λογικό ακούγεται αφού αυτά τα τρίγωνα είναι πάντα ίσα μεταξύ τους άρα έχουν ίσα εμβαδά γι' αυτό το σύστημα των ζυγών (Z3 και Z4) ισορροπεί.*



Εικόνα 40: 1ο Μαθηματικό Έργο (ισορροπία ζυγών Z2, Z3 και Z4)

Στο σημείο αυτό ο ερευνητής έχει αντιληφθεί ότι οι μαθητές της ομάδας 3 έχουν συνδέσει την ισορροπία του ζυγού με ισότητα σχημάτων και όχι με ισότητα εμβαδών, άλλωστε όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, στην περιγραφή της 1ης δραστηριότητας, δεν έχει γίνει καμία αναφορά από καμία ομάδα για ισοδύναμα σχήματα και για το λόγο αυτό ο ερευνητής παρακάμπτει το Φ.Ε και ζητάει από την ίδια ομάδα να δικαιολογήσει την ισορροπία του ζυγού Ζ2 ακολουθεί το απόσπασμα 2.

(Να αναφέρουμε εδώ ότι **Μ13**, **Μ23**, **Μ33** και **Μ43** χαρακτηρίζουμε τους 4 μαθητές της 3ης ομάδας και **Ε** είναι ο ερευνητής-εκπαιδευτικός)

<u>*Απόσπασμα 2*</u>

Ε: *τι έχετε να παρατηρήσετε για το ζυγό Ζ2;*

Μ23: *ισορροπεί πάντα*

Ε: *γιατί συμβαίνει αυτό;*

Μ23: *γιατί οι μετρήσεις στα Β1, Β2, Β3 και Β4 είναι ίσες μεταξύ τους*

Ε: *πολύ ωραία, το βλέπουμε μπορούμε να πούμε κάτι άλλο για να το δικαιολογήσουμε;*

Μ23: *δε μας φτάνει αυτό;*

Ε: *στο σχήμα τι συμβαίνει άραγε;*

Μ13: *τα τρίγωνα είναι ίσα*

Ε: *άρα μπορούμε να πούμε ίσα σχήματα άρα ισορροπεί ο ζυγός;*

Μ13, Μ23, Μ33, Μ43: *ναι, ναι μπορούμε να το πούμε*

Ε: *ωραία λοιπόν ας ανακοινώσει ομάδα 3 το συμπέρασμά της στην ολομέλεια σχετικά με το τι συμβαίνει όταν ισορροπεί ο ζυγός.*

Μ43: *όταν ισορροπεί ένας ζυγός, όπως ο Ζ3 ή ο Ζ4, στα άκρα του οποίου είναι κρεμασμένα βάρη που αντιστοιχούν στο εμβαδόν ενός σχήματος σημαίνει ότι τα σχήματα αυτά είναι ίσα, αν τώρα έχουμε έναν μεγαλύτερο ζυγό, τον Ζ2 στα άκρα του οποίου είναι κρεμασμένοι οι ζυγοί Ζ3 και Ζ4 που έχουν αυτό που περιγράψαμε πριν, τότε σημαίνει ότι τα σχήματα που είναι στο ένα μέρος του «μεγάλου» ζυγού είναι ίσα με τα σχήματα που είναι στο άλλο άκρο του «μεγάλου» ζυγού.*

Στο σημείο αυτό να πούμε ότι η περιγραφή του μαθητή **Μ43** δεν είναι ορθή, μάλιστα μέλη της ομάδας 5 ζήτησαν το λόγο να παρέμβουν αλλά εσκεμμένα δεν τους έδωσα το λόγο, ώστε να αναδειχθεί το λάθος της ομάδας 3 στην επόμενη ερώτηση της δραστηριότητας και το οποίο σκοπός μου είναι να το εντοπίσουν οι ίδιοι οι μαθητές μόνοι τους και αν κάτι τέτοιο δεν μπορέσει να συμβεί τότε θα δώσω το λόγο στην ομάδα 5 να διατυπώσει τις ενστάσεις σχετικά με αυτά που ειπώθηκαν νωρίτερα ώστε να διατυπωθεί ορθά η πρόταση που ισχύει.

Στο σημείο αυτό να πούμε ότι είναι φανερό ότι η ομάδα 3 παρατηρεί αρκετά το λογισμικό και τις μετρήσεις που αυτό προσφέρει και δεν προχωράει σε βάθος να ερμηνεύσει το τι συμβαίνει, είτε γιατί δεν έχει κατανοήσει καλά το σχήμα και το πώς είναι η κατασκευή, είτε γιατί δεν έχει εμπεδώσει τη γνώση των ισοδύναμων σχημάτων, κάτι το οποίο θα το διαπιστώσουμε στο επόμενο ερώτημα της δραστηριότητας.

Στο ερώτημα 2) της 1ης δραστηριότητας ζητάμε από τους μαθητές/τριες να εντοπίσουν αν ο ζυγός Ζ1 ισορροπεί και να περιγράψουν τι συμβαίνει στο σχήμα τότε. Ενδεικτικό είναι το απόσπασμα 3 που ακολουθεί:

(Να αναφέρουμε εδώ ότι **Μχ2**, **Μχ3**, **Μχ5** ο μαθητής χ της ομάδας 2, 3 και 5 αντίστοιχα, **Οχ** η χ ομάδα και **Ε** είναι ο ερευνητής-εκπαιδευτικός)

<u>*Απόσπασμα 3*</u>

Ε: *βρήκατε αν μπορεί να ισορροπεί ο ζυγός Ζ1;*

Μ22: *ναι γίνεται να ισορροπεί*

Ε: *για ποιες τιμές του χ συμβαίνει αυτό;*

Μ32: *για την τιμή χ=2*

Ε: *πολύ ωραία ας βάλουμε όλες οι ομάδες στη μεταβλητή χ την τιμή 2 και ας παρατηρήσουμε την ισορροπία του ζυγού Ζ1, παράλληλα ας προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τι ακριβώς συμβαίνει στην περίπτωση αυτή (εικόνα 41)*

Μ23: *οι 4 μετρήσεις στα αριστερά του Ζ1 είναι όλες μαζί ίσες με τη μέτρηση στα δεξιά του Ζ1*

Ε: *πολύ σωστά αλλά θα ήθελα μια ακόμη περιγραφή για το τι συμβαίνει στο σχήμα*

Μ33: *τα 4 ίσα (που το είπαμε στο προηγούμενο ερώτημα) τρίγωνα είναι ορθογώνια και ισοσκελή και οι ίσες (κάθετες) πλευρές τους έχουν μήκος 2*

Ε: *πολύ ωραία, θα μπορούσες κάποιος άλλος να περιγράψει κάτι ακόμα;*

(εδώ προσπαθούμε να βγει μέσα από το διάλογο ότι η ισορροπία του ζυγού δηλώνει ίσα εμβαδά άρα ισοδύναμα σχήματα και όχι κατ' ανάγκη ίσα σχήματα που ειπώθηκε στο απόσπασμα 2)

***Ε:** η ομάδα 3 μπορεί να μας ξαναπεί αυτό που μας είπε νωρίτερα για την ισορροπία του ζυγού Ζ2; Μ43 μπορείς να μας πεις;*

***Μ43:** ναι, τα σχήματα που είναι κρεμασμένα αριστερά του Ζ1 είναι ίσα με αυτό που είναι κρεμασμένο δεξιά του Ζ1*

***Ε:** συμφωνείτε όλοι με αυτό που είπε η ομάδα 3;*

(ο εκπαιδευτικός ρωτάει με τη σειρά τις ομάδες αφήνοντας τελευταία την 5η ομάδα που νωρίτερα είχε φανεί ότι έχει αντιληφθεί τη λάθος διατύπωση)

***Ο1:** ναι*

***Ο2:** ναι*

***Ο3:** ναι*

***Ο4:** ναι*

***Ο6:** …*

***Ο5:** όχι*

(η 5η ομάδα σχεδιάζει κάτι στο χαρτί της (εικόνα 42) το οποίο ο εκπαιδευτικός το ζωγραφίζει στον πίνακα)

***Μ15:** εμείς λέμε ότι η ισορροπία του ζυγού Ζ1 δε σημαίνει ισότητα σχημάτων*

***Ε:** γιατί το λέτε αυτό;*

***Μ15:** αριστερά υπάρχουν 4 σχήματα και δεξιά 1*

***Μ33:** ναι αλλά αν ενώσουμε τα 4 σχήματα που βρίσκονται αριστερά θα πάρουμε ένα μεγαλύτερο σχήμα που θα είναι ίσο με το σχήμα που βρίσκεται δεξιά, αυτό λέμε τόση ώρα!!!*

***Μ25:** για δείτε λίγο το σχήμα που έφτιαξε ο κύριος στον πίνακα (εικόνα 42). Είναι ίσα τα σχήματα;*

***Μ33:** ….*

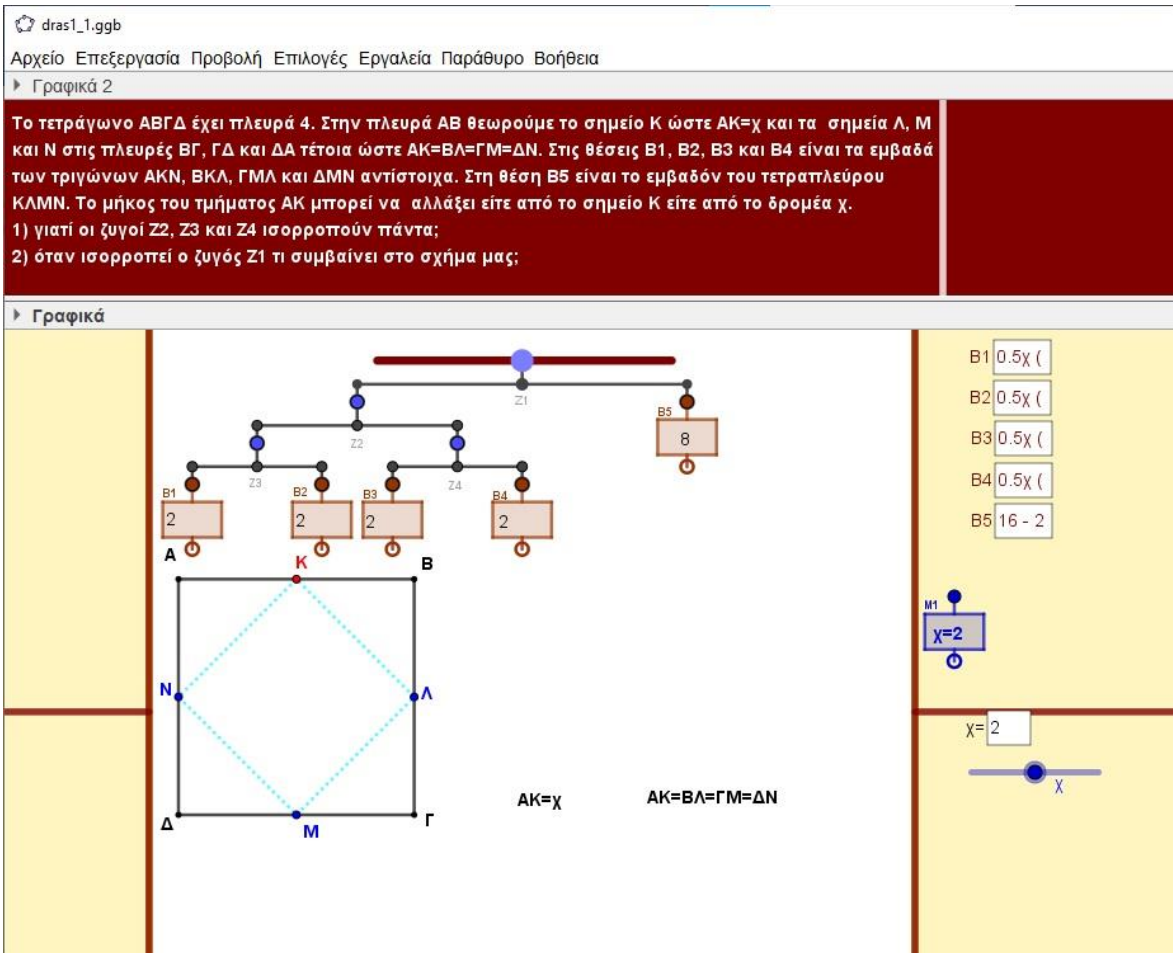
***Ε:** ωραία για να δούμε τι θα μπορούσαμε να πούμε ότι συμβαίνει, Μ25 για πες μας*

M25: *εμείς λέμε ότι όταν ισορροπεί ο ζυγός τα εμβαδά των σχημάτων που βρίσκονται αριστερά του ζυγού με τα εμβαδά των σχημάτων που βρίσκονται δεξιά του ζυγού είναι ίσα, έχουν ίδιο άθροισμα*

M23: *οι μετρήσεις δηλώνουν την ισορροπία*

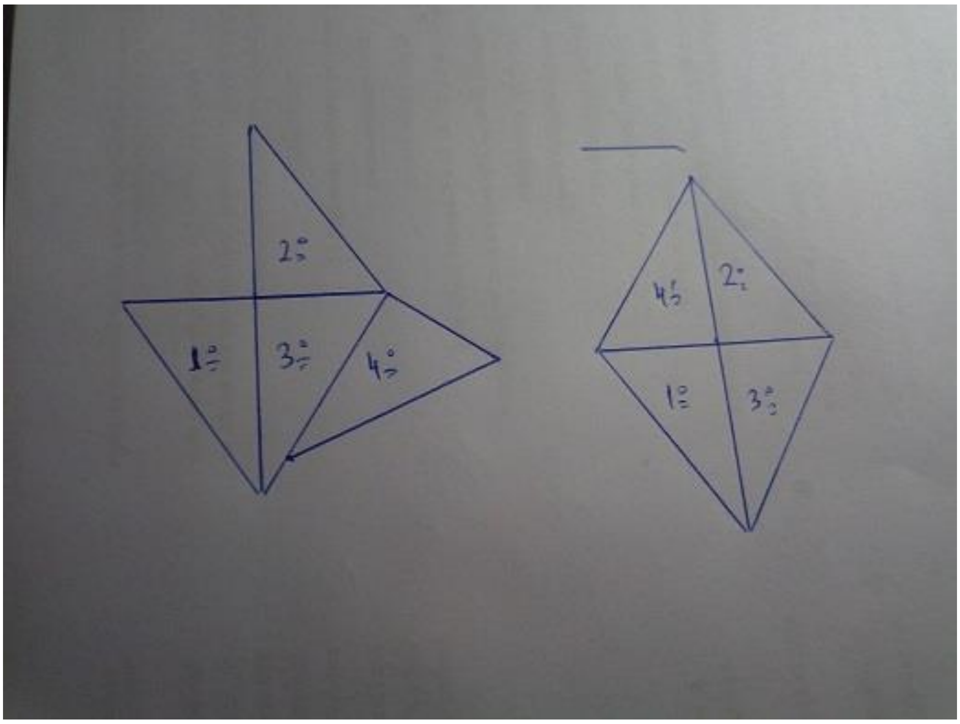
E: *ωραία λοιπόν, ας διορθώσουμε την έκφραση που ειπώθηκε για την ισορροπία του ζυγού Z2*

M25: *τα σχήματα που είναι κρεμασμένα στα άκρα του ζυγού (αριστερά και δεξιά) έχουν ίσα αθροίσματα εμβαδών (μπορεί να είναι και ίσα αλλά δεν είναι απαραίτητο)*



Εικόνα 41: 1ο Μαθηματικό Έργο (ισορροπία ζυγού Z1)

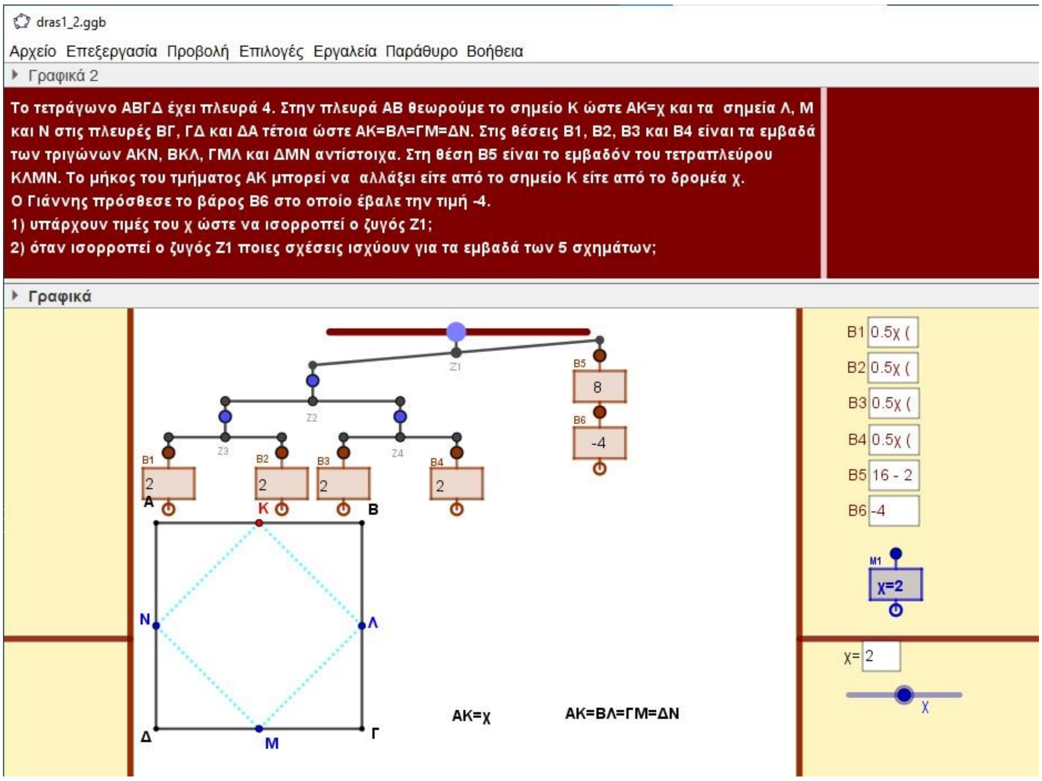
Είναι φανερό ότι οι μαθητές/τριες της ομάδας 3 κατάλαβαν το λάθος τους όπου ερμήνευαν την ισορροπία του ζυγού ως ισότητα σχημάτων (αυτό είναι ορθό στις ισορροπίες των Z3 και Z4 αλλά όχι στην ισορροπία των Z2 και Z1) και όχι ως ισότητα εμβαδών των αντίστοιχων σχημάτων. Το λάθος του αναδείχθηκε από το ερώτημα 2) που είχε σχεδιαστεί με αυτό το γνωστικό στόχο



Εικόνα 42: Ισότητα εμβαδών αλλά όχι ισότητα σχημάτων (ομάδα 5)

Μετά την προσεκτική μελέτη των παραπάνω αποσπασμάτων διαπιστώνουμε ότι έχει μεγάλη σημασία κατά το σχεδιασμό του υλικού που θα δοθεί τους μαθητές/τριες να έχει ο εκπαιδευτικός - σχεδιαστής συγκεκριμένους διδακτικούς αλλά και γνωστικούς στόχους οι οποίοι να γίνεται προσπάθεια να επιτευχθούν μέσα από τις ερωτήσεις που υπάρχουν στο Φ.Ε. επίσης είναι φανερό ότι ο εκπαιδευτικός διαχειρίστηκε ορθά και προς όφελος της εκπαιδευτικής διαδικασίας την ικανότητα της 5ης ομάδας να εντοπίσει το λάθος της 3ης ομάδας και αυτό να βγει μέσα από το διάλογο που πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια της υλοποίησης και όχι από δική του άμεση παρέμβαση.

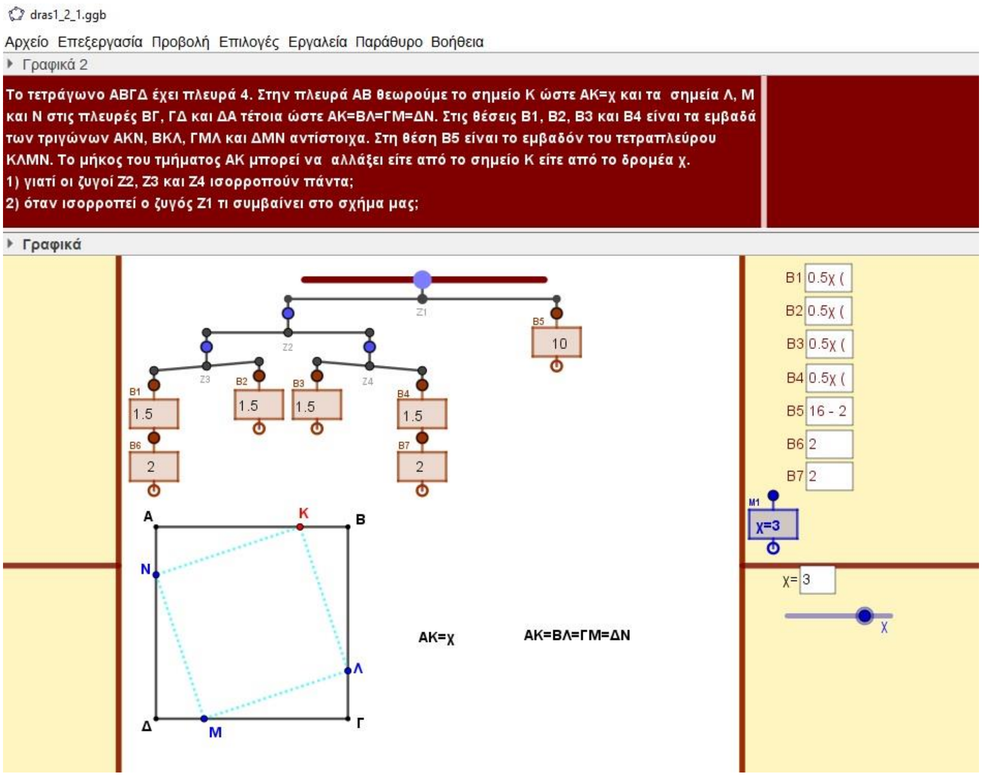
Στη 2η δραστηριότητα (εικόνα 43) έρχεται να αλλάξει το καθιερωμένο πλαίσιο που έχουν συνηθίσει οι μαθητές, αφού εισάγουμε στα δεδομένα του προβλήματος ένα «αρνητικό» βάρος που θα πρέπει η μαθητές/τριες να το νοηματοδοτήσουν κατάλληλα ώστε να το συνδέσουν με τις έννοιες που διαπραγματεύθηκαν στην 1η δραστηριότητα. Ενώ εύκολα όλες οι ομάδες με χρήση του λογισμικού εντόπισαν τις τιμές εκείνες που αποτελούν λύση του προβλήματος (χ=1 και χ=3, εικόνες 44, 45) όταν κλήθηκαν να περιγράψουν την κατάσταση που συμβαίνει στο σχήμα κατά την ισορροπία του ζυγού Ζ1 αναδείχθηκε η δυσκολία που δημιουργεί η ύπαρξη του αρνητικού αριθμού κι εδώ αρχίζει να ξεδιπλώνεται η δημιουργικότητα των μαθητών, μια δημιουργικότητα που την «πολλαπλασιάζει» το ψηφιακό μέσο αφού επιτρέπει να κάνουν πολλές και γρήγορες τροποποιήσεις και να βάζουν σε χρήση τις ιδέες τους. Είδαμε λοιπόν την προσπάθεια των ομάδων 3 και 5 που έκαναν για



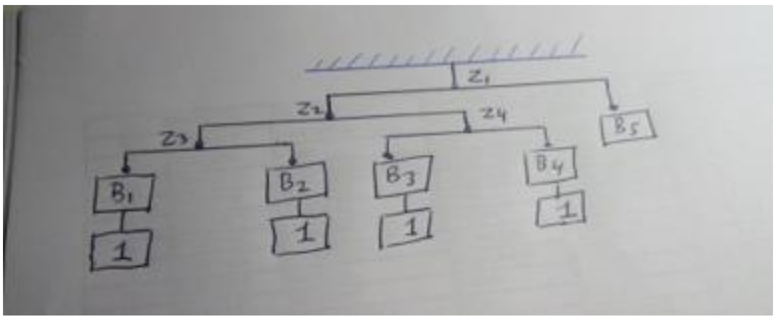
Εικόνα 43: Αρνητικό βάρος σε ζυγό. 2η δραστηριότητα 2ο Μαθηματικό Έργο

να ξεπεράσουν το εμπόδιο του αρνητικού αριθμού όπου δυσκολευόντουσαν το τον συνδέσουν με την έννοια του εμβαδού, έτσι λοιπόν έκαναν τις δικές τους διασκευές της αρχικής δικής μας κατασκευής (εικόνες 15 και 16 αντίστοιχα). Ο αρχικός στόχος της 2ης δραστηριότητας ήταν οι μαθητές στην προσπάθεια τους να συνδέσουν την πρότερη γνώση (που είχαν κατακτήσει στην 1η δραστηριότητα) με τη νέα πρόκληση να βρεθούν μπροστά σε ένα αδιέξοδο όπου θα έπρεπε να ανακαλύψουν οι ίδιοι τρόπο να το ξεπεράσουν. Έτσι λοιπόν εξίσου ενδιαφέρουσες είναι και οι τρεις προτάσεις (εικόνες 44, 45, 46) που σχεδιάστηκαν από τις ομάδες 2, 3 κι 5, αυτή όμως που αξίζει ιδιαίτερο σχολιασμό είναι η «βελτιωμένη» δημιουργία της ομάδας 6 (εικόνα 47) η οποία σταδιακά και όσο εξελισσόταν το Μαθηματικό Έργο άλλαζε προς το καλύτερο, την συμμετοχή της στις εργασίες της ολομέλειας. Παρατηρούμε λοιπόν ότι τα μέλη της ομάδας 6 να αποτελεί πρόκληση να καταφέρουν να περάσουν στο περιβάλλον του «Πολύζυγου» τις ιδέες τους με στόχο να ξεπεραστεί το γνωστικό εμπόδιο του αρνητικού βάρους, έτσι καταφέρνουν να αξιοποιήσουν τις δυνατότητες του λογισμικού ώστε να αποτυπώσουν σε αυτό τις ιδέες τους και ταυτόχρονα να τις παρουσιάσουν στα μέλη των άλλων ομάδων.

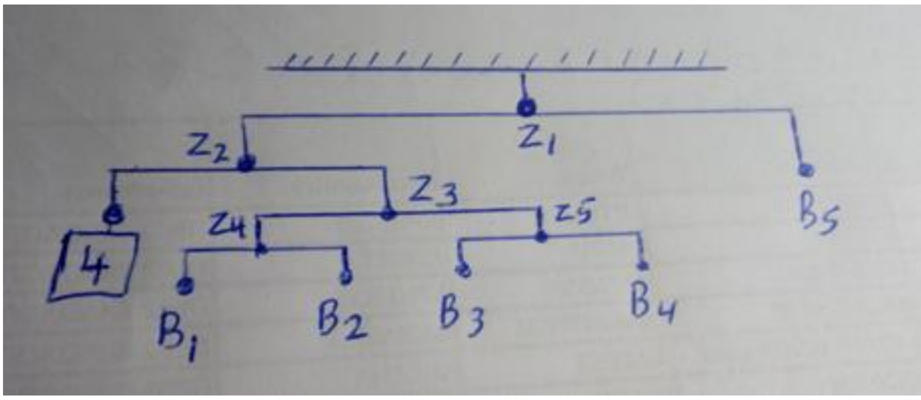
Βλέπουμε λοιπόν, σε σχέση με τα ερευνητικά μας ερωτήματα, οι μαθητές/τριες να αξιοποιούν προς τη σωστή κατεύθυνση τις δυνατότητες που τους προσφέρει το ψηφιακό περιβάλλον του «Πολύζυγου» ώστε να βρίσκουν λύσεις σε δυσκολίες που συναντούν, δυσκολίες που εσκεμμένα ο εκπαιδευτικός έχει σχεδιάσει στις δραστηριότητες, ώστε να «αναγκάσει» τους μαθητές/τριες να ανακαλύψουν δικές τους πρωτότυπες αλλά και απρόσμενες, για τον εκπαιδευτικό, λύσεις. Μελετώντας με μεγαλύτερη προσοχή τα αποσπάσματα θα δούμε ότι εμφανίζονται και οι 5 διαστάσεις του μοντέλου TRUmath, αφού μέσα από το Μαθηματικό Έργο που μόλις αναλύσαμε οι μαθητές/τριες έχουν πρόσβαση σε «πλουσιότερα» μαθηματικά, δημιουργούνται ευκαιρίες για παραγωγή νοημάτων από τους ίδιους, ενεργοποιούνται στο σύνολό τους κατά την υλοποίηση των Μαθηματικών Έργων, δημιουργούν τις δικές τους προτάσεις «πατώντας» σε ιδέες συμμαθητών τους ή ακόμα και διασκευάζοντας τις δικές μας ιδέες και τέλος δείχνουν σε κάθε ευκαιρία το βαθμό κατανόησης των μαθηματικών εννοιών που διαπραγματευόμαστε μέσω των δραστηριοτήτων.



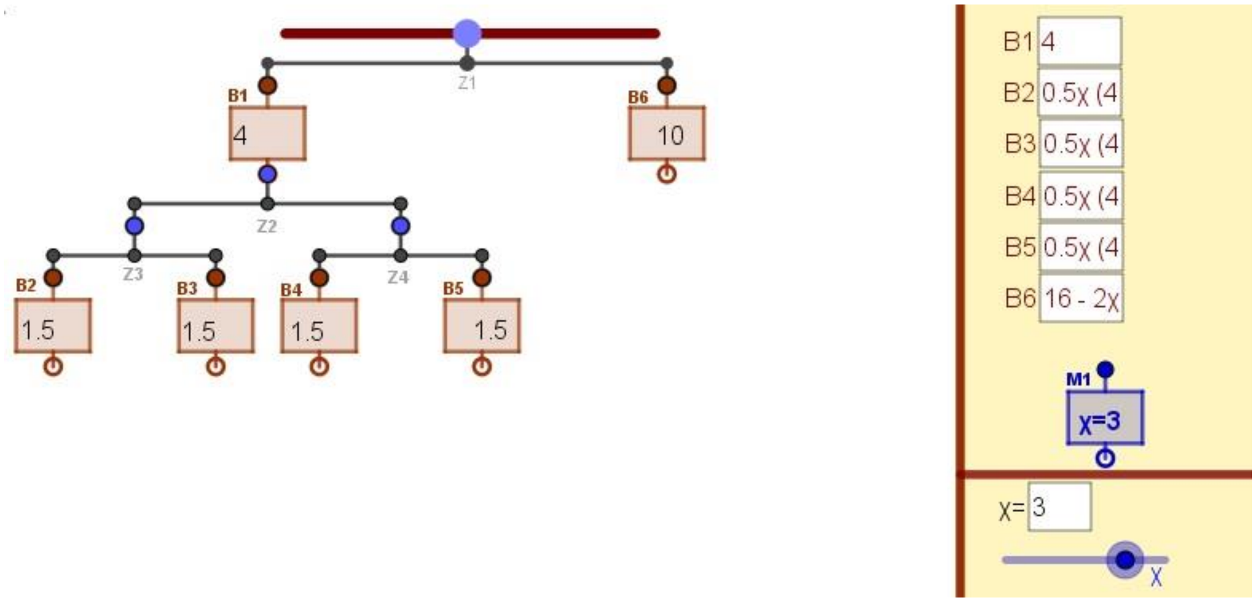
Εικόνα 44: διασκευή ομάδας 2



Εικόνα 45: διασκευή ομάδας 3



Εικόνα 46: διασκευή ομάδας 5



Εικόνα 47: διασκευή ομάδας 6

4.4.3. 2ο Μαθηματικό Έργο

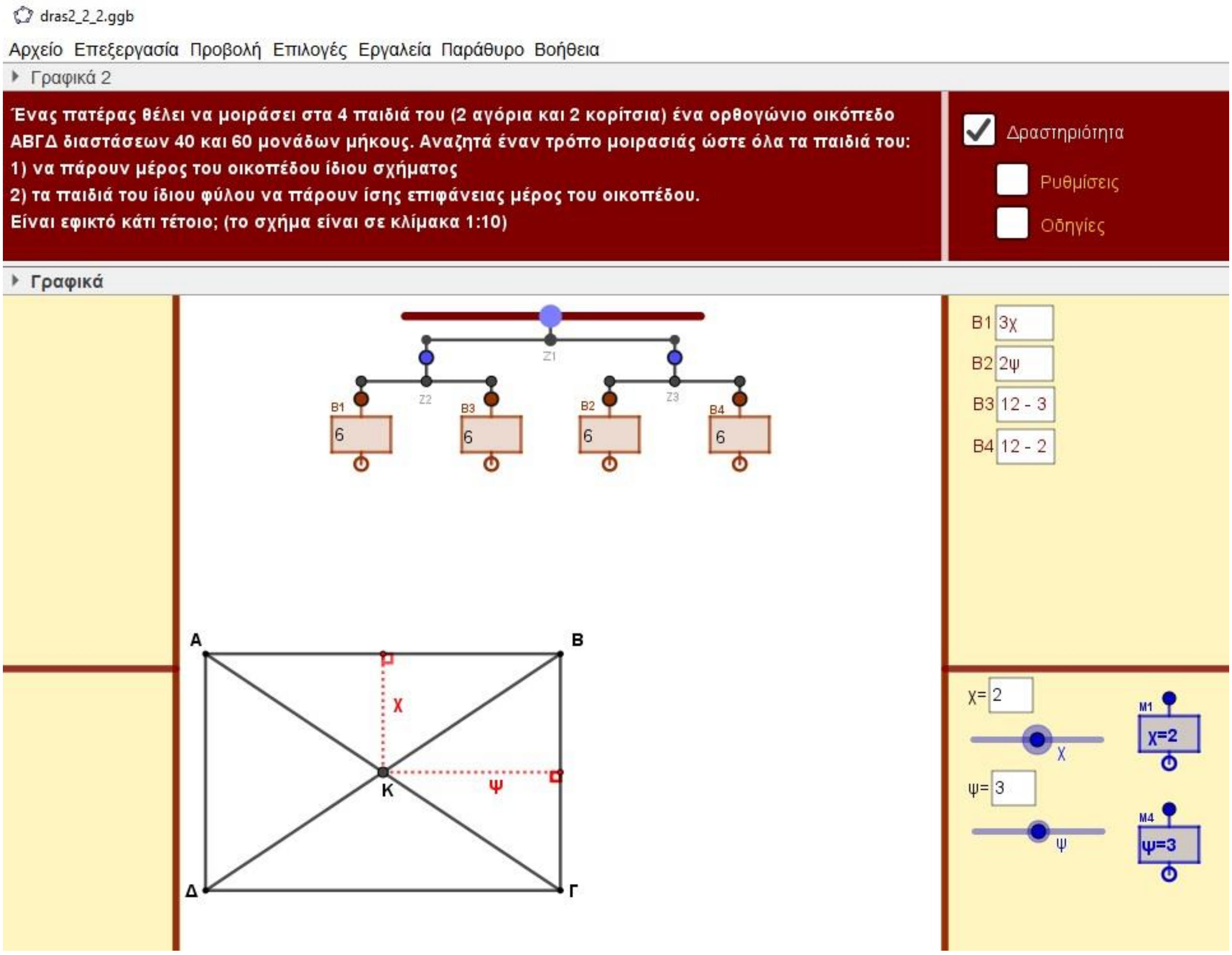
Στο 2ο μαθηματικό έργο μέσα από τις 2 δραστηριότητες οι μαθητές/τριες έρχονται σε επαφή με γεωμετρικές έννοιες όπως:

- Εμβαδόν τριγώνου,
- Εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου
- Ισότητα εμβαδόν

αλλά και αλγεβρικές έννοιες όπως:

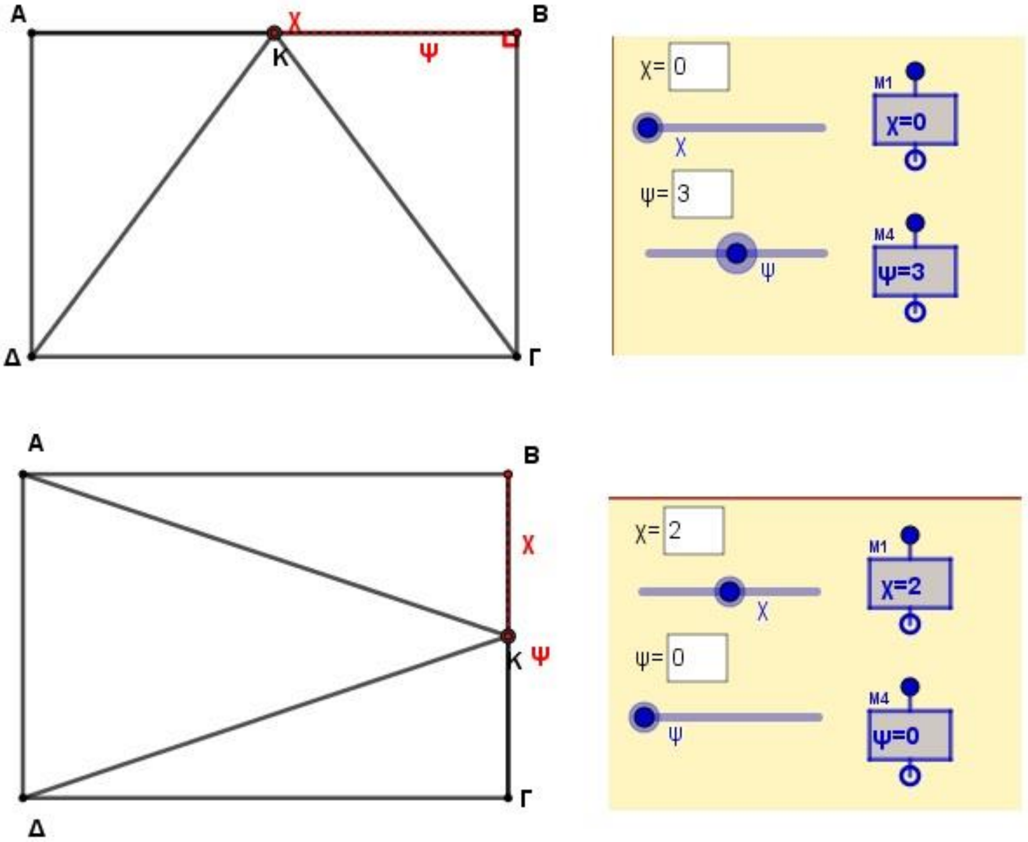
- Επίλυση συστήματος εξισώσεων

Πλέον έχουν εξοικειωθεί με το λογισμικό και φτιάχνουν οι ίδιοι το ψηφιακό υλικό στο οποίο θα πειραματιστούν και θα δουλέψουν, έτσι νιώθουν οι ίδιοι οι μαθητές/τριες δημιουργοί ψηφιακού υλικού και ο ρόλος τους δεν είναι παθητικός αλλά δημιουργικός και δυναμικός.

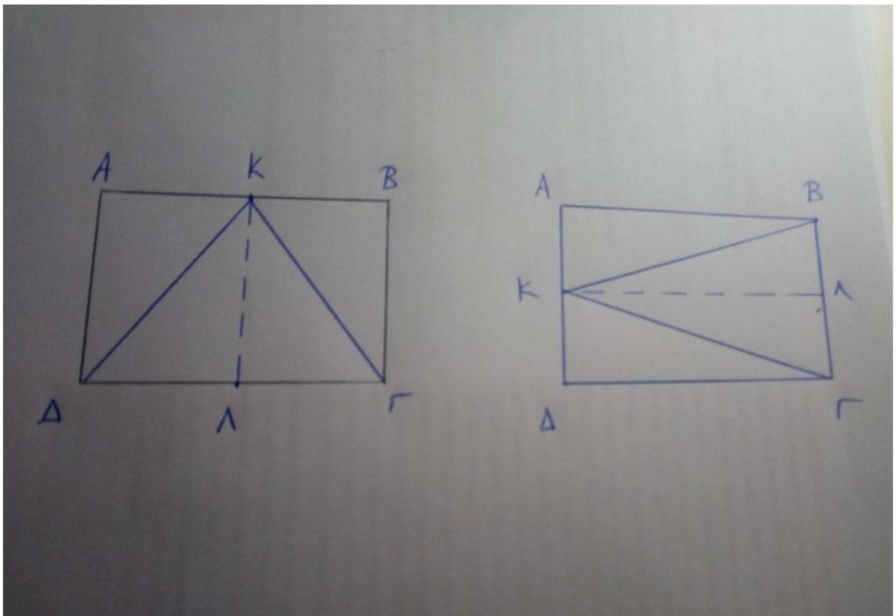


Εικόνα 48: αρχική μορφή 1ης δραστηριότητας 2ου Μαθηματικού Έργου

Ο αρχικός σχεδιασμός μας σε αυτή τη δραστηριότητα αποδείχθηκε να έχει αδυναμίες και συγκεκριμένα κατά την πιλοτική εφαρμογή δόθηκε η δραστηριότητα στην αρχική της μορφή (εικόνα 48), το πρώτο εμπόδιο που συναντήσαμε ήταν η τοποθέτηση του σημείου Κ από κάποιες ομάδες στην περίμετρο του ορθογωνίου (εικόνα 49) κάτι το οποίο δεν το είχαμε προβλέψει ούτε στο σχεδιασμό μας (λογισμικό) ούτε στην εκφώνηση της δραστηριότητας με αποτέλεσμα να μην σχηματίζονται 4 σχήματα άρα να μην μπορούμε να συνεχίσουμε την υλοποίηση της δραστηριότητας, αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να υπάρχει επανασχεδιασμός τόσο του ψηφιακού υλικού (οι τιμές των μεταβλητών χ και ψ περιορίστηκαν και δεν μπορούσαν να πάρουν την τιμή 0, συνεπώς το σημείο Κ θα βρισκόταν συνεχώς «μέσα» στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ) όσο και την διατύπωσης του προβλήματος όπου στην τελική, βελτιωμένη εκδοχή το σημείο Κ βρίσκεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου. Επίσης όπως αναφέρθηκε στην περιγραφή της συγκεκριμένης δραστηριότητας σε προηγούμενη παράγραφο, προτάθηκε από τους μαθητές και η λύση των 4 ορθογωνίων (εικόνα 50) όπου και αυτή την περίπτωση δεν την είχαμε προβλέψει να αποτυπώνεται στο λογισμικό αλλά οι μαθητές/τριες την σκέφτηκαν και την σχεδίασαν στα τετράδιά τους.



Εικόνα 49: αρχική μορφή $1^{ης}$ δραστηριότητας $2^{ου}$ Μαθηματικού Έργου



Εικόνα 50: αρχική μορφή $1^{ης}$ δραστηριότητας $2^{ου}$ Μαθηματικού Έργου

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο αναστοχασμός που προέκυψε από την πιλοτική εφαρμογή ανέδειξε τις αστοχίες του σχεδιαστή και έδωσε την ευκαιρία για επανασχεδιασμό και σαφήνεια στα ζητούμενα των δραστηριοτήτων. Να συμπληρώσουμε σε αυτό το Μαθηματικό Έργο την πρόταση των μαθητών να αναζητήσουμε τη θέση του σημείου Κ ώστε τα 4 σχήματα που προκύπτουν (που χωρίζεται το αρχικό ορθογώνιο) να έχουν ίσα εμβαδά αλλά ταυτόχρονα να έχουν την μικρότερη περίμετρο (!!!) αθροιστικά.

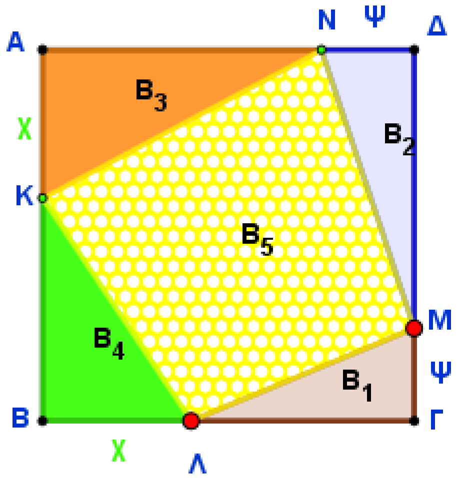
Στο 2ο ερώτημα της 1ης δραστηριότητας καταλήξαμε μετά από διερεύνηση ότι για να τηρηθεί η επιθυμία του πατέρα, ώστε παιδιά του ίδιου φύλου να πάρουν επιφάνεια ίσου εμβαδού θα πρέπει να διαλέξουν διαδοχικά κομμάτια του αρχικού οικοπέδου, είναι ένα εύρημα που οφείλεται αποκλειστικά στις δυνατότητες που προσφέρει το «Πολύζυγο» και μέσω της χρήσης του μας αποκάλυψε αυτή την ιδιότητα.

4.4.4. 3ο Μαθηματικό Έργο

Το ενδιαφέρον σημείο σε αυτό το Μαθηματικό Έργο έχει να κάνει με την 1η δραστηριότητα που μας ανέδειξε (δεύτερη φορά) τη χρησιμότητα αλλά και τη σημαντικότητα που έχει ο σχεδιασμός και η συνεχής ανατροφοδότηση που προκύπτει μέσα από την εφαρμογή.

Αρχικά, όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, είχε σχεδιαστεί η εξής δραστηριότητα:

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 4. Θεωρούμε τα σημεία Κ , Λ στις ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα ώστε: (ΑΚ)=(ΒΛ)=χ και τα σημεία Μ, Ν στις ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα ώστε: (ΓΜ)=(ΔΝ)=ψ. Επιπλέον ορίζουμε τα εμβαδά: Β1=(ΛΓΜ), Β2=(ΜΔΝ), Β3=(ΝΑΚ), Β4=(ΒΛΚ) και Β5=(ΚΛΜΝ). Με χρήση των δρομέων να εντοπίσετε τις τιμές των χ και ψ ώστε το τετράπλευρο ΚΛΜΝ να είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Όταν προσπαθήσαμε να υλοποιήσουμε τη συγκεκριμένη δραστηριότητα παρατηρήθηκε αδυναμία του συνόλου τον μαθητών να ενεργοποιηθούν και να αρχίσουν να ασχολούνται με το πρόβλημα, έτσι λοιπόν αναγκαστήκαμε να τροποποιήσουμε τη δραστηριότητα, χωρίς όμως να αλλάξουν τα δεδομένα, έπρεπε να σκεφτούμε κάτι πιο «ελκυστικό» για τους μαθητές ώστε να καταφέρουμε να τους ενεργοποιήσουμε, για το λόγο αυτό άλλαξε η δραστηριότητα και προέκυψε η «επίσημη» εκδοχή της που ήταν η εξής:

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 4 μονάδες μήκους. Θεωρούμε τα σημεία Κ, Λ στις ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα ώστε: (ΑΚ)=(ΒΛ)=χ και τα σημεία Μ, Ν στις ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα, ώστε: (ΓΜ)=(ΔΝ)=ψ.

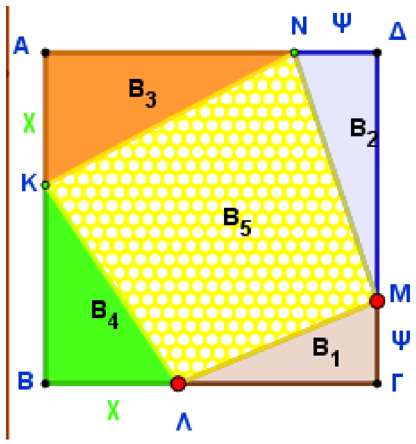
Επιπλέον ορίζουμε τα εμβαδά: Β1=(ΜΓΛ), Β2=(ΜΔΝ), Β3=(ΚΑΝ), Β4=(ΚΒΛ) και Β5=(ΚΛΝΜ).

α) Να γράψετε στις θέσεις των Β1, Β2, Β3 και Β4 τα εμβαδά των αντίστοιχων τριγώνων.

β) Με χρήση των δρομέων να εντοπίσετε (αν υπάρχουν) τις τιμές των χ και ψ ώστε να ισορροπούν οι

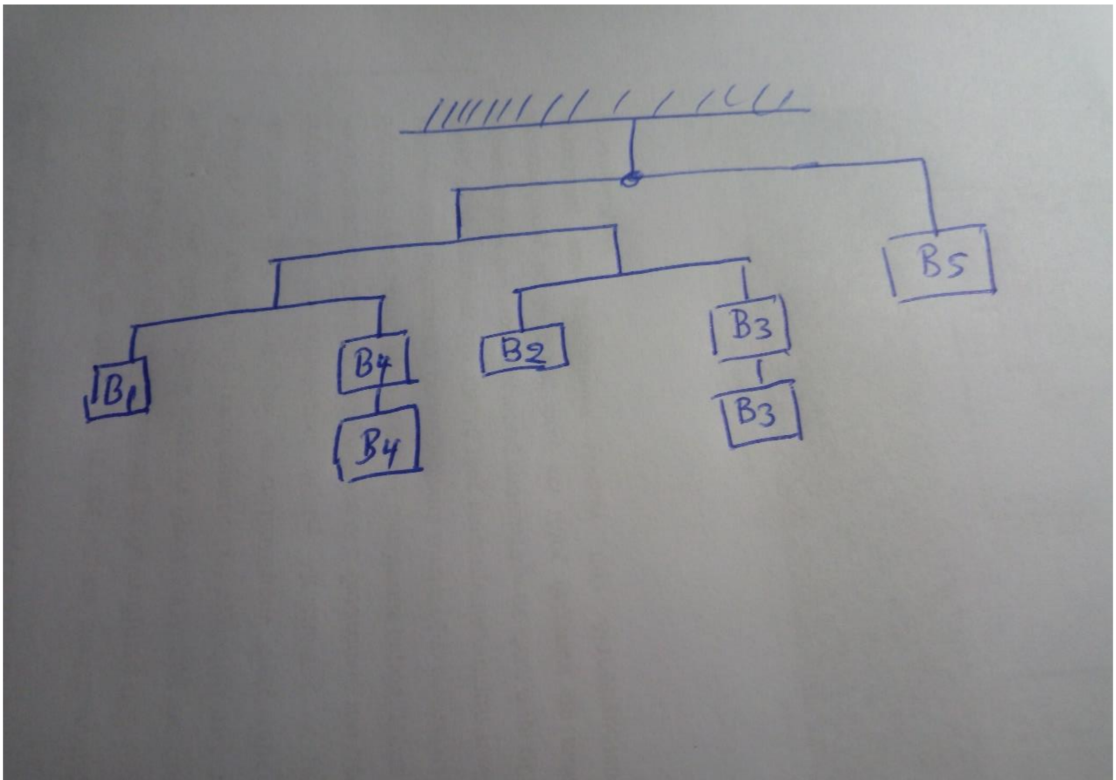
ζυγοί Ζ2, Ζ3 και Ζ4. Περιγράψτε γεωμετρικά την ισορροπία του κάθε ζυγού.

γ) Για ποιες τιμές των χ και ψ ο ζυγός Ζ1 ισορροπεί; Περιγράψτε γεωμετρικά την περίπτωση αυτή.



Όπως παρατηρούμε έχουμε βάλει κάποια «σκαλοπατάκια» ώστε οι μαθητές/τριες να μπορούν να φτάσουν πιο εύκολα στον τελικό τους στόχο, ο οποίος παραμένει ακριβώς ο ίδιος με πριν αλλά τώρα μπορούν όλοι οι μαθητές/τριες να ασχοληθούν με τα αρχικά ερωτήματα και όσο προχωράει η δραστηριότητα τόσο αυξάνεται ο βαθμός δυσκολίας, με αυτόν τον τρόπο δημιουργήσαμε με μικρές αλλαγές προκλήσεις για τους μαθητές ώστε να «αναγκαστούν» να δουλέψουν πάνω στην δραστηριότητα και να ενεργοποιηθούν σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερο βαθμό.

Υπήρξαν βέβαια και επιπλέον δυσκολίες που οφείλονταν στους «περιορισμούς» που μας έθετε το ψηφιακό περιβάλλον. Συγκεκριμένα στη 2^{η} δραστηριότητα οι σχέσεις Β1=2Β4 και Β2=2Β3 δεν μπορούσαν να αποτυπωθούν εύκολα στο λογισμικό, οι μαθητές/τριες πρότειναν να «κρεμάσουμε» δύο ίδια βάρη Β4 και Β3 στο ίδιο μέρος του κάθε ζυγού και στο άλλο μέρος να «κρεμάσουμε» αντίστοιχα τα Β1 και Β2 αντίστοιχα (εικόνα 51), κάτι το οποίο δεν ήταν εύκολο να αποτυπωθεί στο λογισμικό λόγω των περιορισμών που μας θέτει (περιορισμένος αριθμός βαρών και ζυγών). Στην ίδια δραστηριότητα όμως, είδαμε πως το 2^{ο} ερώτημα που αφορούσε το εμβαδόν του «κομματιού» Β5 και τον περιορισμό να είναι επιφάνειας τουλάχιστον μισής της αρχικής αποτέλεσε πρόκληση για τους μαθητές και τους ενεργοποίησε στην προσπάθεια περιγραφής και αποτύπωσης στο λογισμικό αυτής της συνθήκης αλλά και αναζήτησης λύσης. Συνεπώς ο σχεδιασμός του εκπαιδευτικού έχει καθοριστικό ρόλο στην επιτυχία μιας παρέμβασης αλλά και οι δυνατότητες του ψηφιακού εργαλείου που κάθε φορά βάζουμε σε χρήση θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη γιατί πολλές φορές θα προκύπτουν περιορισμοί από το ψηφιακό περιβάλλον.



Εικόνα 51: Πρόταση τροποποίησης

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1. Εισαγωγή

Η ένταξη των Τεχνολογιών Πληροφορίας και Επικονωνίας (ΤΠΕ) στη μαθηματική εκπαίδευση στοχεύει στην αλλαγή των ρόλων τόσο των μαθητών όσο και των εκπαιδευτικών στη σχολική τάξη, όπου χρησιμοποιούνται εργαλεία λογισμικού σχεδιασμένα να υποστηρίζουν διασύνδεση μεταξύ μαθηματικών περιοχών κατακερματισμένων στο ωρολόγιο πρόγραμμα. Με τα εργαλεία αυτά οι μαθητές αποκτούν εμπειρίες εμπλοκής με τη λογικο-μαθηματική σκέψη και που χωρίς αυτά θα ήταν αδύνατο να έχουν. Οι τρόποι αξιοποίησης των ψηφιακών εργαλείων στη σχολική τάξη των μαθηματικών, έχει αποτελέσει κεντρικό σημείο αιχμής στο πλαίσιο του ευρύτερου προβληματισμού που αφορά την ένταξη της ψηφιακής τεχνολογίας στο σχολείο (Hoyles, 2001, Goldenberg, 1999). Ιδιαίτερα η φύση και τα χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων στις οποίες θα κληθούν να εμπλακούν μαθητές και εκπαιδευτικοί συνεισφέρουν στον πλουραλισμό που πλαισιώνει τους αντικειμενικούς στόχους και σκοπούς.

Ο σχεδιασμός ψηφιακών μαθησιακών αντικειμένων αποτελεί μια συνεχή πρόκληση του τομέα της εκπαιδευτικής τεχνολογίας. Η κατασκευή, το «μαστόρεμα», η τροποποίηση / διασκευή και ο διαμοιρασμός ψηφιακών δομημάτων προσδίδουν στη μάθηση των σχετικών εννοιών προσωπικό νόημα, μέσω της έκφρασης, για τους μαθητές.

5.2. Τελικά Συμπεράσματα

Η δυνατότητα χρήσης και αξιοποίησης από τους μαθητές της ψηφιακών πόρων που σχεδιάσαμε στη σειρά των δραστηριοτήτων που παρουσιάστηκαν στο 4ο κεφάλαιο δε σημαίνει ότι από μόνο του αποτελεί το «διαβατήριο» για μια επιτυχημένη διδασκαλία. Η ψηφιακή τεχνολογία έχει εισβάλει στη σχολική τάξη αλλά θα πρέπει κάθε φορά ο εκπαιδευτικός να την αξιοποιεί προς όφελος των μαθητών του και για να γίνει κάτι τέτοιο χρειάζεται προσεκτικός σχεδιασμός δραστηριοτήτων με μετρήσιμους στόχους ώστε μετά την ολοκλήρωση κάθε παρέμβασης να γίνεται, εύκολα, αποτίμηση αυτής τόσο σε επίπεδο επίτευξης γνωστικών στόχων όσο και σε τεχνολογικούς και κοινωνικούς στόχους και αν εντοπιστούν παραλείψεις ή σημεία που δυσκόλεψαν τους μαθητές ή ακόμα και στόχοι οι οποίοι δεν επιτεύχθηκαν, θα πρέπει να γίνεται επανασχεδιασμός των δραστηριοτήτων. Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων πέρα από την σαφήνεια των στόχων θα πρέπει να έχει και στοιχεία ενεργοποίησης των μαθητών, στοιχεία πρόκλησης του ενδιαφέροντος τους ακόμα και στοιχεία διαφοροποίησης γιατί ο στόχος μας είναι να ενεργοποιηθεί το σύνολο των μαθητών. Οι μαθητές αποκτούν κίνητρο και προσπαθούν να βρουν τη σωστή απάντηση, βλέπουμε μαθητές οι οποίοι έχουν ψηφιακές δεξιότητες (εικόνες 42, 45, 46, 50 και 51) να σχεδιάζουν τις ιδέες τους χωρίς να γνωρίζουν σε βάθος τις μαθηματικές έννοιες που χρησιμοποιούν αλλά έχουν ενεργοποιηθεί και συμμετέχουν, παράλληλα συνεργαζόμενοι με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας τους «χτίζουν» μόνοι τους τη νέα γνώση που είναι το πιο σημαντικό σε μια διδασκαλία. Βλέπουμε λοιπόν ότι αλλάζουν οι ρόλοι των μελών μιας διδασκαλίας, ο εκπαιδευτικός γίνεται δημιουργός υλικού, αποκτά τη δυνατότητα επέμβασης και παραμετροποίησης του μαθησιακού αντικειμένου ανάλογα με τις ανάγκες των μαθητών του, λειτουργεί ως εμψυχωτής και τους εμπνέει, ενώ οι μαθητές από την άλλη γίνονται ενεργά μέλη αυτής της διαδικασίας και όχι θεατές και παθητικοί δέκτες της πληροφορίας. Πειραματίζονται, διερευνούν, αλληλεπιδρούν με τα μέλη της ομάδας τους αλλά και τα μέλη των άλλων ομάδων, κάνουν υποθέσεις τις οποίες επιβεβαιώνουν και στο τέλος τις αποδεικνύουν.

Η έρευνα που βασίζεται σε σχεδιασμό αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για τον ενεργό εκπαιδευτικό, διότι πραγματοποιείται σε πραγματικό περιβάλλον σχολικής τάξης, προκύπτει μέσα από τις πρακτικές ανάγκες του εκπαιδευτικού και των μαθητών και επιτρέπει τις επαναλαμβανόμενες δοκιμές μέχρις ότου αντιμετωπιστεί ένα διδακτικό πρόβλημα με επιτυχία ή αξιοποιηθεί ένα νέο διδακτικό εργαλείο ικανοποιητικά. Η μέθοδος αυτή μπορεί να αποτελέσει ένα ισχυρό «όπλο» για τον εκπαιδευτικό, επιτρέποντας του να διαμορφώσει την πρακτική του σύμφωνα με επιστημονικές μεθόδους και επιπλέον να παράγει θεωρία η οποία θα έχει δημιουργηθεί μέσα στη σχολική τάξη.

Συνεπώς, η έρευνα που βασίζεται σε σχεδιασμό αποτελεί χρήσιμο εργαλείο τόσο για τον εκπαιδευτικό όσο και για τη διαμόρφωση εκπαιδευτικής πολιτικής που οφείλεται σε δεδομένα που προέρχονται από πραγματικό περιβάλλον μάθησης, αυτό τη σχολικής τάξης.

6. ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΡΟΛΟΓΙΑΣ

Ξενόγλωσσος όρος	**Ελληνικός Όρος**
competence	Μαθηματική ικανότητα
Skill	Δεξιότητα
attitude	Στάση
Formative Assessment	διαμορφωτική αξιολόγηση
the Mathematics	*τα μαθηματικά*
Cognitive Demand	*γνωστική απαίτηση*
Access to Mathematical Content	ισότιμη *πρόσβαση σε μαθηματικό περιεχόμενο*
agency	αυτενέργεια
Engagement	Δέσμευση
Exploration	Εξερεύνηση
Explanation	Εξήγηση
Elaboration	Επεξεργασία
Evaluation	Αξιολόγηση
Design Research	Έρευνα Σχεδιασμού
didactic cut	διδακτική τομή
evaluation equations	εξισώσεις επαλήθευσης
manipulation equations	εξισώσεις χειρισμού
critical incident	κρίσιμο περιστατικό

7. ΣΥΝΤΜΗΣΕΙΣ – ΑΡΚΤΙΚΟΛΕΞΑ – ΑΚΡΩΝΥΜΙΑ

Ε.Ε.Τ.	Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας
ΕΚΠΑ	Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
TRU math	Teaching for Robust Understanding of Essential Mathematics
Τ.Π.Ε.	Τεχνολογίες Πληροφορίας και Επικοινωνίας

8. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι – Φύλλα Εργασίας

Πρότυπο ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής 1ο Μαθηματικό Έργο

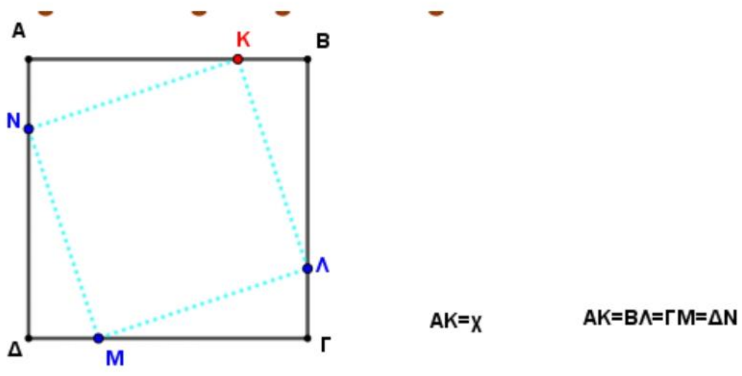
Φύλλο εργασίας 1

Δραστηριότητα 1η

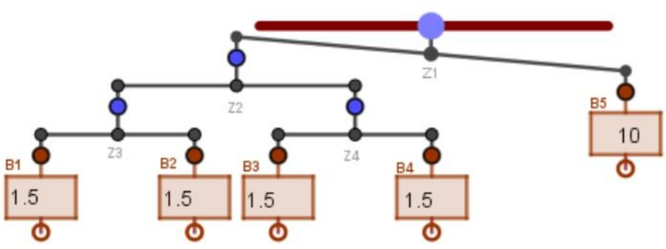
Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά 4. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε το σημείο Κ ώστε ΑΚ=χ και τα σημεία Λ, Μ και Ν στις πλευρές ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ τέτοια ώστε ΑΚ=ΒΛ=ΓΜ=ΔΝ. Στις θέσεις Β1, Β2, Β3 και Β4 είναι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΚΝ, ΒΚΛ, ΓΜΛ και ΔΜΝ αντίστοιχα. Στη θέση Β5 είναι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ. Το μήκος του τμήματος ΑΚ μπορεί να αλλάξει είτε από το σημείο Κ είτε από το δρομέα χ.

1) γιατί οι ζυγοί Ζ2, Ζ3 και Ζ4 ισορροπούν πάντα;

2) όταν ισορροπεί ο ζυγός Ζ1 τι συμβαίνει στο σχήμα μας;



Στο περιβάλλον του «Πολύζυγου» σχεδιάστε την παρακάτω διάταξη και προσπαθήστε να απαντήσετε στα ερωτήματα της δραστηριότητας.



21/02/2022 Μάλλιαρης Χρήστος

Πρότυπο ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής 1ο Μαθηματικό Έργο

Φύλλο εργασίας 2

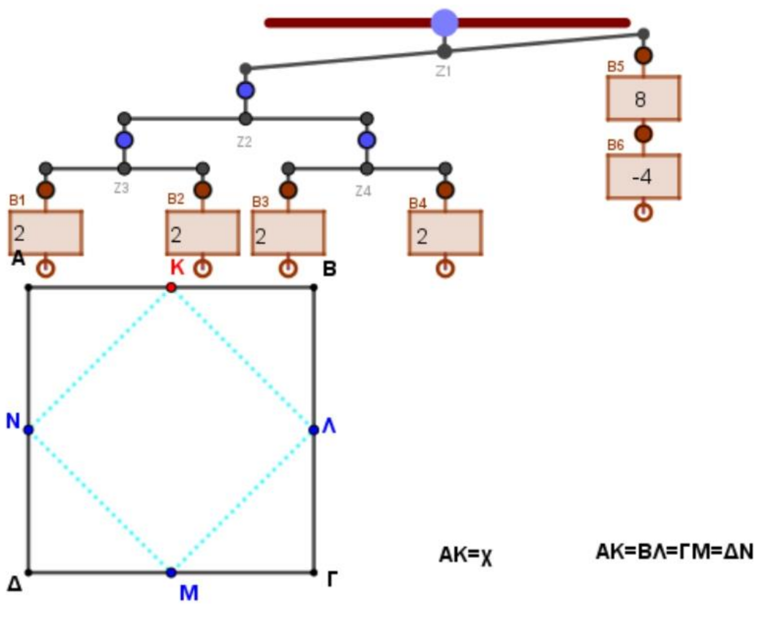
Δραστηριότητα 2η

Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά 4. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε το σημείο Κ ώστε ΑΚ=χ και τα σημεία Λ, Μ και Ν στις πλευρές ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ τέτοια ώστε ΑΚ=ΒΛ=ΓΜ=ΔΝ. Στις θέσεις Β1, Β2, Β3 και Β4 είναι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΚΝ, ΒΚΛ, ΓΜΛ και ΔΜΝ αντίστοιχα. Στη θέση Β5 είναι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ. Το μήκος του τμήματος ΑΚ μπορεί να αλλάξει είτε από το σημείο Κ είτε από το δρομέα χ.

Ο Γιάννης πρόσθεσε το βάρος Β6 στο οποίο έβαλε την τιμή -4.

1) υπάρχουν τιμές του χ ώστε να ισορροπεί ο ζυγός Ζ1;

2) όταν ισορροπεί ο ζυγός Ζ1 ποιες σχέσεις ισχύουν για τα εμβαδά των 5 σχημάτων;



Στο περιβάλλον του «Πολύζυγου» σχεδιάστε την παραπάνω διάταξη και προσπαθήστε να απαντήσετε στα ερωτήματα

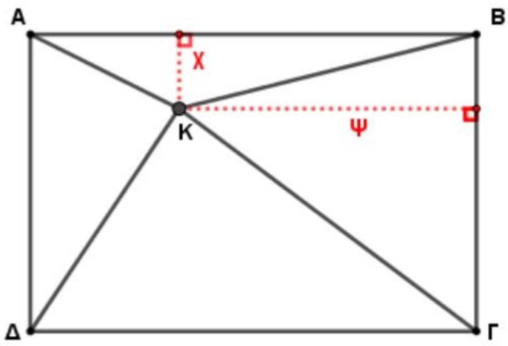
21/02/2022 Μάλλιαρης Χρήστος

Πρότυπο ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής 2ο Μαθηματικό Έργο

Φύλλο εργασίας 3

Δραστηριότητα 1η

Ένας πατέρας θέλει να μοιράσει στα 4 παιδιά του (2 αγόρια και 2 κορίτσια) ένα ορθογώνιο οικόπεδο ΑΒΓΔ διαστάσεων 40 και 60 μονάδων μήκους. Αναζητά έναν τρόπο μοιρασιάς ώστε όλα τα παιδιά του:
1) να πάρουν μέρος του οικοπέδου ίδιου σχήματος
2) τα παιδιά του ίδιου φύλου να πάρουν ίσης επιφάνειας μέρος του οικοπέδου.



14/03/2022 Μάλλιαρης Χρήστος

Πρότυπο ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής 2° Μαθηματικό Έργο

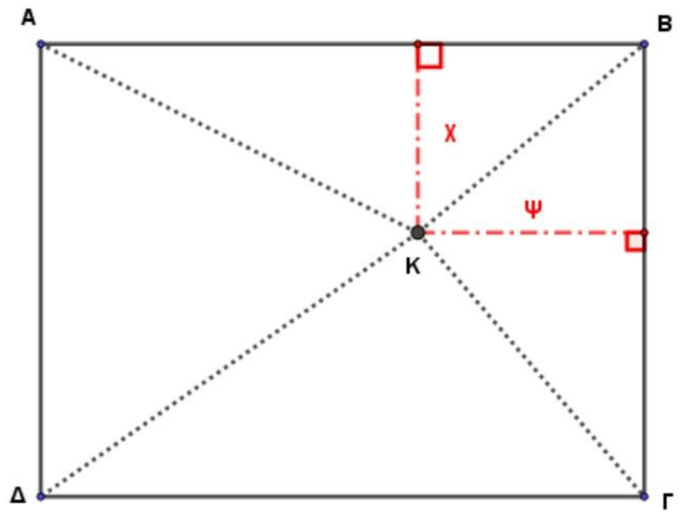
<u>Φύλλο εργασίας 4</u>

<u>Δραστηριότητα 2η</u>

Ένας πατέρας θέλει να μοιράσει στα 4 παιδιά του (2 αγόρια και 2 κορίτσια) ένα ορθογώνιο οικόπεδο ΑΒΓΔ διαστάσεων 60 και 80 μονάδων μήκους. Αναζητά έναν τρόπο μοιρασιάς ώστε όλα τα παιδιά του:

1) να πάρουν μέρος του οικοπέδου ίδιου σχήματος

2) τα παιδιά του ίδιου φύλου να πάρουν ίσης επιφάνειας μέρος του οικοπέδου.



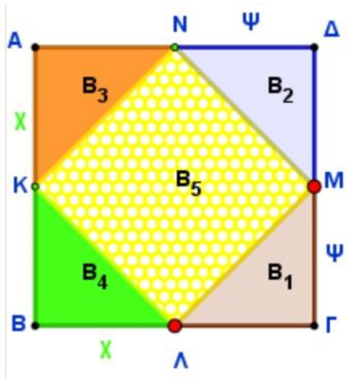
14/03/2022 Μάλλιαρης Χρήστος

Πρότυπο ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής 3ο Μαθηματικό Έργο

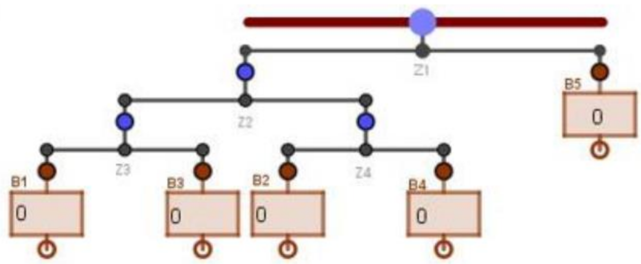
Φύλλο εργασίας 5

Δραστηριότητα 1η

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 4 μονάδες μήκους. Θεωρούμε τα σημεία Κ, Λ στις ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα ώστε: (ΑΚ)=(ΒΛ)=χ και τα σημεία Μ, Ν στις ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα, ώστε: (ΓΜ)=(ΔΝ)=ψ.
Επιπλέον ορίζουμε τα εμβαδά: Β1=(ΜΓΛ), Β2=(ΜΔΝ), Β3=(ΚΑΝ), Β4=(ΚΒΛ) και Β5=(ΚΛΝΜ).
α) Να γράψετε στις θέσεις των Β1, Β2, Β3 και Β4 τα εμβαδά των αντίστοιχων τριγώνων.
β) Με χρήση των δρομέων να εντοπίσετε (αν υπάρχουν) τις τιμές των χ και ψ ώστε να ισορροπούν οι
ζυγοί Ζ2, Ζ3 και Ζ4. Περιγράψτε γεωμετρικά την ισορροπία του κάθε ζυγού.
γ) Για ποιες τιμές των χ και ψ ο ζυγός Ζ1 ισορροπεί; Περιγράψτε γεωμετρικά την περίπτωση αυτή.



Στο περιβάλλον του «πολύζυγου» έχουμε την παρακάτω διάταξη. Με τη βοήθεια του λογισμικού απαντήστε στα παραπάνω ερωτήματα



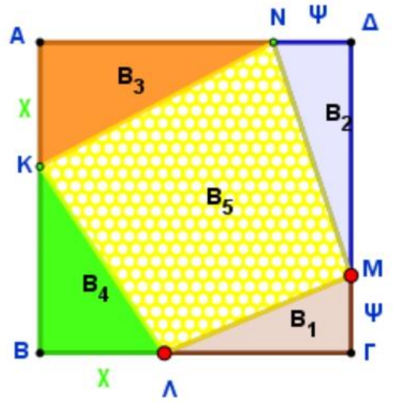
04/04/2022 Μάλλιαρης Χρήστος

Πρότυπο ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής 3° Μαθηματικό Έργο

Φύλλο εργασίας 6

Δραστηριότητα 2η

Το τετράγωνο οικόπεδο ΑΒΓΔ ένας πατέρας θέλει να το μοιράσει στα 5 παιδιά του ως εξής:
1) Ο μικρότερος γιος να πάρει το Β1 που να έχει διπλάσια έκταση από το Β4 που θα πάρει ο 4ος γιος.
2) Ο δεύτερος γιος να πάρει το Β2 που θα έχει κι αυτό διπλάσια έκταση απο το Β3 που θα πάρει ο 3ος γιος.
3) το 5ο παιδί που είναι κορίτσι θα πρέπει να πάρει ότι περισσέψει, το Β5, αλλά με την προϋπόθεση να έχει έκταση τουλάχιστον τη μισή του αρχικού οικοπέδου.
Μπορείτε να βοηθήσετε τον πατέρα να βρει αν υπάρχει λύση;



Αξιοποιήστε το περιβάλλον του «Πολύζυγου» ώστε να απαντήσετε στα παραπάνω ερωτήματα

04/04/2022 Μάλλιαρης Χρήστος

9. ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Artigue, M. (2012). What is inquiry-based mathematics education (IBME). Inquiry in mathematics education. Fibonacci project, 3-13.
2. Bakker, A. (2018). Design research in education: A practical guide for early career researchers. New York, NY: Routledge.
3. Bodemer, D. (2006) External and mental referencing of multiple representations

   https://doi.org/10.1016/j.chb.2005.01.005
4. Brookfield, S.D. 1995. Becoming a critically reflective teacher, Sab Francisco, CA: Jossey-Bass.
5. Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). Thinking mathematically: Integrating algebra and arithmetic in elementary sxhool. Portsmouth, NH: Heinemann. (Chapters 1, 3-10).
6. Choppin, J. (2011) Learned adaptations: Teachers' understanding and use of curriculum resources. Journal of Mathematics Teacher Education, 14, 331-353. https://doi.org/10.1007/s10857-011-9170-3.
7. Cole, M. (1996). Cultural psychology. The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, MA.
8. Collins, A., Joseph, D., Bielaczyc, K. (2009). Design Research: Theoretical and Methodological Issues https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2
9. Collins, A., Joseph, D., Bielaczyc, K. (2009). Design Research: Theoretical and Methodological Issues

   https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2
10. Don Halquist & Sandra I. Musanti. 2010. Critical incidents and reflection: turning points that challenge the researcher and create opportunities for knowing.

11. Dooley, T. (2009). A teachers' role in whole-class mathematical discussion: Facilitator of performance etiquette? In V. Durand-Guerrier, S. Souryn Lavergne and F. Arzarello (Eds.), 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME) (pp. 894-903). Lyon, France: INRP.

12. Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and thw tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom.Educational Studies in mathematics, 75(2), 213-234.

13. Feiman-Nemser, S., & Floden, R. E. (1986). In MC Wittrock. Handbook of research on teaching, 505-526.

14. Ferrara, F., Pratt, D. & Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. Ideas Discussed at PME over the Last 30 Years.

15. Ferraro, G., Andreatta, S. (2014). Cultural anthropology: An applied perspective. Cengage Learning.

16. Filloy, E. and Rojano, T.: (1989). "Solving equations: The transition from arithmetic to algebra", For the learning of the mathematics 9(2), 19-25.

17. Fish, M. & Persaud, A. (2012). (Re)presenting critical mathematical thinking through sociopolitical narratives as mathematics texts. In: Hickman H, Porfilio BJ (eds) The new politics of the textbook. Sense Publishers, Rotterdam, pp. 89-110.

18. Goldengerg, P. (1999). Principles, art and craft in curriculum design: The case of Connected Geometry. International Journal of Computers for Mathematical Learning

19. Gonzalez, G. & Eli, J. A. (2017). Prospective and in-service teachers' perspectives about launching a problem. Journal of Mathematics Teacher Education, 20(2), 159-201.

20. Guillemin, M., & L. Gillam. 2004. Ethics, reflexivity, and “ethically important moments” in research. Qualitative Inquiry 10, no. 2: 261-80

21. Hoepfl, M. C. (1997). Choosing qualitative research: A primer for technology education researchers. Journal of Technology Education, 9(1)

22. Hoyles, C. (2001) From describing to designing mathematical activity: The next step in developing the social approach to research in mathematics education. Educational Studies in Mathematics

23. Hoyles, C. (2005) Making mathematics and sharing mathematics: two paths to co-constructing meaning?

24. Hoyles, C. (2005) Making mathematics and sharing mathematics: two paths to co-constructing meaning?

25. Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. Journal of mathematics teacher education, 9(2), 187-211.

26. Know, O. N., Park, J. H., & Park, J. S. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics

27. Knuth, E., Stephens, A., McNeil, N., & Alibali, M. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. Journal for Research in Mathematics Education.

28. Learning and Teaching Centre. n.d. Critical incidents video tapes. http://www. Ltc.uvic.ca/servicesprograms/criticalincidents/index.php.

29. Lin, F. L. (2000). Making sense of mathematics teacher education. Journal of Mathematics Teacher Education, 3(2), 183-190.

30. Lobato J, Hohensee C., Rhodehamel B. & Diamond J (2012). Using student reasoning to inform the development of conceptual learning goals: the case of quadratic functions. Math Think Learn 14(2): 85-119.

31. MacGregor, M., Stacey, K. (1997). Student’s understanding of algebraic notation: 11-15. Educational Studies in Mathematics, 33, 1-19.

32. Maher, C., Martino, A. (2000). From patterns to theories: conditions for conceptual change

https://doi.org/10.1016/S0732-3123(00)00047-X

33. Martin, K. 1996. Critical incidents in teaching and learning. Issues of Teaching and Learning 2(8). http://www.calt.uwa.edu.au/publications/ITL/1996/8/critical

34. McNeal, B., & Simon, M. A. (2000). Mathematics culture clash: Negotiating new classroom norms with prospective teachers. The Journal of Mathematical Behavior, 18(4), 475-509.

35. Miles, M.B., & A.M. Huberman. 1994. Qualitative data analysis: An exlanded sourcebook. 2nd ed. Thousand Oaks, CA: Sage.

36. Morgan, C. (2010). Making sense of curriculum innovation and mathematics teacher identity. In C. kanes (Ed), Elaborating professionalism: Studies in practice and theory (pp. 107-122). Dordrecht: Springer.

37. Nickson, M. (1994).The culture of the mathematics classroom: An unknown quantity?. In Cultural perspectives on the mathematics classroom (pp. 7-35). Springer, Dordrecht.

38. Otten, M., Van Heuvel-Panhuizen, M. & Veldhuis, M. (2019). The balance model for teaching linear equations: a systematic literature review. IJ STEM Ed 6, 30.

39. Panasuk, R., Beyranevand, M. (2010). Algebra students ability to recognize multiple representations and achievement, International Journal for Mathematics Teaching and Learning 1-21.

40. Patton, M. (1990). Qualitative evaluation and research methods (pp. 169-186). Beverly Hills, CA: Sage.

41. Radford, L. (2014). On teachers and students: An ethical cultural-historical perspective. In Proceedings of the Joint Meeting of PME (Vol. 38, pp. 1-20).

42. Schoenfeld, A. H. (2013) Classroom observations in theory and practice. ZDM, the International Journal of Mathematics Education, 45: 6-7-621. DOI 10.1007/s11858-012-0483-1

43. Schoenfeld, A. H. (2014, November). What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? Educational Researcher, 43(8), 404-412. DOI: 10.3102/0013189X1455

44. Schoenfeld, A. H. (2015) Thoughts on scale. ZDM, the international journal of mathematics education, 47, 161-169. DOI: 10.1007/s11858-014-0662-3

45. Schoenfeld, A. H., Floden, R. E., & the Algebra Teaching Study and Mathematics Assessment Project. (2014). The TRU Math Scorring Rubric. Berkeley, CA & E. Lansing, MI: Granduate School of Education, University of California, Berkeley & College of Education, Michigan State University. Retrieved from httr://ats.berkeley.edu/tools.html.

46. Sfard A. (2008). Thinking aw communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge University Press, Cambridge.

47. Smith, M. S., Hughes, E. K., Engle, R. A., & Stein, M. K. (2009). Orchestrating discussions. Mathematics Teaching in the Middle School, 14(9), 548-556.

48. Smith, M., & Stein, M. K. (2011). 5 practices for orchestrating Productive Mathematics Discussions, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

49. Smyth, J. 1991. Problematising teaching through a “critical” approach to clinical supervision. Curriculum Inquiry 21, no. 3: 321-52.

50. Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. Mathematical Thinking and learning, 10(4), 313-340.

51. Sullivan, P. A. (2003). The potential of open-ended mathematics tasks for overcoming barriers to learning. In Annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia 2003 (pp. 813-816). Deakin University

52. Tall, D., Limma R. N. & Healy, L. (2014). Evolving a three-world framework for solving algebra equations in thw light of what a student has met before. The Journal of Mathematical Behavior, Volume 34, 2014.

53. Thiel, T. 1999, Reflections on critical incidents. Prospect 14, no. 1: 44-52.

54. through an open-ended approach. Asia Pacific Education Review, 7(1), 51-61.

55. Trevisan, A. L., Ribeiro, A. J., & da Ponte, J. P. (2020). Professional Learning Opportunities Regarding the Concept of Function in a Practice-Based Teacher Education Program. International Electronic Journal of Mathematics Education, 15(2).

56. Trigueros, M., Lozano, M. D., & Sandoval, I. (2014). Integrating technology in the primary school mathematics classroom: The role of the teacher. In The mathematics teacher in the digital era (pp. 111-138). Springer, Dordrecht.

57. Tripp, D. 1993. Critical incidents in teaching: Developing professional judgment. New York: Routledge.

58. Κυνηγός Χ., Γριζιώτη Μ., Διαμαντίδης Δ., Λάτση Μ., Φακούδης Β. (2019). Τα Ψηφιακά Περιβάλλοντα για τα Μαθηματικά ως Συγγραφικά Εργαλεία ανάπτυξης μικροπειραμάτων, 8ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών: «Σύγχρονες Προσεγγίσεις στη Διδασκαλία των Μαθηματικών», Πανεπιστήμιο Κύπρου, Λευκωσία, Κύπρος.

59. Κυνηγός, Χ. (2007). Το μάθημα της Διερεύνησης: Παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των

μαθηματικών Από την έρευνα στη σχολική τάξη. Αθήνα. Ελληνικά Γράμματα.

60. Κυνηγός, Χ. (2010). Το μάθημα της Διερεύνησης (3η). Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

61. Λάτση, Μ. (2021). Σημειώσεις μαθήματος «ερευνητική Εργασία» - Educational Design Research – Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας – Ε.Κ.Π.Α.

62. Λάτση, Μ. (2021). Σημειώσεις μαθήματος «ερευνητική Εργασία» - Educational Design Research – Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας – Ε.Κ.Π.Α.

63. Μεγάλου Ε., Κακλαμάνης Χ. (2018). Ψηφιακό Σχολείο ΙΙ: επέκταση και αξιοποίηση της ψηφιακής εκπαιδευτικής πλατφόρμας «e-me», των διαδραστικών σχολικών βιβλίων, των ψηφιακών αποθετηρίων και του εθνικού συσσωρευτή εκπαιδευτικού περιεχομένου «Φωτόδεντρο», πρακτικά 11ου Πανελλήνιου και Διεθνές Συνεδρίου «Οι ΤΠΕ στην εκπαίδευση», Θεσσαλονίκη.

64. Τζεκάκη, Μ. (2011) Μαθηματική Δραστηριότητα και Μαθηματικά Έργα. Κεντρική ομιλία. Στο Καλδρυμίδου, Μ. & Βαμβακούση, Ξ. (επιμ.). Πρακτικά 4ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών, 51-66. Ιωάννινα, ΕΝΕΔΙΜ – Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

65. Τζεκάκη, Μ. (2014). Μαθηματική Δραστηριότητα μέσα στο Παιχνίδι και στο Εκπαιδευτικό Υλικό. Πρακτικά 1ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή για το