Ψηφιακός Μετασχηματισμός και Εκπαιδευτική Πράξη

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Νοηματοδοτήσεις μαθητών Γυμνασίου που μαστορεύουν δυναμικά μοντέλα γραμμάτων του Ελληνικού αλφαβήτου προγραμματίζοντας με τη Χελωνόσφαιρα: ανθεκτική κατανόηση και ικανότητα χρήσης μαθηματικών ιδιοτήτων»

Αικατερίνη Σχίζα

Α.Μ.: 20004

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ	**Χρόνης Κυνηγός,** Καθηγητής

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ	**Χρόνης Κυνηγός,** Καθηγητής
	Μαρία Μουντρίδου, Επίκουρη Καθηγήτρια
	Μαρία Μπούμπουκα, Διδάκτωρ

Αθήνα

Ιούνιος, 2022

Ψηφιακός
Μετασχηματισμός
και Εκπαιδευτική Πράξη

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«Νοηματοδοτήσεις μαθητών Γυμνασίου που μαστορεύουν δυναμικά μοντέλα γραμμάτων του Ελληνικού αλφαβήτου προγραμματίζοντας με τη Χελωνόσφαιρα: ανθεκτική κατανόηση και ικανότητα χρήσης μαθηματικών ιδιοτήτων»

Η μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία εξετάστηκε επιτυχώς από την κάτωθι Εξεταστική Επιτροπή:

Α/α	ΟΝΟΜΑ ΕΠΩΝΥΜΟ	ΒΑΘΜΙΔΑ/ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΨΗΦΙΑΚΗ ΥΠΟΓΡΑΦΗ
	Χρόνης Κυνηγός	Καθηγητής	Polychronis Kynigos Digitally signed by Polychronis Kynigos Date: 2022.07.09 21:03:29 +03'00'
	Μαρία Μουντρίδου	Επίκουρη Καθηγήτρια	Digitally signed by Maria Mountridou Date: 2022.07.10 13:25:32 +03'00'
	Μαρία Μπούμπουκα	Διδάκτωρ	Maria Boumpouka Digitally signed by Maria Boumpouka Date: 2022.07.12 10:03:33 +02'00'

ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η κάτωθι υπογεγραμμένη Σχίζα Αικατερίνη του Νικολάου, με αριθμό μητρώου 20004 φοιτήτρια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Ψηφιακός Μετασχηματισμός και Εκπαιδευτική Πράξη» του Τμήματος Μηχανικών Πληροφορικής και Υπολογιστών της Σχολής Μηχανικών του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής, δηλώνω ότι:

«Είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της, είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, οι όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε ακριβώς είτε παραφρασμένες, αναφέρονται στο σύνολό τους, με πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία έχει συγγραφεί από μένα αποκλειστικά και αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου, όσο και του Ιδρύματος.
Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του πτυχίου μου».

Η Δηλούσα

Σχίζα Αικατερίνη

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας αποτελεί μία εμπειρική έρευνα κατά την οποία μαθητές της Γ' Γυμνασίου μαστορεύουν δυναμικά μοντέλα γραμμάτων του Ελληνικού Αλφαβήτου μέσα από μία σειρά διδακτικών παρεμβάσεων με δραστηριότητες οι οποίες δομούνται μέσα σε ένα περιβάλλον προγραμματισμού και στοχεύουν στην ανθεκτική κατανόηση και την ικανότητα χρήσης μαθηματικών ιδιοτήτων από τους μαθητές. Συχνό φαινόμενο μέσα στα σχολεία της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης είναι η παρουσίαση των μαθηματικών στους μαθητές σαν αδιαμφησβήτητες αλήθειες τις οποίες αυτοί με τη σειρά τους οφείλουν να εφαρμόσουν σε συγκεκριμένες ασκήσεις και σε συγκεκριμένα πλαίσια του αναλυτικού προγράμματος χωρίς απαραίτητα να κατανοούν την σημασία τους ή τη χρησιμότητά τους σε πλαίσια εκτός μαθήματος και χωρίς να καλλιεργούν ουσιαστικά τη μαθηματική τους σκέψη. Ως εκ τούτου, σπάνια δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές να βάλουν σε χρήση έννοιες που διδάσκονται μεμονωμένα στο σχολείο, μέσα σε πλαίσια που προκαλούν το ενδιαφέρον τους, τους εμπλέκουν προσωπικά και καλλιεργούν το μαθηματικό γραμματισμό. Η συγκεκριμένη έρευνα διαπραγματεύεται μία εναλλακτική προσέγγιση για τη μάθηση μέσω της μοντελοποίησης γραμμάτων με το ψηφιακό εργαλείο MaLT2, εμπλέκοντας τους μαθητές σε κατασκευές δομημάτων και κυρίως, σε διαδικασίες απασφαλμάτωσης μοντέλων τα οποία εμπεριέχουν σφάλματα στις μαθηματικές ιδιότητες που έχουν ενσωματωθεί σε αυτά με αποτέλεσμα την αλλοίωσή τους. Έτσι, βασικοί στόχοι της διδακτικής παρέμβασης είναι η ανίχνευση της πορείας της μαθηματικοποίησης από τους μαθητές και η καλλιέργεια της ικανότητας των μαθητών να αναπτύξουν βαθιά και ανθεκτική κατανόηση μιας σειράς μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών (π.χ. τριγωνομετρικοί αριθμοί, πυθαγόρειο θεώρημα, αναλογίες), καθώς και το να βάζουν σε χρήση τα μαθηματικά μέσα στο εκάστοτε πλαίσιο, συνειδητοποιώντας τα οφέλη της εμπλοκής τους σε πραγματικές εξερευνήσεις οι οποίες υποστηρίζονται από αυτά τα μαθηματικά. Η διδακτική παρέμβαση σχεδιάστηκε στο πλαίσιο της έρευνας σχεδιασμού και ο σχεδιασμός της δραστηριότητας βασίστηκε στα θεωρητικά μοντέλα των “UDGS”, των “5Es” και του “TRU Framework”. Στα αποτελέσματα της έρευνας υπάρχουν στοιχεία χρήσης του μαθηματικού φορμαλισμού με προσωπικό νόημα για τους μαθητές, στοιχεία γενίκευσης των μαθηματικών ιδιοτήτων μέσα στα δυναμικά μοντέλα, στοιχεία που δείχνουν ότι οι μαθητές ήταν ικανοί σταδιακά να συγκρίνουν και να αξιολογούν το μαθηματικό αποτέλεσμα της χρήσης κάθε ιδιότητας μέσα στα μοντέλα και γενικότερα στοιχεία που δείχνουν την δημιουργία ενός ισχυρού περιβάλλοντος μάθησης για τα παιδιά μέσω του προγραμματισμού.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Διδακτική των Μαθηματικών με Ψηφιακά Εργαλεία

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Μοντελοποίηση, μαθηματικά, προγραμματισμός, απασφαλμάτωση, ανθεκτική κατανόηση.

ABSTRACT

The subject of this research is an empirical study in which some 9th grade students tinker with dynamic models of letters of the Greek Alphabet through a series of didactic interventions with activities that are structured in a programming environment and aim at students' robust understanding and the competence to use mathematical properties. A common phenomenon in secondary schools is the presentation of mathematics to students as indisputable truths which they in turn have to apply in specific exercises and in specific curriculum without necessarily understanding their importance or usefulness in frameworks outside the lesson and without actually cultivating their mathematical thinking. As a result, students are seldom given opportunities to apply concepts -that are taught individually in school- in contexts that interest them, engage them personally, and cultivate mathematical literacy. This research negotiates an alternative approach to learning through letter modeling with the MaLT2 digital tool, involving students in the construction of artifacts and, mainly, in debugging models that contain bugs in the mathematical properties that are embedded in them, resulting in their alteration. Thus, main objectives of this didactic intervention are the detection of the mathematization by the students and the cultivation of the students' ability to develop a deep and robust understanding in a series of mathematical concepts and processes (ex. trigonometric numbers, Pythagorean theorem, proportions), as well as to put mathematics to use in context, realizing the benefits of engaging in real-world explorations supported by that kind of mathematics. The teaching intervention was designed in the context of design-based research and the design of the activity was based on the theoretical models of "UDGS", "5Es" and "TRU Framework". The results of the research contain data on the use of mathematical formalism with personal meanings for students, data on the generalization of mathematical properties within dynamic models, data that show that students were able to gradually compare and evaluate the mathematical result of using each property within models, and general data that show the creation of a powerful mathematical learning environment for children through the use of programming.

SUBJECT AREA: Didactics of Mathematics with Digital Tools

KEYWORDS: Modeling, mathematics, programming, debugging, robust understanding.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή κ. Χρόνη Κυνηγό για τη στήριξη και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, αποτελώντας έναν άνθρωπο που συχνά με «ξεβόλευε» (όπως αγαπάει να λέει), δημιουργώντας, όμως, ταυτόχρονα ένα κλίμα πρόκλησης που με ωθούσε να προχωρήσω μπροστά και ένα αίσθημα αυτοπεποίθησης για να συνεχίσω.

Οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στα μέλη του Εργαστηρίου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας για όλες τις συμβουλές τους και τις στιγμές που πίστεψαν σε μένα όταν ούτε εγώ η ίδια δεν πίστευα στον εαυτό μου. Δημήτρη, Μυρτώ, Μαριάνθη, Χριστίνα, Μάριε, Ευρύκλεια ευχαριστώ τον καθένα σας ξεχωριστά για το κάθε δευτερόλεπτο συνύπαρξης μας!

Ένα ιδιαίτερο ευχαριστώ στα παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα και μου έδωσαν τα δεδομένα για να συνεχίσω. Χωρίς αυτά η έρευνα δεν θα είχε καμία αξία.
Περάσαμε όμορφα, μαστορέψαμε και… φάγαμε πολλά σουβλάκια!

Ευχαριστώ όλους τους Καθηγητές του ΔΠΜΣ «Ψηφιακός Μετασχηματισμός και Εκπαιδευτική Πράξη» για όλα όσα με δίδαξαν και για την νέα «εκδοχή» της Κάτιας που βγήκε μέσα από όλο αυτό το μεταπτυχιακό πρόγραμμα των δύο χρόνων.

Ακόμα, ευχαριστώ τους μαθητές μου για το ενδιαφέρον που έδειχναν στην καθηγήτρια τους κάθε εβδομάδα για το πώς πάει το διάβασμά μου στο μεταπτυχιακό.
(Πώς να μην ευχαριστήσω την Κωνσταντίνα που μου έστελνε μήνυμα για να μου θυμίσει ότι πρέπει να κοιμηθώ γιατί έχει πάει 3 τα ξημερώματα και την Αιμιλία που μου έφερνε πίτσα όταν δεν προλάβαινα να φάω…;) Είμαι περήφανη για εσάς!

Τέλος, ευχαριστώ θερμά τους γονείς μου, τα αδέρφια μου, τις κολλητές μου και το Δημήτρη μου που με αντέχουν και με στηρίζουν no matter what...

Αφιερωμένη σε όλους σας, λοιπόν!

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Είναι γεγονός ότι τα μαθηματικά στο σχολείο αποτελούν ένα κατακερματισμένο επιστημονικό πεδίο, όπου οι μαθηματικές έννοιες παρουσιάζονται κατά κύριο λόγο μεμονωμένες και αποξενωμένες μέσα σε μαθήματα και κεφάλαια βιβλίων, χωρίς κάποια σύνδεση μεταξύ τους και χωρίς να υπάρχει για τους μαθητές η ευκαιρία παρουσίασης των μαθηματικών ως ολότητα (π.χ. οι έννοιες των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας και των εντός εναλλάξ γωνιών δεν συνδυάζονται σε καμία άσκηση των σχολικών εγχειριδίων, καθώς η μία έννοια ανήκει στη διδακτέα ύλη της Α΄ γυμνασίου και η άλλη στη διδακτέα ύλη της Β' γυμνασίου). Έτσι, οι μαθητές συχνά δυσανασχετούν με τις μαθηματικές έννοιες, ιδιότητες και διαδικασίες που καλούνται να μάθουν και να εφαρμόσουν σε μεμονωμένα πλαίσια, καθώς δεν δημιουργούν μία σύνδεση και ένα ενιαίο πλαίσιο και νόημα στο μυαλό τους για αυτές, ενώ δεν είναι λίγες οι φορές που τα παιδιά δυσκολεύονται να συνδυάσουν τη γεωμετρία με την άλγεβρα, καθώς τις διδάσκονται ως «ξένα» μεταξύ τους πεδία.

Από την άλλη πλευρά, οι μαθητές στο γυμνάσιο έρχονται σε επαφή με την έννοια της μεταβλητής -κατά κύριο λόγο- ως έναν συγκεκριμένο αριθμό, αλλά άγνωστο τη δεδομένη στιγμή. Ειδικά στη γεωμετρία, η μεταβλητή χ εμφανίζεται παραδοσιακά ως άγνωστη πλευρά ενός σχήματος (π.χ. σε ορθογώνιο τρίγωνο με δοσμένες κάθετες πλευρές 3cm και 4cm, να βρεθεί η υποτείνουσα χ cm), χάνοντας το νόημα της ως ένας γενικευμένος αριθμός – αφού τα σχήματα είναι στατικά – και έτσι δεν δίνονται ουσιαστικές ευκαιρίες στα παιδιά να δημιουργήσουν γενικευμένες σχέσεις μεταξύ δεδομένων με τη χρήση μαθηματικών ιδιοτήτων. Με άλλα λόγια, το σκεπτικό της ερευνήτριας στη συγκεκριμένη έρευνα δεν είναι, για παράδειγμα, να μάθουν οι μαθητές το πυθαγόρειο θεώρημα, αλλά να προχωρήσουν ένα βήμα παραπέρα και τα παιδιά να μπορέσουν να χρησιμοποιήσουν το πυθαγόρειο θεώρημα σαν εργαλείο για να καταφέρουν να δημιουργήσουν κάτι νέο. Αυτό το τελευταίο βήμα λείπει από το σημερινό σχολείο, όπου μαθητές και καθηγητές «τρέχουν να διδάξουν την εξεταστέα ύλη», παραγκωνίζοντας την καλλιέργεια της γενικότερης μαθηματικής σκέψης των παιδιών και του μαθηματικού γραμματισμού.

Την ίδια στιγμή, η χρήση των ψηφιακών τεχνολογιών και ειδικά στην παρούσα έρευνα του προγραμματισμού βοηθάει ιδιαίτερα προς αυτή την κατεύθυνση. Η δημιουργία ή η απασφαλμάτωση μοντέλων κρύβει ευκαιρίες αφαίρεσης και γενίκευσης της σκέψης των παιδιών γύρω από τα μοντέλα και τις μαθηματικές ιδιότητες που αυτά ενσωματώνουν. Η παρούσα έρευνα, λοιπόν, πραγματεύεται μία εναλλακτική προσέγγιση βασικών μαθηματικών εννοιών σε συνδυασμό με την έννοια της μεταβλητής, μέσα από δραστηριότητες σχεδιασμένες με τρόπο τέτοιο, ώστε: α. να έχουν ένα προσωπικό νόημα για τους μαθητές και να νιώσουν οι ίδιοι ικανοί να κάνουν μαθηματικά, β. να εξερευνήσουν μαθηματικές έννοιες μέσα σε ένα περιβάλλον προγραμματισμού «χτίζοντας» μόνοι τους την κατανόησή τους, γ. να δημιουργήσουν συνδέσεις μεταξύ του προγραμματιστικού περιβάλλοντος του εργαλείου MaLT2 και των «επίσημων» μαθηματικών και τέλος, δ. οι δραστηριότητες αυτές να πλαισιώνουν ένα ισχυρό μαθησιακό περιβάλλον ανθεκτικής κατανόησης για τους μαθητές.

<u>Σημείωση</u>:

Ανάλογα με το κεφάλαιο της εργασίας και τα στοιχεία που αναλύονται σε αυτό κάθε φορά, η ερευνήτρια μπορεί να αναφερθεί επιπλέον μέσα στο κείμενο ως εκπαιδευτικός ή ως σχεδιάστρια της δραστηριότητας. Και οι τρεις χαρακτηρισμοί (ερευνήτρια – εκπαιδευτικός – σχεδιάστρια) αναφέρονται στο ίδιο πρόσωπο το οποίο είναι και η συγγραφέας της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

1. Επισκόπηση Βιβλιογραφίας

1.1 Μαθηματικός Γραμματισμός

> *“In becoming a mathematician does one learn something other and more general than the specific content of particular mathematical topics? Is there such a thing as a Mathematical Way of Thinking? Can this be learned and taught?”*
>
> *(Papert, 1971)*

Ο Seymour Papert, ήδη από τη δεκαετία του 1970, έψαχνε πέρα από τις μαθηματικές γνώσεις για αυτό το «κάτι» παραπάνω που αποκτά κάποιος όταν μαθαίνει μαθηματικά, αναφερόμενος στον μαθηματικό τρόπο σκέψης, ενώ λίγο αργότερα ο Freudenthal παρουσίασε τα μαθηματικά σαν μία ανθρώπινη δραστηριότητα και όχι σαν ένα απλό σώμα γνώσεων ή σαν ένα «έτοιμο προϊόν» (Gravemeijer & Terwel, 2000). Ακόμη και σήμερα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η γενικότερη παιδαγωγική τάση που κυριαρχεί, αναγνωρίζει τη μαθηματική σκέψη ως ένα πολιτισμικό χαρακτηριστικό – όπως η έκφραση, η συλλογικότητα ή η δημοκρατία – και στοχεύει στην ενίσχυση της λογικομαθηματικής σκέψης και έκφρασης των μαθητών ως ένα αναπόσπαστο κομμάτι της κουλτούρας τους (Κυνηγός, 2011).

Ο Μαθηματικός Γραμματισμός ή αλλιώς Μαθηματικός Αλφαβητισμός ή ακόμα και Μαθηματική Ικανότητα έχει αναφερθεί ευρύτερα μέσα στα χρόνια και έχει προσδιοριστεί με ποικίλους τρόπους. Γυρίζοντας πίσω στα τέλη του 19^{ο} αιώνα, σύμφωνα με τον John Dewey, μαθηματικά εγγράμματο άτομο είναι αυτό που λειτουργεί κριτικά μέσα σε μία δημοκρατική κοινωνία. Ο Dewey είχε την πεποίθηση ότι οι μαθητές είναι ικανοί να αναπτύξουν αναστοχαστική νοημοσύνη (reflective intelligence) όταν μάθουν να σκέφτονται σαν επιστήμονες και καλλιτέχνες και αυτή η ικανότητα θα ήταν πολύτιμη για τη δημιουργία μιας δημοκρατικής κοινωνίας (Clifton, 2012).

Περνώντας στον 20^{ο} αιώνα, σύμφωνα με τον Freudenthal (1973), μαθηματικά εγγράμματο είναι το άτομο που αντιλαμβάνεται ότι οι μαθηματικές έννοιες, οι δομές και οι ιδέες έχουν εφευρεθεί ως εργαλεία με στόχο να οργανώσουν φαινόμενα του φυσικού, του κοινωνικού και του διανοητικού κόσμου, ενώ το 1989, το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών (National Council of Teachers of Mathematics) αναφέρει ότι για να θεωρηθεί ένα άτομο μαθηματικά εγγράμματο σημαίνει ότι έχει την ικανότητα (ability) να εξερευνά, να εικάζει και να σκέφτεται λογικά, καθώς και να χρησιμοποιεί αποτελεσματικά διάφορες μαθηματικές μεθόδους για την επίλυση προβλημάτων, δηλαδή, θα πρέπει προφανώς να γνωρίζει κάτι παραπάνω από απλή αριθμητική. Παράλληλα, αναφέρεται ότι με το να γίνεται μαθηματικά εγγράμματο ένα άτομο σημαίνει ότι αναπτύσσει τη μαθηματική του δύναμη.

Προχωρώντας στον 21^{ο} αιώνα, ο Niss (2003) αναφέρθηκε στον μαθηματικό γραμματισμό υποστηρίζοντας ότι το να είναι κάποιος μαθηματικά ικανός σημαίνει ότι διαθέτει την ικανότητα (competence) να κατανοεί, να κρίνει, να κάνει και να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά σε μία ποικιλία ενδο-μαθηματικών και έξω-μαθηματικών πλαισίων και καταστάσεων στα οποία τα μαθηματικά παίζουν ή θα μπορούσαν να παίξουν κάποιο ρόλο. Οι ορισμοί και οι πεποιθήσεις του Niss θα συζητηθούν και αργότερα, στην επόμενη παράγραφο, μέσα στα πλαίσια της έννοιας του “competence”.

Ο ορισμός που δόθηκε επίσημα από την PISA το 2012, ανέφερε ότι:

> *«Μαθηματικός γραμματισμός είναι η ικανότητα ενός ατόμου να διατυπώνει, να χρησιμοποιεί και να ερμηνεύει τα μαθηματικά μέσα σε ποικίλα πλαίσια.*

> *Περιλαμβάνει μαθηματικούς συλλογισμούς και χρήση μαθηματικών εννοιών, διαδικασιών, γεγονότων και εργαλείων για την περιγραφή, την εξήγηση και την πρόβλεψη φαινομένων. Βοηθά τα άτομα να αναγνωρίσουν τον ρόλο που διαδραματίζουν τα μαθηματικά στον κόσμο, καθώς και να ληφθούν οι κατάλληλες βάσιμες κρίσεις και αποφάσεις από δημιουργικούς ανθρώπους που ενδιαφέρονται και βαθιά σκεπτόμενους πολίτες».* (OECD 2013, σελ. 25)
>
> *"Mathematical literacy is an individual's capacity to formulate, employ, and interpret mathematics in a variety of contexts. It includes reasoning mathematically and using mathematical concepts, procedures, facts and tools to describe, explain and predict phenomena. It assists individuals to recognise the role that mathematics plays in the world and to make the well-founded judgments and decisions needed by constructive, engaged and reflective citizens".*

Η γλώσσα που χρησιμοποιήθηκε στον παραπάνω ορισμό εστιάζει στην ενεργό εμπλοκή των μαθητών με τα μαθηματικά και τα ρήματα «διατυπώνω» ("formulate"), «χρησιμοποιώ» ("employ") και «ερμηνεύω» ("interpret") δείχνουν τις διαδικασίες στις οποίες θα συμμετάσχουν οι μαθητές ως ενεργοί λύτες προβλημάτων. Έτσι, το πρώτο ρήμα σχετίζεται με το να εντοπίσει κάποιος τις ευκαιρίες για να χρησιμοποιήσει τα μαθηματικά, συνειδητοποιώντας ότι τα μαθηματικά μπορούν να εφαρμοστούν για την κατανόηση ή την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος ή μιας πρόκλησης που παρουσιάζεται. Περιλαμβάνει το να μπορεί να πάρει μια κατάσταση όπως αυτή παρουσιάζεται και να την μεταμορφώσει ώστε αυτή να επιδέχεται μαθηματική επεξεργασία, παρέχοντάς της μαθηματική δομή και μαθηματικές αναπαραστάσεις, αναγνωρίζοντας μεταβλητές και κάνοντας υποθέσεις με σκοπό την επίλυση του προβλήματος ή στην αντιμετώπιση της πρόκλησης. Το δεύτερο ρήμα περιλαμβάνει την εφαρμογή μαθηματικού συλλογισμού και τη χρήση μαθηματικών εννοιών, διαδικασιών, γεγονότων και εργαλείων για την εξαγωγή της μαθηματικής λύσης, μέσα από την εκτέλεση υπολογισμών, τον χειρισμό αλγεβρικών εκφράσεων και εξισώσεων ή άλλων μαθηματικών μοντέλων. Τέλος, το τρίτο ρήμα σχετίζεται με τον προβληματισμό πάνω σε μαθηματικές λύσεις και την ερμηνεία τους στο πλαίσιο ενός προβλήματος ή πρόκλησης, περιλαμβάνοντας την αξιολόγηση των μαθηματικών λύσεων ή των συλλογισμών σε σχέση με το πλαίσιο του προβλήματος και προσδιορίζοντας εάν τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι λογικά και έχουν νόημα για την εκάστοτε κατάσταση.
Επιπρόσθετα, σύμφωνα με τους Stacey και Turner (2015), η πρώτη πρόταση του παραπάνω ορισμού δηλώνει πως ο μαθηματικός γραμματισμός σχετίζεται άμεσα με τη μαθηματική μοντελοποίηση, καθώς διαμορφώνοντας και διατυπώνοντας μαθηματικά μοντέλα, οι μαθητές βάζουν σε χρήση μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες, ερμηνεύουν και αξιολογούν το αποτέλεσμα. Η δεύτερη πρόταση εξηγεί ότι όλες οι πτυχές των μαθηματικών εμπλέκονται στον μαθηματικό γραμματισμό, είτε μέσω συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών και τεχνικών είτε μέσω του γενικού μαθηματικού συλλογισμού, ενώ ο ορισμός ολοκληρώνεται υπογραμμίζοντας τον λειτουργικό σκοπό του μαθηματικού αλφαβητισμού ο οποίος είναι η αύξηση της κατανόησης των φαινομένων του πραγματικού κόσμου και η ορθή λήψη αποφάσεων σε όλους τις εκφάνσεις της ζωής τους.

Φτάνοντας στο σήμερα, σύμφωνα πάλι με τον ορισμό που δίνεται από την PISA για το 2022:

> *«Μαθηματικός αλφαβητισμός είναι η ικανότητα ενός ατόμου να συλλογίζεται με μαθηματικό τρόπο και να διατυπώνει, να χρησιμοποιεί και να ερμηνεύει*

τα μαθηματικά με στόχο την επίλυση προβλημάτων μέσα σε μία ποικιλία πραγματικών πλαισίων. Περιλαμβάνει έννοιες, διαδικασίες, δεδομένα και εργαλεία για την περιγραφή, την εξήγηση και την πρόβλεψη φαινομένων. Βοηθά τα άτομα να γνωρίσουν τον ρόλο που διαδραματίζουν τα μαθηματικά στον κόσμο, καθώς και να ληφθούν οι κατάλληλες βάσιμες κρίσεις και αποφάσεις από δημιουργικούς ανθρώπους που ενδιαφέρονται και βαθιά σκεπτόμενους πολίτες του 21^{ου} αιώνα». (OECD 2018, σελ. 7)

“Mathematical literacy is an individual’s capacity to reason mathematically and to formulate, employ, and interpret mathematics to solve problems in a variety of real-world contexts. It includes concepts, procedures, facts and tools to describe, explain and predict phenomena. It assists individuals to know the role that mathematics plays in the world and to make the well-founded judgments and decisions needed by constructive, engaged and reflective 21st century citizens.”

Παρατηρείται ότι το τελευταίο πλαίσιο διατηρεί τις βασικές ιδέες του αντίστοιχου του 2012, αλλά παράλληλα αναγνωρίζει μια σειρά από αλλαγές στον κόσμο του μαθητή οι οποίες αλλάζουν με τη σειρά τους και την προσέγγιση του μαθηματικού γραμματισμού. Βασικό σημείο, ωστόσο, είναι οι μαθητές να απομακρυνθούν από την ανάγκη πραγματοποίησης βασικών υπολογισμών και να προετοιμαστούν για έναν συνεχόμενα και γρήγορα μεταβαλλόμενο κόσμο που καθοδηγείται από νέες τεχνολογίες και από τάσεις που θέλουν πολίτες δημιουργικούς και κριτικά σκεπτόμενους για τους ίδιους, αλλά και για την κοινωνία μέσα στην οποία ζουν.
Είναι σημαντικό -και προφανές ωστόσο- ότι η δόμηση του μαθηματικού γραμματισμού προϋποθέτει ότι ένας μαθητής δεν διαθέτει ελάχιστη ή χαμηλού επιπέδου γνώση, ενώ διαθέτει παράλληλα δεξιότητες εφόσον ο ορισμός υποδηλώνει την ικανότητα των ατόμων να συλλογίζονται με μαθηματικό τρόπο και να χρησιμοποιούν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες. Έτσι, σύμφωνα με την PISA, αναγνωρίζεται και τονίζεται η σημασία ανάπτυξης της ικανότητας των μαθητών να αναπτύξουν μία βαθιά κατανόηση μιας σειράς μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών και να βάζουν σε χρήση τα μαθηματικά μέσα στο εκάστοτε πλαίσιο, συνειδητοποιώντας τα οφέλη της συμμετοχής και της εμπλοκής τους με πραγματικές εξερευνήσεις οι οποίες υποστηρίζονται από αυτά τα μαθηματικά. Βασική προϋπόθεσή, φυσικά όπως αναφέρεται για τα παραπάνω, είναι τα παιδιά να έχουν πλούσιες εμπειρίες μέσα στο μάθημα των μαθηματικών τους.

1.2 Η έννοια της Ικανότητας ως «Competence»

Ο όρος «Μαθηματικός Γραμματισμός» ή «Μαθηματικός Αλφαβητισμός» ο οποίος αποδίδεται μέσα στην παγκόσμια βιβλιογραφία ως “Mathematical Literacy” επικρίθηκε την τελευταία 10ετία από διάφορες χώρες, όπως η Ισπανία και η Γαλλία, όπου η λέξη “literacy” έχει ένα στενό νόημα για την γλώσσα τους, μη αποδίδοντας σωστά αυτό που κρύβει η λέξη αυτή σαν μία ευρύτερη έννοια στο χώρο της εκπαίδευσης, αλλά εννοώντας μόνο το βασικό επίπεδο κατανόησης ενός ατόμου. Για παράδειγμα, μία από τις εκφράσεις που έχουν χρησιμοποιηθεί από άλλες χώρες για να αποδώσουν με μεγαλύτερη ακρίβεια στη γλώσσα τους τον Μαθηματικό Γραμματισμό είναι η «Μαθηματική Κουλτούρα» (“Mathematical Culture”) ή οι «Θεμελιώδεις Μαθηματικές Ικανότητες» (“Fundamental Mathematical Capabilities”), ενώ η «Γνωστική Ικανότητα» (“Cognitive Competency”) και η «Μαθηματική Ικανότητα» (“Mathematical Competence”) είναι αυτές που έχουν κερδίσει έδαφος τα τελευταία χρόνια (Stacey & Turner, 2015). Τι ακριβώς σημαίνει, όμως, ο όρος "competence"?

Ο όρος ικανότητα ως competence έκανε την πρώιμη εμφάνιση του στο χώρο της ψυχολογίας και αποδίδεται στον White (1959) ο οποίος τον χρησιμοποίησε με σκοπό να περιγράψει εκείνα τα χαρακτηριστικά της προσωπικότητας που συνδέονται με την ανώτερη απόδοση και το ισχυρό κίνητρο. Έτσι, ισχυριζόμενος ότι υπάρχει μία σχέση μεταξύ της γνωστικής ικανότητας και των παρακινητικών δράσεων, ο White όρισε ως competence την «αποτελεσματική αλληλεπίδραση του ατόμου με το περιβάλλον».

Αργότερα, στον ίδιο χώρο, η έννοια του *competence* χρησιμοποιήθηκε ως ένα εναλλακτικό πλαίσιο από αυτό της νοημοσύνης (McClelland, 1973) και χρησιμοποιήθηκε για την περιγραφή των κατάλληλων κριτηρίων που θα έπρεπε να έχουν τα τεστ ευφυΐας και ικανοτήτων που ανέπτυσσε ο McClelland. Αυτά τα τεστ προορίζονταν για την πρόβλεψη της επίδοσης των διευθυντών σε σύγκριση με τα παραδοσιακά ψυχολογικά τεστ νοημοσύνης, διαχωρίζοντας τις παραδοσιακές ικανότητες, όπως η ανάγνωση, η γραφή και οι υπολογιστικές (αριθμητικές) δεξιότητες από τα χαρακτηριστικά της προσωπικότητας ενός ατόμου, όπως για παράδειγμα οι επικοινωνιακές δεξιότητες ή η υπομονή που διακατέχει ένα άτομο ως προσωπικότητα.

Στη δεκαετία του 1980, η προαναφερθείσα προσέγγιση ικανότητας θεωρήθηκε λιγότερο σπουδαία και αφέθηκε κάπως στο περιθώριο, αφού επικρίθηκε από πολλούς για την υπερβολική εστίαση στην εκμάθηση μεμονωμένων συμπεριφορών και στον παραγκωνισμό της απόδοσης των επαγγελματιών στο σύνολο της (Van der Klink & Boon, 2002). Λίγο αργότερα, ο Fischer και οι συνεργάτες του υποστηρίξαν ότι η ικανότητα είναι ένα αναδυόμενο χαρακτηριστικό του ατόμου το οποίο δεν είναι ανεξάρτητο από το πλαίσιο, αλλά προκύπτει από τη συνεργασία του ατόμου με το πλαίσιο και με την ικανότητα αυτή να αλλάζει όταν αλλάζει το εκάστοτε πλαίσιο (Fischer et al., 1993).

Γενικά, οι περισσότεροι ορισμοί του όρου competence μέσα στη βιβλιογραφία τοποθετούνται μεταξύ δύο μεγάλων κατηγοριών: competence ως μία καθολική ιδιότητα (universal attribute), όπως ο αλφαβητισμός, και competence στα πλαίσια της ατομικής ικανότητας (individual capacity) η οποία συναντάται μόνο στο πλαίσιο μιας συγκεκριμένης εργασίας (Delamare Le Deist & Winterton, 2005). Οι ευρύτερες αυτές κατηγορίες προέκυψαν κυρίως από έρευνες σχετικά με τη διαχείριση του ανθρώπινου δυναμικού και της επαγγελματικής εξέλιξης και κατάρτισης.

Επιπρόσθετα, μία ενδιαφέρουσα αναφορά σχετίζεται με τους Van der Klink & Boon (2002) οι οποίοι παρόλο που περιγράφουν τον όρο "competence" ως μία «ασαφή έννοια» ("fuzzy concept"), οι ίδιοι τον αναγνωρίζουν τελικά ως έναν χρήσιμο όρο ο οποίος γεφυρώνει το χάσμα μεταξύ της εκπαίδευσης και των απαιτήσεων της εργασίας. Η έρευνα που έκαναν σε οργανισμούς και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση έδειξε πως το αβέβαιο μέλλον, η ανάγκη ισορροπίας μεταξύ ειδικών και γενικών ικανοτήτων και οι ευκαιρίες που δίνει αυτή η έννοια για βελτίωση της συνεργασίας και της επικοινωνίας είναι η βασική λογική πίσω από την υιοθέτηση της έννοιας των competences.

Μπαίνοντας στον 21^{ο} αιώνα, η προσέγγιση της έννοιας φαίνεται να αλλάζει λίγο από τα πλαίσια των προηγούμενων όρων και το 2006, δίνεται από το Ευρωπαϊκό Κοινοβούλιο (European Parliament & Council) ο εξής ορισμός:

> *«Competence είναι ένας συνδυασμός γνώσεων, δεξιοτήτων και συμπεριφορών σχετικών με το εν λόγω πλαίσιο».*

Το 2008, το Ευρωπαϊκό Πλαίσιο Προσόντων (European Qualifications Framework) ορίζει αντίστοιχα την έννοια όπως ακολουθεί:

> *«Competence είναι η αποδεδειγμένη ικανότητα χρήσης γνώσεων, δεξιοτήτων και προσωπικών, κοινωνικών ή/και μεθοδολογικών ικανοτήτων, σε καταστάσεις εργασίας ή σπουδών και στην επαγγελματική και προσωπική ανάπτυξη του ατόμου».*

Φτάνοντας προοδευτικά στο σήμερα, οι Niss & Højgaard – ξεκινώντας πριν από 20 σχεδόν χρόνια αρχικά με τον Niss και φτάνοντας μέχρι και το 2019 μαζί – στοχεύουν μέσα από την εμπλοκή τους και την εμπειρία τους με το KOM Project (τα αρχικά KOM προκύπτουν από τη φράση ”Competencies and the Learning of Mathematics” στα δανέζικα), στην περιγραφή του τι σημαίνει να κατέχει κάποιος μαθηματικές δεξιότητες ή με άλλα λόγια τι σημαίνει να είναι κάποιος μαθηματικά ικανός (mathematically competent) μέσα σε γενικά πλαίσια και ανεξάρτητα από συγκεκριμένη βαθμίδα των μαθητών ή συγκεκριμένο μέρος της ύλης που διδάσκονται.
Σύμφωνα, λοιπόν, με τον αρχικό ορισμό που είχαν δώσει οι ίδιοι, όρισαν την μαθηματική ικανότητα με τον εξής τρόπο (Niss & Højgaard, 2011, p. 49):

> *«Η μαθηματική ικανότητα περιλαμβάνει τη γνώση, την κατανόηση, την εκτέλεση, τη χρήση και την κατοχή μιας γνώμης για τα μαθηματικά και τη μαθηματική δραστηριότητα σε ποικίλα πλαίσια όπου τα μαθηματικά παίζουν ή μπορούν να παίξουν κάποιο ρόλο».*
>
> *“Mathematical competence comprises having knowledge of, understanding, doing, using and having an opinion about mathematics and mathematical activity in a variety of contexts where mathematics plays or can play a role”.*

Λίγα χρόνια αργότερα, οι ίδιοι επανέρχονται με έναν αναθεωρημένο ορισμό όπως ακολουθεί (Niss & Højgaard, 2019, p. 12):

> *«Competence είναι η συνειδητή ετοιμότητα κάποιου να ενεργήσει κατάλληλα στις προκλήσεις δεδομένων καταστάσεων».*
>
> *“Competence is someone’s insightful readiness to act appropriately in response to the challenges of given situations”.*

Αντίστοιχα, ορίζουν την μαθηματική ικανότητα και διευκρινίζουν ότι, εφόσον οι καταστάσεις που αναφέρονται μπορούν να δημιουργήσουν μαθηματικές προκλήσεις, δεν είναι απαραίτητο να είναι από μόνες τους μαθηματικές.

> *«Mathematical competence είναι η συνειδητή ετοιμότητα κάποιου να ενεργήσει κατάλληλα σε κάθε είδους μαθηματικές προκλήσεις που σχετίζονται με δεδομένες καταστάσεις».*
>
> *“Mathematical competence is someone’s insightful readiness to act appropriately in response to all kinds of mathematical challenges pertaining to given situations.”*

Δεδομένων των παραπάνω ορισμών και δίνοντας έμφαση στο ρήμα *“act”* που χρησιμοποίησαν οι συγγραφείς, η ερευνήτρια της παρούσας εργασίας υιοθετεί, ομοίως, την άποψη πως η μαθηματική ικανότητα δεν αποτελεί απλή γνώση ή απλά κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, αλλά εστιάζει στην ενεργητική άσκηση των μαθηματικών, τόσο την σωματική άσκηση όσο και στη νοητική, συμπεριλαμβανομένης και της λήψης αποφάσεων (decision making). Για παράδειγμα, είναι δυνατόν ένας μαθητής να κατέχει βαθιά και ευρεία κατανόηση μαθηματικών εννοιών, σχέσεων, μεθόδων, θεωριών και αποδείξεων οι οποίες, όμως, να αποθηκεύονται στο μυαλό με παθητικό τρόπο και τελικά αυτός να μην θεωρείται μαθηματικά ικανός (Niss & Højgaard, 2019). Άλλωστε και η «ετοιμότητα για δράση» που αναφέρεται στον ορισμό, υπονοεί μία συνειδητή και ρητή απόφαση που θα λάβει το άτομο για να πραγματοποιήσει τις κατάλληλες ενέργειες σε μία δεδομένη κατάσταση, ενώ παράλληλα αυτή δεν μπορεί να χαρακτηριστεί "insightful" αν οι γνώσεις που βρίσκονται στο επίκεντρο δεν μπορούν να ενεργοποιηθούν υπό την ευρεία έννοια της «δράσης». Τέλος, ο όρος «πρόκληση» που χρησιμοποιείται από τους Niss & Højgaard δηλώνει ποικίλες προκλήσεις, από καθαρά πνευματικές μέχρι ηθικές ή οικονομικές. Χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι αυτό που αποτελεί πρόκληση για ένα άτομο μπορεί να μην αποτελεί πρόκληση για ένα άλλο και για αυτό το λόγο οι προκλήσεις -και συνεπώς η ίδια η ικανότητα- παρουσιάζουν μία εξάρτηση από το συνδυασμό υποκείμενο – κοινωνικοπολιτιστικές πτυχές που εμφανίζονται σε κάθε πλαίσιο που μελετάται.

1.3 Ο Μαθηματικός Γραμματισμός στο Ελληνικό Πρόγραμμα Σπουδών

Σύμφωνα με το πρόγραμμα σπουδών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης της χώρας μας σχετικά με τις Βασικές Αρχές Μάθησης και Διδασκαλίας των Μαθηματικών αναφέρεται το εξής:

«Κεντρική επιδίωξη της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην υποχρεωτική εκπαίδευση είναι η ανάδειξη των βασικών χαρακτηριστικών της μαθηματικής γνώσης: της γενίκευσης, της αφαίρεσης, της ακρίβειας και της συντομίας, καθώς και η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Παράλληλα, η διδασκαλία επιδιώκει τη σύνδεση των παραπάνω με το κοινωνικό περιβάλλον, γεγονός που οδηγεί στην ανάπτυξη του ***Μαθηματικού Γραμματισμού****, δηλαδή στην ικανότητα του ατόμου να αναλύει, να ερμηνεύει και να επεμβαίνει στο κοινωνικό του περιβάλλον και στον κόσμο γύρω του, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τα μαθηματικά και να αντιλαμβάνεται τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά για τη λήψη αποφάσεων. Το Πρόγραμμα Σπουδών επιδιώκει κυρίως να αποκτήσουν οι μαθητές την ικανότητα διατύπωσης και επίλυσης προβλημάτων, καθώς και να διαμορφώσουν μια θετική στάση για τα μαθηματικά, εκτιμώντας το ρόλο τους στην ανάπτυξη του ανθρώπινου πολιτισμού».*

Η κατεύθυνση στην οποία κινείται η παρούσα έρευνα, λοιπόν, είναι να μελετήσει την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, της αφαίρεσης, της γενίκευσης και, γενικότερα, του μαθηματικού γραμματισμού των μαθητών μέσα από τη χρήση του προγραμματισμού στην υπηρεσία των μαθηματικών και ειδικότερα, να μελετήσει την ανάπτυξης ανθεκτικής κατανόησης μιας σειράς μαθηματικών εννοιών και ιδιοτήτων από τους μαθητές, καθώς και την ικανότητα χρήσης των μαθηματικών ως εργαλείο μέσα σε πλαίσια κατασκευής και απασφαλμάτωσης δυναμικών μοντέλων στα οποία έχουν ενσωματωθεί μαθηματικές ιδιότητες. Σε συνδυασμό με τα θεωρητικά μοντέλα που θα αναλυθούν στο επόμενο κεφάλαιο, οι δραστηριότητες της έρευνας στοχεύουν επίσης, στο να νιώσουν οι μαθητές ικανοί να κάνουν μαθηματικά και να διαμορφώσουν μία θετική ταυτότητα γύρω από αυτά.

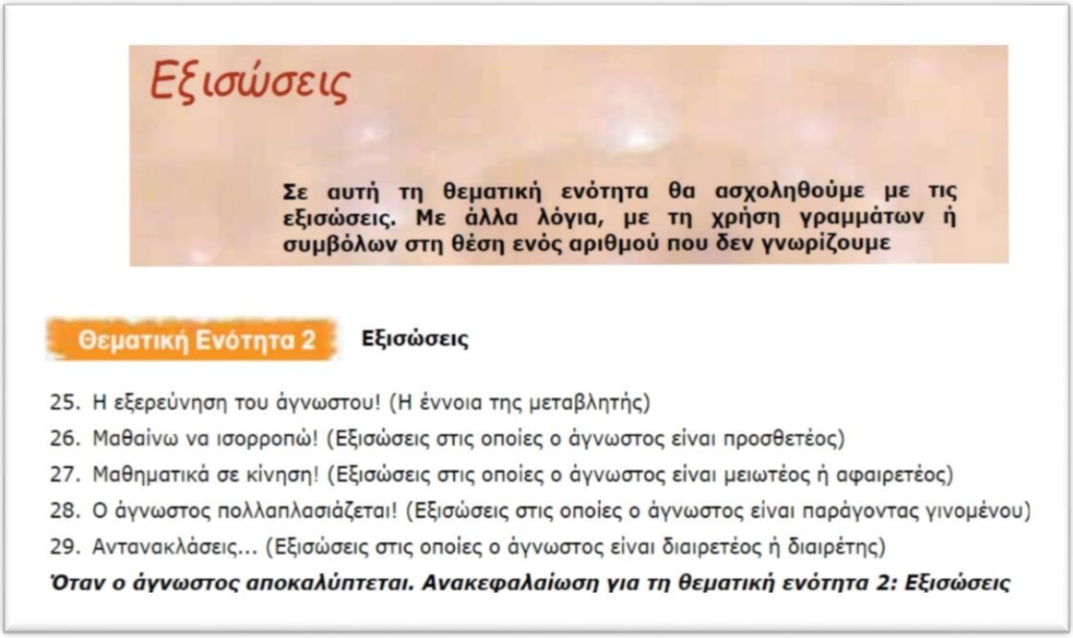
1.4 Η έννοια της Μεταβλητής στο Ελληνικό Σχολείο και στη Βιβλιογραφία

Μέσα στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης αναφέρεται χαρακτηριστικά το εξής:

«Η ισχύς της άλγεβρας (στη διαχείριση των μαθηματικών ιδεών με ακρίβεια και σαφήνεια και στην αποτελεσματικότερη επίλυση προβλημάτων μέσω της μοντελοποίησης) συνδέεται άμεσα με την έννοια της μεταβλητής, την αλγεβρική παράσταση και τους μετασχηματισμούς της. Ωστόσο, αυτές οι έννοιες και διαδικασίες αποτελούν συγχρόνως πηγή δυσκολίας, απογοήτευσης και συχνά αποξένωσης των μαθητών από τα μαθηματικά».

Αρχικά, στην τελευταία τάξη του Δημοτικού, οι μαθητές συναντούν το γράμμα:

α. ως «άγνωστο» μέσα από την έννοια της εξίσωσης, όπου εμφανίζεται σαν ένας αριθμός συγκεκριμένος τον οποίο αναζητούν, δίνοντας βάση όχι τόσο στην έννοια, όσο σε διαδικασίες επίλυσης εξισώσεων.



Εξισώσεις

Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τις εξισώσεις. Με άλλα λόγια, με τη χρήση γραμμάτων ή συμβόλων στη θέση ενός αριθμού που δεν γνωρίζουμε

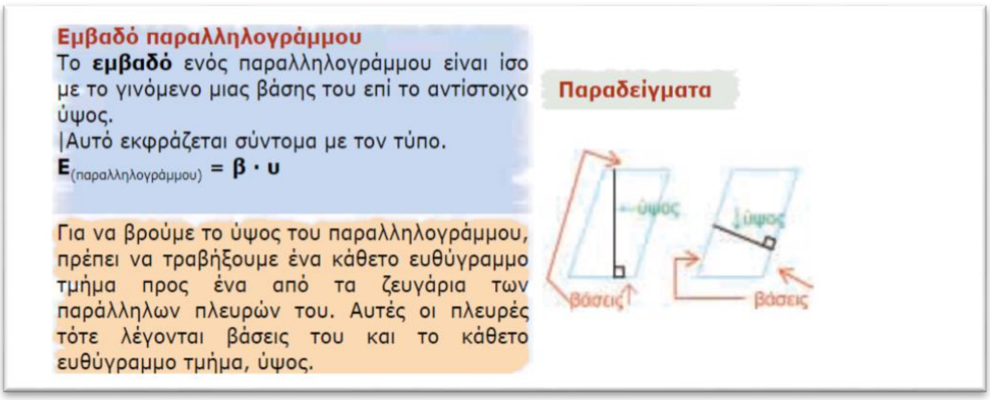
Θεματική Ενότητα 2 **Εξισώσεις**

25. Η εξερεύνηση του άγνωστου! (Η έννοια της μεταβλητής)
26. Μαθαίνω να ισορροπώ! (Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι προσθετέος)
27. Μαθηματικά σε κίνηση! (Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι μειωτέος ή αφαιρετέος)
28. Ο άγνωστος πολλαπλασιάζεται! (Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου)
29. Αντανακλάσεις... (Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι διαιρετέος ή διαιρέτης)

Όταν ο άγνωστος αποκαλύπτεται. Ανακεφαλαίωση για τη θεματική ενότητα 2: Εξισώσεις

Εικόνα 1: Η χρήση μεταβλητής στις εξισώσεις (Στ' Δημοτικού)

β. ως «ετικέτα» ενός μεγέθους, μέσα σε τύπους εμβαδών των βασικών σχημάτων (π.χ. $E_{\text{παραλληλόγραμμου}} = β*υ$).



Εμβαδό παραλληλογράμμου

Το **εμβαδό** ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο μιας βάσης του επί το αντίστοιχο ύψος.

Αυτό εκφράζεται σύντομα με τον τύπο.

$\mathbf{E}_{(\text{παραλληλογράμμου})} = \mathbf{β \cdot υ}$

Για να βρούμε το ύψος του παραλληλογράμμου, πρέπει να τραβήξουμε ένα κάθετο ευθύγραμμο τμήμα προς ένα από τα ζευγάρια των παράλληλων πλευρών του. Αυτές οι πλευρές τότε λέγονται βάσεις του και το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα, ύψος.

Παραδείγματα

Εικόνα 2: Η χρήση μεταβλητής στα εμβαδά (Στ' Δημοτικού)

Προχωρώντας στο Γυμνάσιο, και ειδικότερα στη Β΄ και Γ’ Γυμνασίου, μέσα από εξισώσεις, προβλήματα εξισώσεων, συναρτήσεις και ποικίλες αλγεβρικές παραστάσεις σε άλγεβρα (π.χ. ταυτότητες) και γεωμετρία (π.χ. πυθαγόρειο θεώρημα), οι μαθητές εισάγονται στα αλγεβρικά σύμβολα και στο χειρισμό τους με τέτοια ταχύτητα και έναν διαδικαστικό τρόπο παρουσίασης και επίλυσης τους, όπου οι μαθητές δεν έχουν τον κατάλληλο χρόνο και τρόπο κατανόησης και αφομοίωσης των εννοιών και του τι αντιπροσωπεύει η μεταβλητή σε κάθε πλαίσιο. Αυτό, προφανώς, οδηγεί συχνά σε παθητική γνώση και απομνημόνευση κανόνων χωρίς νόημα, οι οποίοι σταδιακά οδηγούν σε λάθη μέσα από πιθανή παραποίησή τους. Επιπρόσθετες δυσκολίες αντιμετωπίζουν τα παιδιά, σύμφωνα με σχετική έρευνα που αναφέρεται μέσα στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της χώρας μας, σχετικά με τη φυσική και συμβολική γλώσσα που χρησιμοποιείται στην άλγεβρα και στους διαφορετικούς ρόλους του γράμματος, ως άγνωστος, ως ετικέτα μεγέθους, ως μεταβλητή, ως γενικευμένος αριθμός ή ως παράμετρος, ενώ σημαντικές δυσκολίες παρατηρούνται και στη μετάφραση ανάμεσα στις συμβολικές εκφράσεις και τις εικονικές-γεωμετρικές αναπαραστάσεις.
Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, για πολλούς μαθητές, μάλιστα, το γράμμα είναι ένας προσωρινά άγνωστος αριθμός ο οποίος ελπίζουν πως σε κάποια στιγμή στο μέλλον θα γίνει γνωστός (Bardini et al. 2005). Παρόλα αυτά, σε καμία περίπτωση το αλγεβρικό αντικείμενο «μεταβλητή» δεν θα πρέπει να συγχέεται ή ακόμα και να «αφανίζεται» από ένα διαφορετικό αλγεβρικό αντικείμενο που λέγεται «άγνωστος» (Schoenfeld & Arcavi, 1988; Radford, 1996).

Για παράδειγμα, στη Β’ Γυμνασίου οι μαθητές συνεχίζουν να χειρίζονται το γράμμα:

α. ως άγνωστο ή μάλλον σαν κάτι συγκεκριμένο μεν, αλλά κρυμμένο δε, το οποίο ψάχνουν να βρουν μέσα από τις εξισώσεις α’ βαθμού

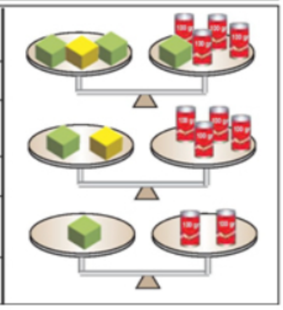
Αφού η ζυγαριά ισορροπεί, θα είναι: 3x + 200 = x + 600.

Η ισότητα αυτή, που περιέχει τον άγνωστο αριθμό x, ονομάζεται **εξίσωση**.

Η παράσταση 3x + 200 λέγεται **πρώτο μέλος** της εξίσωσης, ενώ η παράσταση x + 600 λέγεται **δεύτερο μέλος** αυτής.

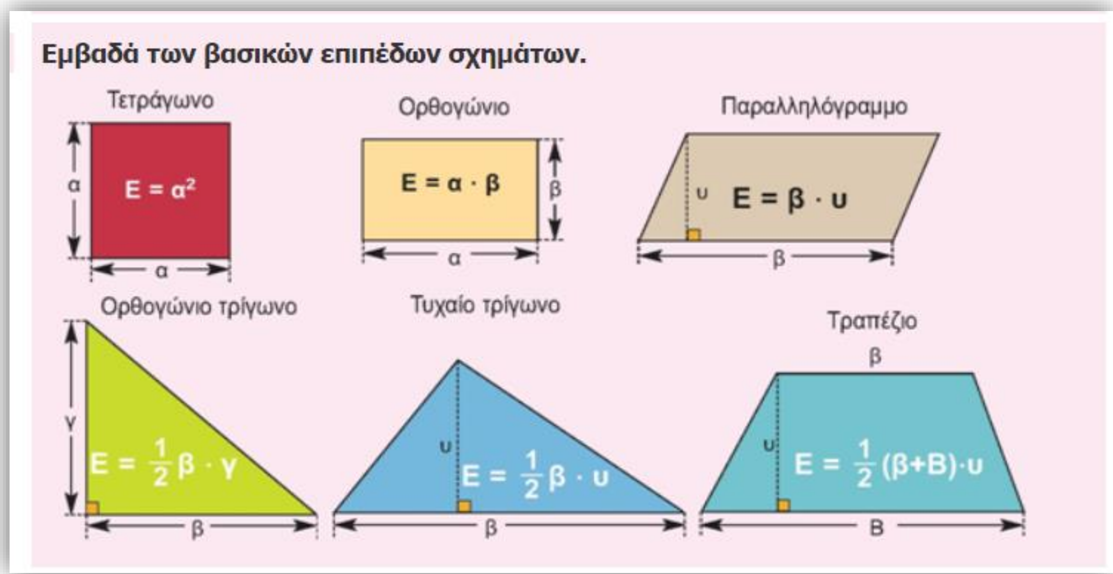
Για να βρούμε τώρα τον άγνωστο αριθμό x, λύνουμε την εξίσωση.

Εξίσωση 3x + 200 = x + 600	Περιγραφή λύσης
$3x+200-200=x+600-200$	Αφαιρούμε το 200 και από τα δύο μέλη της εξίσωσης
$3x = x + 400$	Κάνουμε τις πράξεις
$3x - x = x + 400 - x$	Αφαιρούμε το x και από τα δύο μέλη της εξίσωσης
$(3-1)x = 400$ άρα $2x = 400$	Αναγωγή ομοίων όρων
$\frac{2x}{2} = \frac{400}{2}$	Διαιρούμε με το 2 και τα δύο μέλη της εξίσωσης
$x = 200$	Απλοποιούμε τα κλάσματα



Άρα, ο κάθε κύβος ζυγίζει 200 γραμμάρια.

Εικόνα 3: Η χρήση μεταβλητής στις εξισώσεις (Β' Γυμνασίου) β. ως ετικέτα μεγέθους σε εμβαδά σχημάτων, όπου όπως φαίνεται, οι δραστηριότητες παραμένουν ασκήσεις εκμάθησης και επίλυσης διαδικασιών και επαναλαμβάνονται στο ίδιο μοτίβο, αλλά με κάποιο μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας στους μαθητές.



Εικόνα 4: Η χρήση μεταβλητής στα εμβαδά (Β' Γυμνασίου)

Στην Γ' Γυμνασίου, το γράμμα εμφανίζεται για πρώτη φορά με το ρόλο του γενικευμένου αριθμού μέσα από τον ορισμό της ταυτότητας. Και εδώ, όμως, η εστίαση δεν είναι στην έννοια της μεταβλητής και στον διαφορετικό της ρόλο, αλλά στον τρόπο ανάπτυξης των ταυτοτήτων και στην αναγωγή ομοίων όρων, όπως φαίνεται από το πλήθος των ασκήσεων που υπάρχουν στο μάθημα των ταυτοτήτων και έχουν παρόμοια μορφή με τις ασκήσεις που φαίνονται παρακάτω.

Γενικά

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

Εικόνα 5: Ορισμός ταυτότητας (Γ' Γυμνασίου)

Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει την επικέντρωση του σχολικού προγράμματος στην επίλυση διαδικασιών και το χειρισμό αλγεβρικών παραστάσεων σαν εφαρμογή και εξάσκηση αυτών και όχι στη δημιουργία νοημάτων για τους μαθητές και ευκαιριών για γενίκευση και καλλιέργεια της μαθηματικής τους σκέψης.

Να κάνετε τις πράξεις:

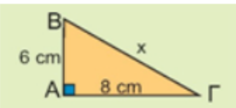
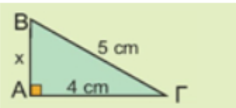
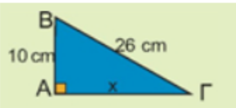
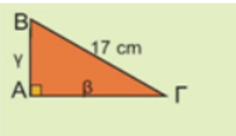
α. $(x - 4)^2 + (2x + 5)^2$
β. $(x^2 - 1)^2 - (x^2 - 3)(x^2 + 3)$
γ. $(x + y)^2 - (x - 2y)(x + 2y) + (2x - y)^2$
δ. $(3x - 4)^2 + (3x + 4)^2 - 2(3x - 4)(3x + 4)$
ε. $(2\alpha + 1)^3 + (2\alpha - 1)^2$
ζ. $(\alpha + 2)^3 - (\alpha + 2)(\alpha^2 - 2\alpha + 4)$
η. $(\alpha^2 + \alpha)^3 - (\alpha^2 - \alpha)^3$
θ. $(4\alpha - 1)^3 - \alpha(8\alpha + 1)(8\alpha - 1)$

Να αποδείξετε ότι:

α. $(x - 2y)^2 - (2x - y)^2 + 3x^2 = 3y^2$
β. $(\alpha - 3\beta)^2 + (3\alpha + 2\beta)(3\alpha - 2\beta) - (3\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 4\beta^2$
γ. $(x - 1)(x + 1)^3 - 2x(x - 1)(x + 1) = x^4 - 1$
δ. $(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$
ε. $(\alpha - 4)^2 + (2\alpha - 3)^2 = \alpha^2 + (2\alpha - 5)^2$
ζ. $(2x^2 + 2x)^2 + (2x + 1)^2 = (2x^2 + 2x + 1)^2$

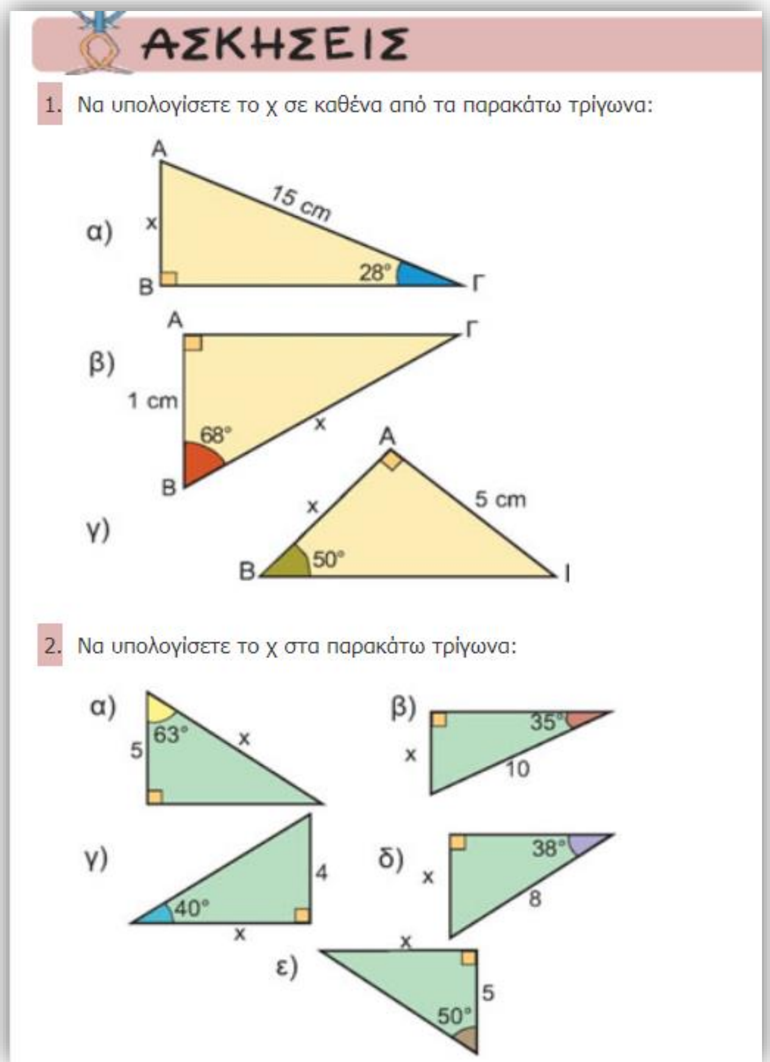
Εικόνα 6: Εφαρμογή σε ταυτότητες

Ακόμα και στη γεωμετρία, όταν οι μαθητές διδάσκονται σημαντικές έννοιες, όπως το Πυθαγόρειο Θεώρημα ή οι τριγωνομετρικοί αριθμοί, το γράμμα συνεχίζει να εμφανίζεται ως «άγνωστος» αριθμός που πρέπει να βρεθεί μέσα από συγκεκριμένες διαδικασίες – πιθανότατα απομνημόνευσης – όπου οι μαθητές δρουν μηχανικά μέσα σε ένα περιβάλλον αναζήτησης του συγκεκριμένου αριθμού και όχι νοηματοδότησης ως προς την αξία ή το λόγο χρήσης αυτών των μαθηματικών εννοιών και ιδιοτήτων που χρησιμοποιούν.

			Α	Β	Γ	Δ
1		x =	7 cm	9 cm	10 cm	12 cm
2		x =	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm
3		x =	14 cm	20 cm	24 cm	30 cm
4		β = και γ =	β=15 και γ=8	β=13 και γ=10	β=12 και γ=13	β=8 και γ=9

Εικόνα 7: Εφαρμογές Πυθαγορείου θεωρήματος

Τα προβλήματα αυτά δεν εμφανίζονται μόνο μέσα στο ελληνικό σχολείο. Μέσα στην παγκόσμια βιβλιογραφία έχουν, επίσης, παρατηρηθεί δυσκολίες των μαθητών όταν επιλύουν προβλήματα τα οποία εμπεριέχουν το Πυθαγόρειο θεώρημα και τα οποία απαιτούν χρήση μεταβλητών και όχι αριθμών (Rabbia, 2013 in Rudi et al., 2020) ή ακόμα και όταν οι μεταβλητές αλλάζουν θέση στο τρίγωνο, μιας που οι μαθητές συνηθίζουν να ακολουθούν διαδικαστικά τη φόρμουλα $α^2 = β^2 + γ^2$ στα προβλήματα του Πυθαγορείου θεωρήματος (Sutton, 2012). Παρόλα αυτά, το μεγαλύτερο μέρος της βιβλιογραφίας αναφέρεται στους διαφορετικούς τρόπους απόδειξης του Πυθαγορείου, στην επανακάλυψη του Πυθαγορείου από τους μαθητές και στους διαφορετικούς τρόπους διδασκαλίας του μέσω βίντεο ή κατασκευών, αλλά όχι στη χρήση του ως εργαλείο μοντελοποίησης μέσω του προγραμματισμού.



Εικόνα 8: Εφαρμογές Τριγωνομετρικών αριθμών

Αντίστοιχα, στη χρήση των τριγωνομετρικών αριθμών οι μαθητές δυσκολεύονται να τους χειριστούν, καθώς «χάνονται» σε υπολογιστικές διαδικασίες και χάνουν το πραγματικό μαθηματικό νόημα των εννοιών, γεγονός που παρατηρείται τόσο μέσα στο ελληνικό σχολείο όσο και ευρύτερα (Orhun, 2022).

Όπως είναι εμφανές από τα παραπάνω, οι μαθητές ναι μεν διδάσκονται τη νέα γνώση, αλλά ταυτόχρονα μένουν σε διαδικασίες κυρίως εφαρμογής και επίλυσης, δηλαδή διαδικαστικές και υπολογιστικές εφαρμογές, οι οποίες δεν έρχονται σε συμφωνία με την ανάπτυξη του μαθηματικού γραμματισμού και της ικανότητας των παιδιών να σκέφτονται μαθηματικά, να μπορούν να γενικεύσουν και να εφαρμόσουν αυτά που μαθαίνουν σε ποικίλα πλαίσια. Έτσι, όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, είναι δυνατόν κάποιος μαθητής να κατέχει βαθιά και ευρεία κατανόηση μαθηματικών εννοιών, σχέσεων, μεθόδων και θεωριών που να αποθηκεύονται, όμως, στο μυαλό με «παθητικό» τρόπο και έτσι αυτός να μην θεωρείται μαθηματικά ικανός. Μία πρόταση, λοιπόν, για διδακτική διαχείριση των παραπάνω δυσκολιών και καταστάσεων είναι η έμφαση στη μοντελοποίηση (δημιουργία αλγεβρικών παραστάσεων που περιγράφουν καταστάσεις και προβλήματα) και στη γενίκευση, κάτι που επιχειρείται να μελετηθεί σε αυτή την έρευνα μέσω της χρήσης του προγραμματισμού σε συνδυασμό με την εισαγωγή της μεταβλητής στο ρόλο του γενικευμένου αριθμού καθώς οι μαθητές χειρίζονται δυναμικά μοντέλα.
Άλλωστε, ένα από τα πιο σημαντικά βήματα στην άλγεβρα είναι η μετάβαση των μαθητών από το ρόλο του γράμματος ως άγνωστο στο ρόλο της μεταβλητής (Blanton et al., 2015; Ely & Adams, 2012) με τη μεταβλητή να παίρνει πολλούς ρόλους, όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα. Μάλιστα, ο Küchemann (1978) μέσα από μία μεγάλη έρευνα του, δημιούργησε μία ιεραρχία της μεταβλητής από τη σκοπιά των ίδιων των παιδιών, όπου το υψηλότερο επίπεδο αυτής ήταν όταν το γράμμα αντιπροσώπευε μία μεταβλητή και έδειξε την πρόκληση που συναντούν οι μαθητές όταν σκέφτονται τη μεταβλητή ως έναν γενικευμένο αριθμό, ενώ έρευνες ακόμη και σήμερα συμφωνούν με την παραπάνω δυσκολία των μαθητών. Σημαντικές δυσκολίες στην έννοια της μεταβλητής μελετήθηκαν και από τον Dede (2004) σε παιδιά γυμνασίου, με την έρευνά του να δείχνει αφενός ότι οι μαθητές δεν κατανοούσαν τι είναι μεταβλητή και ποιος είναι ο λειτουργικός της ρόλος, αποτυγχάνοντας έτσι να κάνουν αφαιρέσεις και γενικεύσεις, και αφετέρου δεν γνώριζαν πώς να χειριστούν τις μεταβλητές σε άλλα πλαίσια των μαθηματικών πέρα από την άλγεβρα.

1.5 Σχετικά με την παρούσα έρευνα

Η βιβλιογραφία δείχνει πώς υπάρχει ελάχιστη έρευνα στο πώς και στο ποιους τύπους τεχνολογίας θα μπορούσαν οι εκπαιδευτικοί να χρησιμοποιήσουν για την ενίσχυση των μαθηματικών ικανοτήτων μοντελοποίησης των παιδιών (Cevikbas et al., 2021), ενώ παρόμοιο και γενικό «κενό» των ερευνών αναφέρεται και στην απόκτηση των μαθηματικών δεξιοτήτων (Niss & Højgaard, 2019) σε σχέση με το ρόλο των ψηφιακών εργαλείων με αυτές (Jackvist et al., 2018). Αυτό, λοιπόν, στο οποίο αποσκοπεί η συγκεκριμένη έρευνα είναι να μελετήσει την ικανότητα ανθεκτικής κατανόησης και χρήσης μαθηματικών ιδιοτήτων από τους μαθητές, καθώς αυτοί μαστορεύουν με δυναμικά μοντέλα γραμμάτων του Ελληνικού αλφαβήτου και μάλιστα μέσα σε ένα προγραμματιστικό περιβάλλον. Με αυτόν τον τρόπο, η ερευνήτρια επιθυμεί να κάνει άμεση σύνδεση της ικανότητας των παιδιών να χρησιμοποιήσουν τις μαθηματικές ιδιότητες για να μοντελοποιήσουν μία κατάσταση με το ρόλο που διαδραματίζει ένα ψηφιακό εργαλείο προγραμματισμού προς αυτή την κατεύθυνση. Άλλωστε, όπως θα αναλυθεί και σε επόμενο κεφάλαιο, εκφραστικά εργαλεία, όπως το MaLT2 που χρησιμοποιείται εδώ, υποστηρίζουν τη διασύνδεση μεταξύ άλγεβρας και γεωμετρίας και οι μαθητές αποκτούν εμπειρίες εμπλοκής με τη λογικομαθηματική σκέψη οι οποίες θα ήταν αδύνατο να υπάρξουν χωρίς αυτά τα δυναμικά μέσα (Κυνηγός, 2011).
Επιπρόσθετα, η συγκεκριμένη έρευνα αναμένεται να δώσει κάποιες ενδείξεις ως προς τις δραστηριότητες που χρησιμοποιεί η ερευνήτρια, καθώς σύμφωνα με τη βιβλιογραφία

υπάρχει ανάγκη για εντοπισμό των ειδών των δραστηριοτήτων οι οποίες είναι πιο αποτελεσματικές στην ανάπτυξη της ικανότητας των παιδιών να κάνουν μαθηματικά (Cevikbas et al., 2021). Στη συγκεκριμένη έρευνα χρησιμοποιούνται δραστηριότητες ομαδικές και ανοιχτές στα παιδιά, οι οποίες ενσωματώνουν εσφαλμένες μαθηματικές ιδιότητες και τις οποίες οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν και να διορθώσουν μέσω του πειραματισμού τους με το ψηφιακό εργαλείο. Οι δραστηριότητες δεν μοιάζουν σαν μαθηματικές ασκήσεις με τις οποίες συνήθως χάνεται το ενδιαφέρον των παιδιών, αλλά έχουν δομηθεί έτσι ώστε τα παιδιά να μαστορεύουν τα μοντέλα των γραμμάτων του Ελληνικού αλφαβήτου τα οποία στη συνέχεια μπορούν να χρησιμοποιήσουν για να κατασκευάσουν κάτι που έχει προσωπικό νόημα για αυτούς. Παράλληλα, οι δραστηριότητες με το ψηφιακό εργαλείο χαμηλώνουν το διακύβευμα και δίνουν την ελευθερία στους μαθητές να κάνουν λάθη χωρίς να αισθάνονται πως θα κριθούν αρνητικά για αυτά, όπως συμβαίνει στις συνήθεις καταστάσεις αξιολόγησης του ελληνικού σχολείου. Τέλος, αξίζει να αναφερθεί πως τα κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού Αλφαβήτου έχουν αξιοποιηθεί και στο παρελθόν, σε έρευνα μαθητών Α' Γυμνασίου σχετικά με τις αναλογίες (Psycharis & Kynigos, 2009), όπως και παλαιότερα με το κεφαλαίο γράμμα Ν για τον ίδιο σκοπό των αναλογιών (Noss & Hoyles, 1996), εδώ όμως η ερευνήτρια τα χρησιμοποιεί διαφορετικά με έμφαση στη χρήση του Πυθαγορείου και των τριγωνομετρικών αριθμών. Καταλυτικός είναι ο ρόλος του ψηφιακού εργαλείου MaLT2, «απογόνου» της Χελωνόσφαιρας, το οποίο επιτρέπει το δυναμικό χειρισμό των μοντέλων μέσω διαδικασιών και μεταβολέων, στοιχεία που θα αναλυθούν στο επόμενο κεφάλαιο, καθώς αυτά τα στοιχεία ήταν που επέτρεψαν τη μελέτη της χρήσης της μεταβλητής ως γενικευμένο αριθμό από τους μαθητές και ώθησαν την πορεία της σκέψης τους προς τη γενίκευση.

Συμπερασματικά και σε συνδυασμό με όλα τα παραπάνω στοιχεία, η παρούσα έρευνα αποσκοπεί να ρίξει φως στον τρόπο που οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά ως εργαλείο και να γίνουν μαθηματικά ικανοί (mathematically competent) μέσα από την εμπλοκή τους με τον προγραμματισμό. Άλλωστε, όπως έχει ήδη αναφερθεί, το να είναι κάποιος μαθηματικά εγγράμματος ή μαθηματικά ικανός σχετίζεται άμεσα με τη μαθηματική μοντελοποίηση και την ικανότητα των μαθητών να αναπτύξουν μία βαθιά και ανθεκτική κατανόηση μιας σειράς μαθηματικών εννοιών και ιδιοτήτων βάζοντας τες σε χρήση μέσα στο εκάστοτε πλαίσιο.

2. Θεωρητικό Πλαίσιο

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει παρουσίαση των θεωρητικών μοντέλων που πλαισίωσαν το σχεδιασμό και την ανάλυση της παρούσας έρευνας, ενώ στη συνέχεια ακολουθεί σύντομη παρουσίαση των ψηφιακών μέσων και αναλυτική περιγραφή του ψηφιακού εργαλείου Χελωνόσφαιρα/MaLT2 που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα έρευνα.

2.1 Constructionism

Έχοντας ως αφετηρία τον Piaget και τη θεωρία του κονστρουκτιβισμού (constructivism), ο Seymour Papert ανέπτυξε τη θεωρία μάθησης που ονομάζεται constructionism. Η θεωρία αυτή έχει ως πυλώνα της ότι η μάθηση προκύπτει μέσα από τη συνειδητή εμπλοκή του μαθητή σε κάποια κατασκευή και η οποία έχει προσωπικό νόημα για τον ίδιο. Με άλλα λόγια, η βασική προσέγγιση της θεωρίας του constructionism είναι ότι η γνώση κατασκευάζεται ενεργητικά από τον ίδιο το μαθητή και δεν μεταφέρεται απλά από τον καθηγητή στο μαθητή. Όπως αναφέρει, μάλιστα, ο ίδιος (Papert & Harel, 1991):

> *“Constructionism – the N word as opposed to the V word – shares constructivism's connotation of learning as "building knowledge structures" irrespective of the circumstances of the learning. It then adds the idea that this happens especially felicitously in a context where the learner is consciously engaged in constructing a public entity, whether it's a sand castle on the beach or a theory of the universe.”*

Ο Papert διαφώνησε και διαφοροποιήθηκε από τον Piaget ως προς την πεποίθηση του δεύτερου πως υπάρχουν συγκεκριμένα στάδια ωρίμανσης του ανθρώπινου νου και πως οι λογικές διεργασίες που μπορούν να πραγματοποιήσουν τα παιδιά εξαρτώνται από την ηλικία τους. Ο Papert (1980) θεωρεί πως τα παιδιά είναι χαρισματικοί μαθητές σαν αυτό να είναι ένα έμφυτο χαρακτηριστικό τους, καθώς για παράδειγμα μαθαίνουν να μιλούν και να κινούνται στο χώρο, πολύ νωρίτερα από το σχολείο και πριν διδαχθούν γλώσσα ή γεωμετρία. Έτσι, ο ίδιος πίστευε ότι πως τα παιδιά μπορούν να κάνουν γενικεύσεις και να σκεφτούν με ανώτερους τρόπους και πέρα από τους περιορισμούς των σταδίων ωρίμανσης, αρκεί να τους δοθούν οι κατάλληλες ευκαιρίες, ενώ υποστήριξε πως πλούσια σε τέτοιες ευκαιρίες και δυνατότητες για τα παιδιά είναι τα ψηφιακά περιβάλλοντα, τα οποία με τον κατάλληλο σχεδιασμό μπορούν να προσφέρουν στο παιδί τη δυνατότητα να δημιουργήσει μαθηματικά νοήματα.

Για τον Papert, λοιπόν, η σύγχρονη τεχνολογία και ο υπολογιστής είναι εργαλεία με τα οποία μπορούν να κατασκευαστούν τέτοια πλούσια περιβάλλοντα μάθησης τα οποία θα μπορούν να επηρεάζουν τον τρόπο σκέψης και μάθησης των παιδιών. (Papert, 1980; Κυνηγός, 2011). Έδωσε, μάλιστα, ιδιαίτερη έμφαση στον προγραμματισμό αναγνωρίζοντάς τον ως ένα εξαιρετικό εργαλείο εμπλοκής, σκέψης και δημιουργίας των παιδιών. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο, επομένως, ο προγραμματισμός προσεγγίζεται ως ένα μέσο διερεύνησης, έκφρασης και δημιουργίας ιδεών και νοημάτων των μαθητών, ενώ παράλληλα προσφέρει πολύτιμες ευκαιρίες για συνεργατική μάθηση και κοινωνική κατασκευή νοημάτων μέσα στην σχολική τάξη (social constructionism).

Επιπρόσθετα, ο Papert υποστήριξε ότι οι επιστήμες της αγωγής θα πρέπει να επικεντρωθούν στο τι μπορεί να κάνει ο μαθητής και στα νοήματα που αυτός κατασκευάζει και όχι στην κατανόηση ή μη, των δεδομένων και μη αμφισβητήσιμων μαθηματικών αληθειών. Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση, μάλιστα, ο Κυνηγός (2011) υπογραμμίζει ότι τα μαθηματικά αποτελούν ένα προσωπικό κατασκεύασμα αυτού που ασχολείται με αυτά – είτε είναι μαθητής, είτε μαθηματικός – και χτίζει πάνω στις δικές του ιδέες και θεωρίες, περνώντας επαναλαμβανόμενα και κυκλικά από υποθέσεις, αναθεωρήσεις, τροποποιήσεις, διορθώσεις και ελέγχους. Με άλλα λόγια, η πορεία μάθησης που ακολουθεί ένας μαθητής είναι ίδια με την πορεία που ακολουθεί και ένας μαθηματικός για να ανακαλύψει τις μαθηματικές αλήθειες.

2.2 Αφαίρεση και Γενίκευση

Η αφαίρεση (abstraction) είναι το αποτέλεσμα μιας εμπειρικής διαδικασίας με την οποία ο μαθητής αναγνωρίζει κανονικότητες μεταξύ των εμπειριών του και αποκτά την ικανότητα να διακρίνει αν αυτές οι νέες εμπειρίες έχουν ομοιότητες με άλλες εμπειρίες του παρελθόντος που έχει ήδη βιώσει (Skemp, 1986). Με τον όρο «έννοια», ο Skemp αναφέρεται στο προϊόν της αφαίρεσης, δηλαδή σε ένα γενικευμένο αντικείμενο το οποίο αντιπροσωπεύει μία κλάση αντικειμένων με κάποια κοινά χαρακτηριστικά και είναι προφανές ότι η κλάση αυτή δεν παραμένει αναλλοίωτη κατά το πέρασμα του χρόνου, αντιθέτως εμπλουτίζεται καθώς ο μαθητής βιώνει νέες εμπειρίες. Για παράδειγμα, η έννοια «αριθμός» για έναν μαθητή μπορεί να περιέχει στην αρχή μόνο τους φυσικούς αριθμούς, ενώ αργότερα, και καθώς οι τάξεις προχωράνε, η έννοια αυτή μπορεί να διευρυνθεί συμπεριλαμβάνοντας και τους ακέραιους, τα κλάσματα, τους ρητούς κτλ. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται γενίκευση. Συνεπώς, η βασική διαφορά των δύο εννοιών, είναι η εξής: Με την αφαίρεση δημιουργείται ένα καινούργιο νοητικό αντικείμενο, ενώ με τη γενίκευση εμπλουτίζεται ένα ήδη υπάρχον (Mitchelmore & White, 2000).

Οι διαδικασίες της αφαίρεσης και της γενίκευσης δεν αφορούν μόνο μαθηματικές έννοιες, αλλά και σχέσεις που δημιουργούνται μεταξύ τους. Σε συνέχεια του παραδείγματος που δόθηκε νωρίτερα, μπορούμε να πούμε ότι κατά τη γενίκευση της έννοιας του «αριθμού» ώστε να συμπεριλαμβάνει και τους αρνητικούς ακέραιους αριθμούς, γενικεύεται ταυτόχρονα και η έννοια της «πρόσθεσης» δύο αριθμών. Έτσι, οι μαθηματικές έννοιες αποκτούν και ένα στοιχείο φορμαλισμού, καθώς οι πιο σύνθετες μαθηματικές έννοιες προκύπτουν ως γενικεύσεις απλούστερων κλάσεων και περιγράφονται περισσότερο από σχέσεις και ιδιότητες και λιγότερο από αντιπροσώπους της κλάσης – έννοιας. Ο Piaget (1975), μάλιστα, υποστήριξε ότι ο αναστοχασμός διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην αφαιρετική διαδικασία, καθώς κατά τον αφαιρετικό αναστοχασμό, το προϊόν της αφαίρεσης δεν πηγάζει από το αντικείμενο των ενεργειών του ατόμου, αλλά από τις ίδιες τις ενέργειες και τον τρόπο που αναστοχάζεται πάνω σε αυτές. Αποτελεί, δηλαδή, μία κατασκευαστική διαδικασία νοητικών αντικειμένων και δομών οι οποίες ορίζουν τις σχέσεις μεταξύ αυτών των αντικειμένων.

Ο Papert υποστήριξε ότι τα παιδιά μπορούν να κάνουν μαθηματικές αφαιρέσεις αν έρθουν σε επαφή με κατάλληλα μαθησιακά περιβάλλοντα πλούσια σε τέτοιες ευκαιρίες και οι Noss και Hoyles (1996) συμφώνησαν μαζί του, ισχυριζόμενοι επιπλέον πως οι αφαιρέσεις αυτές δεν είναι καθολικές, αλλά σχετίζονται με τα χαρακτηριστικά του μαθησιακού περιβάλλοντος μέσα στο οποίο αναδύθηκαν. Κάτω από αυτή την οπτική και με σκοπό να περιγράψουν τις διαδικασίες αφαίρεσης και γενίκευσης, οι Noss και Hoyles διατύπωσαν το θεωρητικό μοντέλο των εγκαθιδρυμένων αφαιρέσεων. Ως εγκαθιδρυμένη αφαίρεση ορίζουν μία ευκρινή δήλωση, μία πεποίθηση του μαθητή, αλλά και μία εξελισσόμενη διαδικασία προβληματισμού ταυτόχρονα, της οποίας η μορφή εξαρτάται από το μαθησιακό περιβάλλον μέσα στο οποίο ενεργεί ο μαθητής.

Στην παρούσα έρευνα, οι διαδικασίες της αφαίρεσης και της γενίκευσης θα προσεγγιστούν με την παραπάνω οπτική, δηλαδή ως διαδικασίες μέσα σε ένα πλαισιοθετημένο περιβάλλον, ενώ ιδιαίτερη σημασία θα δοθεί στον αναστοχασμό των μαθητών. Υπό αυτό το πρίσμα, ακόμα και ο αναστοχασμός αυτός είναι πλαισιοθετημένος και μπορεί να θεωρηθεί ως μία διαδικασία τοποθέτησης νοημάτων το ένα πάνω στο άλλο (σαν στρώματα) και όχι σαν μία αντικατάσταση των νοημάτων που αφορούν μία συγκεκριμένη κατάσταση ειδικά, με αποπλαισιοποιημένα γενικά νοήματα. Το συγκεκριμένο είδος αναστοχασμού, όπου οι έννοιες δεν αντικαθίστανται από πιο σύνθετες, αλλά αναπτύσσονται οι ίδιες σε πιο σύνθετες, οι Noss και Hoyles ονόμασαν εγκαθιδρυμένο αναστοχασμό και αυτό θα υιοθετηθεί ως προσέγγιση αναστοχασμού των μαθητών και στην παρούσα έρευνα.

2.3 Η έννοια της Αναδόμησης

Είναι γεγονός ότι η έρευνα στον τομέα της εκπαίδευσης επικεντρώνει την προσοχή της στον τρόπο με τον οποίο θα μπορούσαν να επιτευχθούν καλύτερα οι παραδοσιακοί και παγιωμένοι στόχοι της διδασκαλίας που καθορίζονται από το εκάστοτε αναλυτικό πρόγραμμα της χώρας (Wilensky & Papert, 2010), με αποτέλεσμα οι ερευνητές να θέτουν και να ερευνούν ερωτήματα, όπως για παράδειγμα το «ποιες είναι οι πιο συνηθισμένες παρανοήσεις ή δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές». Έτσι, οι παραπάνω ερευνητές Wilensky και Papert αντιστέκονται και εναντιώνονται σε αυτή τη λογική φέρνοντας στο προσκήνιο ένα νέο ερευνητικό πλαίσιο: το πλαίσιο της αναδόμησης (restructuration). Σύμφωνα με αυτό το πλαίσιο, η προσοχή της έρευνας μετατοπίζεται από τα μέσα της διδασκαλίας στο αντικείμενο της μάθησης, ενδιαφερόμενοι για τον τρόπο που η δομή και οι ιδιότητες της γνώσης επηρεάζουν τον τρόπο εκμάθησής της από μεμονωμένους μαθητές ή ομάδες. Στην επιστήμη των μαθηματικών, η αναδόμηση ορίζεται ως η αλλαγή από μία διδακτική δομή ενός κλάδου των μαθηματικών, δηλαδή από την κωδικοποίηση της γνώσης αυτού του κλάδου μέσω της αναπαραστασιακής υποδομής που χρησιμοποιείται για να εκφραστεί αυτή η γνώση, σε μία άλλη δομή ως αποτέλεσμα της αλλαγής της αναπαραστασιακής της υποδομής.
Υπό αυτή την οπτική, το συγκεκριμένο πλαίσιο, σύμφωνα με τους Wilensky και Papert, πρόκειται για έναν μετασχηματισμό που ξεφεύγει από τα στενά όρια της παραδοσιακής διδασκαλίας και της γενικότερης φιλοσοφίας γύρω από την εκπαίδευση και αφορά τόσο στη διδακτέα ύλη και τις νοητικές αναπαραστάσεις των παιδιών, όσο και σε κοινωνικές αξίες. Συνεπώς, μέσα στο πλαίσιο της αναδόμησης, ο σχεδιαστής αμφισβητεί την υπάρχουσα δομή και εστίαση του αναλυτικού προγράμματος, δίνοντας μία νέα οπτική στις ευκαιρίες δημιουργίας νοημάτων για τους μαθητές πάνω σε μαθηματικές έννοιες. Μάλιστα, μία τέτοια καινοτόμα ματιά θα μπορούσε να οδηγήσει σε νέες μαθησιακές δομές οι οποίες να συμπεριλαμβάνουν τις νέες δυνατότητες διερεύνησης και έκφρασης που προσφέρουν τα ψηφιακά μέσα (Kynigos & Grizioti, 2018).

Υιοθετώντας την συγκεκριμένη οπτική και τη συγκεκριμένη προσέγγιση στο σχεδιασμό της έρευνας, η ερευνήτρια προσπάθησε να αναδομήσει τη γνώση με στόχο την εμφάνιση περισσότερων ευκαιριών για τη δημιουργία πλούσιων μαθηματικών νοημάτων από τους μαθητές με στόχο να αναπτύξουν μία ανθεκτική κατανόηση γύρω από μαθηματικές ιδιότητες και την ικανότητα να τις βάλουν σε χρήση μέσα σε ένα προγραμματιστικό περιβάλλον για να κατασκευάσουν ή να διορθώσουν δυναμικά μοντέλα γραμμάτων του Ελληνικού αλφαβήτου. Έτσι, έγινε μία αναδόμηση ως προς τα μέσα αναπαράστασης σε σχέση με την καθορισμένη δομή του Αναλυτικού Προγράμματος, αξιοποιώντας τις δυνατότητες των ψηφιακών μέσων και συγκεκριμένα του προγραμματιστικού περιβάλλοντος στα μαθηματικά. Η αλλαγή αυτή επιτρέπει έναν διαφορετικό τρόπο να δουν τα παιδιά τα μαθηματικά ως ολότητα, αλλά και ως εργαλείο για την μοντελοποίηση διαφόρων καταστάσεων. Ταυτόχρονα προωθεί έναν διαφορετικό τρόπο χρήσης και αλληλεπίδρασης των μαθητών με τις μαθηματικές έννοιες και ιδιότητες που η σχεδιάστρια έχει ενσωματώσει στα εσφαλμένα μοντέλα σε σύγκριση με τον παραδοσιακό τρόπο των σχολικών βιβλίων και μία μεγάλη ευκαιρία να έρθουν σε επαφή με διαφορετικούς ρόλους της έννοιας της μεταβλητής μέσα από το εργαλείο. Άλλωστε, όπως έχει αναφερθεί, στόχος της έρευνας δεν είναι οι μαθητές να μάθουν, για παράδειγμα, να επιλύουν απλά την εξίσωση του Πυθαγόρειου θεωρήματος όπως ορίζει το Αναλυτικό Πρόγραμμα της χώρας μας, αλλά να σκεφτούν μαζί με το ψηφιακό μέσο MaLT2 και να χρησιμοποιήσουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα σαν εργαλείο για να διορθώσουν το μοντέλο ενός γράμματος και μάλιστα όχι με συγκεκριμένους αριθμούς, αλλά με χρήση μεταβλητών σε ένα γενικευμένο μοντέλο. Παράλληλα, στόχος είναι να κατανοήσουν την αξία της κάθε μαθηματικής ιδιότητας που χρησιμοποιούν στα μοντέλα των γραμμάτων, στοιχεία που καλλιεργούν τη μαθηματική σκέψη των παιδιών και που δημιουργούν ευκαιρίες για να γίνουν οι ίδιοι μαθηματικά ικανοί (mathematically competent). Μάλιστα, οι έννοιες που χρησιμοποιούν οι μαθητές στα διάφορα μοντέλα των γραμμάτων που επιλέχθηκαν «κρύβουν» μαθηματικές ιδιότητες και από τις τρεις τάξεις του Γυμνασίου, χωρίς να αποκόπτουν την ύλη σε κεφάλαια και σχολικές τάξεις, ενώ οι δραστηριότητες που έχουν σχεδιαστεί από την ερευνήτρια προϋποθέτουν εξερεύνηση, πειραματισμό, συνεργασία και επιχειρηματολογία από την πλευρά των μαθητών, στοιχεία που επίσης σπάνια εμφανίζονται μέσα σε μία σχολική τάξη η οποία ακολουθεί διαδικαστικά την ύλη του Αναλυτικού Προγράμματος των μαθηματικών.

2.4 Μικρόκοσμοι

Ο Seymour Papert (1980) ήταν ο πρώτος που δανείστηκε τον όρο «μικρόκοσμος» από το πεδίο της τεχνητής νοημοσύνης (A.I.) και τον εισήγαγε στην εκπαιδευτική μαθηματική κοινότητα, περιγράφοντας τον ως έναν αυτόνομο κόσμο μέσα στον οποίο οι μαθητές μαθαίνουν να μεταφέρουν συνήθειες της εξερεύνησής τους από την προσωπική τους ζωή στο επίσημο πεδίο της επιστημονικής δημιουργίας και κατασκευής. Πρώτο παράδειγμα ενός μικρόκοσμου αποτέλεσε η «Γεωμετρία της Χελώνας» μέσω της προγραμματιστικής γλώσσας Logo για την οποία ακολουθεί εκτενέστερη περιγραφή σε επόμενη παράγραφο και η οποία πυροδότησε μεγάλη έρευνα πάνω στην κατασκευή γεωμετρικών νοημάτων από τους μαθητές (Laborde et al., 2006).
Αρχικά, οι μικρόκοσμοι ήταν καθαρά προγραμματιστικά περιβάλλοντα με κύριο χαρακτηριστικό τους τη δυνατότητα κατασκευής γραφικών μοντέλων μέσω της χρήσης προγραμματισμού. Σύμφωνα με μεταγενέστερες περιγραφές του όρου, οι μικρόκοσμοι αφορούσαν σε υπολογιστικά περιβάλλοντα που ενσωματώνουν ένα συνεκτικό σύνολο επιστημονικών εννοιών και σχέσεων και είναι σχεδιασμένα με τέτοιο τρόπο ώστε με κατάλληλες δραστηριότητες, παιδαγωγικές προσεγγίσεις και διδακτικούς χειρισμούς από τον εκπαιδευτικό, οι μαθητές να εμπλέκονται σε καταστάσεις εξερεύνησης, διερεύνησης και κατασκευής δομημάτων οι οποίες είναι πλούσιες ως προς τη δημιουργία νοημάτων για τους ίδιους (Kynigos, 2007b). Η ίδια η φύση των μικρόκοσμων, όπου κάποιος μπορεί πολύ εύκολα να τους «πειράξει», να τους εκτελέσει και να λάβει άμεση ανατροφοδότηση από αυτούς, προωθώντας έτσι τον πειραματισμό και το μαστόρεμα, τους κατατάσσει στα βασικά εργαλεία μάθησης στο πλαίσιο του constructionism (Kafai & Resnick, 1996).

2.4.1 Μισοψημένοι Μικρόκοσμοι

Ο όρος «μισοψημένος μικρόκοσμος» ("half-baked" microworld) διαμορφώθηκε και εισήχθη από τον Κυνηγό (2007) ως εξής: Ένας μισοψημένος μικρόκοσμος αποτελεί ένα κομμάτι λογισμικού σχεδιασμένο ρητά με τέτοιο τρόπο ώστε να προκαλεί τους χρήστες του να κατασκευάσουν κάτι με αυτό, να το αλλάξουν ή να αποδομήσουν κομμάτια του, κάνοντας μαθηματικά με αυτόν και έχοντας ως στόχο να κατασκευάσουν ένα δόμημα που επιθυμούν για τους ίδιους ή τους έχει δοθεί σχεδιασμένο από άλλους. Κύριο σημείο για την ανάδειξη της αξίας των μισοψημένων μικρόκοσμων είναι η χρήση τους όχι ως έτοιμα περιβάλλοντα που απλά θα γίνουν κατανοητά από τους εκπαιδευτικούς και θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια από τους μαθητές, αλλά η αλλαγή τους ώστε οι χρήστες τους να νιώσουν ότι οι ιδέες και οι μικρόκοσμοι που κατασκεύασαν με αυτές είναι πραγματικά δικά τους και τους ανήκουν (Kynigos, 2007b). Συνεπώς, το νόημα είναι αυτοί οι μισοψημένοι μικρόκοσμοι να λειτουργήσουν ως σημεία εκκίνησης, ως γεννήτριες ιδεών και ως πόροι για την κατασκευή ή την αποσύνθεση δομημάτων με στόχο τη δημιουργία νοημάτων από τους μαθητές.
Ταυτόχρονα, μέσα στο πλαίσιο σχεδιασμού εργαλείων για μαθητές, οι μισοψημένοι μικρόκοσμοι λειτουργούν ως έναυσμα, ώστε οι εκπαιδευτικοί να εμπλακούν σε παιδαγωγικό ή επιστημολογικό προβληματισμό, καθώς αποδομούν ή ανακατασκευάζουν τους μικρόκοσμους. Αξιοσημείωτο ενδιαφέρον έχει, επίσης, ο σχεδιασμός μισοψημένων μικρόκοσμων οι οποίοι αποκτούν το ρόλο συνοριακών αντικειμένων (boundary objects), δηλαδή το ρόλο εργαλείων τα οποία χρησιμοποιούνται από κοινότητες ατόμων όπου αποκτούν μεν διαφορετικό νόημα μέσα σε κάθε κοινότητα, αλλά χρησιμοποιούνται μέσα σε ένα κοινό πλαίσιο για τα άτομα όλων των κοινοτήτων (βλέπε περισσότερα για "boundary objects" στο Kynigos, 2007b).

Στην παρούσα έρευνα, η σχεδιάστρια υιοθετεί την προσέγγιση των μικρόκοσμων και των μισοψημένων μικρόκοσμων ως ψηφιακά περιβάλλοντα στα οποία έχουν ενσωματωθεί μαθηματικές έννοιες και ιδιότητες και τα οποία ο χρήστης μπορεί να εξερευνήσει και να χειριστεί ελεύθερα. Σημαντικό στοιχείο είναι ότι στους χρήστες του μικρόκοσμου, δηλαδή στους μαθητές, δεν αποκαλύπτεται η μαθηματική ιδιότητα που επέλεξε η σχεδιάστρια να ενσωματώσει ή να ενσφαλματώσει στο μοντέλο, καθώς το νόημα είναι ο ίδιος ο μαθητής να νοηματοδοτήσει ως προς την ιδιότητα αυτή μέσα από το μαστόρεμα και την γενικότερη αλληλεπίδραση του με τον μικρόκοσμο και να νιώσει άνετα με το να αλλάζει τους κανόνες και τις σχέσεις που κατασκευάζουν τον συγκεκριμένο μικρόκοσμο. Έτσι, η ερευνήτρια έχει σχεδιάσει μισοψημένους μικρόκοσμους για τους μαθητές με στόχο αυτοί να λειτουργήσουν ως μαθησιακά περιβάλλοντα, μέσα στα οποία οι μαθητές χειρίζονται δυναμικά μοντέλα γραμμάτων του Ελληνικού Αλφαβήτου με στόχο να ανακαλύψουν τις ιδιότητες τους και να κατανοήσουν τη συμπεριφορά τους μέσα στο μικρόκοσμο, κάνοντας υποθέσεις και ελέγχοντας τες μέσα από την άμεση ανατροφοδότηση του περιβάλλοντος και δημιουργώντας νοήματα ή διορθώνοντας ιδέες τους, καθώς μαστορεύουν με τα δομήματα.
Η πρόσθετη παιδαγωγική αξία που προκύπτει από την κατασκευή, το μαστόρεμα ή την διόρθωση (debugging) ενός μικρόκοσμου αφορά κυρίως:
α. τη δημιουργία ευκαιριών στους μαθητές για εξερεύνηση, κατασκευή, διερεύνηση, παρατήρηση, αμφισβήτηση, αναστοχασμό και συνεργασία, στοιχεία που συχνά στερεί το σημερινό σχολείο από τους μαθητές του,
β. την βαθιά δομική πρόσβαση στο μοντέλο μέσω μιας γλώσσας προγραμματισμού, καθώς οι μαθητές συνθέτουν ή διορθώνουν εντολές του κώδικα που εμφανίζονται άμεσα στο δόμημά τους,

γ. τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού του μοντέλου μέσω των μεταβολέων και της τρισδιάστατης κάμερας που παρέχει το συγκεκριμένο ψηφιακό εργαλείο μέσα στο οποίο έχει επιλεχθεί από τον ερευνητή να κατασκευαστεί ο μικρόκοσμος,
δ. την ευκαιρία μετάβασης των μαθητών από τα «ανεπίσημα» μαθηματικά στα «επίσημα» και τέλος,
ε. τη δημιουργία ενός πρόσφορου περιβάλλοντος για έκφραση των μαθητών, τόσο προσωπική, όσο και συλλογική, καθώς και για συζήτηση και διαπραγμάτευση μεταξύ τους.

2.5 Το Μοντέλο UDGS

Το μοντέλο UDGS (Hoyles, 1987) αποτελεί ένα εργαλείο με το οποίο μπορεί ένας ερευνητής ή ένας εκπαιδευτικός να περιγράψει τη διαδικασία δημιουργίας νοημάτων των μαθητών, καθώς οι ίδιοι εμπλέκονται με μαθηματικές δραστηριότητες. Στην παρούσα έρευνα, η ερευνήτρια υιοθετεί αυτό το μοντέλο κατά το σχεδιασμό των δραστηριοτήτων ως έναν τρόπο να σχεδιάσει μαθηματικές δραστηριότητες με τη χρήση ενός προγραμματιστικού εργαλείου, όσο και κατά την περιγραφή των αποτελεσμάτων της διδακτικής παρέμβασης.
Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, υπάρχουν 4 φάσεις οι οποίες συνδέονται δυναμικά μεταξύ τους και είναι οι παρακάτω:

- **U**sing (Χρησιμοποιώντας)

Στην πρώτη αυτή φάση οι μαθητές χρησιμοποιούν μαθηματικές και μη μαθηματικές έννοιες, χωρίς ιδιαίτερη προσοχή στο πραγματικό τους νόημα και θεωρείται κάτι παραπάνω από ένα συντακτικό ή διαδικαστικό επίπεδο κατανόησης του τι χρησιμοποιείται. Με άλλα λόγια, η έννοια χρησιμοποιείται από τους μαθητές σαν ένα εργαλείο για λειτουργικούς σκοπούς.

- **D**iscriminating (Διακρίνοντας)

Στη δεύτερη φάση οι μαθητές αρχίζουν να διακρίνουν στοιχεία μαθηματικών στις κατασκευές τους και στον τρόπο που τα χρησιμοποιούν. Έτσι, μετά την επιτυχή χρήση (using) της έννοιας ως προς την επίτευξη των επιθυμητών στόχων, οι μαθητές μπορούν να προκληθούν να ξαναγράψουν σε ρητή μορφή ό,τι ήταν προηγουμένως σιωπηρό και να «διαλύσουν» διαδικασίες που προηγουμένως λειτουργούσαν μόνο συνολικά ή να αναστοχαστούν πάνω σε αυτές.

- **G**eneralizing (Γενικεύοντας)

Οι μαθητές γενικεύουν τις ιδέες τους μέσω της παρατήρησης μοτίβων σε σχέσεις ή μέσω του εντοπισμού ιδιοτήτων των εντολών της Logo που χρησιμοποιούν. Έτσι, εδώ, το εύρος εφαρμογής της έννοιας που χρησιμοποιείται ως εργαλείο επεκτείνεται συνειδητά από τα παιδιά.

- **S**ynthesising (Συνθέτοντας)

Σε αυτή την τελική φάση, η έννοια που χρησιμοποιείται ως εργαλείο ενσωματώνεται συνειδητά σε άλλα πλαίσια εφαρμογής. Οι μαθητές κάνουν σύνθεση αυτών των γενικευμένων ιδεών με τα τυπικά μαθηματικά στα οποία βασίζονται αυτές οι ιδέες. Έτσι, μέσα σε αυτό πλαίσιο ένα μαθηματικό νόημα είναι ο τρόπος που ένας μαθητής κατανοεί, χρησιμοποιεί και σκέφτεται μία συγκεκριμένη μαθηματική έννοια.

Μέσω του παραπάνω μοντέλου σχεδιάζεται και μελετάται προοδευτικά η πορεία σκέψης των μαθητών και τα νοήματα που οι ίδιοι κατασκευάζουν από την απλή χρήση προς τη γενίκευση, στοιχεία που δείχνουν ότι οι μαθητές είναι ικανοί να χρησιμοποιήσουν τις μαθηματικές ιδιότητες ως εργαλεία για να επιτύχουν το στόχο τους κάθε φορά.

2.6 Το Μοντέλο των 5Es

Το μοντέλο των 5Es αποτελεί ένα πλαίσιο που καθοδηγεί τη δομή της παρέμβασης και το σχεδιασμό της δραστηριότητας μέσα σε μία εκπαιδευτική διαδικασία (Benton et al., 2016; 2017), αποτελώντας έναν τρόπο να σκεφτεί ένας ερευνητής ή ένας εκπαιδευτικός και να σχεδιάσει δραστηριότητες με προγραμματιστικά μέσα. Εμπεριέχει μέσα του την κατασκευαστική (constructionist) προσέγγιση της μάθησης και αποτελείται από 5 μη ταξινομημένες φάσεις οι οποίες είναι ευέλικτες στην εφαρμογή τους μέσα σε διαφορετικά πλαίσια.

- **E**xplore (Εξερευνώ): Σε αυτή τη φάση έχει σημασία να σχεδιαστούν δραστηριότητες οι οποίες να επιτρέπουν στους μαθητές να διερευνήσουν ιδέες, να δοκιμάσουν πράγματα, να εντοπίσουν σφάλματα, να διορθώσουν εννοιολογικά και τεχνικά λάθη και να πειραματιστούν αναλαμβάνοντας οι ίδιοι τον έλεγχο της δικής τους μάθησης, αναζητώντας παράλληλα τους λόγους και τις αιτίες πίσω από κάθε αποτέλεσμα που εμφανίζεται κατά τη διερεύνηση τους.

Πιο συγκεκριμένα, στα πλαίσια του σχεδιασμού της παρούσας εκπαιδευτικής παρέμβασης, οι μαθητές έχουν ευκαιρίες να εξερευνήσουν διαφορετικούς τρόπους σκέψης, εμπλοκής και ανάπτυξης μαθηματικών και υπολογιστικών εννοιών μαζί με το ψηφιακό εργαλείο, καθώς η κύρια μαθησιακή εμπειρία προκύπτει από την εξερεύνηση των δυνατοτήτων της χελώνας (Papert, 1980) μέσα στο προγραμματιστικό περιβάλλον της Logo, ενώ οι μαθητές αναλαμβάνουν ταυτόχρονα τον έλεγχο της δικής τους μάθησης μέσα από την κατασκευή διαδικασιών και δομημάτων στο MaLT2.

- **E**xplain (Εξηγώ): Σε αυτή τη φάση το κλίμα πρέπει να είναι πρόσφορο για συζήτηση ανάμεσα σε όλη την τάξη υπό την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού ή ανάμεσα στις ομάδες μαθητών μέσω αναστοχαστικών ερωτήσεων που θέτει ο ίδιος. Οι μαθητές θα πρέπει να έχουν ευκαιρίες να διατυπώνουν τις απόψεις και τις ιδέες τους, να αιτιολογούν τις επιλογές τους και να εξηγούν τι έχουν μάθει και τι έχουν κατανοήσει, καθώς αυτό τους βοηθά να αποσαφηνίσουν τις σκέψεις τους σε μεγαλύτερο βαθμό.

Στο παρόν πλαίσιο, ο ίδιος ο προγραμματισμός γίνεται για τους μαθητές εργαλείο αναστοχασμού και σαφής διατύπωσης της σκέψης τους, αφού σκέφτονται μαζί με αυτό, και εξηγούν τα βήματα που ακολούθησαν για να κατασκευάσουν το εκάστοτε δόμημα.

- **E**nvisage (Προβλέπω): Σε αυτή τη φάση δίνεται σημασία στην πρόβλεψη πριν το αποτέλεσμα, για αυτό και οι μαθητές είναι σημαντικό να ενθαρρύνονται να προβλέψουν τα αποτελέσματα τους πριν την εκτέλεση του προγράμματος και στη συνέχεια να συγκρίνουν αυτό που προέβλεψαν με αυτό που τελικά προέκυψε. Σύμφωνα με τους δημιουργούς του μοντέλου των 5Es, η φάση της πρόβλεψης θα είναι καλό να εξισορροπείται με την φάση της εξερεύνησης μέσα σε μία δραστηριότητα.

Πιο συγκεκριμένα, στον Χελωνόκοσμο οι μαθητές έχουν την ευκαιρία της πρόβλεψης μέσα από τη συντονικότητα του σώματος (Papert, 1980), καθώς μπαίνουν οι ίδιοι νοερά στη θέση της χελώνας την ώρα που κατασκευάζουν τις εντολές, πριν εκτελέσουν το πρόγραμμα. Στην περίπτωση, μάλιστα, που η διαισθητική γνώση-πρόβλεψη διαφέρει από το τελικό αποτέλεσμα, δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές για μεγαλύτερο αναστοχασμό, συζήτηση, εξερεύνηση και αναδιαμόρφωση της γνώσης που είχαν νωρίτερα.

- **E**xchange (Ανταλλάσσω): Στη φάση αυτή έχει σημασία να δημιουργηθούν ουσιαστικές εμπειρίες στους μαθητές για διαμοιρασμό (sharing) και αξιοποίηση (built on) των ιδεών των άλλων, καλλιεργώντας παράλληλα δεξιότητες συνεργασίας. Με αυτό τον τρόπο, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να επιχειρηματολογήσουν για τις ιδέες τους, να αναστοχαστούν και πιθανώς να τις τροποποιήσουν «χτίζοντας» πάνω σε άλλες, αλλά και να διορθώσουν ιδέες άλλων ή να συγκεκριμενοποιήσουν ιδέες τους που δεν είχαν διαμορφωθεί πλήρως έως τώρα.

- bridg**E** (Γεφυρώνω): Εδώ, οι ιδέες που έχουν ενσωματωθεί σε μία δραστηριότητα θα πρέπει να συνδεθούν με σαφή τρόπο με το εκάστοτε πλαίσιο που στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι τα μαθηματικά.

Εδώ, δηλαδή, οι μαθητές θα πρέπει να υποστηρίζονται από τον εκπαιδευτικό για να μπορούν να κάνουν συνδέσεις μεταξύ του προγραμματιστικού περιβάλλοντος του MaLT2 και των «επίσημων» μαθηματικών μέσα από μία αναπλαισίωση και επανατοποθέτηση των ιδεών τους.

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, το μοντέλο των 5Es έχει άμεση σχέση με το προγραμματιστικό εργαλείο που έχει επιλεχθεί για τη συγκεκριμένη έρευνα και το οποίο περιγράφεται αναλυτικά σε επόμενη παράγραφο του κεφαλαίου, ενώ το συγκεκριμένο μοντέλο συνέβαλε τόσο στο σχεδιασμό των δραστηριοτήτων, όσο και στην ανάλυση των νοημάτων που κατασκεύασαν τα παιδιά μέσα από τη χρήση του MaLT2 με στόχο την επίτευξη μιας ανθεκτικής κατανόησης για τα ίδια γύρω από το νόημα και τη χρήση μιας σειράς μαθηματικών ιδιοτήτων.

2.7 Το Πλαίσιο Διδασκαλίας για Ανθεκτική Κατανόηση (Teaching for Robust Understanding – TRU Framework)

Το θεωρητικό πλαίσιο Διδασκαλίας για Ανθεκτική Κατανόηση (TRU) έκανε την πρώιμη εμφάνιση του με τον Schoenfeld (2013) και αποτελεί έναν τρόπο προσδιορισμού ισχυρών μαθησιακών περιβαλλόντων στρέφοντας την προσοχή από το περιεχόμενο του μαθήματος στην αναζήτηση των εμπειριών που πρέπει να έχουν οι μαθητές προκειμένου να εξελιχθούν σε ισχυρούς στοχαστές (powerful thinkers) και λύτες προβλημάτων (problem solvers), δημιουργώντας έτσι ευκαιρίες για ένα καθαρά μαθητοκεντρικό περιβάλλον. Το παρόν πλαίσιο στοχεύει τόσο στην ενίσχυση των διδακτικών πρακτικών και στην επαγγελματική ανάπτυξη του εκπαιδευτικού, όσο και σε πιο συστηματικές αλλαγές και βελτιώσεις στο σχολείο χωρίς όμως να προσδιορίζει κάποιο συγκεκριμένο είδος διδασκαλίας ή δραστηριότητας τάξης. Αντίθετα, σέβεται την αυτονομία και την προσωπική ατζέντα του κάθε εκπαιδευτικού, αναγνωρίζει πως υπάρχουν πολλοί τρόποι να είναι κάποιος «καλός δάσκαλος» και έτσι δίνει σημασία στον τρόπο που θα δημιουργηθεί ένα ισχυρό περιβάλλον μάθησης από τον εκπαιδευτικό και τις ευκαιρίες που θα προσφέρει το ίδιο το περιβάλλον στους μαθητές (Schoenfeld & the TRU Project, 2016; Li & Schoenfeld, 2019).

Η ποιότητα, λοιπόν, ενός μαθησιακού περιβάλλοντος, σύμφωνα με το παρόν θεωρητικό πλαίσιο, εξαρτάται από τις ευκαιρίες που δίνει στους μαθητές σχετικά με 5 βασικές διαστάσεις οι οποίες παρουσιάζονται στους πίνακες που ακολουθούν (Schoenfeld & the TRU Project, 2016).
Όπως φαίνεται από αυτές τις 5 διαστάσεις, το βασικό χαρακτηριστικό του πλαισίου TRU είναι ότι επικεντρώνεται στη μαθησιακή εμπειρία της τάξης από την πλευρά και την οπτική του μαθητή, ενώ για τον εκπαιδευτικό αποτελεί ένα πλαίσιο σκέψης για τη διδασκαλία του, πριν και μετά την εκπαιδευτική πράξη.

The Five Dimensions of Powerful Classrooms

The Discipline	Cognitive Demand	Equitable Access to Content	Agency, Ownership, and Identity	Formative Assessment
The extent to which classroom activity structures provide opportunities for students to become knowledgeable, flexible, and resourceful disciplinary thinkers. Discussions are focused and coherent, providing opportunities to learn disciplinary ideas, techniques, and perspectives, make connections, and develop productive disciplinary habits of mind.	*The extent to which students have opportunities to grapple with and make sense of important disciplinary ideas and their use. Students learn best when they are challenged in ways that provide room and support for growth, with task difficulty ranging from moderate to demanding. The level of challenge should be conducive to what has been called "productive struggle."*	*The extent to which classroom activity structures invite and support the active engagement of all of the students in the classroom with the core disciplinary content being addressed by the class. Classrooms in which a small number of students get most of the "air time" are not equitable, no matter how rich the content: all students need to be involved in meaningful ways.*	*The extent to which students are provided opportunities to "walk the walk and talk the talk" – to contribute to conversations about disciplinary ideas, to build on others' ideas and have others build on theirs – in ways that contribute to their development of agency (the willingness to engage), their ownership over the content, and the development of positive identities as thinkers and learners.*	*The extent to which classroom activities elicit student thinking and subsequent interactions respond to those ideas, building on productive beginnings and addressing emerging misunderstandings. Powerful instruction "meets students where they are" and gives them opportunities to deepen their understandings.*

Εικόνα 9: Οι 5 διαστάσεις του TRU

Ο πάνω πίνακας αναφέρεται γενικά στις διαστάσεις που θα πρέπει να έχει μία σχολική τάξη για να χαρακτηριστεί ως «ισχυρή», ενώ ο κάτω πίνακας επικεντρώνεται πιο συγκεκριμένα στις μαθηματικές διαστάσεις μιας «ισχυρής» τάξης.

The Five Dimensions of Mathematically Powerful Classrooms

The Mathematics	Cognitive Demand	Access to Mathematical Content	Agency, Authority, and Identity	Formative Assessment
The extent to which the mathematics discussed is focused and coherent, and to which connections between procedures, concepts and contexts (where appropriate) are addressed and explained. Students should have opportunities to learn important mathematical content and practices, and to develop productive mathematical habits of mind.	*The extent to which classroom interactions create and maintain an environment of productive intellectual challenge conducive to students' mathematical development. There is a happy medium between spoon-feeding mathematics in bite-sized pieces and having the challenges so large that students are lost at sea.*	*The extent to which classroom activity structures invite and support the active engagement of all of the students in the classroom with the core mathematics being addressed by the class. No matter how rich the mathematics being discussed, a classroom in which a small number of students get most of the "air time" is not equitable.*	*The extent to which students have opportunities to conjecture, explain, make mathematical arguments, and build on one another's ideas, in ways that contribute to their development of agency (the capacity and willingness to engage mathematically) and authority (recognition for being mathematically solid), resulting in positive identities as doers of mathematics.*	*The extent to which the teacher solicits student thinking and subsequent instruction responds to those ideas, by building on productive beginnings or addressing emerging misunderstandings. Powerful instruction "meets students where they are" and gives them opportunities to move forward.*

Εικόνα 10: Οι 5 μαθηματικές διαστάσεις του TRU

Οι διαστάσεις αυτές, όπως παρουσιάζονται από τον Schoenfeld (Schoenfeld & the TRU Project, 2016; Schoenfeld, 2017), αφορούν πιο αναλυτικά:

1. <u>Τα Μαθηματικά (The Mathematics)</u>: Η 1η διάσταση αφορά στην ποιότητα της μαθηματικής εμπειρίας των μαθητών. Αν το μάθημα των μαθηματικών επικεντρώνεται σε διαδικασίες απομνημόνευσης ή στείρας παράδοσης ύλης μέσα σε ένα απομονωμένο πλαίσιο, χωρίς σύνδεση με προηγούμενες έννοιες ή διαδικασίες, τότε υπάρχουν μικρές ευκαιρίες οι μαθητές να κατανοήσουν αυτά που χρειάζεται και να εμβαθύνουν στις εκάστοτε έννοιες που μελετώνται. Αντίθετα, ο συνδυασμός γνώσης, πρακτικών και συνηθειών του νου προσφέρει μαθηματικές εμπειρίες για να αποκτήσουν οι μαθητές μία ισχυρή μαθηματική σκέψη.

2. <u>Γνωστικό Αίτημα (Cognitive Demand)</u>: Η 2η διάσταση αφορά στις προκλήσεις που παρέχει το μαθησιακό περιβάλλον στους μαθητές για ενεργή εμπλοκή με τα μαθηματικά και για τη δημιουργία νοημάτων με στόχο τη μαθηματική εξέλιξη των παιδιών. Το επίπεδο της πρόκλησης – δυσκολίας των μαθητών θα πρέπει να είναι τέτοιο ώστε να δημιουργεί μία «παραγωγική πάλη» ("productive struggle") για τους μαθητές, όπως αναφέρεται στον 1ο γενικό πίνακα των διαστάσεων του TRU, εννοώντας πως ο εκπαιδευτικός οφείλει να δημιουργήσει ένα έδαφος στην τάξη με διαφορετικά επίπεδα προκλήσεων, από μέτρια προς απαιτητικά, ώστε οι μαθητές να μπορούν να εμπλακούν και να επεκτείνουν την κατανόησή τους από το επίπεδο που ήδη βρίσκονται. Πολύ εύκολες δραστηριότητες δεν αφήνουν περιθώρια για μαθηματική ανάπτυξη των παιδιών, ενώ πολύ δύσκολες δημιουργούν χάσμα από το παρόν γνωστικό επίπεδο των μαθητών μέχρι το απαιτούμενο επίπεδο της δραστηριότητας το οποίο δεν υπάρχει τρόπος να γεφυρωθεί, ενώ καμία από

τις δύο προηγούμενες κατηγορίες δεν προωθεί την εμπλοκή των παιδιών. Με άλλα λόγια, μία ισχυρή διδασκαλία σχεδιάζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να «παίρνει» τους μαθητές από το σημείο που βρίσκονται και να τους προχωράει ένα βήμα παραπέρα, στοιχείο που συναντάμε και στην 5η διάσταση.

3. Ισότιμη Πρόσβαση στο Μαθηματικό Περιεχόμενο (Equitable Access to Mathematical Content): Το νόημα της 3ης διάστασης αφορά την ενεργό εμπλοκή και συμμετοχή του συνόλου των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία ανεξάρτητα από το περιεχόμενο των μαθηματικών. Μία τάξη στην οποία συμμετέχει ένας μικρός αριθμός μαθητών ή μόνο οι «καλοί» μαθητές δεν αποτελεί ένα περιβάλλον διδασκαλίας για ισχυρή κατανόηση των μαθητών.

4. Αυτενέργεια, Αίσθηση Σιγουριάς/Ιδιοκτησίας και Ταυτότητα (Agency, Authority/ Ownership, Identity): Η 4η διάσταση αφορά τις ευκαιρίες που έχουν οι μαθητές να δημιουργήσουν ιδέες και νοήματα και να τα μοιραστούν με την ομάδα τους ή και με ολόκληρη την τάξη. Είναι οι ευκαιρίες να δημιουργήσουν εικασίες, να εξηγήσουν και να παρουσιάσουν τα μαθηματικά τους επιχειρήματα ή να «χτίσουν» ο ένας πάνω στις ιδέες του άλλου, οι οποίες θα συμβάλλουν στην ανάπτυξη της αυτενέργειας (agency) των μαθητών, δηλαδή της ικανότητας και της επιθυμίας να εμπλακούν μαθηματικά κατά την μαθησιακή διαδικασία. Παράλληλα, οι ευκαιρίες που δίνονται στους μαθητές να δουν τον εαυτό τους ως κάποιον που μπορεί να κάνει μαθηματικά και να τα εξηγήσει είναι αυτές που αυξάνουν την αυτοπεποίθηση τους και το αίσθημα ότι είναι οι ίδιοι οι δημιουργοί των ιδεών τους (authority) και έχουν τον έλεγχο αυτών που δημιουργούν (ownership). Όλα τα παραπάνω συμβάλουν στο να αποκτήσουν οι μαθητές μία μαθηματική ταυτότητα, δηλαδή μία αναγνώριση του εαυτού τους ως άτομα που μπορούν να κάνουν μαθηματικά. Βασική προϋπόθεση εμφάνισης και των τριών στοιχείων αυτής της διάστασης είναι η δημιουργία ενός περιβάλλοντος και ενός κλίματος όπου οι μαθητές αισθάνονται άνετα να εκφραστούν.

5. Διαμορφωτική Αξιολόγηση (Formative Assessment): Η 5η διάσταση αφορά τις ευκαιρίες που έχουν οι μαθητές να δείχνουν τον τρόπο που προχωρά η κατανόηση τους κατά τη μαθησιακή διαδικασία, ώστε ο εκπαιδευτικός να μπορεί να υποστηρίξει με διάφορους τρόπους τυχόν παρανοήσεις τους και να τους ωθήσει σε μία βαθύτερη κατανόηση των ιδεών και του περιεχομένου. Συνηθισμένες πρακτικές αξιολόγησης οι οποίες δεν ενσωματώνονται στη μαθησιακή διαδικασία, αλλά είτε την διακόπτουν, είτε πραγματοποιούνται στο τέλος της ενότητας των μαθηματικών ή του σχολικού έτους παρέχουν πληροφορίες στον εκπαιδευτικό τις οποίες είναι πολύ αργά να αξιοποιήσει με στόχο την μαθηματική εξέλιξη των παιδιών. Αυτή η διάσταση παρέχει μία υποστηρικτική δομή για τη 2η διάσταση.

Γενικά, οι 5 διαστάσεις δεν είναι απομονωμένες, αλλά συνδέονται και διαπλέκονται μεταξύ τους, ενώ παράλληλα είναι απαραίτητη η εμφάνιση και των 5 (Schoenfeld, 2018) για να θεωρηθεί ένα περιβάλλον μάθησης ως ισχυρό σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο Διδασκαλίας για Ανθεκτική Κατανόηση. Τέλος, αξίζει να αναφερθεί πως το συγκεκριμένο θεωρητικό πλαίσιο δίνει έμφαση στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών και αναφέρεται στα μαθηματικά ως «ιδέες» και όχι ως δεδομένα και πάγια «προϊόντα», όπως πολύ συχνά συναντώνται τα μαθηματικά στα διάφορα αναλυτικά προγράμματα σπουδών σχολείων και πανεπιστημίων (Li & Schoenfeld, 2019).

2.8 Η Αξιοποίηση των Ψηφιακών Τεχνολογιών στα Μαθηματικά

Η χρήση των ψηφιακών τεχνολογιών στην εκπαίδευση και στη διδακτική των μαθηματικών ειδικότερα, έχει μία μακρά πορεία μέσα στη βιβλιογραφία, με πολλές έρευνες και προκλήσεις ταυτόχρονα τόσο σε θεωρητικό επίπεδο, όσο και σε πρακτικό μέσα από τη μελέτη τρόπων διδασκαλίας, μάθησης και αντίληψης των μαθητών με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων (Laborde et al., 2006; Ferrara et al., 2006). Τα τελευταία χρόνια εμφανίζεται μία αυξημένη ανάγκη για αποδοχή των ψηφιακών τεχνολογιών από το εκπαιδευτικό σύστημα σε όλες τις τάξεις και ηλικίες, καθώς υπάρχει ένα ξεκάθαρο χάσμα ανάμεσα στα αποτελέσματα της έρευνας με βάση τα ψηφιακά εργαλεία στη μαθησιακή και διδακτική πράξη και στην ικανότητα αλλαγής του εκάστοτε εκπαιδευτικού συστήματος μέσα από την ενσωμάτωση καινοτομιών στην εκπαιδευτική πράξη (Sinclair & Yerushalmy, 2016). Το μόνο σίγουρο είναι ότι τα ψηφιακά εργαλεία δημιουργούν ένα περιβάλλον με πολύ περισσότερες ευκαιρίες για τους μαθητές να αναπτύξουν νοήματα, καθώς οι πολλαπλές αναπαραστάσεις και η ανταπόκριση των εργαλείων στις ενέργειες του χρήστη οδηγούν σε μία πιο εστιασμένη αλληλεπίδραση του μαθητή με τις έννοιες (Κυνηγός, 2011), σε αντίθεση με το φτωχό περιβάλλον που δημιουργούν τα μέσα χαρτί-μολύβι, ενώ παράλληλα δίνονται ευκαιρίες για διερεύνηση, γενίκευση και επιχειρηματολογία των ιδεών των μαθητών καθώς χρησιμοποιούν τα εργαλεία.
Ως αναφορά πιο συγκεκριμένα στη Γεωμετρία, τα εργαλεία που έχουν σχεδιαστεί για τη διδακτική της είναι τα εργαλεία δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων και τα προγραμματιστικά εργαλεία με άξονα τη «Γεωμετρία της Χελώνας», τα οποία αναλύονται στις επόμενες δύο παραγράφους με περισσότερη έμφαση στα δεύτερα λόγω του προγραμματιστικού εργαλείου MaLT2 που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία. Το κρίσιμο σημείο για τη διδακτική της Γεωμετρίας είναι ότι οι γεωμετρικές έννοιες έχουν μία διττή υπόσταση, τη σχηματική και τη νοητική και έτσι οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να παλινδρομούν μεταξύ των θεωρητικών αντικειμένων και των αντίστοιχων χωρικών τους αναπαραστάσεων, να μπορούν να αναγνωρίσουν και να διακρίνουν τις γεωμετρικές σχέσεις και ιδιότητες σε ένα σχήμα και να είναι σε θέση να φανταστούν όλα τα δυνατά σχήματα που μπορεί να συνδέονται με ένα γεωμετρικό αντικείμενο (Laborde et al., 2006). Και εδώ ακριβώς βρίσκεται ο ρόλος της ψηφιακής τεχνολογίας. Δηλαδή, να δώσει στα παιδιά τη δυνατότητα να συνδυάσουν τη συμβολική αναπαράσταση των γεωμετρικών εννοιών με τη σχηματική – μέσα από το MaLT2 στην προκειμένη περίπτωση – και να μπορέσουν να χειριστούν δυναμικά διάφορα γραφικά αντικείμενα. Σύμφωνα, μάλιστα, με το πλαίσιο των εγκαθιδρυμένων αφαιρέσεων (Noss & Hoyles, 1996), οι γενικεύσεις των μαθητών εξαρτώνται άμεσα από το μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο δρουν, με τα ψηφιακά μέσα να επιτελούν έναν ανατρεπτικό και καθοριστικό ρόλο στις διαδικασίες γενίκευσης των παιδιών μέσα από τη διαδικασία του αναστοχασμού που προωθεί ο χειρισμός των εργαλείων.
Είναι προφανές πως όλο το σκεπτικό και οι ιδέες που κρύβονται πίσω από το σχεδιασμό αυτής της έρευνας δεν θα μπορούσαν να υλοποιηθούν χωρίς τη βοήθεια των ψηφιακών τεχνολογιών και η πρόσθετη παιδαγωγική αξία που προκύπτει από τη χρήση τους κατά την εκπαιδευτική πράξη έγκειται σε όλα αυτά που ο μαθητής ή ο εκπαιδευτικός μπορεί να πετύχει με αυτή την τεχνολογία και τα οποία είναι αδύνατο ή πολύ δύσκολο να τα καταφέρει και να τα υλοποιήσει πρακτικά χωρίς αυτή. Η έμφαση δίνεται σε αυτά που μπορούν να κάνουν οι μαθητές με την τεχνολογία και έτσι η εστίαση της ερευνήτριας συναντάται στον τρόπο που τα παιδιά θα χρησιμοποιήσουν το προγραμματιστικό εργαλείο MaLT2 και στα νοητικά κατασκευάσματα που θα δημιουργήσουν οι χρήστες, στοιχεία που στοχεύεται να τους ωθήσουν σταδιακά να αναπτύξουν ανθεκτική κατανόηση διάφορων μαθηματικών ιδιοτήτων οι οποίες κρύβονται μέσα στο προγραμματιστικό

περιβάλλον των δραστηριοτήτων, καθώς μαστορεύουν δυναμικά μοντέλα γραμμάτων του Ελληνικού Αλφαβήτου.

2.8.1 Εργαλεία Δυναμικού Χειρισμού

Στα εργαλεία δυναμικού χειρισμού ή αλλιώς στα δυναμικά γεωμετρικά περιβάλλοντα (DGEs) ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να δημιουργήσει ένα βασικό αντικείμενο, όπως το σημείο ή η ευθεία και να σχεδιάσει βασικά σχήματα και κατασκευές, όπως ο κύκλος με συγκεκριμένο κέντρο και ακτίνα ή η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος, μέσα από πρωτογενείς εντολές. Το βασικό χαρακτηριστικό αυτών των ψηφιακών εργαλείων είναι η δυνατότητα που δίνουν στο χρήστη να επιλέξει ένα σημείο της κατασκευής και να το σύρει (dragging), ενώ τα πλεονεκτήματα που δίνουν αυτού του είδους τα εργαλεία σχετίζονται με: (i) την παλινδρόμηση του μαθητή μεταξύ της σχηματικής μορφής ενός γενικευμένου αντικειμένου και των αφηρημένων μαθηματικών ιδιοτήτων και σχέσεων που το χαρακτηρίζουν (Goldenberg & Cuoco, 1998) και (ii) την έννοια της εξάρτησης και της συναρτησιακής σχέσης μεταξύ γεωμετρικών αντικειμένων, καθώς οι μαθητές διακρίνουν σταδιακά ότι η κίνηση ενός σχήματος εξαρτάται μαθηματικά από ένα άλλο σχήμα με το οποίο είναι συνδεδεμένο (Κυνηγός, 2011).

2.8.2 Συμβολική Έκφραση και «Γεωμετρία της Χελώνας»

Τα εργαλεία συμβολικής έκφρασης αφορούν τεχνολογίες οι οποίες είναι σχεδιασμένες με τέτοιο τρόπο ώστε ο χρήστης να αξιοποιεί την εκφραστική δυνατότητα του προγραμματισμού για τη διερεύνηση μαθηματικών εννοιών, ή με άλλα λόγια να μπορεί να εκφράζει τις σκέψεις και τις ιδέες του χρησιμοποιώντας λογικο-μαθηματικά σύμβολα. Η πρόσθετη παιδαγωγική αξία των εργαλείων συμβολικής έκφρασης αναδύεται από το γεγονός ότι λειτουργούν σαν έναν «νοητικό καθρέφτη» για το χρήστη (Κυνηγός, 2011), καθώς είναι έτσι σχεδιασμένα ώστε να ανταποκρίνονται στην κάθε εντολή – σύμβολο, δίνοντας την αίσθηση στο χρήστη ότι είναι ο ίδιος που ελέγχει πλήρως ό,τι κάνει το εργαλείο.

Ήδη από τη δεκαετία του ‘80, ο Seymour Papert πίστευε ότι με τη χρήση της τεχνολογίας μπορούν να κατασκευαστούν μαθησιακά περιβάλλοντα πλούσια σε ευκαιρίες μάθησης για τα παιδιά τα οποία να τους προσφέρουν την ευκαιρία να συσχετίσουν τη νέα γνώση με κάτι που ήδη γνωρίζουν και να το μετατρέψουν «χτίζοντας» με αυτό κάτι νέο. Παράλληλα, υποστήριξε ότι η δραστηριότητα του προγραμματισμού μπορεί να είναι άμεσα συνδεδεμένη με τη μαθηματική δραστηριότητα μέσα από τη χρήση κατάλληλης γλώσσας προγραμματισμού (Papert, 1980) και έτσι κατασκεύασε τη γλώσσα Logo, ένα παράγωγο της LiSP, δίνοντάς της ένα συντακτικό το οποίο είχε στόχο την προσέγγιση του τυπικού μαθηματικού φορμαλισμού.

Αργότερα, προσέθεσε σε αυτή τη γλώσσα, τη «Γεωμετρία της Χελώνας», η μαθηματική θεμελίωση της οποίας πραγματοποιήθηκε από τους Abelson και DiSessa (1981). Κύριο χαρακτηριστικό της χελώνας είναι ο προσδιορισμός της θέσης της από την αμέσως προηγούμενη κατάσταση της. Δηλαδή, οι εντολές που δίνει ο χρήστης στη χελώνα αλλάζουν τη θέση και την κατεύθυνσή της σε σχέση με την ακριβώς προηγούμενη θέση και κατεύθυνση που είχε, κάτι που αποτελεί έναν τρόπο προσδιορισμού της κατάστασης της ο οποίος αντιστοιχεί στη Διαφορική Γεωμετρία (εσωτερική γεωμετρία). Ταυτόχρονα,

όμως, η χελώνα δέχεται και εντολές που προσδιορίζουν τη θέση της μέσω των καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων (Κυνηγός, 2011), ενώ μέσω των εντολών και του ίχνους που αφήνει η χελώνα, ο χρήστης αποκτά τη δυνατότητα να κατασκευάζει γεωμετρικά σχήματα, άρα και να χρησιμοποιεί ιδιότητες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Συνεπώς, η «Γεωμετρία της Χελώνας» εμπεριέχει και συνδυάζει τρία είδη γεωμετρίας: τη Διαφορική Γεωμετρία (εντολές για αλλαγή κατάστασης), την Καρτεσιανή Γεωμετρία (εντολές για θέση μέσω καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων) και την Ευκλείδεια Γεωμετρία (δυνατότητα για δημιουργία γεωμετρικών σχημάτων).
Δεδομένου, λοιπόν, ότι η Logo είναι μία πλήρης δομημένη γλώσσα προγραμματισμού, με τις βασικές της εντολές να αποτελούνται από απλές λέξεις μεν, πρωτογενείς εντολές δε, η Logo δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να ορίσει διαδικασίες – παραμετρικές ή μη – όπου το ίχνος της χελώνας να κατασκευάζει αναπαραστάσεις γεωμετρικών σχημάτων. Έτσι, ο προγραμματισμός με τη Logo δίνει τη δυνατότητα στους χρήστες – μαθητές να εκφράσουν και να εκτελέσουν άμεσα τις ιδέες τους με τη χρήση συμβόλων, να συγκρίνουν αυτό που σκέφτηκαν και κατασκεύασαν με αυτό που τελικά προέκυψε ή ακόμα και να χρησιμοποιήσουν το αποτέλεσμα τους ως ένα νέο αντικείμενο με το οποίο μπορούν να προχωρήσουν σε νέες ευρύτερες κατασκευές και διερευνήσεις.
Από τα παραπάνω προκύπτει ότι τα προγραμματιστικά εργαλεία με άξονα τη «Γεωμετρία της Χελώνας» χαρακτηρίζονται από τη συνύπαρξη τριών αναπαραστάσεων της γεωμετρίας: της συμβολικής, της σχηματικής και της σωματικής μεταφοράς. Σχετικά με την τελευταία αναπαράσταση, η συντονικότητα του σώματος (body syntonicity), σύμφωνα με την αναφορά του Papert (1980), αφορά τους συσχετισμούς που δημιουργεί κάποιος ανάμεσα στην κίνηση της χελώνας και στη γνώση – αίσθηση που έχει για το ίδιο του το σώμα. Έτσι, η συμβολική αναπαράσταση έγκειται στην ίδια τη γλώσσα προγραμματισμού Logo, η σχηματική αναπαράσταση αφορά στο γραφικό αποτύπωμα των εντολών του κώδικα μέσω του ίχνους της χελώνας και η σωματική μεταφορά αφορά στην κατάσταση όπου ο μαθητής μπαίνει ο ίδιος νοητικά στη θέση της χελώνας και σκέφτεται με βάση τη θέση και την κίνηση του σώματός του.
Τέλος, αξίζει να αναφερθεί, ότι μέσα στη βιβλιογραφία ο μαθηματικός φορμαλισμός υποστηρίζεται ότι συχνά εμφανίζεται σαν εμπόδιο στη κατανόηση και τη νοηματοδότηση των μαθητών (Dubinsky, 2000; Laborde et al., 2006), γεγονός που υποστηρίζεται και από την ανάπτυξη ψηφιακών εργαλείων – κυρίως δυναμικού χειρισμού DGEs – τα οποία είναι έτσι σχεδιασμένα που εμπεριέχουν ή οδηγούν σε μαθηματικές έννοιες και ιδιότητες, παρακάμπτοντας πολλές φορές το φορμαλισμό (Laborde et. Al, 2006). O Dubinsky (2000) υποστήριξε ότι οι νέες τεχνολογίες και τα ψηφιακά εργαλεία, όπως αυτά που βασίζονται στον προγραμματισμό, δημιουργούν και προσφέρουν ευκαιρίες στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν το φορμαλισμό με έναν τέτοιο τρόπο ώστε αυτός να έχει νόημα για τους ίδιους. Σύμφωνα, μάλιστα, με τον Κυνηγό (2011), το ζητούμενο δεν είναι να παρακάμψουμε το φορμαλισμό μέσω του δυναμικού χειρισμού, αλλά να συνδυάσουμε το δυναμικό χειρισμό και το φορμαλισμό με έναν δυναμικό και αλληλεξαρτώμενο τρόπο, ώστε οι μαθητές να χρησιμοποιούν παράλληλα και τις δύο αναπαραστάσεις για να κάνουν γεωμετρία και άλγεβρα, στοιχείο στο οποίο αποσκοπεί και η παρούσα έρευνα, όπως έχει ήδη αναφερθεί, καθώς τα δύο αυτά πεδία παρουσιάζονται αποξενωμένα στο σημερινό σχολείο.

2.8.3 Το Προγραμματιστικό Εργαλείο MaLT2

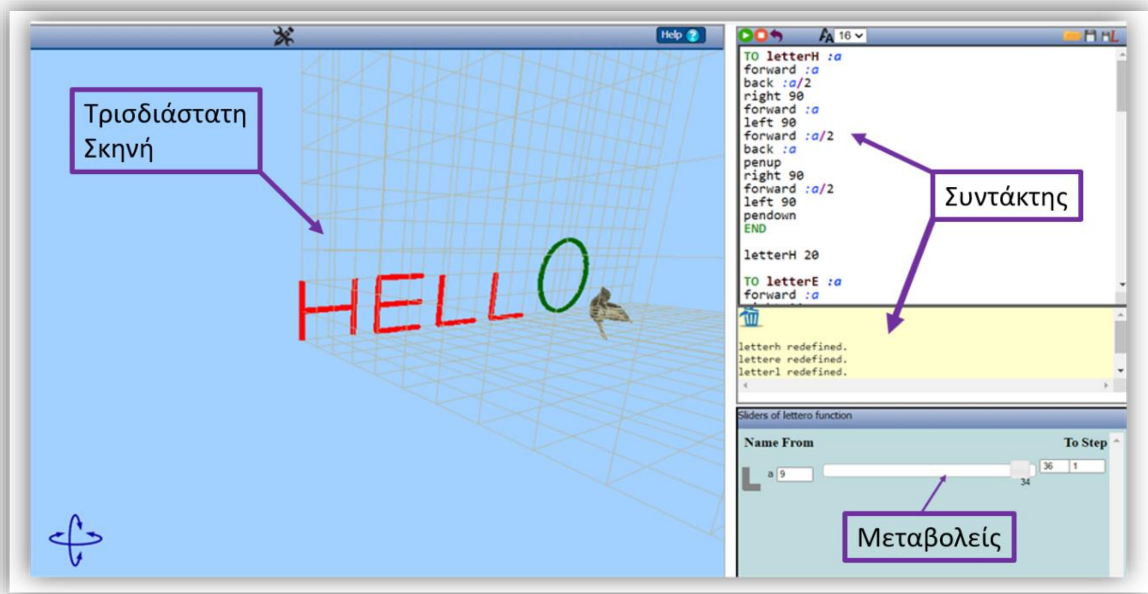
Το MaLT2 (MachineLab Turtleworlds 2) είναι ένα διαδικτυακό εργαλείο συμβολικής έκφρασης για μαθηματική δραστηριότητα μέσω του προγραμματισμού με σκοπό τη δημιουργία και το μαστόρεμα δυναμικών γραφικών μοντέλων. Το συγκεκριμένο εργαλείο αποτελεί ένα περιβάλλον οπτικοποίησης τόσο δισδιάστατων όσο και τρισδιάστατων μοντέλων και βασίζεται στη γλώσσα προγραμματισμού Logo. Το MaLT2 είναι ελεύθερα διαθέσιμο στην ηλεκτρονική σελίδα http://etl.ppp.uoa.gr/malt2/.

Πιο συγκεκριμένα, το MaLT2 αποτελείται από τρεις περιοχές οι οποίες είναι διακριτές, αλλά ταυτόχρονα συνδεδεμένες μεταξύ τους:

α. Τρισδιάστατη Σκηνή. Εδώ υπάρχει το avatar ενός σπουργιτιού (ή ενός αεροπλάνου), το οποίο ο χρήστης μπορεί να μετακινήσει στον τρισδιάστατο χώρο της σκηνής μέσω των εντολών προγραμματισμού που θα συντάξει. Το avatar καθορίζεται από τη θέση του και τον προσανατολισμό του μέσα στην τρισδιάστατη σκηνή, ενώ μετά την κάθε μετακίνησή του αφήνει ένα ίχνος στο χώρο προεπιλεγμένα από το εργαλείο, εκτός και αν ο χρήστης επιλέξει σκόπιμα να μην το κάνει μέσω της αντίστοιχης εντολής. Επιπρόσθετα, δίνεται η δυνατότητα στο χρήστη να αλλάξει την εστίαση της σκηνής (zoom in - zoom out), καθώς και το σημείο θέασης του τρισδιάστατου χώρου, μέσω της κάμερας που διαθέτει το εργαλείο.

β. Συντάκτης. Αποτελεί το χώρο, όπου ο χρήστης συνθέτει τις εντολές και εκτελεί τις διαδικασίες μέσω της γλώσσας προγραμματισμού Logo η οποία δέχεται απλές λέξεις ως εντολές (ο κατάλογος με τις εντολές δίνεται στο Παράρτημα III της εργασίας). Κάθε φορά που μία εντολή εκτελείται, το avatar ανταποκρίνεται απευθείας δημιουργώντας στη σκηνή το αντίστοιχο δόμημα. Παράλληλα, στο χώρο κάτω από το παράθυρο της σύνταξης των εντολών, εμφανίζεται ένα ακόμη παράθυρο το οποίο ενημερώνει το χρήστη για τον ορισμό των διαδικασιών και για ενδεχόμενα σφάλματα που έγιναν κατά τη σύνθεση των εντολών, εμφανίζοντας σχετικό μήνυμα κάθε φορά.

γ. Μεταβολείς. Στην περίπτωση που ο χρήστης ορίσει μία παραμετρική διαδικασία, τότε ενεργοποιούνται οι μεταβολείς των παραμέτρων που έχουν οριστεί, καθώς και ο δισδιάστατος μεταβολέας. Έτσι, το εργαλείο δίνει στο χρήστη τη δυνατότητα να χειριστεί δυναμικά τα μεταβλητά μεγέθη των αντικειμένων που κατασκευάζει και να τα εξερευνήσει, όπως αυτός επιθυμεί.



Εικόνα 11: Τα χαρακτηριστικά του MaLT2

Έτσι, στο MaLT2, οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τρεις αναπαραστάσεις (Kynigos & Latsi, 2007): α. τη συμβολική έκφραση μέσω του προγραμματισμού, β. τη γραφική – χωρική αναπαράσταση στον τρισδιάστατο χώρο και γ. την κιναισθητική δραστηριότητα και τη χρήση διαφόρων πλαισίων αναφοράς.

Όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, βασικό ζητούμενο είναι να συνδυάσουμε το μαθηματικό φορμαλισμό με τον δυναμικό χειρισμό με έναν αλληλεξαρτώμενο και δυναμικό τρόπο. Κάτι τέτοιο, λοιπόν, μπορεί να γίνει εφικτό με ψηφιακά εργαλεία όπως το MaLT2, όπου συνδυάζεται η συμβολική έκφραση και ο δυναμικός χειρισμός. Μάλιστα, ο δυναμικός χειρισμός στο συγκεκριμένο εργαλείο διαφέρει από τα υπόλοιπα εργαλεία δυναμικού χειρισμού στο γεγονός πως δεν μετακινείται κάποιο σημείο του σχήματος, αλλά ο χρήστης χειρίζεται δυναμικά το σχήμα μέσω των μεταβλητών που ορίζει ο ίδιος στον κώδικα, επηρεάζοντας με αυτό τον τρόπο και τη συμβολική και τη γραφική αναπαράσταση του γεωμετρικού αντικειμένου που κατασκευάζει. Η διαπλοκή μαθηματικού φορμαλισμού και γραφικής αναπαράστασης ενός γνωστικού αντικειμένου καθιστά το περιβάλλον μοναδικό στις ευκαιρίες που προσφέρει στο μαθητή να βιώσει ενστικτωδώς την ανάγκη της γενίκευσης και της χρήσης γεωμετρικών αντικειμένων (Κυνηγός, 2011), ενώ το γεγονός ότι η γραφική αναπαράσταση προέρχεται από μαθηματικά αντικείμενα κατασκευασμένα μέσω του προγραμματισμού από τους ίδιους τους μαθητές ενισχύει σημαντικά την κατανόησή τους (Dubinsky, 2000).

Η πρόσθετη παιδαγωγική αξία του εργαλείου συμβολικής έκφρασης MaLT2 αναδύεται, επίσης, από την άμεση εκτελεσιμότητα και ανατροφοδότηση του χρήστη. Το συγκεκριμένο εργαλείο δίνει τη δυνατότητα στον χρήστη να αναπτύξει διαισθητικά ιδέες γύρω από κάποιο δόμημα, να τις εκφράσει και να τις εκτελέσει με τη βοήθεια συμβόλων, δηλαδή μέσω της γλώσσας προγραμματισμού, καθώς και να παρατηρήσει άμεσα το αποτέλεσμά τους, συγκρίνοντας το, μάλιστα, με το αποτέλεσμα που στόχευαν πριν τη εκτέλεση. Έτσι, ως εργαλείο συμβολικής έκφρασης, το MaLT2 λειτουργεί σαν «νοητικός καθρέφτης» για τον χρήστη (Κυνηγός, 2011) με την έννοια ότι κάθε σύμβολο αποτελεί μία εντολή προς το μηχάνημα. Με αυτό τον τρόπο, ο χρήστης σκέφτεται μαζί με το εργαλείο και νοηματοδοτεί μέσα από την παρατήρηση του τρόπου που λειτουργεί και ανταποκρίνεται το ίδιο το εργαλείο μετά την εκτέλεση της κάθε εντολής, παράγοντας και εμφανίζοντας μία γραφική ανατροφοδότηση προς το χρήστη. Ολοκληρώνοντας, το MaLT2 αποτελεί ένα εργαλείο με το χαρακτηρισμό “low floor – high ceiling”, δηλαδή ένα εργαλείο το οποίο μπορεί σχετικά γρήγορα να ξεκινήσει να χρησιμοποιεί ένας αρχάριος χρήστης και ταυτόχρονα ένα εργαλείο το οποίο δεν θέτει όρια στις δυνατότητες που προσφέρει σε έναν προχωρημένο χρήστη για κατασκευή και μαστόρεμα μοντέλων.

Καταλυτικός, συνεπώς, υπήρξε ο ρόλος του ψηφιακού εργαλείου MaLT2 όπως θα δείξουν και τα αποτελέσματα, και επιλέχθηκε για αυτόν ακριβώς το σκοπό στη συγκεκριμένη έρευνα, καθώς ο δυναμικός χειρισμός μοντέλων μέσω διαδικασιών και μεταβολέων και η κίνηση της τρισδιάστατης σκηνής, επέτρεψαν τον μεγάλο πειραματισμό των παιδιών, την εξερεύνηση, την πρόβλεψη, την ανάγκη για επιχειρηματολογία και συνεργασία, καθώς και τη μελέτη της χρήσης της μεταβλητής ως γενικευμένο αριθμό και αποτέλεσαν παράλληλα ευκαιρία για ώθηση της πορείας της σκέψης τους προς τη γενίκευση.

3. Μεθοδολογία Έρευνας

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται αρχικά περιγραφή της ερευνητικής μεθόδου που ακολούθησε η ερευνήτρια και των τρόπων συλλογής και ανάλυσης των δεδομένων που συλλέχθηκαν, ενώ ακολουθεί αναλυτική περιγραφή του σχεδιασμού των δραστηριοτήτων της διδακτικής παρέμβασης.

3.1 Ερευνητική Μέθοδος

Το είδος της έρευνας που επέλεξε η ερευνήτρια ως κατάλληλο να ακολουθήσει στη συγκεκριμένη εργασία είναι η έρευνα σχεδιασμού (design-based research) η οποία έχει μία «δυνατή» πορεία και εμφάνιση στο χώρο της διδακτικής. Την επιλογή αυτή καθόρισαν τα όχι συγκεκριμένα ερευνητικά ερωτήματα που υπήρχαν στην παρούσα έρευνα, το μαθησιακό πλαίσιο που τείνει να μελετηθεί και η αναζήτηση νέας θεωρητικής γνώσης πάνω στη νοηματοδότηση των παιδιών μέσα από τα παραπάνω θεωρητικά μοντέλα και τη χρήση προγραμματισμού, στοιχεία τα οποία την υπέδειξαν ως την καταλληλότερη μέθοδο για την παρούσα έρευνα.

3.1.1 Έρευνα Σχεδιασμού

Η έρευνα σχεδιασμού αφορά στην εμπειρική μελέτη των ανθρώπινων δραστηριοτήτων κατά την εκπαιδευτική διαδικασία, όπου στο πλαίσιο του σχεδιασμού της συμμετέχουν παράλληλα και οι ερευνητές που πραγματοποιούν την έρευνα και για αυτό το λόγο θα μπορούσε να περιγραφεί εναλλακτικά και ως «έρευνα παρέμβασης» (Κυνηγός, 2011). Το συγκεκριμένο είδος έρευνας προσπαθεί να γεφυρώσει το χάσμα ανάμεσα στη θεωρία και την εκπαιδευτική πράξη μέσα από την ανάπτυξη θεωριών σχετικά με τη μάθηση σε κάποιον συγκεκριμένο τομέα, καθώς και τα μέσα τα οποία έχουν σχεδιαστεί για να υποστηρίξουν αυτή τη μάθηση και έτσι, αποκτά έναν επεξηγηματικό και συμβουλευτικό χαρακτήρα, δίνοντας ένα θεωρητικό «φως» σε σχέση με το πώς μπορούν να προωθηθούν κάποιοι συγκεκριμένοι τρόποι διδασκαλίας και μάθησης (Bakker, 2014).
Η όλη διαδικασία του σχεδιασμού της εκπαιδευτικής παρέμβασης δεν ολοκληρώνεται αμετάκλητα πριν αυτή αρχίσει, αντιθέτως, συνεχείς και επαναλαμβανόμενοι κύκλοι τροποποιήσεων του σχεδιασμού της παρέμβασης χαρακτηρίζουν την έρευνα σχεδιασμού οι οποίοι καθορίζονται από την εξέλιξη της παρέμβασης και έχουν στόχο τη βελτίωση της (Collins et al., 2004). Πιο συγκεκριμένα, ο αρχικός σχεδιασμός βασίζεται σε μία υποθετική πορεία μάθησης και σε υποθέσεις του σχεδιαστή – ερευνητή για τα μέσα υποστήριξης της μαθησιακής πράξης. Κατά την υλοποίηση της έρευνας και όσο αυτή εξελίσσεται έρχονται στην επιφάνεια νέα δεδομένα και αναθεωρούνται αρχικές υποθέσεις. Με άλλα λόγια, η ερευνήτρια επαναπροσδιορίζει και επανακαθορίζει το σχέδιο δραστηριότητας της παρέμβασης καθώς αυτή εξελίσσεται, μέσω της ανατροφοδότησης που λαμβάνει από τον τρόπο που λειτουργεί το μαθησιακό περιβάλλον κατά τη διάρκεια της παρέμβασης. Κατά συνέπεια, το ερευνητικό μοντέλο είναι κυρίως γενεσιουργό (generative) ως προς το ρόλο των ερευνητικών ερωτημάτων στην παραγωγή νέας θεωρητικής γνώσης (Goetz & Lecompte, 1984; Κυνηγός, 2011) και για αυτό η ερευνήτρια ακολουθεί έναν ολιστικό τρόπο μελέτης των δραστηριοτήτων των μαθητών ή των εκπαιδευτικών που λαμβάνουν χώρα μέσα στη σχολική τάξη, όντας «ανοικτή» ως προς την πορεία των γεγονότων που

θα συμβούν και ως προς τις ερμηνείες που θα δοθούν για αυτά (Κυνηγός, 2011). Για αυτόν ακριβώς το λόγο, η ερευνήτρια απαιτείται να συλλέξει πλήθος δεδομένων, όπως βίντεο καταγραφής ολόκληρης της τάξης ή συγκεκριμένα της δραστηριότητας των μαθητών, ηχητικά δεδομένα κατά τη δραστηριότητα των μαθητών (είτε μεταξύ μαθητών, είτε μεταξύ μαθητών και εκπαιδευτικού) και φυσικά των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τα διάφορα στάδια της παρέμβασης.
Όπως είναι ορατό από τα μέχρι τώρα χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης μεθοδολογίας, η διεξαγωγή μιας εκπαιδευτικής παρέμβασης στα πλαίσια της έρευνας σχεδιασμού είναι ιδιαίτερα απαιτητική και το αποτέλεσμα μάλλον αβέβαιο, για αυτό και η ερευνήτρια θα πρέπει να κάνει ένα διαχωρισμό ανάμεσα στα στοιχεία που περιμένει να αποτελέσουν το επίκεντρο της έρευνας και σε αυτά τα στοιχεία που πιθανώς να προκύψουν στο παρασκήνιο (Cobb et al., 2003). Ολοκληρώνοντας, σε αντίθεση με τις γενικές θεωρίες μάθησης, προκύπτει ότι τα πειράματα σχεδιασμού (Collins, 1992) σκοπεύουν να δώσουν ένα θεωρητικό μοντέλο ευρύτερο από μια απλή αφήγηση του τι συνέβη σε μια συγκεκριμένη τάξη και στενότερο μιας γενικότερης περιγραφής που δεν ανταποκρίνεται στις συγκεκριμένες συγκυρίες της παρέμβασης (diSessa, 1991), ενώ παράλληλα στόχος της έρευνας σχεδιασμού είναι η δημιουργία ενός προϊόντος άμεσα εφαρμόσιμου στην εκπαιδευτική πράξη (Cobb et al., 2003).

Η συγκεκριμένη μεθοδολογία έρευνας, λοιπόν, μαζί με τα στοιχεία που την χαρακτηρίζουν δημιουργεί έναν αρμονικό συνδυασμό με τη φιλοσοφία της παρούσας έρευνας. Το ερευνητικό ενδιαφέρον της εργασίας εστιάζει στη δημιουργία μιας εκπαιδευτικής παρέμβασης που επιτρέπει τη μελέτη και την ερμηνεία της δραστηριότητας και συμπεριφοράς των μαθητών σε σχέση με την ανθεκτική κατανόηση και την ικανότητα τους να χρησιμοποιούν μαθηματικές ιδιότητες, καθώς προγραμματίζουν με τη Χελωνόσφαιρα. Επιπρόσθετα, η έρευνα σχεδιασμού έχει το χαρακτήρα της εξέλιξης και γι' αυτό σκοπός του σχεδιασμού της παρέμβασης είναι ο μετασχηματισμός, με την ερευνήτρια να στοχεύει να «συνδέσει» τον προγραμματισμό με τα μαθηματικά και να μελετήσει τόσο την ανθεκτική κατανόηση που «χτίζουν» οι μαθητές μέσα από δραστηριότητες σχεδιασμένες σύμφωνα με τα μοντέλα των UDGS, 5Es και TRU, όσο και την ικανότητα (competence) που αναπτύσσουν οι ίδιοι να χρησιμοποιούν μαθηματικές ιδιότητες όταν κάνουν μαθηματική μοντελοποίηση με προγραμματισμό. Αυτό υλοποιείται μέσα από το σχεδιασμό μίας καινοτόμου εκπαιδευτικής παρέμβασης η οποία δεν εντοπίζεται στις τυπικές εκπαιδευτικές πρακτικές του ελληνικού σχολείου και προσπαθεί να μελετήσει μέσα σε αυτό το μαθησιακό περιβάλλον τη δημιουργία νοημάτων από τους μαθητές, καθώς κατασκευάζουν ή μαστορεύουν δομήματα στο προγραμματιστικό εργαλείο, χρησιμοποιώντας μαθηματικές έννοιες και ιδιότητες, όπως αυτές της γωνίας, των τριγωνομετρικών αριθμών, του πυθαγορείου θεωρήματος και του γενικευμένου αριθμού.
Με βάση τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, ένας ακόμη λόγος που ταίριαξε και επιλέχθηκε η συγκεκριμένη ερευνητική μέθοδος είναι το γεγονός ότι ακριβώς επειδή στοχεύεται η μελέτη μιας συμπεριφοράς η οποία δεν εντοπίζεται σε τυπικές εκπαιδευτικές πρακτικές, είναι απαραίτητη η χρήση μίας μεθοδολογίας που να επιτρέπει την παρέμβαση, την τροποποίηση και τον επανασχεδιασμό, όπως ακριβώς είναι η έρευνα σχεδιασμού. Άλλωστε, και στην παρούσα έρευνα, ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων πέρασε μέσα από βελτιωτικές τροποποιήσεις, καθώς δοκιμάστηκε σε κάποιες πιλοτικές εφαρμογές μέχρι η διδακτική παρέμβαση να πάρει την τελική της μορφή η οποία θα παρουσιαστεί σε επόμενη παράγραφο του παρόντος κεφαλαίου.
Τέλος, ένα βασικό στοιχείο της συγκεκριμένης μεθοδολογίας έρευνας που αναφέρθηκε στον ορισμό της και το οποίο θα ήθελα να τονίσω είναι η πρόκληση του διττού ρόλου του ερευνητή τον οποίο οφείλει να επιτελέσει η συγγραφέας. Στην έρευνα σχεδιασμού η

ερευνήτρια έχει δύο ξεχωριστούς, αλλά παράλληλους ρόλους: α. είναι σχεδιάστρια της δραστηριότητας και/ή συμμετέχων στη διδασκαλία και β. ερευνήτρια των όσων διαδραματίζονται (Κυνηγός, 2011). Έτσι, η πρόκληση για μία αντικειμενική έρευνα είναι αφενός η δημιουργική ισορροπία των δύο αυτών αλληλεξαρτώμενων ρόλων κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού και της υλοποίησης της παρέμβασης και αφετέρου ο ξεκάθαρος διαχωρισμός του ρόλου του ερευνητή κατά τη διάρκεια της ανάλυσης των δεδομένων και της συγγραφής των αποτελεσμάτων της έρευνας, τα οποία και καλείται να ερμηνεύσει.

Συνεπώς, η συγκεκριμένη έρευνα αποτελεί μία πειραματική προσέγγιση για την νοηματοδότηση των μαθητών ως προς την καλλιέργεια της ανθεκτικής κατανόησης τους πάνω σε μαθηματικές ιδιότητες, της χρήση αυτών και της πορείας τους προς τη γενίκευση με απώτερο σκοπό την καλλιέργεια της μαθηματικής τους σκέψης. Οι στόχοι της έρευνας δεν ήταν καθορισμένοι εξ αρχής, όπως αναφέρθηκε. Παρόλα αυτά, η έρευνα κατευθύνθηκε με βάση κάποιους κεντρικούς άξονες ερευνητικών ερωτημάτων οι οποίοι συνοψίζονται στα παρακάτω στοιχεία:

- Τι νοήματα κατασκευάζονται από τους μαθητές πάνω στις μαθηματικές ιδιότητες που ενσωματώνονται στα μοντέλα όταν εμπλέκονται με τις ειδικά σχεδιασμένες δραστηριότητες;
- Πώς συμβάλουν στην ανθεκτική κατανόηση των μαθητών τα νοήματα αυτά και οι δραστηριότητες;
- Ποιος είναι ο ρόλος του ψηφιακού προγραμματιστικού εργαλείου στη διαδικασία δημιουργίας νοημάτων από τους μαθητές ως προς την ικανότητά τους να χρησιμοποιούν μαθηματικές ιδιότητες;

Σκοπός της έρευνας είναι να δώσει απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα μέσα από τη μελέτη του τρόπου αλληλεπίδρασης των μαθητών με το ψηφιακό εργαλείο MaLT2 και του τρόπου εξέλιξης της ανάπτυξης νοημάτων των μαθητών που θα τους οδηγήσουν στην ανθεκτική κατανόηση και την καλλιέργεια της ικανότητας τους να βάζουν σε χρήση τα μαθηματικά μέσα από τη μοντελοποίηση και το δυναμικό χειρισμό δομημάτων. Τα νοήματα που παράχθηκαν από τους μαθητές, μελετήθηκαν μέσα από διαδικασίες γενίκευσης και αναστοχασμού των μοντέλων UDGS και 5Es υπό το πρίσμα του θεωρητικού Πλαισίου Διδασκαλίας για Ανθεκτική Κατανόηση TRU.

3.1.2 Δεοντολογία της Έρευνας Σχεδιασμού

Πέρα από την οργάνωση, το σχεδιασμό και την υλοποίηση της διδακτικής παρέμβασης ένα εξίσου σημαντικό ζήτημα αποτελεί η δεοντολογία που διέπει μια τέτοια έρευνα. Στόχος της ερευνήτριας, με την υλοποίηση της παρούσας έρευνας, ήταν να διασφαλίσει ότι δεν επιφέρεται καμία φυσική, ηθική ή ψυχολογική βλάβη στα άτομα που θα λάμβαναν μέρος σε αυτή. Αφενός, η ερευνήτρια εγγυήθηκε την διασφάλιση των προσωπικών δεδομένων των μαθητών με τήρηση της ανωνυμίας μέσω της χρήσης κωδικών ή ψευδώνυμων και εμπιστευτικότητα ως προς την εχέμυθη φύλαξη των δεδομένων-αρχείων που αποκτήθηκαν και συγκεντρώθηκαν κατά τη διδακτική παρέμβαση. Αφετέρου, ο σχεδιασμός της παρέμβασης έγινε με στόχο οι συμμετέχοντες να αποκομίσουν θετικές εμπειρίες, ανεξάρτητα από τα αποτελέσματα της παρέμβασης και τα δεδομένα που συλλέχθηκαν, ενώ ακόμα και οι δυσκολίες που πιθανώς να προέκυψαν από τους συμμετέχοντες παρουσιάζονται και αναλύονται σαν δεδομένα που δείχνουν χαρακτηριστικά της παρέμβασης αυτής ως ενδεχόμενη μελλοντική και αναγνωρισμένη δραστηριότητα στο σχολείο και όχι σαν λάθη ή αποτυχίες των μαθητών (Κυνηγός, 2011). Με άλλα λόγια, μέσα από μία τέτοια παρέμβαση και έρευνα στοχεύεται, όπως αναφέρει ο Κυνηγός (2011), μία ρεαλιστική και ερευνητικά έντιμη εικόνα του τι συμβαίνει, μέσα από μία θετική οπτική ματιά η οποία μας δείχνει τι θα ήταν εφικτό και ποιες θα ήταν οι δυσκολίες σε μία ενδεχόμενη συστηματική εφαρμογή της δραστηριότητας αυτής στην εκπαιδευτική πράξη.

3.2 Δεδομένα και Μέθοδος Ανάλυσης

3.2.1 Πλαίσιο έρευνας

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε με τη συμμετοχή δύο μαθητών της Γ' τάξης του Γυμνασίου σε δύο συναντήσεις των τριών ωρών η καθεμία. Οι μαθητές είχαν ενημερωθεί εκ των προτέρων ότι πρόκειται για μία δραστηριότητα διερευνητικού χαρακτήρα η οποία θα υλοποιούταν στο πλαίσιο μιας έρευνας και δεν θα σχετιζόταν σε καμία περίπτωση με την αξιολόγησή τους. Οι μαθητές δήλωσαν εθελοντικά συμμετοχή και η διδακτική παρέμβαση έγινε σε ιδιωτικό χώρο που προσομοίαζε πραγματικές συνθήκες τάξης. Ο λόγος που δεν πραγματοποιήθηκε σε πραγματική τάξη ήταν η διαδοχική νόσηση από Covid-19 των παιδιών, η οποία καθυστέρησε τη διδακτική παρέμβαση, με αποτέλεσμα αυτή να πραγματοποιηθεί μέσα στις διακοπές του Πάσχα, ώστε να μην επιβαρυνθούν οι μαθητές τον μήνα Μάιο, έναν μήνα με παραδοσιακά εξεταστικό χαρακτήρα για τα δεδομένα του ελληνικού σχολείου και όχι μόνο.
Η τάξη της Γ΄ Γυμνασίου κρίθηκε κατάλληλη για τη συγκεκριμένη παρέμβαση, ώστε οι μαθητές να μπορούν να ανταπεξέλθουν γνωστικά στις προκλήσεις της δραστηριότητας. Οι μαθητές δούλεψαν ομαδικά στην πλειοψηφία των δραστηριοτήτων, ενώ η ακριβής κοινωνική ενορχήστρωση της κάθε φάσης αναφέρεται αναλυτικά στον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων που ακολουθεί.

3.2.2 Τρόπος Συλλογής Δεδομένων

Μέσω της ποικιλίας των μέσων καταγραφής των δεδομένων έγινε μία προσπάθεια ολοκληρωμένης λήψης του τρόπου έκφρασης, συνεργασίας και νοηματοδότησης των μαθητών, συλλέγοντας όσα περισσότερα δεδομένα ήταν δυνατόν μέσα από διαφορετικές πηγές. Κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, καθώς η ερευνήτρια ακολουθεί τη μεθοδολογία της έρευνας σχεδιασμού, όπως έχει ήδη αναφερθεί, και έτσι χρειάζεται να έχει μία σφαιρική μελέτη της όλης διδακτικής παρέμβασης που σχεδιάζει -όχι αμετάκλητα εξαρχής- καθώς τα αποτελέσματα προκύπτουν μέσα από την εξέλιξη της.

Το είδος και οι πηγές συλλογής των δεδομένων της παρούσας έρευνας που καταγράφηκαν και χρησιμοποιήθηκαν από τον ερευνητή είναι οι ακόλουθες:

- Αρχεία καταγραφής οθόνης και ήχου του υπολογιστή των μαθητών με το λογισμικό *Hyper Cam 2.*

- Αρχεία καταγραφής ήχου για συζητήσεις μεταξύ των μαθητών κατά την παρέμβαση που ενδέχεται να ήταν πιο μακριά από τον υπολογιστή με τη χρήση της εφαρμογής *Voice Recording* ενός κινητού τηλεφώνου.
- Φωτογραφικά στιγμιότυπα με τη χρήση κάμερας κινητού τηλεφώνου για καταγραφή και ανάλυση των κινήσεων που πραγματοποίησαν οι μαθητές με τα χέρια και το σώμα τους την προσπάθεια τους να εκφράσουν ή να εξηγήσουν κάποια ιδέα τους σε συγκεκριμένες φάσεις της έρευνας.
- Το φύλλο εργασίας που συνόδευε κάθε δραστηριότητα.
- Τα χειρόγραφα των μαθητών (πρόχειρο χαρτί όπου έκαναν τις δοκιμές που επιθυμούσαν).
- Τα αρχεία .mlt με τους κώδικες των παραγόμενων δομημάτων στο MaLT2.

Συμπληρωματικά στα παραπάνω, στην αρχή της έρευνας η ερευνήτρια έδωσε στους μαθητές να συμπληρώσουν ένα pre test, το οποίο σχετίζονταν με την άποψη που έχουν οι μαθητές για τα μαθηματικά και με την εμπειρία τους στη χρήση προγραμματιστικών εργαλείων, ενώ το test αυτό δεν σχετιζόταν καθόλου με μαθηματικές γνώσεις.
Με τη χρήση των παραπάνω πηγών, η ερευνήτρια στοχεύει παράλληλα στην ενίσχυση της αξιοπιστίας της έρευνας μέσω της τριγωνοποίησης:

α. των μεθόδων (method triangulation), δεδομένου ότι χρησιμοποίησε διαφορετικούς τρόπους συλλογής δεδομένων για την ανάδειξη των αποτελεσμάτων της έρευνας και

β. του ερευνητή (investigator triangulation), καθώς και ένας δεύτερος εκπαιδευτικός – ερευνητής συμμετείχε στην ανάλυση των δεδομένων.

3.2.3 Τρόπος Ανάλυσης Δεδομένων

Η ανάλυση των δεδομένων πραγματοποιήθηκε από την ερευνήτρια σύμφωνα με τη θεωρία των «κρίσιμων συμβάντων» (Noss & Hoyles, 1996). Ως «κρίσιμο συμβάν» μπορεί να οριστεί μία κατάσταση στο πλαίσιο των ερευνητικών δεδομένων η οποία να υποδεικνύει μία σημαντική αλλαγή, ένα νοητικό άλμα, σε σχέση με την πρότερη κατανόηση των μαθητών και μπορεί να περιγράφει ως ένα γεγονός ή μία ενέργεια που επηρέασε τη διαδικασία νοηματοδότησης και μάθησης των μαθητών. Αυτό μπορεί να προκύψει είτε από την αλληλεπίδραση του μαθητή με το συμμαθητή του, είτε με την αλληλεπίδραση του μαθητή με το ψηφιακό εργαλείο, είτε και τα δύο μαζί. Στην παρούσα εργασία, τα κρίσιμα συμβάντα αποτυπώνονται ως τμήματα μετεγγραμμένων διαλόγων των μαθητών και κρίνονται καθοριστικής σημασίας για το αντικείμενο μελέτης της έρευνας, καθώς δίνουν στοιχεία για τον τρόπο σκέψης, κατανόησης και νοηματοδότησης των μαθητών.
Όπως έχει ήδη αναφερθεί παραπάνω, στο πλαίσιο της έρευνας σχεδιασμού δεν υπάρχουν προκαθορισμένες ερευνητικές υποθέσεις για να ελεγχθούν. Έτσι, τα κρίσιμα συμβάντα στα οποία εστίασε η ερευνήτρια την ανάλυση ήταν αυτά που ανέλαβαν το ρόλο του τελικού σχηματισμού των «ερευνητικών μονοπατιών» που δημιούργησαν οι ίδιοι οι μαθητές, καθορίζοντας τα τελικά συμπεράσματα πάνω σε προηγούμενες ή όχι υποθέσεις. Συνεπώς, τα ίδια τα δεδομένα ήταν αυτά που καθόρισαν τη δομή των αποτελεσμάτων και σε αυτή την έρευνα. (Κυνηγός, 2011).

3.3 Σχεδιασμός και Ανάλυση Δραστηριοτήτων

Σε αυτή την παράγραφο πραγματοποιείται η ανάλυση του σχεδιασμού των δραστηριοτήτων που σχεδίασε η ερευνήτρια, μέσα από υποθετικές μαθησιακές διαδρομές, οι οποίες αναφέρονται στους στόχους, στις δραστηριότητες και στην μαθησιακή διαδικασία που υποθέτει η σχεδιάστρια ότι θα ακολουθήσουν οι μαθητές. Οι δραστηριότητες και οι υποθετικές μαθησιακές διαδρομές των παιδιών αποτελούν ερευνητικά εργαλεία στα χέρια του ερευνητή, όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα μέσα στην έρευνα σχεδιασμού και σχετίζονται τόσο με τα θεωρητικά εκπαιδευτικά μοντέλα που έχουν αναλυθεί νωρίτερα, όσο και τις λειτουργικότητες του ψηφιακού εργαλείου MaLT2 που έχει επιλεχθεί από την ερευνήτρια. Ωστόσο, πρέπει να τονιστεί ότι οι παραπάνω τροχιές μάθησης ναι μεν κατασκευάζονται από την ερευνήτρια, αλλά δεν είναι εγγυημένο ότι οι μαθητές θα τις ακολουθήσουν ακριβώς όπως περιγράφονται και θα αναπτύξουν τα νοήματα που στοχεύονται ή θα επιτύχουν τους στόχους που θέτονται. Πρόκειται για δημιουργία υποθέσεων σχετικά με την πορεία της μάθησης και νοηματοδότησης των παιδιών, που δείχνουν παράλληλα τα σημεία και τις έννοιες που η ερευνήτρια εστιάζει μέσα από το σχεδιασμό της δραστηριότητας που υλοποιεί και την εξέλιξη των οποίων θα παρακολουθήσουμε στο Κεφάλαιο 4, καθώς πιθανές αλλαγές μπορούν να προκύψουν κατά τη μαθησιακή διαδρομή οι οποίες έχουν στόχο τα βέλτιστα αποτελέσματα της παρέμβασης και οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ερευνητικά δεδομένα.
Η ερευνήτρια χρησιμοποιεί τα γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου και το εργαλείο MaLT2, όπου οι μαθητές καλούνται σε πρώτη φάση να προβλέψουν, να κατασκευάσουν ή να διορθώσουν δυναμικά μοντέλα των γραμμάτων Ν, Ζ, Σ, Μ, Α και Ο και σε δεύτερη φάση να προβούν σε κατασκευή μιας δικής τους δυναμικής αφίσας στο εργαλείο υπό τη μορφή της ελεύθερης κατασκευής. Στόχος της ερευνήτριας είναι η μελέτη του τρόπου κατασκευής νοημάτων των μαθητών μέσω του οποίου θα επιτευχθεί η ανθεκτική κατανόηση και η ικανότητα χρήσης μαθηματικών ιδιοτήτων από τους μαθητές, καθώς αυτοί μαστορεύουν με τα δυναμικά μοντέλα των γραμμάτων υπό την «σκέπη» των τριών θεωρητικών μοντέλων UDGS, 5Es και TRU τα οποία περιγράφηκαν νωρίτερα. Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων και το αναλυτικό σκεπτικό της σχεδιάστριας πίσω από αυτές τις δραστηριότητες ακολουθεί στις επόμενες παραγράφους.
Η επιλογή των γραμμάτων του Ελληνικού Αλφαβήτου και η κατασκευή ή το μαστόρεμα τους από τους μαθητές θεωρήθηκε ενδιαφέρουσα επιλογή από την ερευνήτρια, αφενός γιατί δεν αποτελούν κλασσικά μαθηματικά σχήματα και δεν αποκαλύπτουν άμεσα στους μαθητές την μαθηματική τους υπόσταση, αφήνοντας τους ίδιους μέσω της διερεύνησής τους και του μαστορέματος με αυτά να ανακαλύψουν τις μαθηματικές ιδιότητες που κρύβονται πίσω από την κατασκευή τους στο περιβάλλον του προγραμματισμού, και αφετέρου γιατί μέσα στην κατασκευή ενός γράμματος η ερευνήτρια μπορεί να εμφανίσει ποικίλες μαθηματικές ιδιότητες και σχέσεις και να δημιουργήσει είτε η ίδια μέσω μισοψημένων μικρόκοσμων, είτε οι μαθητές μόνοι τους, το ίδιο μοντέλο γράμματος με πολλούς διαφορετικούς τρόπους εστιάζοντας σε ξεχωριστά σημεία κάθε φορά και προωθώντας τη συζήτηση και τον προβληματισμό των παιδιών σχετικά με τον τρόπο μοντελοποίησης που επέλεξαν.
Παράλληλα, ο λόγος που επιλέχθηκε το συγκεκριμένο προγραμματιστικό εργαλείο, εκτός από την πρόσθετη παιδαγωγική του αξία που αναλύθηκε διεξοδικά σε προηγούμενη παράγραφο, όπως είναι η λειτουργία του ως «νοητικός καθρέφτης» των παιδιών και η άμεση εκτελεσιμότητα του, είναι τόσο η δυνατότητα που δίνει στους μαθητές να εναλλάσσονται ανάμεσα στην άλγεβρα και στη γεωμετρία, πεδία κατακερματισμένα στο μυαλό των μαθητών που σπάνια συνδυάζονται στο σχολείο και δεν δίνουν στα παιδιά τη δυνατότητα να αντιληφθούν τα μαθηματικά ως ολότητα, όσο και οι πολλαπλές

αναπαραστάσεις που λαμβάνουν τα παιδιά μέσα από το δυναμικό χειρισμό των μοντέλων που μαστορεύουν μέσω της χρήσης μεταβλητών ως γενικευμένους αριθμούς.

3.3.1 Εισαγωγική Φάση

Αφού ο ερευνήτρια εξήγησε στους μαθητές ότι κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων θα εργαστούν ομαδικά και ότι το αποτέλεσμα των κατασκευών τους δεν έχει απολύτως καμία σχέση ή επίπτωση στην επίδοση τους στο μάθημα των μαθηματικών, τους δόθηκε το pre test (Παράρτημα III), όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, το οποίο συμπλήρωσαν ατομικά.
Στη συνέχεια, τους μοιράστηκε ένας πίνακας με τις εντολές του εργαλείου MaLT2 (ο οποίος παρατίθεται στο Παράρτημα IV) και τους ζητήθηκε να σχεδιάσουν συνεργατικά τρία τυχαία σχήματα χρησιμοποιώντας τις εντολές που δίνονταν. Ο λόγος που ζητήθηκε από την ερευνήτρια κάτι τέτοιο ήταν για να εξοικειωθούν οι μαθητές με τις εντολές του συγκεκριμένου εργαλείου, καθώς όπως προέκυψε από το pre test και από συζήτηση μαζί τους, οι συγκεκριμένοι μαθητές είχαν χρησιμοποιήσει στο μάθημα της Πληροφορικής τους ένα διαφορετικό προγραμματιστικό εργαλείο του οποίου οι εντολές, αλλά και οι λειτουργικότητες διέφεραν από αυτές του MaLT2. Έτσι, το MaLT2 τους φάνηκε μεν γνώριμο σαν ψηφιακό περιβάλλον, όμως η ερευνήτρια έκρινε πως θα ήταν χρήσιμο οι μαθητές να γνωρίσουν τον τρόπο που συντάσσονται οι εντολές και ορίζονται οι διαδικασίες στο συγκεκριμένο εργαλείο, την ύπαρξη των μεταβολέων, την δυνατότητα για αλλαγή οπτικής του δομήματος τους μέσα από την περιστροφική κάμερα, καθώς και το παράθυρο του συντάκτη που δίνει ανατροφοδότηση (λειτουργικότητες που δεν υπάρχουν στο εργαλείο που είχαν χρησιμοποιήσει ήδη τα παιδιά), ώστε στη συνέχεια οι μαθητές να νιώθουν πιο εξοικειωμένοι και ευέλικτοι στις βασικές δραστηριότητες της έρευνας που θα ακολουθούσαν με τη χρήση του εργαλείου MaLT2.
Τα σχήματα που ζητήθηκαν από τους μαθητές να κατασκευάσουν στο εργαλείο ήταν ένα τετράγωνο, ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο τα οποία οι μαθητές κατασκεύασαν με ευκολία δίνοντας ένα στιγμιότυπο αυτών των σχημάτων, δίνοντας δηλαδή εντολές με σταθερούς αριθμούς. Στη συνέχεια, η ερευνήτρια εξήγησε τον συντακτικό τρόπο (με τις κατάλληλες εντολές «ΓΙΑ» και «ΤΕΛΟΣ») που ορίζεται μία διαδικασία στο εργαλείο, καθώς οι μαθητές δεν γνώριζαν την έννοια της διαδικασίας στο συγκεκριμένο προγραμματιστικό περιβάλλον και τους άφησε ελεύθερους να πειραματιστούν με τις υπόλοιπες εντολές.
Σε αυτή την εισαγωγική φάση, δεν συλλέχθηκε κανένα οπτικοακουστικό δεδομένο, παρά μόνο σημειώσεις του ερευνητή και προφανώς η συγκεκριμένη φάση δεν συμπεριλαμβάνεται στα αποτελέσματα της έρευνας, καθώς μοναδικός της στόχος ήταν η εξοικείωση των μαθητών με το ψηφιακό εργαλείο MaLT2, η παρουσίαση της σωστής σύνταξης των εντολών της γλώσσας προγραμματισμού του και των λειτουργικοτήτων του εργαλείου.

Πριν την αναλυτική περιγραφή των δραστηριοτήτων της έρευνας, η ερευνήτρια παραθέτει έναν συνοπτικό πίνακα όπου εμφανίζονται συνολικά οι δραστηριότητες που ακολουθούν σε κάθε φάση (η κάθε φάση απεικονίζεται με διαφορετικό χρώμα) και η αντιστοίχιση της καθεμίας με τα θεωρητικά μοντέλα των UDGS και 5Es που αναλύθηκαν παραπάνω.

Πίνακας 1: Αντιστοίχιση Δραστηριοτήτων με τα μοντέλα UDGS και 5Es

Δραστηριότητα	Μοντέλο UDGS	Μοντέλο 5Es
Ελεύθερη Κατασκευή του Ν (ομαδική)	Using	Explore Explain
Μισοψημένο γενικευμένο μοντέλο του Ν – Πρόβλεψη & Διόρθωση (ομαδική)	Discriminating	Explore Envisage Explain
Εύρεση κώδικα που κατασκευάζει ένα γενικευμένο Ν μέσα σε ένα τετράγωνο (ομαδική)	Generalizing	Explore Explain
Κατασκευή γενικευμένου μοντέλου του Ζ (ομαδική)	Generalizing Synthesising	Explore Explain bridgE
Μισοψημένο γενικευμένο μοντέλο του Σ: Πρόβλεψη, Διόρθωση & Παρουσίαση (ατομική)	Using Discriminating	Explore Envisage Exchange
Μισοψημένη λέξη ΝΗΣΙ (ομαδική)	Discriminating Generalizing	Explore Envisage Exchange bridgE
Μισοψημένη λέξη ΑΜΜΟΣ (ομαδική)		
Ελεύθερη Κατασκευή Δυναμικής Αφίσας (ομαδική)	Generalizing Synthesising	5Es

3.3.2 Φάση Α: Τα Μοντέλα των Γραμμάτων Ν - Ζ

Οι βασικές δραστηριότητες της έρευνας ξεκινάνε με την εξερεύνηση και την κατασκευή του μοντέλου του γράμματος Ν. Κατά τη διάρκεια της Φάσης Α, δόθηκαν στους μαθητές συνολικά 4 δραστηριότητες, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν στη διάρκεια 3 ωρών και αναλύονται παρακάτω.

Δραστηριότητα 1: «Ας κατασκευάσουμε!»
Φτιάξτε μία διαδικασία στο MaLT2 η οποία όταν εκτελείται να δημιουργεί μία γραφική αναπαράσταση που να μοιάζει με το κεφαλαίο γράμμα Ν. Στη διαδικασία αυτή, τα σημεία της βάσης του γράμματος φροντίστε να είναι στην ίδια οριζόντια ευθεία, δηλαδή σαν να ακουμπάει το γράμμα Ν σε μία γραμμή του τετραδίου σας.

Η Δραστηριότητα 1 ζητάει από τους μαθητές να συνθέσουν τον κατάλληλο κώδικα ώστε όταν αυτός εκτελείται να κατασκευάζει το κεφαλαίο γράμμα Ν, «ίσιο» σαν να βρίσκεται πάνω σε μία νοητή οριζόντια γραμμή. Εσκεμμένα από τον σχεδιαστή-ερευνητή, δεν διευκρινίζεται στους μαθητές αν αυτός επιθυμεί ένα στιγμιότυπο του Ν με συγκεκριμένες τιμές σε κάθε εντολή ή αν επιθυμεί τη δημιουργία μιας διαδικασίας η οποία να κατασκευάζει ένα γενικευμένο μοντέλο του γράμματος Ν και έτσι οι μαθητές αφήνονται ελεύθεροι να προβούν στη δημιουργία του δικού τους δομήματος. Ο λόγος που αυτή η πρώτη δραστηριότητα αφήνεται αρκετά ανοιχτή προς τους μαθητές είναι πολλαπλός. Πρώτον, ο ερευνήτρια στοχεύει στην ανάδειξη του αρχικού τρόπου σκέψης και προσέγγισης των παιδιών σε μία τέτοια κατασκευή με το εργαλείο, όπου δεν υπάρχει σωστός ή λάθος τρόπος να κατασκευαστεί το Ν, αλλά το ενδιαφέρον έγκειται στον τρόπο που θα αποφασίσουν οι μαθητές να το κατασκευάσουν και στο πρόβλημα-στόχο που θα θέσουν οι ίδιοι. Για παράδειγμα, θα χρησιμοποιήσουν μεταβλητές; Θα χρησιμοποιήσουν συγκεκριμένες μαθηματικές ιδιότητες για τις οποίες θα έχουν επίγνωση ή θα κατασκευάσουν ένα τυχαίο Ν με το «μάτι»; Δεύτερον, ο κώδικας και το μοντέλο που θα συνθέσουν σε αυτή τη φάση, θα χρησιμοποιηθεί προοδευτικά στη συνέχεια, όπου οι μαθητές θα χρειαστεί να τον συγκρίνουν με το μοντέλο του Ν της Δραστηριότητας 2 και 3, με στόχο τον αναστοχασμό τους και τη νοηματοδότηση ως προς την μαθηματική πτυχή που κρύβει η κατασκευή του γράμματος Ν μέσα σε ένα προγραμματιστικό περιβάλλον.
Συγκεκριμένα, για το γράμμα Ν, οι κύριες μαθηματικές ιδιότητες που αναμένουμε να έρθουν στην επιφάνεια, είτε ξεκινώντας με αυτή την δραστηριότητα, είτε προχωρώντας στις επόμενες είναι το μήκος των δύο κάθετων πλευρών του Ν που είναι ίδιο και η ύπαρξη εντός εναλλάξ γωνιών που σχηματίζονται εσωτερικά του Ν λόγω των παράλληλων πλευρών του. Ακόμη και αν αυτές τις ιδιότητες τις αντιληφθούν, τις συζητήσουν και διαπραγματευτούν το πώς θα τις χρησιμοποιήσουν στην κατασκευή τους, η πρόκληση που παραμένει για τους μαθητές έγκειται, πρώτον, στο μήκος της πλάγιας πλευράς του και, δεύτερον, στη χρήση της γωνίας ως στροφή μέσα στο περιβάλλον του MaLT2, καθώς μπορεί οι εντός εναλλάξ γωνίες να είναι ίσες, αλλά για να επιτευχθεί αυτό το αποτέλεσμα κατασκευαστικά στον κώδικα, οι εντολές είναι πολύ διαφορετικές.
Έτσι, η δραστηριότητα αυτή ανήκει στη φάση του **"Using"** από το μοντέλο των UDGS, όπου οι μαθητές αναμένεται να χρησιμοποιήσουν μαθηματικές ή μη μαθηματικές έννοιες στην κατασκευή του κώδικα και του αντίστοιχου γραφήματος, χωρίς ίσως μεγάλη προσοχή στο πραγματικό τους νόημα, έχοντας ως στόχο να καταφέρουν να δημιουργήσουν μία τελική γραφική αναπαράσταση που να μοιάζει με το κεφαλαίο γράμμα

Ν. Αυτό που εικάζει ο ερευνήτρια είναι οι μαθητές να δημιουργήσουν πιθανότατα ένα στιγμιότυπο του γράμματος Ν και όχι ένα γενικευμένο μοντέλο. Ούτως ή άλλως, η δημιουργία του γενικευμένου μοντέλου σχεδιάζεται προοδευτικά στις επόμενες δραστηριότητες. Παρόλα αυτά, ακόμη και στην δημιουργία του στιγμιότυπου, ο ερευνήτρια αναζητά τον τρόπο σκέψης και νοηματοδότησης και την πιθανή εμφάνιση χρήσης μαθηματικών ιδιοτήτων από τους μαθητές.

Παράλληλα, η κατασκευή του Ν κρύβει τη φάση του **“Explore”** του μοντέλου των 5Es, καθώς δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να πειραματιστούν και να δοκιμάσουν τρόπους να κατασκευάσουν ελεύθεροι το δόμημα του γράμματος Ν με το εργαλείο, αναζητώντας παράλληλα τους λόγους πίσω από κάθε δοκιμή και κάθε αποτέλεσμα της διερεύνησης τους. Το συγκεκριμένο εργαλείο, όπως έχει αναφερθεί νωρίτερα, ενθαρρύνει ιδιαίτερα τον πειραματισμό και δίνει άμεση γραφική ανατροφοδότηση στους μαθητές. Με αυτό τον τρόπο δημιουργούνται πλούσιες ευκαιρίες νοηματοδότησης για τους μαθητές και διερευνάται από τον ερευνητή αν και πώς οι μαθητές θα εντοπίσουν τις μαθηματικές έννοιες που «κρύβονται» πίσω από τη συγκεκριμένη κατασκευή που τους ζητείται, χωρίς πουθενά βέβαια να αναφέρονται τα μαθηματικά και η χρήση μαθηματικών εννοιών και ιδιοτήτων στην κατασκευή του.

Δραστηριότητα 2: «Μάντεψε!»

Δίνεται η εξής διαδικασία:

```
ΓΙΑ μυστήριο :χ :ω
μ :χ
δ 135
μ 100
α :ω
μ :χ
ΤΕΛΟΣ
```

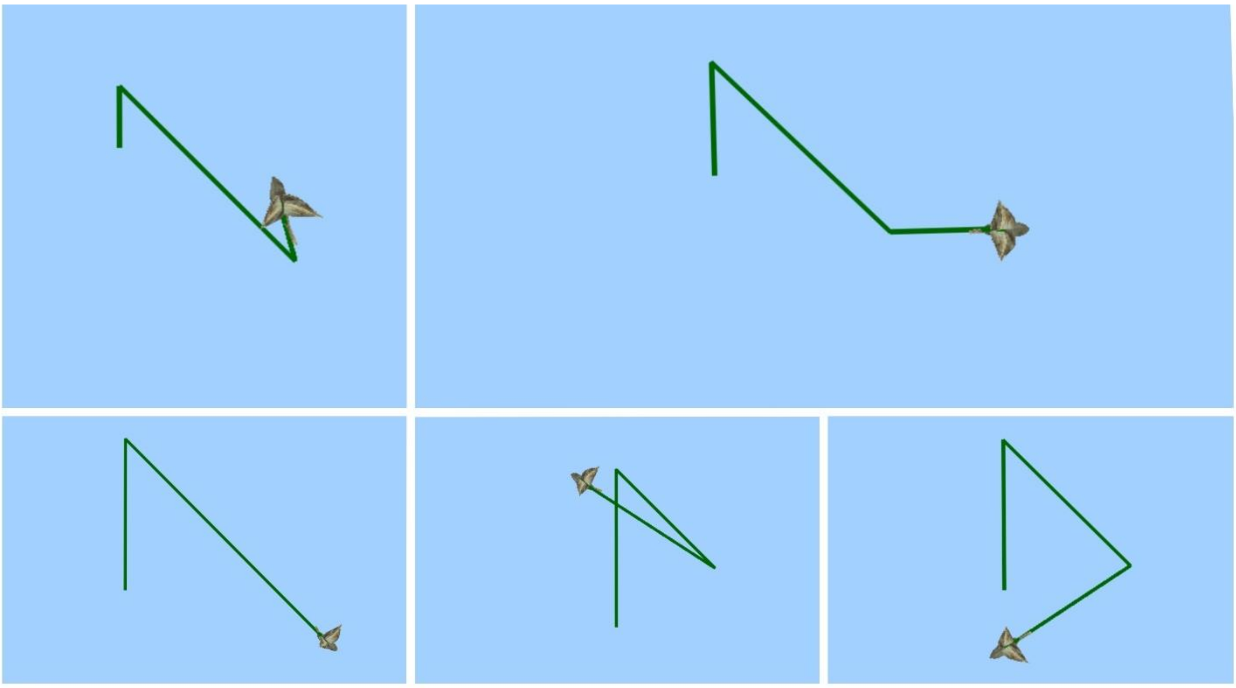
α. Πριν εκτελέσετε την παραπάνω διαδικασία, μπορείτε να προβλέψετε τι θα μπορούσε να σχηματίζει το ίχνος που αφήνει το σπουργίτι πίσω του; Γράψτε πιθανές προβλέψεις σας ξεχωριστά ο καθένας και στη συνέχεια μοιραστείτε με τον συνεργάτη σας τις ιδέες σας, αιτιολογήστε την πρόβλεψή σας και καταλήξτε από κοινού σε μία τελική πρόβλεψη για τον παραπάνω κώδικα - μυστήριο.

β. Τώρα εκτελέστε τον κώδικα με όποιες τιμές θέλετε εσείς. Με τι μοιάζει αυτό που σχηματίζει τελικά; Αν το μαντέψατε, γράψτε τι ήταν αυτό που σας βοήθησε να το προβλέψετε, πώς σκεφτήκατε ή σε τι βασιστήκατε. Αν πάλι δεν βρήκατε το μυστήριο, δεν πειράζει! Γράψτε τον τρόπο που σκεφτήκατε και ποιο στοιχείο - εντολή σας «ξεγέλασε».

γ. Πώς θα μπορούσατε να βελτιώσετε τον παραπάνω κώδικα ώστε να σχηματίζει ένα πιο «όμορφο» γράμμα Ν χωρίς αυτό να αλλοιώνεται με την κίνηση των κερσόρων; Γράψτε τον νέο κώδικα παρακάτω και αιτιολογήστε τις αλλαγές που κάνατε σε αυτόν.

Η Δραστηριότητα 2 δίνει στους μαθητές ένα μισοψημένο μοντέλο του Ν, ορίζοντας μία διαδικασία και χρησιμοποιώντας δύο μεταβλητές, εκ των οποίων η μία αναφέρεται σε πλευρά και η άλλη σε γωνία του γράμματος. Αρχικά τους καλεί να προβλέψουν το δόμημα που θα σχηματίζει το ίχνος του σπουργιτιού όταν εκτελεστεί αυτή η διαδικασία, γεγονός

που κατατάσσει τη δραστηριότητα αυτή στη φάση του **“Envisage”** του μοντέλου των 5Es, δίνοντας έτσι σημασία στην πρόβλεψη πριν το γραφικό αποτέλεσμα και δημιουργώντας ένα κλίμα συζήτησης και ανταλλαγής ιδεών μέσα στην ομάδα προωθώντας παράλληλα και τις αντίστοιχες φάσεις του **“Explain”** και **“Explore”** του ίδιου μοντέλου. Με αυτό τον τρόπο, μέσα από τα ερωτήματα (α) και (β) της δραστηριότητας, δημιουργείται ένα πρόσφορο έδαφος για διάλογο και διατύπωση των απόψεων και ιδεών των παιδιών τόσο σχετικά με την πρόβλεψη του μοντέλου και την αιτιολόγηση του τρόπου σκέψης τους, όσο και σχετικά με την πιθανή διόρθωση των ιδεών τους και τον αναστοχασμό πάνω σε όσα είχαν προβλέψει και όσα τελικά προέκυψαν. Ζητώντας, μάλιστα, συγκεκριμένα από τους μαθητές να καταλήξουν σε μία τελική πρόβλεψη από κοινού, η ερευνήτρια στοχεύει σε μία βαθύτερη εξήγηση και τεκμηρίωση της πρόβλεψης του κάθε μαθητή προς τον συμμαθητή του, γεγονός που δείχνει το επίπεδο κατανόησης των εντολών που χρησιμοποιούνται στο μισοψημένο γράμμα και των μαθηματικών ιδιοτήτων που κρύβονται μέσα στο μισοψημένο μοντέλο.
Μία πιθανή πρόβλεψη θα μπορούσε να είναι μία απλή τεθλασμένη γραμμή ή κάτι που μοιάζει με κεραυνό για παράδειγμα. Η ερευνήτρια, βέβαια, διατηρώντας ίδια τη σειρά των εντολών (μπροστά-δεξιά-μπροστά-αριστερά-μπροστά) που υποθετικά χρησιμοποιήσαν και οι ίδιοι οι μαθητές στη Δραστηριότητα 1, αναμένει από τους μαθητές να προβλέψουν ότι ένα πιθανό αποτέλεσμα του κώδικα είναι το γράφημα Ν αν και η πρόκληση έγκειται στην εντολή του αριστερά, όπου έχει χρησιμοποιηθεί εσκεμμένα από τον ερευνητή μία μεταβλητή η οποία «κρύβει» από τους μαθητές τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των εντολών δεξιά και αριστερά, δηλαδή μεταξύ των εντός εναλλάξ γωνιών. Η σωστή εντολή είναι να στραφεί το σπουργίτι αριστερά 135 μοίρες. Αυτό στοχεύει στη νοηματοδότηση των μαθητών σχετικά με το είδος των γωνιών που χρησιμοποιούνται στην κατασκευή του μοντέλου του γράμματος Ν, είτε τις χρησιμοποίησαν σωστά στη Δραστηριότητα 1 και το επανέλαβαν και σε αυτή, είτε το ανακάλυψαν μέσα από τη διερεύνησή τους στη Δραστηριότητα 2.



Εικόνα 12: Στιγμιότυπα του μισοψημένου μοντέλου Ν

Παράλληλα, στην δεύτερη εντολή «μπροστά», η οποία αντιστοιχεί στο πλάγιο ευθύγραμμο τμήμα του γράμματος, έχει οριστεί συγκεκριμένος αριθμός (100), γεγονός που αφενός έρχεται σε αντίθεση με τα άλλα δύο ευθύγραμμα τμήματα τα οποία μεταβάλλονται μέσω μίας μεταβλητής χ, αφετέρου έχει «κρύψει» από τους μαθητές τη σχέση εξάρτησης που έχει η πλάγια πλευρά του γράμματος με τις δύο κάθετες. Συνολικά, λοιπόν, η σχεδιάστρια έχει τοποθετήσει μεταβλητή σε εντολή που απαιτείται σταθερός αριθμός και, αντίστοιχα, σταθερό αριθμό σε εντολή που απαιτεί μία σχέση με χρήση μεταβλητής. Με τον συγκεκριμένο σχεδιασμό, οι δύο προκλήσεις που αναφέρθηκαν για τους μαθητές στη Δραστηριότητα 1, εμφανίζονται και πάλι εδώ, σε ένα διαφορετικό γενικευμένο μοντέλο, το οποίο οι μαθητές καλούνται να διορθώσουν μέσα από τον πειραματισμό τους με το εργαλείο και τον αναστοχασμό των αποτελεσμάτων που παίρνουν από το ίδιο. Και αυτό το μισοψημένο μοντέλο, είναι αρκετά ανοιχτό ως προς τη διόρθωση που μπορεί να λάβει από τους μαθητές, καθώς οι ίδιοι μπορούν είτε να χρησιμοποιήσουν σχέσεις αναλογίας για την πλάγια πλευρά, είτε σχέσεις τριγωνομετρικών αριθμών για παράδειγμα. Η στροφή των 135 μοιρών που σχηματίζει μία γωνία 45 μοίρες σε ένα νοητό ορθογώνιο τρίγωνο θα μπορούσε υποθετικά να χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές και συνδυαστικά με τη βοήθεια του ημιτόνου ή του συνημιτόνου, να εκφράσουν οι μαθητές την πλάγια πλευρά του Ν που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου.

Συμπληρωματικά σε όσα αναλύθηκαν παραπάνω, η Δραστηριότητα 2 με το μαστόρεμα του μισοψημένου μοντέλου του Ν και το (γ) ερώτημα, προωθεί τη φάση του **"Discriminating"**, εφόσον εδώ οι μαθητές έχουν να αντιμετωπίσουν ένα «χαλασμένο» Ν και έτσι, καλούνται να «διαλύσουν» τον κώδικα που λειτουργεί ως σύνολο και να πειραματιστούν, διερευνώντας και αναζητώντας εντολή προς εντολή τη σημασία τους στο όλο, αλλά και πιθανές σχέσεις της μίας εντολής με άλλες εντολές ή μεταβλητές. Οι μαθητές σε αυτή τη φάση αναμένουμε να διακρίνουν πλέον στοιχεία μαθηματικών στις κατασκευές τους -πιο στοχευμένα από την Δραστηριότητα 1- και να μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν συνειδητά και με νόημα μέσα σε αυτές.

(Σημείωση: Τα ερωτήματα δίνονταν ένα-ένα στους μαθητές. Έτσι, όταν στο (α) τους ζητήθηκε πρόβλεψη του μοντέλου, προφανώς οι μαθητές δεν έβλεπαν το (γ) το οποίο αναφέρει το γράμμα Ν.)

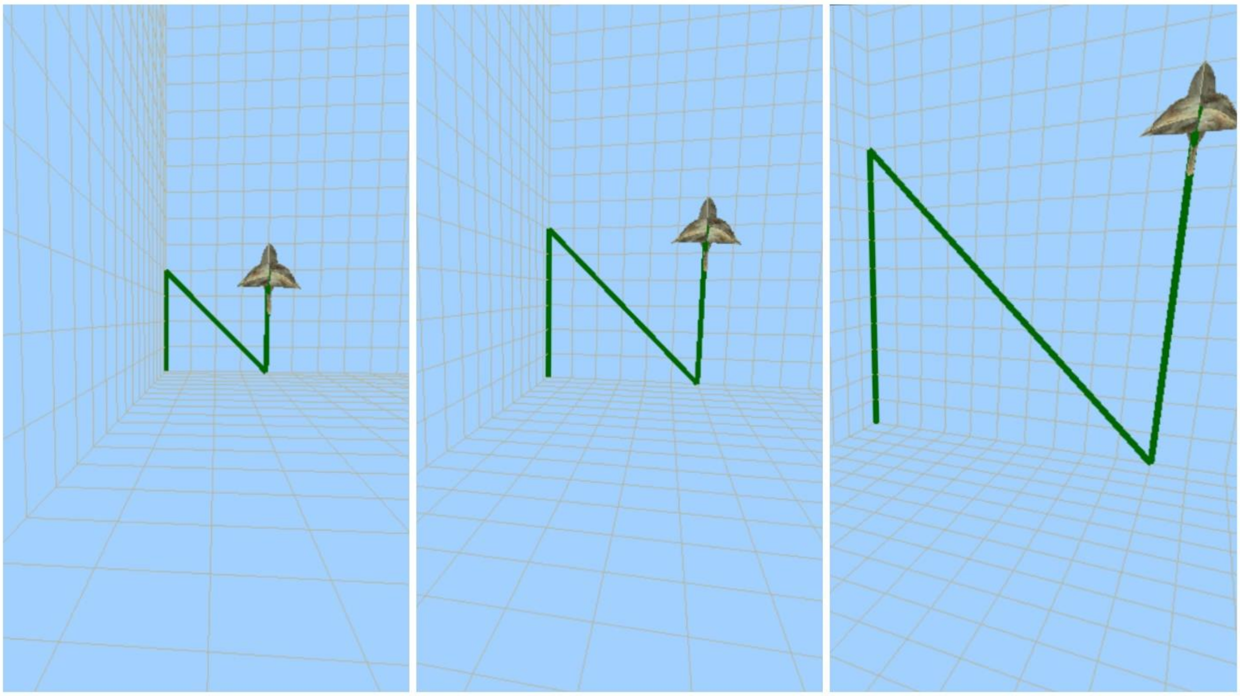
<u>Δραστηριότητα 3:</u> «Βρες τον κώδικα!»

Εκτελέστε τη διαδικασία "mystery" που δίνεται στο εργαλείο MaLT.

α. Μπορείτε να συντάξετε τις εντολές του κώδικα οι οποίες να κατασκευάζουν το μοντέλο που απεικονίζεται γραφικά στην οθόνη σας;

β. Ο τελικός κώδικας που δημιουργήσατε το ερώτημα (α) έχει κάποια διαφορά σε σύγκριση με τους προηγούμενους κώδικες που δημιουργήσατε για το γράμμα Ν; Αν ναι, ποια ή ποιες είναι αυτές;

Η Δραστηριότητα 3 ζητάει από τους μαθητές να εκτελέσουν μία διαδικασία, της οποίας οι εντολές αποκρύπτονται από το παράθυρο του συντάκτη. Τα παιδιά καλούνται να διερευνήσουν το μοντέλο που κατασκευάζει η «κρυμμένη» διαδικασία και να συντάξουν οι ίδιοι τις εντολές του κώδικα. Το συγκεκριμένο μοντέλο ανήκει και πάλι στο γράμμα Ν, όμως τώρα είναι σχεδιασμένο με τέτοιο τρόπο, ώστε αφενός να μην αλλοιώνεται όταν κάποιος μετακινεί τον κέρσορα και αφετέρου να πλαισιώνεται από ένα τετράγωνο πλευράς χ. Αυτό αναμένεται να γίνει αντιληπτό από τα παιδιά μέσω της περιστροφικής κάμερας και του πλέγματος (ορθοκανονικό σύστημα αξόνων) που εμφανίζεται στην οθόνη τους. Στην περίπτωση που δεν γίνει άμεσα αντιληπτό, η ερευνήτρια θα υποστηρίξει τους μαθητές ως προς το στοιχείο ύπαρξης ενός νοητού τετραγώνου μέσα στο οποίο κατασκευάζεται το Ν, ενθαρρύνοντας τους να ενεργοποιήσουν το πλέγμα και να δοκιμάσουν συγκεκριμένες τιμές, όπως 20, 40 ή 60, ώστε να μπορέσουν να διακρίνουν το νοητό τετράγωνο μέσα στο οποίο εφαρμόζει το μοντέλο του γράμματος.



Εικόνα 13: Στιγμιότυπα του γενικευμένου μοντέλου Ν

Αρχικά, αναμένεται οι μαθητές να δώσουν έμφαση στη χρήση μίας μεταβλητής μέσα στον κώδικα, εφόσον ενεργοποιείται μόνο ένα μεταβολέας. Στη συνέχεια, η ύπαρξη τετραγώνου έχει ως στόχο να μελετήσει τον τρόπο που οι μαθητές θα αξιοποιήσουν αυτό το χαρακτηριστικό του μοντέλου στον κώδικα που αναζητούν. Προφανώς, σε αυτή την περίπτωση, η πλάγια πλευρά του γράμματος Ν, η οποία αποτελεί αντικείμενο συζήτησης, διερεύνησης και διαπραγμάτευσης των μαθητών ήδη από τις προηγούμενες δύο δραστηριότητες, αποτελεί την υποτείνουσα ενός νοητού ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου. Η σχεδιάστρια στοχεύει και αναμένει την χρήση του πυθαγορείου θεωρήματος από τους μαθητές και την απόδοση της πλευράς ως την τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών χ, με στόχο να κατασκευαστεί προοδευτικά από τους μαθητές ένα μοντέλο πιο «ισχυρό» υπό την οπτική ότι η αναλογία που πιθανώς να χρησιμοποίησαν οι μαθητές σε κάποιο από τα προηγούμενα μοντέλα για να δημιουργήσουν το μήκος του πλάγιου ευθύγραμμου τμήματος, ναι μεν δημιουργεί το μοντέλο του γράμματος Ν, αλλά βασίζεται σχεδόν εξ ολοκλήρου στη γραφική αναπαράσταση που παρατήρησαν οι μαθητές στο εργαλείο. Αυτός είναι και ο λόγος ύπαρξης του (β) ερωτήματος, όπου οι μαθητές καλούνται να αναστοχαστούν σχετικά με τα μοντέλα του Ν που έχουν κατασκευάσει ή διορθώσει έως τώρα. Ζητούμενο, λοιπόν, της 3ης Δραστηριότητας είναι η νοηματοδότηση των μαθητών ως προς τη χωρική

αναπαράσταση του συγκεκριμένου μοντέλου, καθώς και το να προκύψει η αναγκαιότητα στους μαθητές να αναζητήσουν και να κατανοήσουν το λόγο και τον τρόπο να βάλουν σε χρήση συγκεκριμένες μαθηματικές σχέσεις και ιδιότητες.
Έτσι, η Δραστηριότητα 3 σχεδιάστηκε με τέτοιο τρόπο, ώστε οι μαθητές να εμπλακούν στη φάση του **"Explore"**, καθώς εξερευνούν το δοσμένο γράφημα και πειραματίζονται ως προς την ανακάλυψη του κώδικα που το δημιουργεί και στη φάση του **"Explain"**, καθώς στοχεύεται η δημιουργία ενός πρόσφορου κλίματος για συζήτηση μέσω αναστοχαστικών ερωτήσεων του ερευνητή-εκπαιδευτικού, ώστε να δοθεί το βήμα τους μαθητές να διατυπώσουν τις ιδέες τους και να εξηγήσουν τι έχουν κατανοήσει ως τώρα σε σχέση με τις τρεις δραστηριότητες που έχουν πραγματοποιήσει, καθώς αυτό βοηθά σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό στην αποσαφήνιση των σκέψεων τους και στην ανάδειξη της κατανόησης που έχουν επιτύχει μέχρι τώρα. Παράλληλα, επεκτείνεται σε αυτή την δραστηριότητα το εύρος της κατανόησης και της εφαρμογής μαθηματικών εννοιών από την πλευρά των μαθητών, γεγονός που την κατατάσσει σταδιακά από τη φάση του **"Discriminating"** στη φάση του **"Generalizing".**

Δραστηριότητα 4: «Ας μαστορέψουμε λίγο ακόμα!»
Σε μία νέα καρτέλα, ανοίξτε πάλι το MaLT και προσπαθήστε να δημιουργήσετε μία διαδικασία η οποία όταν εκτελείται να δημιουργεί το μοντέλο του κεφαλαίου γράμματος Ζ χωρίς αυτό να αλλοιώνεται.

Στην 4η και τελευταία Δραστηριότητα της φάσης αυτής, η σχεδιάστρια ζητά από τους μαθητές να κατασκευάσουν εξ αρχής ένα γενικευμένο μοντέλο του γράμματος Ζ. Οι μαθητές ήδη από τις προηγούμενες δραστηριότητες έχουν έρθει σε επαφή με διαδικασίες που σχηματίζουν με διαφορετικούς τρόπους το μοντέλο του γράμματος Ν με μεταβλητές. Έτσι, με την επιλογή αυτού του γράμματος, στόχος της δραστηριότητας είναι να διαπιστώσει η ερευνήτρια αν οι μαθητές θα αναγνωρίσουν πως για την κατασκευή του μοντέλου του γράμματος Ζ θα χρειαστούν να χρησιμοποιήσουν τις ίδιες μαθηματικές ιδιότητες που χρησιμοποίησαν και για το μοντέλο του γράμματος Ν νωρίτερα, εφόσον πάλι εμφανίζονται δύο παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα, ένα πλάγιο τμήμα που το μήκος του εξαρτάται από τα προηγούμενα και εντός εναλλάξ γωνίες στο εσωτερικό του γράμματος. Με αυτή τη δραστηριότητα, λοιπόν, ο ερευνήτρια θα αναζητήσει την απάντηση ως προς ανθεκτική κατανόηση των μαθηματικών ιδιοτήτων από τους μαθητές σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό από τις προηγούμενες δραστηριότητες, καθώς και την ανθεκτική κατανόηση ως προς το μαθηματικό μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουν για την επίτευξη της κατασκευής του Ζ. Θα χρησιμοποιήσουν, δηλαδή, αναλογίες, το πυθαγόρειο θεώρημα ή κάτι διαφορετικό, για να δημιουργήσουν ένα αναλλοίωτο μοντέλο του γράμματος Ζ;
Γενικά, αξίζει να σημειωθεί, πως η σχεδιάστρια προσπαθεί να κρατήσει τις δραστηριότητες αρκετά ανοιχτές, ώστε οι ίδιες οι δραστηριότητες να έχουν νόημα ως ερευνητικά εργαλεία μέσα στην έρευνα. Σύμφωνα με όσα αναλύθηκαν παραπάνω σχετικά με το σχεδιασμό της παρούσας δραστηριότητας, η Δραστηριότητα 4 έχει σχεδιαστεί ώστε να ανήκει στη φάση κυρίως του **"Generalizing"** των UDGS, όπου οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν μοτίβα σε σχέσεις ή σε ιδιότητες μέσα από τα προηγούμενα μοντέλα, γενικεύοντας τις ιδέες τους, καθώς χρησιμοποιούν τις εντολές του εργαλείου και κατασκευάζουν τα μοντέλα των γραμμάτων Ν αρχικά και Ζ τώρα.

Αντίστοιχα, από το μοντέλο των 5Es, η δραστηριότητα βασίζεται στις φάσεις των **“Explore”**, **“Explain”** και **“bridgE”**. Αρχικά, οι μαθητές υποθετικά θα διερευνήσουν τις ιδέες τους ως προς την κατασκευή του Ζ πειραματιζόμενοι στο εργαλείο και αναλαμβάνοντας τον έλεγχο της κατασκευής, αλλά της μάθησής τους (Explore). Αυτό θα γίνει σίγουρα μέσα από διατύπωση των σκέψεων και απόψεων των μαθητών και, φυσικά, συζήτηση μεταξύ τους, όπου θα καταλήξουν συνεργατικά στον τρόπο που θα κατασκευάσουν το ζητούμενο γράμμα και το μαθηματικό μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουν (Explain). Τέλος, ο ερευνήτρια μέσα από αναστοχαστικές ερωτήσεις στο τέλος της δραστηριότητας θα μπορούσε να υποστηρίξει τους μαθητές ως προς τη σύνδεση του προγραμματιστικού περιβάλλοντος του MaLT2 και των «επίσημων» μαθηματικών τα οποία χρησιμοποίησαν ή συζήτησαν οι μαθητές σε όλες τις φάσεις της εξερεύνησης τους, ζητώντας τους για παράδειγμα να επιχειρηματολογήσουν για τις μαθηματικές ιδιότητες που χρησιμοποίησαν τόσο αρχικά, όσο και στην τελική τους κατασκευή (bridgE).

3.3.3 Φάση Β: Διερεύνηση των Λέξεων «ΝΗΣΙ» - «ΑΜΜΟΣ»

Η Φάση Β ξεκινάει με μία δραστηριότητα πρόβλεψης, μαστορέματος και διαμοιρασμού των ιδεών των μαθητών και συνεχίζει με τη διερεύνηση δύο λέξεων οι οποίες περιέχουν και τα γράμματα με τα οποία οι μαθητές έχουν εμπλακεί νωρίτερα, όπως το Ν και το Σ.

<u>Δραστηριότητα 1:</u> «Μάντεψε!»

Δίνεται η εξής διαδικασία:

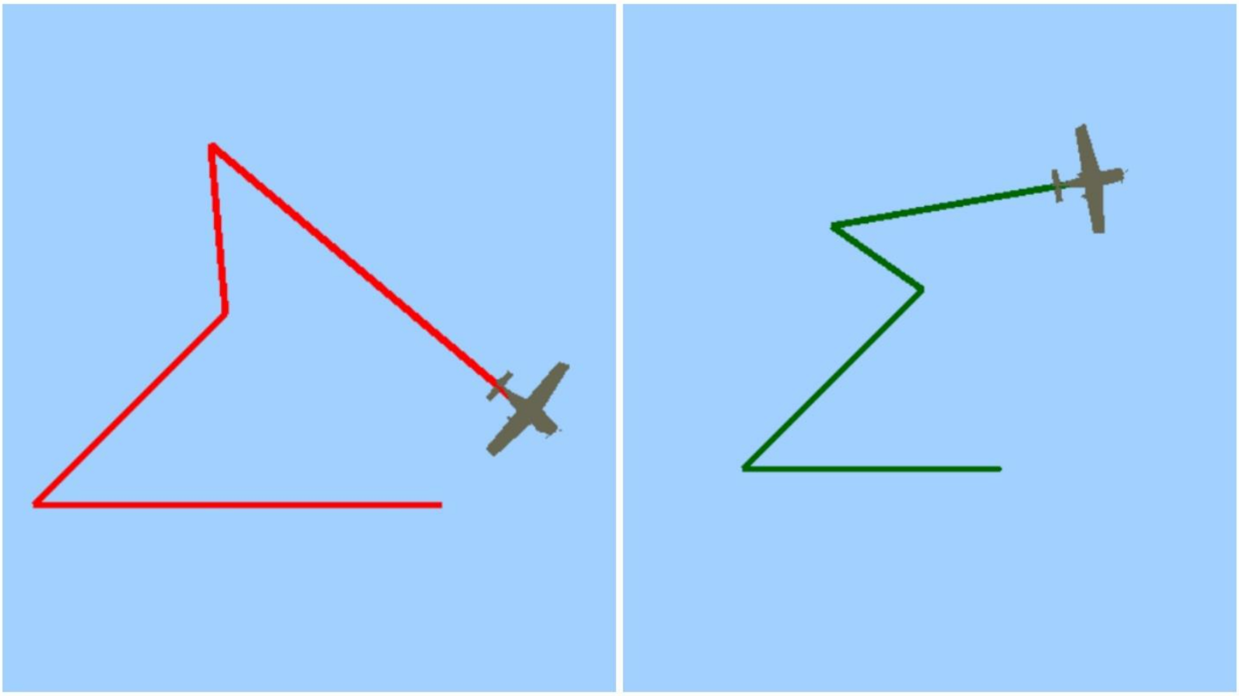
```
ΓΙΑ αίνιγμα :χ :ψ :ω
δεξιά 90
μπροστά :χ
πίσω :χ
αριστερά 45
μπροστά 80
αριστερά :ω
μπροστά :ψ
δεξιά 135
μπροστά :χ
ΤΕΛΟΣ

σβγ
αίνιγμα 120 50 50
```

α. Πριν εκτελέσεις την παραπάνω διαδικασία στο MaLT2, μπορείς να προβλέψεις τι θα μπορούσε να σχηματίζει το ίχνος που αφήνει το αεροπλάνο πίσω του; Γράψε πιθανές προβλέψεις.

β. Τώρα εκτέλεσε τον κώδικα. Με τι μοιάζει αυτό που σχηματίζει τελικά; Είσαι ελεύθερος να το αλλάξεις όπως εσύ επιθυμείς.

γ. Αφού ολοκληρώσεις τη δραστηριότητα, θα παρουσιάσεις στο συμμαθητή σου το μοντέλο που κατασκεύασες αιτιολογώντας τις επιλογές σου.

Αρχικά θα αναλυθεί το μισοφημένο μοντέλο του Σ που δίνεται ως προς τα σφάλματα που έχουν ενσωματωθεί και στη συνέχεια η σχεδιάστρια θα επεξηγήσει το τρόπο που θα δοθεί αυτή η δραστηριότητα στα παιδιά.
Το μοντέλο του γράμματος Σ το οποίο εμπεριέχει δύο σφάλματα εσκεμμένα από τον σχεδιαστή, είναι ένα μοντέλο αρκετά ανοιχτό ως προς τη διερεύνηση των μαθητών στη Δραστηριότητα 1 της Φάσης Β. Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται στον κώδικα, οι πρώτες 4 εντολές είναι σωστές με στόχο να βοηθήσουν τους μαθητές ως προς την πρόβλεψη του μοντέλου θέτοντας μία σωστή βάση για το μισό μοντέλο. Από εκεί και πέρα, όμως έχουν ενσωματωθεί σφάλματα στον κώδικα τόσο ως προς το μήκος των πλάγιων ευθυγράμμων τμημάτων του Σ, όσο και ως προς τη γωνία που δημιουργείται στη μέση του γράμματος (δλδ. στην εντολή αριστερά :ω). Ως προς το σφάλμα των πλευρών οι οποίες πρέπει να είναι ίσες, η σχεδιάστρια έχει επιλέξει να θέσει στη μία έναν σταθερό αριθμό (80) και στην άλλη μία μεταβλητή ψ.
Σε πρώτη φάση, ο λόγος που επέλεξε να το κάνει αυτό είναι για να προβληματίσει τους μαθητές ως προς το αν θα επιλέξουν να τοποθετήσουν και στις δύο πλευρές σταθερούς αριθμούς ή αν θα προτιμήσουν να τοποθετήσουν και στις δύο τη μεταβλητή ψ, δεδομένου πως οι δύο πλάγιες πλευρές στο γράμμα Σ είναι ίσες. Στοχεύεται και αναμένεται υποθετικά οι μαθητές να επιλέξουν τη δεύτερη εκδοχή, κατασκευάζοντας ένα γενικευμένο μοντέλο του γράμματος Σ, καθώς ο κώδικας ξεκινάει ήδη δίνοντας μία γενικευμένη διαδικασία και ταυτόχρονα οι μαθητές έχουν ήδη αναπτύξει αυτή την κουλτούρα μέσα από την υποθετική τροχιά μάθησης της Φάσης Α.
Σε δεύτερη φάση, η σχεδιάστρια εκτός από τις σταθερές ή μη πλάγιες πλευρές που έθεσε υπό αμφισβήτηση στους μαθητές, έχει αποκρύψει παράλληλα το πιο σημαντικό στοιχείο το οποίο είναι η σχέση που συνδέει τις πλάγιες πλευρές με τις παράλληλες. Αφού οι μαθητές τοποθετήσουν τη μεταβλητή ψ, αναμένεται μέσα από τον πειραματισμό με τους μεταβολείς που παρέχει το εργαλείο, να διαπιστώσουν ότι ναι μεν οι πλευρές πρέπει να παραμείνουν μεταβλητές στο μοντέλο, όμως η χρήση ξεχωριστού άγνωστου, θα συνεχίσει να αλλοιώνει το μοντέλο του γράμματος Σ. Και εδώ οι μαθητές αφήνονται ελεύθεροι να πειραματιστούν και να ανακαλύψουν τη σχέση που πιστεύουν ότι θα κάνει το μαθηματικό τους μοντέλο να απεικονίζει το γράμμα Σ. Αναμένεται από τον ερευνητή, σε αυτή την πρώτη επαφή των μαθητών με το γράμμα Σ, να χρησιμοποιηθεί από αυτούς η έννοια της αναλογίας. Παρόλα αυτά, θα ήταν πρόκληση για τον ίδιο τον ερευνητή, αλλά και τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα για να εκφράσουν τις πλάγιες πλευρές του γράμματος. Κάτι τέτοιο δεν αποκλείεται, καθώς οι μαθητές έχουν ήδη περάσει από τις δραστηριότητες της Φάσης Α, γεγονός που αν συμβεί ήδη από την $1^{η}$ Δραστηριότητα της Φάσης Β, θα αποκαλύψει πολλά ως προς την ανθεκτική κατανόηση και την ικανότητα χρήσης μαθηματικών ιδιοτήτων των μαθητών που μελετάται μέσα από αυτή τη διδακτική παρέμβαση. Τα αποτελέσματα που ακολουθούν στο Κεφάλαιο 4 θα αποκαλύψουν την πορεία της εξερεύνησης και της νοηματοδότησης των μαθητών ως προς το μαθηματικό μοντέλο που τελικά κατασκεύασαν.
Ως προς την γωνία, η σχεδιάστρια έχει επιλέξει να αποκρύψει από τα παιδιά την ορθή γωνία που υπάρχει στην εντολή αυτή και έτσι θέτει μία μεταβλητή η οποία «σπάει» το Σ στη μέση, μετακινώντας το πάνω μισό τμήμα του. Αναμένεται να υπάρξει συζήτηση μεταξύ των μαθητών, τόσο ως προς την αφαίρεση της μεταβλητής από το μοντέλο, όσο και ως προς τον αριθμό που θα πρέπει να τοποθετηθεί. Αναμένουμε να τους βοηθήσει η αρχική στροφή που κάνει το αεροπλάνο κατά 45 μοίρες και η τελική κατά 135 (το οποίο δηλώνει δημιουργία παραπληρωματικής εσωτερικής γωνίας 45 μοιρών) και να σκεφτούν την ύπαρξη μιας παράλληλης νοητής ευθείας στη μέση του Σ η οποία δημιουργεί εντός εναλλάξ γωνίες (45+45=90), ιδιότητα που έχουν χρησιμοποιήσει και νωρίτερα στα γράμματα Ν και Ζ, ίσως σε μία πιο απλή και εύκολη απεικόνιση.



Εικόνα 14: Στιγμιότυπα του μισοψημένου μοντέλου Σ

Ως προς τον τρόπο που θα δοθεί αυτή η συγκεκριμένη δραστηριότητα στα παιδιά, η σχεδιάστρια επέλεξε να την διαφοροποιήσει από την αντίστοιχη δραστηριότητα του Ν και να την αναθέσει σε κάθε μαθητή ατομικά. Μόνο αυτή η δραστηριότητα θα αφορά ατομικό πειραματισμό από τους μαθητές, ενώ όλες οι υπόλοιπες θα συνεχίσουν σε ομαδικό κλίμα. Ο λόγος που διάλεξε αυτή τη διαφοροποίηση είναι για να ενισχύσει την φάση του **"Exchange",** καθώς οι μαθητές αφού προβλέψουν ατομικά ο καθένας την γραφική αναπαράσταση του μοντέλου και αφού πειραματιστούν μόνοι τους και αλλάξουν το μοντέλο όπως επιθυμεί ο καθένας, καλούνται να παρουσιάσουν ο ένας στον άλλο τα μοντέλα τους και να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους, καθώς και τον τρόπο σκέψης τους. Εδώ, λοιπόν, η σχεδιάστρια στοχεύει όχι σε μία απλή επεξήγηση των αλλαγών του μοντέλου, αλλά σε ανάδειξη βασικών επιχειρημάτων των μαθητών που βασίζονται σε μαθηματικές ιδιότητες και προβληματισμό του καθενός για το μοντέλο του. Δηλαδή, η σχεδιάστρια δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να αναστοχαστούν τόσο πάνω στο δικό τους μοντέλο, ακούγοντας τις ιδέες του συμμαθητή τους, όσο και πάνω στο μοντέλο του συμμαθητή τους αμφισβητώντας το ενδεχομένως και προτείνοντας αλλαγές. Με αυτό τον τρόπο, η φάση του "Exchange" προσφέρει ουσιαστικές εμπειρίες για διαμοιρασμό των δικών μας ιδεών και ταυτόχρονα για αξιοποίηση των ιδεών των άλλων.

Επιπρόσθετα, στην δραστηριότητα αυτή, η φάση του **"Envisage"** εξισορροπείται με τη φάση του **"Explore"**, όπως ακριβώς προτείνει και το μοντέλο των 5Es, γεγονός το οποίο ενθαρρύνεται κυρίως μέσα από το ίδιο το ψηφιακό εργαλείο. Σύμφωνα, με το (α) ερώτημα, οι μαθητές καλούνται να προβλέψουν το γράφημα που δίνει ο παραπάνω κώδικας, πριν εκτελέσουν τη διαδικασία και στη συνέχεια σύμφωνα με (β) ερώτημα αφήνονται ελεύθεροι να το αλλάξουν όπως αυτοί επιθυμούν. Εσκεμμένα, δεν αναφέρεται μέσα στη δραστηριότητα ότι το μοντέλο είναι μισοψημένο, δηλαδή ότι περιέχει κάποια σφάλματα, ώστε να μην προϊδεάσει τους μαθητές ως προς την πρόβλεψη του και για αυτό το λόγο στην εκφώνηση του φύλλου εργασίας χρησιμοποιείται το ρήμα «αλλάζω» και όχι «διορθώνω». Επίσης, σε αυτό το μοντέλο η σχεδιάστρια επιλέγει να δώσει τις τιμές

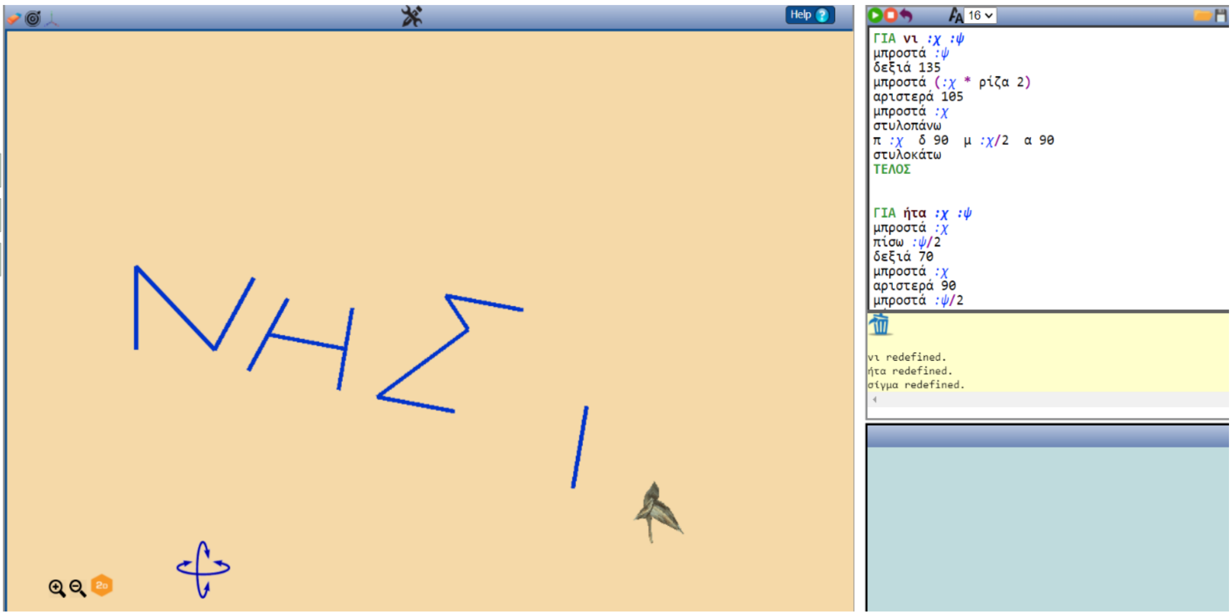
εκτέλεσης της διαδικασίας (αίνιγμα 120 50 50), κάτι που στην προηγούμενη δραστηριότητα πρόβλεψης δεν το είχε κάνει. Στην προηγούμενη δραστηριότητα του Ν, η σχεδιάστρια δεν είχε δώσει τιμές εκτέλεσης της διαδικασίας και είχε αφήσει τους μαθητές ελεύθερους να το εκτελέσουν με τιμές της επιλογής τους, καθώς εκεί υπήρχε μία προηγούμενη δραστηριότητα εμπλοκής των παιδιών με το γράμμα Ν. Αντίθετα, εδώ είναι η $1^{η}$ δραστηριότητα εμπλοκής τους με το γράμμα Σ και θεωρεί ότι αυτό το στοιχείο θα τους βοηθήσει να επιτύχουν μία πιο σωστή πρόβλεψη.
Κάτι που αξίζει να τονιστεί είναι ότι με το εργαλείο MaLT2, η φάση “Envisage” των μαθητών δεν εμφανίζεται μόνο μέσα από δραστηριότητες όπως αυτή, όπου ζητείται ξεκάθαρα από τα παιδιά να προβλέψουν ένα μοντέλο συνολικά, αλλά εμφανίζεται επιπλέον τμηματικά και επαναλαμβανόμενα από τους μαθητές πριν από τη διόρθωση κάθε εντολής. Αυτό συμβαίνει, γιατί τα παιδιά δεν πειραματίζονται πάντα τυχαία στο εργαλείο, αλλά πολλές φορές παραθέτουν και αιτιολογούν την άποψή τους μέσα στην ομάδα, αφού έχουν προσπαθήσει να προβλέψουν διαισθητικά ή με τη βοήθεια του σώματός τους (συντονικότητα σώματος) το αποτέλεσμα που θα έχει αυτή η αλλαγή στο μοντέλο τους, πριν αποφασίσουν να την πραγματοποιήσουν στο εργαλείο. Με αυτό τον τρόπο το MaLT2 δίνει την ευκαιρία και την δυνατότητα στην εκπαιδευτικό να διατηρεί μία δημιουργική ισορροπία ανάμεσα στην πρόβλεψη και την εξερεύνηση των μαθητών η οποία συμβάλει στην εξάσκηση του νου και δίνει ευκαιρίες στους μαθητές να εξερευνήσουν διαφορετικούς τρόπους σκέψης, εμπλοκής και νοηματοδότησης ως προς την έννοια ή ιδιότητα που εξερευνούν και χρησιμοποιούν.
Επιπρόσθετα, ο σχεδιασμός της δραστηριότητας και κατ’ επέκταση ο τρόπος που θα εργαστούν στα παιδιά σε αυτή, βασίζονται πάνω στο μοντέλο των UDGS και πιο συγκεκριμένα αναμένεται οι μαθητές να περάσουν μέσα από τις φάσεις **“Using”** και **“Discriminating”**. Οι μαθητές χρησιμοποιούν (“using”) αρχικά το μοντέλο που τους δίνεται στο ερώτημα (α) για να προβλέψουν τη γραφική αναπαράσταση που δίνει αυτό, ενώ όταν στο (β) ερώτημα εκτελούν τον κώδικα, χρησιμοποιούν το μοντέλο ως σύνολο, δίνοντας βάση στο τι απεικονίζει και στο πώς αυτό αλλοιώνεται μέσα από τους μεταβολείς, χωρίς ίσως μεγάλη σημασία στις μαθηματικές ιδιότητες που κρύβονται πίσω από τη δομή του. Σταδιακά, όμως, και έχοντας ως επόμενο στόχο να το αλλάξουν ώστε υποθετικά να μην αλλοιώνεται, η πρόκληση των μαθητών είναι να «διαλύσουν» το μοντέλο -εντολή προς εντολή- και να διακρίνουν (“discriminating”) τις μαθηματικές ιδιότητες που έχουν ήδη ενσωματωθεί από τον σχεδιαστή (π.χ. εντός εναλλάξ γωνίες) ή ακόμη και αυτές που πρέπει οι ίδιοι να ενσωματώσουν στο μοντέλο (π.χ. αναλογίες ή Πυθαγόρειο Θεώρημα) ώστε να κατασκευάζει το γράμμα Σ. Βέβαια, δεν είναι αρκετό μόνο το να διακρίνουν τις μαθηματικές ιδιότητες που υπάρχουν, αλλά έχει μεγάλη σημασία για τους μαθητές να διακρίνουν και το πώς χρησιμοποιούνται αυτές μέσα στο μοντέλο, είτε είναι ορθά ενσωματωμένες, είτε χρησιμοποιούνται με σφάλματα μέσα στον κώδικα και έτσι να φέρουν στο φως και να διατυπώσουν ρητά ό,τι ήταν προηγουμένως σιωπηρό ή κρυμμένο μέσα στο μοντέλο.

<u>Δραστηριότητα 2:</u> «Έτοιμοι για το καλοκαίρι…!»
Και καθώς το καλοκαίρι πλησιάζει, κάποιες λέξεις φωνάζουν από μακριά!
Όμως κάποιος θέλει να μας τις χαλάσει! Τι λέτε; Θα καταφέρετε να τις διορθώσετε;

(Προσέξτε όταν κάποιος κινεί τους μεταβολείς, να αυξομειώνεται η λέξη χωρίς να αλλοιώνονται τα γράμματα ή ολόκληρη η λέξη.)

Η 2η Δραστηριότητα έχει ως στόχο να αυξήσει περισσότερο το ενδιαφέρον των παιδιών, καθώς μέχρι τώρα οι μαθητές κατασκεύαζαν ή αποσφαλμάτωναν συγκεκριμένα γράμματα, ενώ τώρα θα εμπλακούν με τις λέξεις ΝΗΣΙ και ΑΜΜΟΣ, οι κώδικες των οποίων θα δοθούν στους μαθητές εσφαλμένοι και πλέον θα πρέπει να διορθωθούν εξαρτώμενοι ο ένας από τον άλλον και όχι ανεξάρτητα. Δηλαδή, οι μαθητές καλούνται όχι απλά να διορθώσουν τα μοντέλα των γραμμάτων ξεχωριστά, αλλά να λάβουν υπόψη τους ότι πρόκειται για λέξεις οι οποίες θα πρέπει να αυξομειώνονται ομοιόμορφα.

Έτσι, λοιπόν, δίνεται εκτελεσμένη στους μαθητές η διαδικασία που δίνει τη λέξη ΝΗΣΙ και το αποτέλεσμα που βλέπουν οι μαθητές είναι αυτό που ακολουθεί.



Εικόνα 15: Στιγμιότυπα της μισοψημένης λέξης ΝΗΣΙ

Η λέξη ΝΗΣΙ περιέχει το γράμμα Ν το οποίο οι μαθητές εξερεύνησαν διεξοδικά στην Α' Φάση, το γράμμα Η και το γράμμα Ι τα οποία κατασκευάζονται εύκολα από τους μαθητές, καθώς αποτελούνται μόνο από κάθετα και οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα και το γράμμα Σ με το οποίο ήρθαν σε μία πρώτη επαφή στην προηγούμενη ακριβώς δραστηριότητα. Ουσιαστικά, η διερεύνηση των παιδιών συνεχίζεται ως αναφορά το μαθηματικό μοντέλο του γράμματος Σ, το οποίο πλέον βρίσκεται μέσα σε μία λέξη και έτσι, θα δοθεί ένα διαφορετικό μισοψημένο μοντέλο του Σ στους μαθητές προς διερεύνηση. Παρακάτω, θα αναλυθούν σύντομα τα σφάλματα των Ν, Η και Ι που έχει ενσωματώσει η σχεδιάστρια στα μοντέλα και στη συνέχεια, η ανάλυση θα επικεντρωθεί στο γράμμα Σ.

Ν	Η	Σ	Ι
ΓΙΑ νι :χ :ψ μπροστά :ψ δεξιά 135 μπροστά (:χ * ρίζα 2) αριστερά 105 μπροστά :χ στυλοπάνω π :χ δ 90 μ :χ/2 α 90 στυλοκάτω ΤΕΛΟΣ	ΓΙΑ ήτα :χ :ψ μπροστά :χ πίσω :ψ/2 δεξιά 70 μπροστά :χ αριστερά 90 μπροστά :ψ/2 πίσω :χ στυλοπάνω δ 90 μ :χ/2 α 90 στυλοκάτω ΤΕΛΟΣ	ΓΙΑ σίγμα :χ δεξιά 90 μπροστά :χ πίσω :χ αριστερά 45 μπροστά sqrt(:χ*:χ + :χ*:χ) αριστερά 90 μπροστά (:χ/2) δεξιά 135 μπροστά :χ στυλοπάνω μ :χ/2 α 90 π :χ*2 στυλοκάτω ΤΕΛΟΣ	ΓΙΑ γιώτα :ψ στυλοπάνω δεξιά 90 μπροστά :ψ/2 αριστερά 90 στυλοκάτω μπροστά :ψ στυλοπάνω π :ψ δ 90 μ :ψ α 90 στυλοκάτω ΤΕΛΟΣ

Όσο αναφορά το γράμμα Ν, η σχεδιάστρια έχει επιλέξει:
α. να «χαλάσει» την ισότητα των εντός εναλλάξ γωνιών, θέτοντας στην εντολή έναν λανθασμένο σταθερό αριθμό (στην Α΄ Φάση δόθηκε μεταβλητή στην αντίστοιχη εντολή), κάτι που η σχεδιάστρια αναμένει οι μαθητές να διορθώσουν εύκολα σε συνέχεια της προηγούμενης εμπλοκή τους με το γράμμα αυτό.
β. να εμπλέξει μία ακόμη μεταβλητή ψ στη μία πλευρά, η οποία δεν χρειάζεται μέσα στο μοντέλο του γράμματος, αλλά στόχος είναι η συζήτηση των μαθητών γύρω από αυτή, καθώς αυτή η μεταβλητή ψ εμφανίζεται και μέσα σε άλλα γράμματα της λέξης ΝΗΣΙ. Αξία έχει η διερεύνηση και η διαπραγμάτευση των μαθητών σχετικά από την παραμονή της μεταβλητής αυτής ή όχι στο μοντέλο, στοιχείο που θα μας οδηγήσει σε συμπεράσματα τόσο σχετικά με την ίδια την έννοια της μεταβλητής και τη νοηματοδότηση που εμφανίζουν οι μαθητές για τη χρήση της μέσα στο μοντέλο, όσο και σχετικά με τη «δύναμη» της κατανόησης των μαθηματικών ιδιοτήτων του μοντέλου του Ν που πέτυχαν οι μαθητές μέσα από τις δραστηριότητες της Α΄ Φάσης.

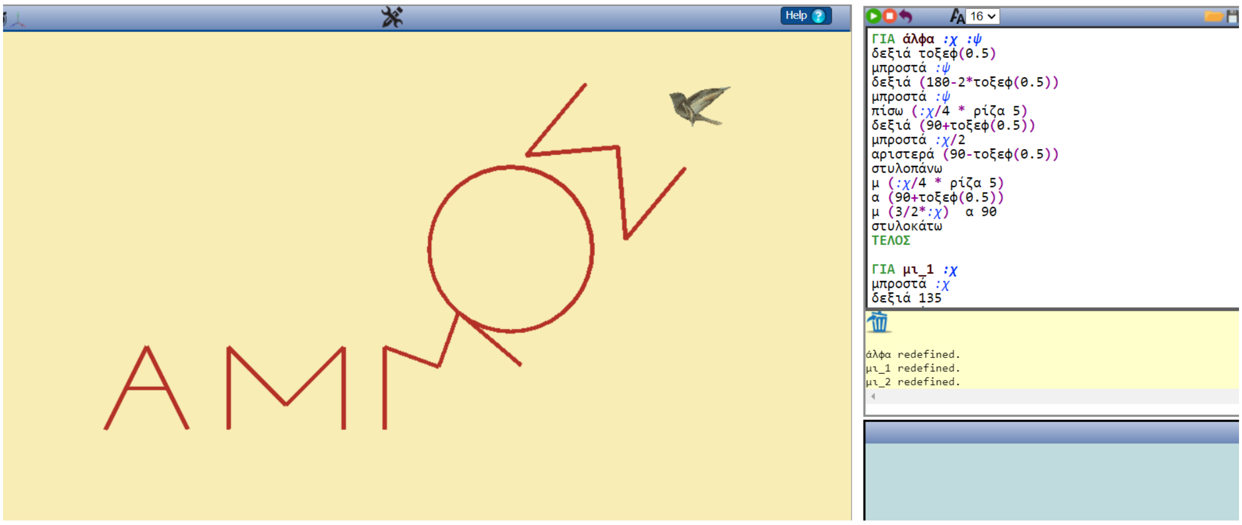
Στο μοντέλο του γράμματος Η, η σχεδιάστρια έχει επιλέξει να «χαλάσει» την ορθή γωνία που σχηματίζει η μία κάθετη πλευρά με την οριζόντια και, ομοίως έχει προσθέσει σε δύο πλευρές τη μεταβλητή ψ, ενώ στο μοντέλο του γράμματος Ι έχει χρησιμοποιηθεί εξ ολοκλήρου η μεταβλητή ψ. Έτσι, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, ένας κοινός στόχος των σφαλμάτων των 3 αυτών γραμμάτων είναι να δημιουργηθούν ευκαιρίες στους μαθητές όχι για απλή επεξήγηση των όσων σκέφτονται, αλλά ευκαιρίες για επιχειρηματολογία των ιδεών τους σχετικά με το σύνολο της λέξης, καθώς ο ένας μοιράζεται και τεκμηριώνει τις ιδέες του στον άλλο, στοιχεία που ανήκουν στη φάση του **"Exchange"**. Εννοείται, φυσικά, πως κατά την εμπλοκή τους με τη δραστηριότητα αυτή συνολικά, εμπλέκονται και στις φάσεις των **"Explore"** και **"Envisage"**, καθώς διερευνούν τον κώδικα των μοντέλων, πειραματίζονται, διορθώνουν λάθη και ενθαρρύνονται από την ίδια τη φύση του εργαλείου να προβλέπουν πολλές από τις αλλαγές τους πριν τις εκτελέσουν.

Όσο αναφορά στο μοντέλο του γράμματος Σ, σε συνέχεια της προηγούμενης διερεύνησης των μαθητών και του σχετικά πιο «ελεύθερου» μισοψημένου μοντέλου που τους δόθηκε,

η σχεδιάστρια επιλέγει να επικεντρωθεί στην έκφραση των πλάγιων πλευρών του Σ μέσω του Πυθαγορείου θεωρήματος, δίνοντας στους μαθητές μία λανθασμένη έκφραση αυτού και ωθώντας τους έτσι να εντοπίσουν τα νοητά ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται στο μοντέλο του Σ, μία διερεύνηση που πραγματοποίησαν και στα γράμματα Ζ και Ν σε προηγούμενη φάση. Στόχος είναι η νοηματοδότηση των μαθητών ως προς την εξάρτηση των πλάγιων τμημάτων του Σ από τα οριζόντια και η χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος σε τρίγωνα με μισές διαστάσεις από τα αρχικά, όπως επίσης και η ικανότητα χρήσης της συγκεκριμένης ιδιότητας μέσω της σωστής αλγεβρικής έκφρασης.
Όπως και στην περίπτωση του Ν, ζητούμενο είναι οι μαθητές να χτίσουν μία ισχυρή και ανθεκτική κατανόηση ως προς τις αδυναμίες και τα δυνατά στοιχεία του κάθε μαθηματικού μοντέλου που ολοκληρώνουν και τις μαθηματικές ιδιότητες που χρησιμοποιούν (π.χ. αναλογίες Vs. Πυθαγόρειο θεώρημα) ως έναν τρόπο καλλιέργειας της μαθηματικής τους σκέψης και ένα μονοπάτι που δίνει ευκαιρίες ανάπτυξης της αφαιρετικής σκέψης και της γενίκευσης στους μαθητές μέσα από τη μοντελοποίηση.
Αξίζει, επίσης να αναφερθεί, πως επειδή η δραστηριότητα πρόκειται για λέξη, οι εντολές που υπάρχουν στο κάθε γράμμα δεν αναφέρονται μόνο στην κατασκευή του ίδιου του γράμματος, αλλά και στην κατάλληλη μετακίνηση που πρέπει να γίνει στο σπουργίτι ώστε να έχει τη σωστή θέση και κατεύθυνση πριν την απεικόνιση του επόμενου γράμματος, στοιχείο το οποίο δεν αναφέρεται πουθενά στους μαθητές, αλλά αναμένεται να το εντοπίσουν και να το λάβουν υπόψιν τους κατά την εξερεύνηση του κάθε κώδικα, μπαίνοντας κυρίως οι ίδιοι διαισθητικά στη θέση του σπουργιτιού. Μάλιστα, η σχεδιάστρια έχει συμπεριλάβει ένα σφάλμα στον κώδικα που αναφέρεται στην εσωτερική αυτή μετακίνηση του σπουργιτιού από το ένα γράμμα στο άλλο, το οποίο οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν και να διορθώσουν. Πρόκειται για σφάλμα στον κώδικα του Σ το οποίο, όμως, προκαλεί πρόβλημα στην τοποθέτηση του επόμενου γράμματος, δηλαδή του Ι, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα στους μαθητές για μεγαλύτερο πειραματισμού και συζήτηση σχετικά με το χώρο και τον προσανατολισμό τους μέσα στην σκηνή του MaLT2, αλλά και περισσότερες ευκαιρίες για νοηματοδότηση της σύνδεσης και της εμφάνισης των γραμμάτων ως ολότητα. Αναμένεται οι μαθητές να αναζητήσουν το σφάλμα πρώτα στο γράμμα Ι το οποίο εμφανίζεται πιο χαμηλά από τα υπόλοιπα γράμματα, πριν ανακαλύψουν ότι αυτό που προκαλεί στην πραγματικότητα τη λανθασμένη τοποθέτηση ανήκει σε σφάλμα μετακίνησης στον κώδικα του Σ.

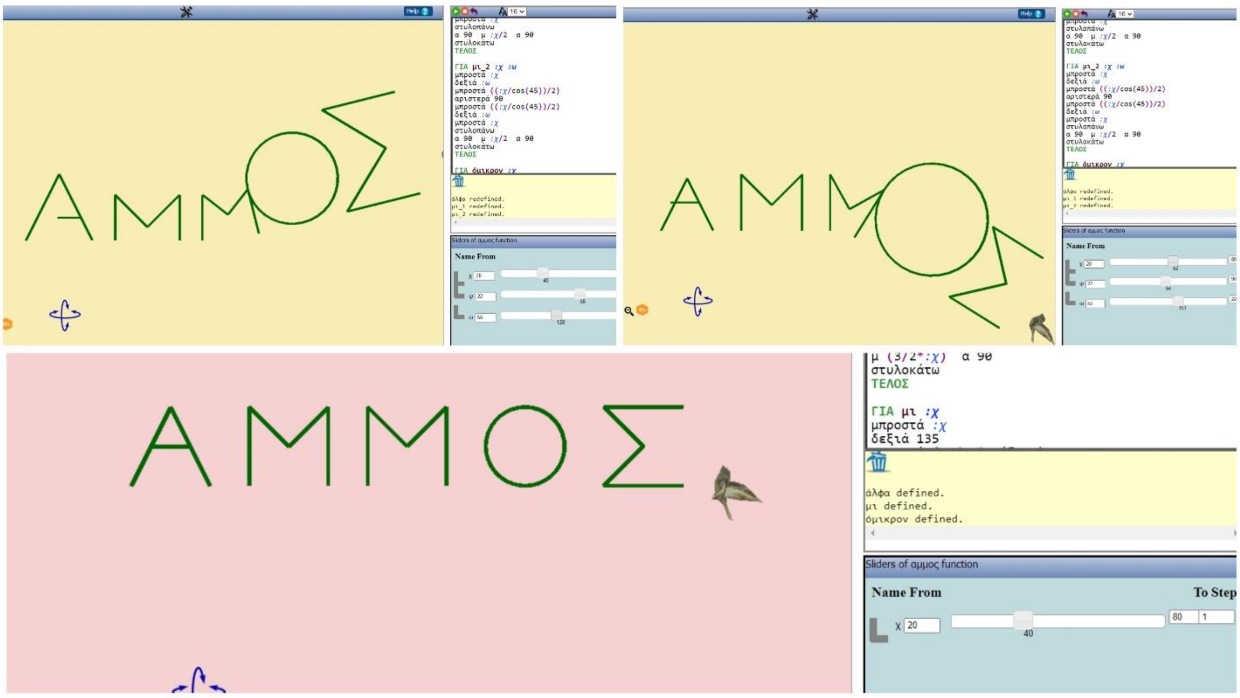
Η δεύτερη λέξη που έχει σχεδιαστεί για αυτή τη δραστηριότητα είναι η λέξη ΑΜΜΟΣ. Η λέξη αυτή επιλέχτηκε με τη λογική οι μαθητές να έρθουν σε επαφή με μία ακόμη διαφορετική μορφή του μοντέλου του γράμματος Σ, αλλά και για να ενισχύσουν την κατανόησή τους ως προς τις μαθηματικές ιδιότητες που μπορούν να εμφανιστούν μέσα στο μοντέλου του γράμματος Μ, το οποίο μοιράζεται τις ίδιες ιδιότητες με το αντίστοιχο μοντέλο του Σ. Μάλιστα, η συγκεκριμένη λέξη περιέχει δύο γράμματα Μ και έτσι δίνει τη δυνατότητα στον σχεδιαστή να επιλέξει διαφορετικά μοντέλα του γράμματος Μ και συνεπώς να ενσωματώσει διαφορετικές μαθηματικές ιδιότητες στο καθένα. Το γράμμα Α περιέχει πλάγια τμήματα με τα οποία οι μαθητές έχουν έρθει σε επαφή μέσω των προηγούμενων γραμμάτων, ενώ η πρόκληση αυξάνεται όταν οι μαθητές εμπλακούν με το μοντέλο του γράμματος Ο, το οποίο είναι το πρώτο καμπυλόγραμμο γράμμα που συναντούν μέσα σε όλη την δραστηριότητα.
Και αυτή η λέξη, όπως και η προηγούμενη, εμπεριέχει σφάλματα στους κώδικες των γραμμάτων, έχοντας αποκρύψει εσκεμμένα η σχεδιάστρια κάποιες μαθηματικές ιδιότητες

μέσα από τα μοντέλα των γραμμάτων. Όταν οι μαθητές εκτελέσουν τη διαδικασία, τότε εμφανίζεται στη σκηνή το παρακάτω δόμημα.



Εικόνα 16: Στιγμιότυπο της μισοψημένης λέξης ΑΜΜΟΣ

Όταν οι μαθητές το επιλέξουν θα διαπιστώσουν την ύπαρξη τριών μεταβλητών στη διαδικασία της λέξης, καθώς και τον τρόπο που αυτό αλλάζει. Περισσότερο εξοικειωμένοι πλέον με τη διαδικασία της λέξης, αναμένουμε να ξεκινήσουν τη διερεύνηση τους με την κίνηση των μεταβολέων με στόχο να εντοπίσουν ποια μεταβλητή ή ποιες μεταβλητές αντιστοιχούν σε κάθε γράμμα και ποια αλλαγή προκαλεί η μεταβολή της τιμής τους. Παρακάτω εμφανίζονται δύο στιγμιότυπα της «αλλοίωσης» της λέξης, καθώς και ένα επιθυμητό υποθετικό τελικό στιγμιότυπο το οποίο αποτελείται από μία μόνο μεταβλητή και κατ' επέκταση έναν μεταβολέα.



Εικόνα 17: Στιγμιότυπα και Σωστό Μοντέλο της λέξης ΑΜΜΟΣ

Οι κώδικες των μισοψημένων μοντέλων φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Α	Μ	Μ	Ο	Σ
ΓΙΑ άλφα :χ :ψ δεξιά τοξεφ(0.5) μπροστά :ψ δεξιά (180-2*τοξεφ(0.5)) μπροστά :ψ πίσω (:χ/4 * ρίζα 5) δεξιά (90+τοξεφ(0.5)) μπροστά :χ/2 αριστερά (90-τοξεφ(0.5)) στυλοπάνω μ (:χ/4 * ρίζα 5) α (90+τοξεφ(0.5)) μ (3/2*:χ) α 90 στυλοκάτω ΤΕΛΟΣ	ΓΙΑ μι_1 :χ μπροστά :χ δεξιά 135 μπροστά 40 αριστερά 90 μπροστά :χ*1.25 δεξιά 135 μπροστά :χ στυλοπάνω α 90 μ :χ/2 α 90 στυλοκάτω ΤΕΛΟΣ	ΓΙΑ μι_2 :χ :ω μπροστά :χ δεξιά :ω μπροστά [(:χ/2)/συν(45)] αριστερά 90 μπροστά [(:χ/2)/συν(45)] δεξιά :ω μπροστά :χ στυλοπάνω α 90 μ :χ/2 α 90 στυλοκάτω ΤΕΛΟΣ	ΓΙΑ όμικρον :χ στυλοπάνω δεξιά 90 μπροστά :χ/2 στυλοκάτω αριστερά 185 επανάλαβε 36 [δ 10 μ (2*πι*(:χ)/36)] στυλοπάνω δ 185 μ :χ α 90 στυλοκάτω ΤΕΛΟΣ	ΓΙΑ σίγμα :ψ δεξιά 90 μπροστά :ψ πίσω :ψ αριστερά 45 μπροστά (:ψ/tan(45)) αριστερά 90 μπροστά (:ψ/tan(45)) δεξιά 135 μπροστά :ψ στυλοπάνω μ :ψ/2 α 90 π :ψ στυλοκάτω ΤΕΛΟΣ

Στο μοντέλο του γράμματος Α η σχεδιάστρια επιλέγει να αφαιρέσει τη σχέση που συνδέει μέσω του πυθαγορείου θεωρήματος τις δύο πλάγιες πλευρές του γράμματος Α και να θέσει μία ανεξάρτητη μεταβλητή :ψ. Ο κώδικας που κατασκευάζει το γενικευμένο μοντέλο του Α δεν είναι ένας εύκολος κώδικας για τους μαθητές αυτής της τάξης, γι' αυτό και επιλέχθηκε να αποκρυφθεί μία μεταβλητή που αναφέρεται σε πλευρά, ώστε οι μαθητές να μην εμπλακούν με τις γωνίες του συγκεκριμένου μοντέλου, καθώς η πλήρη διερεύνηση του Α απαιτεί χρόνο και θα μπορούσε να υλοποιηθεί σε μία διαφορετική δραστηριότητα για μεγαλύτερης ηλικίας μαθητές.

Για τα δύο γράμματα Μ που ακολουθούν, η σχεδιάστρια επέλεξε να δημιουργήσει δύο διαφορετικά μισοψημένα μοντέλα με στόχο τη μεγαλύτερη διερεύνηση και νοηματοδότηση των μαθητών, κρύβοντας διαφορετικές μαθηματικές ιδιότητες μέσα σε κάθε μοντέλο. Ως προς το 1ο μοντέλο του Μ, έχουν επιλεχθεί τα δύο πλάγια τμήματα του γράμματος Μ να εκφραστούν το πρώτο με έναν σταθερό αριθμό και το δεύτερο με τη χρήση αναλογίας. Και οι δύο τρόποι έχουν υποθετικά χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές στην Φάση Α, όπου κατασκεύαζαν οι ίδιοι τα γράμματα Ν και Ζ ελεύθεροι. Αναμένεται να αφαιρέσουν το σταθερό μήκος του τμήματος που δίνεται, νοηματοδοτώντας ως προς την αλλαγή που θα πρέπει να υφίσταται το μήκος και αυτής της πλευράς του Μ, και η πρόκληση έγκειται στο αν οι μαθητές θα επιλέξουν να τοποθετήσουν σχέση αναλογίας συνολικά στο μοντέλο, ή αν θα προτιμήσουν να την αφαιρέσουν εντελώς και να βασιστούν στο νοητό ορθογώνιο που σχηματίζεται θέτοντας σε χρήση ξανά το Πυθαγόρειο Θεώρημα το οποίο συσχετίζει και τις 3 πλευρές. Ως αναφορά στο 2ο μοντέλο του Μ, η σχεδιάστρια έχει αφαιρέσει από το μοντέλο τη στροφή 135 μοιρών, η οποία παρέχει μία εσωτερική γωνία 45 μοιρών στο Μ και την έχει αντικαταστήσει με μία μεταβλητή. Οι μαθητές αναμένεται να πειραματιστούν αρχικά με τους μεταβολείς και στη συνέχεια να βασιστούν στο συνημίτονο 45 μοιρών που εμφανίζεται στον κώδικα, διερευνώντας το νοητό ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται και νοηματοδοτώντας ως προς την στροφή που θα πρέπει να πραγματοποιήσει το σπουργίτι. Το ενδιαφέρον στοιχείο σε αυτό το σημείο της δραστηριότητας είναι η σύγκριση που θα κάνουν οι μαθητές ανάμεσα στα δύο μοντέλα του Μ αφού τα διορθώσουν ή κατά τη διάρκεια που θα τα διορθώνουν. Οι μαθητές είναι ελεύθεροι να μεταβούν σε όποιο γράμμα της λέξης επιθυμούν. Για παράδειγμα, αν επιθυμούν να διερευνήσουν και να διορθώσουν το γράμμα Σ πρώτα, είναι ελεύθεροι να το κάνουν. Είναι αναμενόμενο οι μαθητές να θελήσουν να αντιγράψουν 2 φορές τον έναν κώδικα του Μ, ώστε να βγουν ίδια τα γράμματα. Όμως, κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατόν καθώς υπάρχουν δύο διαφορετικές διαδικασίες μέσα στον κώδικα και αυτό θα πρέπει να παραμείνει ως έχει. Ο λόγος είναι για να έρθουν αντιμέτωποι με μαθηματικά μοντέλα και μαθηματικές ιδιότητες που δίνουν μεν το γράμμα Μ, αλλά με διαφορετικό τρόπο και να συζητήσουν πάνω σε αυτό ή ακόμη και να αναστοχαστούν στο τέλος της διερεύνησης τους με ολόκληρη τη λέξη.

Το γράμμα Ο, το πρώτο καμπυλόγραμμο γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου που θα διερευνήσουν οι μαθητές, έχει ενσφαλματωθεί ως προς το μήκος της ακτίνας του η οποία δεν είναι χ όπως δίνεται στο μισοψημένο μοντέλο, αλλά χ/2, ενώ αναμένεται οι μαθητές να διακρίνουν τον τύπο του μήκους κύκλου μέσα στον κώδικα και να αναστοχαστούν πάνω στη χρήση του μέσα στο μοντέλο.

Τέλος, το μοντέλο του γράμματος Σ, έχει «πειραχτεί» με τέτοιο τρόπο από τον σχεδιαστή, ώστε να μην αλλοιώνεται μεν το γράμμα Σ, αλλά ταυτόχρονα να μην είναι ποτέ ίσο με τα υπόλοιπα γράμματα, ώστε να σχηματίζεται ομοιόμορφη η λέξη ΑΜΜΟΣ. Αρχικά, ο κώδικας του έχει κατασκευαστεί με τη χρήση της μεταβλητής ψ, η οποία εμφανίζεται και στο γράμμα Α. Σε πρώτη φάση, οι μαθητές καλούνται να αλλάξουν τη μεταβλητή ψ σε χ, ώστε να συνδέονται όλα τα γράμματα με την ίδια μεταβλητή, κάτι που αναμένεται να κατανοήσουν σχετικά γρήγορα, καθώς είναι ένα στοιχείο της χρήσης και εξερεύνησης της μεταβλητής που εμφανίζεται και στην προηγούμενη λέξη. Μάλιστα, ίσως αποδώσουν εκεί αρχικά το σφάλμα που προκαλείται στο γράμμα, δηλαδή στη διαφορετική μεταβλητή. Ακόμα, όμως και αν διορθώσουν τη μεταβλητή, θα διαπιστώσουν ότι το Σ παραμένει μεν Σ, αλλά διαφορετικό από τα υπόλοιπα γράμματα στο μέγεθος. Έτσι, στόχος είναι οι μαθητές να διερευνήσουν τον κώδικα του μοντέλου σε βάθος, αμφισβητώντας την κάθε εντολή και διερευνώντας τη μέσω του πειραματισμού τους με το εργαλείο και μέσω συζήτησης μεταξύ τους. Το σφάλμα που έχει προκαλέσει η σχεδιάστρια στο δοθέν μοντέλο εντοπίζεται στην εντολή που δίνει το μήκος των πλάγιων τμημάτων μέσω της χρήσης των τριγωνομετρικών αριθμών, καθώς δημιουργούνται 2 νοητά ορθογώνια τρίγωνα με υποτείνουσα τις πλάγιες πλευρές του γράμματος Σ στο κάθε τρίγωνο. Εκεί, έχει αντικατασταθεί από τον σχεδιαστή το ημίτονο ή το συνημίτονο της γωνίας (επειδή η γωνία είναι 45 μοίρες, το ημίτονο και το συνημίτονο είναι ίσα) με την έννοια της εφαπτομένης, η οποία δεν αναφέρεται στη υποτείνουσα και έτσι δεν εμπλέκει την πλάγια πλευρά που αναζητείται σε αυτή την εντολή. Οι μαθητές αναμένεται να επικεντρώσουν τη διερεύνηση τους στα νοητά ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται, αφενός γιατί εμφανίζεται η έννοια του τριγωνομετρικού αριθμού μέσα στο μοντέλο η οποία γνωρίζουν ότι χρησιμοποιείται σε ορθογώνια μόνο τρίγωνα και αφετέρου, γιατί έχουν ήδη πειραματιστεί με άλλο ένα μοντέλο του γράμματος Σ και δύο ακόμη μοντέλα του γράμματος Μ τα οποία «μοιράζονται» παρόμοια νοητά τρίγωνα και αντίστοιχες μαθηματικές ιδιότητες, αλλά διαφορετικές εντολές ως προς τον προγραμματισμό για την κατασκευή τους στο εργαλείο και αυτό δίνει την ευκαιρία στην ερευνήτρια να μελετήσει την ανθεκτική κατανόηση των μαθητών γύρω από τις συγκεκριμένες ιδιότητες και τον τρόπο χρήσης τους μέσα στο εργαλείο.
Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να περάσουν μέσα από τις ίδιες φάσεις των 5Es, όπως αναλύθηκε και στη προηγούμενη λέξη. Παράλληλα, αναμένεται να έρθει σταδιακά στην

επιφάνεια και η 5η φάση του συγκεκριμένου μοντέλου, **"bridgE"**. Ο σχεδιασμός της συνολικής δραστηριότητας, η σειρά των δραστηριοτήτων και η επιλογή των γραμμάτων και των λέξεων στοχεύει στο να δημιουργηθούν ευκαιρίες στους μαθητές για εμφάνιση συνδέσεων μεταξύ του προγραμματιστικού περιβάλλοντος του MaLT2 και των «επίσημων μαθηματικών», για δημιουργία μιας ισχυρής κατανόησης από τους μαθητές και της ικανότητας χρήσης μαθηματικών ιδιοτήτων μέσα από μία ουσιαστική νοηματοδότηση που στοχεύεται να παρουσιάσουν οι μαθητές με τη χρήση του συγκεκριμένου προγραμματιστικού εργαλείου στις παραπάνω δραστηριότητες και μέσα από τη δυνατότητα που δίνει ο ίδιος ο προγραμματισμός για βαθιά πρόσβαση στα μαθηματικά μοντέλα των γραμμάτων. Άλλωστε, βασικός στόχος της σχεδιάστριας μέσα από τη διόρθωση ή την κατασκευή των δυναμικών μοντέλων από τους μαθητές, είναι σταδιακά οι μαθητές όχι απλά να θέτουν σε εφαρμογή της μαθηματικές ιδιότητες, αλλά να είναι ικανοί να κρίνουν ποιες μαθηματικές ιδιότητες επιθυμούν να χρησιμοποιήσουν κάθε φορά και για ποιο λόγο επιλέγουν να θέσουν σε χρήση τις συγκεκριμένες ιδιότητες στο κάθε μοντέλο, νοηματοδοτώντας ως προς το αποτέλεσμα που δίνει κάθε μία από αυτές μέσα στη διαδικασία.
Συνδυαστικά με το παραπάνω μοντέλο, η σχεδιάστρια επιχειρεί μέσα από τη δομή των παραπάνω δραστηριοτήτων να εμπλέξει τους μαθητές σταδιακά και στη φάση του **"Generalizing"**, όπου οι μαθητές μέσω της διερεύνησης και της παρατήρησης μοτίβων σε ιδιότητες που χρησιμοποιούν, γενικεύουν τις ιδέες τους και έτσι το εύρος της έννοιας που χρησιμοποιούν ως εργαλείο, όπως είναι για παράδειγμα το Πυθαγόρειο θεώρημα ή οι τριγωνομετρικοί αριθμοί, επεκτείνεται συνειδητά από τους μαθητές και χρησιμοποιείται συνειδητά από αυτούς στο μαστόρεμα των μοντέλων.

3.3.4 Φάση Γ: Δημιουργία Δυναμικής Αφίσας

Τελευταία φάση και τελευταία δραστηριότητα της διδακτικής παρέμβασης η οποία ολοκληρώνεται με μία ελεύθερη κατασκευή για τους μαθητές είναι η δημιουργία μιας δυναμικής αφίσας υπό τη μορφή της ελεύθερης κατασκευής από τους μαθητές.

«Δημιουργήστε τη δική σας δυναμική αφίσα!»
Τώρα είστε ελεύθεροι να κατασκευάσετε στο MaLT2 κάποια λέξη που εκφράζει την ομάδας σας, κάποιο μήνυμα που θέλετε να στείλετε σε κάποιον ή ακόμα και κάποιο δόμημα (σχήμα), χρησιμοποιώντας τα γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου! 😊
Μπορείτε να δημιουργήσετε ακόμα και ένα μικρό βιντεάκι και να το μοιραστείτε με τους συμμαθητές σας ή τους φίλους σας!

Εδώ, δίνονται και τα υπόλοιπα γράμματα του Ελληνικού Αλφαβήτου στους μαθητές, οι οποίοι μπορούν να τα «πειράξουν» ή να προσθέσουν μεταβλητές όπου οι ίδιοι επιθυμούν, ώστε να δημιουργήσουν μία δυναμική αφίσα είτε με κάποια λέξη ή φράση, είτε με κάποιο δόμημα που να αποτελείται από γράμματα (π.χ. ένας κύβος που σε κάθε του πλευρά να υπάρχει ένα γράμμα, σαν το ζάρι του κλασσικού παιχνιδιού λέξεων Scrabble). Στόχος είναι οι μαθητές να νιώσουν ελεύθεροι να αξιοποιήσουν τη δημιουργικότητα και τη φαντασία τους, κάτι που το σημερινό σχολείο στερεί σε πολύ μεγάλο βαθμό από τους σημερινούς μαθητές και να δημιουργήσει ευκαιρίες για να περάσουν οι μαθητές μέσα από τη φάση του "Synthesising" του μοντέλου του UDGS, όπου οι ίδιοι θα χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά μοντέλα που δημιούργησαν, μαζί με κάποια ακόμα, και οι έννοιες ή ιδιότητες που διερευνούσαν και χρησιμοποιούσαν ως τώρα θα γίνουν εργαλείο το οποίο θα ενσωματώσουν συνειδητά στις νέες τους κατασκευές.

◆

Εδώ ολοκληρώθηκε η ανάλυση του σχεδιασμού των δραστηριοτήτων μέσα από την παρουσίαση του σκεπτικού του ερευνητή και των υποθετικών μαθησιακών διαδρομών κάθε δραστηριότητας -μία προς μία-, τόσο ως προς τις μαθηματικές ιδιότητες που κρύβουν τα μοντέλα των γραμμάτων που επιλέχθηκαν, όσο και ως προς την σύνδεσή τους με τα θεωρητικά μοντέλα των UDGS και 5Es. Σε αυτό το σημείο, η σχεδιάστρια θα παρουσιάσει τη σύνδεση του συνόλου της διδακτικής παρέμβασης με το μοντέλο της Διδασκαλίας για Ισχυρή Κατανόηση (**TRU**) μέσα από τις πέντε διαστάσεις του.

◆ 1η Διάσταση – Τα Μαθηματικά

Η πρώτη αυτή διάσταση του μοντέλου TRU αφορά, όπως έχει ήδη αναφερθεί, στην ποιότητα της μαθηματικής εμπειρίας των μαθητών. Οι δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν από τον ερευνητή, βασιζόμενες στα μοντέλα των UDGS και 5Es, παρέχουν στους μαθητές ευκαιρίες να δημιουργήσουν νοήματα και να χρησιμοποιήσουν μαθηματικές έννοιες και πρακτικές, κάνοντας οι ίδιοι μαθηματικά και όχι μέσα από στείρες διαδικασίες μετωπικής διδασκαλίας ή απομνημόνευσης διαδικασιών, γεγονός που αυξάνει εκθετικά την ποιότητα της μαθηματικής εμπειρίας των παιδιών. Σημασία έχει οι μαθητές να δημιουργήσουν συνδέσεις ανάμεσα στο περιεχόμενο, δηλαδή στις μαθηματικές ιδιότητες των μοντέλων των γραμμάτων, και στον τρόπο που χρησιμοποιούν αυτές τις ιδιότητες, στοιχείο που τονίστηκε ιδιαίτερα κατά την ανάλυση του σχεδιασμού. Άλλωστε, σκοπός της παρούσας έρευνας δεν είναι τόσο τα νοήματα που δημιουργούν οι μαθητές πάνω σε κάποια συγκεκριμένη μαθηματική έννοια, καθώς δεν μαθαίνουν κάτι καινούργιο, αλλά στοχεύεται ειδικότερα το να πετύχουν οι μαθητές μία ανθεκτική κατανόηση ως προς τα μαθηματικά μοντέλα που κατασκευάζουν ή διορθώνουν μέσα από την παραπάνω ροή των δραστηριοτήτων. Με άλλα λόγια, μέσα από τα μοντέλα των γραμμάτων που διερευνούν οι μαθητές εμφανίζονται ευκαιρίες να αναπτύξουν παραγωγικές συνήθειες του νου και την ικανότητα να χρησιμοποιούν μαθηματικές ιδιότητες ως δυνατοί λύτες προβλημάτων και δημιουργικοί στοχαστές.

Για παράδειγμα, στόχος είναι οι μαθητές να αφήσουν πίσω τους την τυπική αριθμητική χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος για την εύρεση του μήκους μίας πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου μέσα από την απλή διαδικαστική επίλυση μιας εξίσωσης, όπως συνηθίζεται στο σχολείο (π.χ. $\chi^2 + 4^2 = 5^2$), και να κατανοήσουν την ισχύ της ιδιότητας αυτής μέσα από την ανάπτυξη και κατασκευή των μαθηματικών μοντέλων των γραμμάτων, εμπλεκόμενοι ταυτόχρονα σε διαδικασίες αφαίρεσης και γενίκευσης με τη χρήση του εργαλείου. Άρα το νόημα είναι οι μαθητές να κατανοήσουν γιατί χρησιμοποιούν αυτές τις ιδιότητες και τι πλεονέκτημα τους δίνουν μέσα στο μοντέλο σε σύγκριση με άλλες ιδιότητες ή αντίστοιχα να κατανοήσουν τη διαφορά της χρήσης της αναλογίας σε σύγκριση με τη χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος για την έκφραση μιας πλευράς ενός μοντέλου για παράδειγμα. Για αυτό το λόγο, αρχικά οι μαθητές αφήνονται ελεύθεροι να σχεδιάσουν το γράμμα Ν, όπου αναμένεται η χρήση αναλογίας, ενώ στη συνέχεια η σχεδιάστρια εμφανίζει ένα Ν εφαρμοσμένο σε τετράγωνο ώστε οι μαθητές να εκφράσουν υποθετικά την πλευρά με τη βοήθεια του Πυθαγορείου και να αναστοχαστούν πάνω στα δύο διαφορετικά μοντέλα που κατασκεύασαν. Με αυτό το σκεπτικό, ζητείται στη συνέχεια από τους μαθητές η κατασκευή του γράμματος Ζ, ένα μοντέλο που κρύβει ίδιες μαθηματικές

ιδιότητες με το Ν και αναμένεται να δείξει αν οι μαθητές θα εμφανίσουν μία ανθεκτική κατανόηση ως προς αυτές και αν θα τις επαναλάβουν κατά την κατασκευή ενός διαφορετικού μοντέλου. Αντίστοιχα, παρόμοιο σκεπτικό ακολουθεί ο ερευνήτρια και για το μοντέλο του Σ και του Μ, εμφανίζοντας ταυτόχρονα και ιδιότητες τριγωνομετρικών αριθμών, προσπαθώντας να συνδυάσει τις πλευρές των μοντέλων με τις γωνίες τους.
Το ζητούμενο, λοιπόν, όπως φαίνεται από τον σχεδιασμό των παραπάνω δραστηριοτήτων, είναι οι μαθητές να έχουν τέτοιες μαθησιακές εμπειρίες που να τους προσφέρουν την ευκαιρία να αποκτήσουν μία ισχυρή μαθηματική κατανόηση, να τους εξελίξουν σε ισχυρούς στοχαστές και λύτες προβλημάτων και να καλλιεργήσουν την ικανότητα τους να χρησιμοποιούν μαθηματικές ιδιότητες σε μοντέλα που δεν γνωρίζουν τη «λύση» τους, ή καλύτερα την «τελική» τους αναπαράσταση εξ αρχής (χωρίς αυτό να σημαίνει ότι υπάρχει μοναδικός τρόπος αναπαράστασης των μοντέλων των γραμμάτων μέσα στο εργαλείο του MaLT2). Ολοκληρώνοντας, η ερευνήτρια θα ήθελε να τονίσει ακόμα σε αυτή τη διάσταση, την ευκαιρία που δίνουν ο προγραμματισμός και το δυναμικό μαστόρεμα των μοντέλων στην εμφάνιση πολλών διαφορετικών μαθηματικών ιδιοτήτων και εννοιών, όπως οι αναλογίες, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί, το πυθαγόρειο θεώρημα, το μήκος κύκλου και η μεταβλητή ως γενικευμένος αριθμός, μέσα από 5 μόνο μοντέλα γραμμάτων του Ελληνικού Αλφαβήτου και τη μοναδική ευκαιρία για τους μαθητές να κάνουν μαθηματικά μέσα σε ένα περιβάλλον που τους εμπλέκει με έναν δημιουργικό τρόπο.

- 2η Διάσταση – Γνωστικό Αίτημα

Σε συνέχεια των όσων διατυπώθηκαν παραπάνω, η δεύτερη διάσταση αφορά στις προκλήσεις που παρέχει το μαθησιακό περιβάλλον στους μαθητές για να εμπλακούν ενεργά με τα μαθηματικά και για να δημιουργήσουν νοήματα με στόχο τη μαθηματική τους εξέλιξη. Σύμφωνα με το θεωρητικό μοντέλο TRU, η διάσταση αυτή δείχνει το βαθμό στον οποίο οι μαθητές έχουν ευκαιρίες να νοηματοδοτήσουν πάνω σε σημαντικές ιδέες και το πώς αυτές χρησιμοποιούνται μέσα στη δραστηριότητα. Η διάσταση αυτή εμφανίζεται στο σύνολο των δραστηριοτήτων, αφού το ίδιο το μαστόρεμα των μοντέλων μέσα σε ένα προγραμματιστικό περιβάλλον δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να εμπλακούν ενεργά και να κάνουν οι ίδιοι μαθηματικά μέσω των κατασκευών τους, δίνοντας τους το χώρο και την υποστήριξη -κυρίως μέσω του προγραμματιστικού εργαλείου- για να αναπτυχθούν και να εξελίξουν την κατανόηση τους πάνω στις μαθηματικές ιδιότητες των μοντέλων που διερευνούν και μαστορεύουν. Οι προκλήσεις που δημιουργεί η κατασκευή ή η διόρθωση κάθε γράμματος ξεχωριστά έχουν αναλυθεί διεξοδικά παραπάνω, ενώ όπως φαίνεται από τη ροή των δραστηριοτήτων, η σχεδιάστρια έχει εμφανίσει διαφορετικά επίπεδα προκλήσεων για τους μαθητές στο σύνολό τους, ξεκινώντας από μέτριες δραστηριότητες, με την εμφάνιση ξεχωριστών γραμμάτων και προχωρώντας σταδιακά σε πιο απαιτητικές, όπως η εμφάνιση λέξεων, όπου οι μαθητές οφείλουν να σκεφτούν συνδυαστικά και να δείξουν αν πέτυχαν την ανθεκτική κατανόηση που στοχεύεται μέσα από το κοινό μοτίβο που θα πρέπει να εμφανίσουν στα μοντέλα των γραμμάτων ώστε ολόκληρη η λέξη να αυξομειώνεται ομοιόμορφα.
Έτσι, το επίπεδο των προκλήσεων που εμφανίζονται στις δραστηριότητες αντιστοιχεί, σύμφωνα με την ερευνήτρια, σε αυτό που ονομάζουμε «παραγωγική πάλη» για τους μαθητές, αφού οι δραστηριότητες δεν είναι πολύ εύκολες, κάτι που θα οδηγήσει σε έλλειψη ενδιαφέροντος από τους μαθητές, αλλά ούτε και επικίνδυνα απαιτητικές, ώστε να δημιουργήσουν ένα χάος στη διερεύνηση των παιδιών.

- 3η Διάσταση – Ισότιμη Πρόσβαση στο Μαθηματικό Περιεχόμενο

Η τρίτη διάσταση αφορά στην ενεργό εμπλοκή και συμμετοχή όλων των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία. Η κοινωνική ενορχήστρωση των δραστηριοτήτων είναι κατά κύριο λόγο ομαδική, με ομάδες των δύο μαθητών. Αυτό αυξάνει αισθητά τις ευκαιρίες να συνεργαστούν και να συμμετέχουν όλοι οι μαθητές σε σύγκριση με την παραδοσιακή μετωπική διδασκαλία όπου το κλίμα είναι «μοναχικό» - ατομικό. Αντίστοιχα, μέσα από το σχεδιασμό των δραστηριοτήτων σύμφωνα με το μοντέλο των 5Es, δίνεται η δυνατότητα για ενεργό εμπλοκή των παιδιών κυρίως μέσα από τις φάσεις “Explore” και “Envisage” και για ενεργό συμμετοχή τους κυρίως μέσα από τις φάσεις “Explain” και “Exchange”, ενώ βασικός πυλώνας όλων των παραπάνω είναι η χρήση του ψηφιακού εργαλείου η οποία παρέχει ουσιαστικούς τρόπους εμπλοκής των μαθητών με τα μαθηματικά, όπως έχει ήδη σχολιαστεί.

◆ 4η Διάσταση – Αυτενέργεια, Αίσθηση Σιγουριάς/Ιδιοκτησίας και Ταυτότητα

Η τέταρτη διάσταση αφορά στις ευκαιρίες που προσφέρονται στους μαθητές να συμμετέχουν σε συζητήσεις σχετικά με τις ιδέες τους και να «χτίζουν» ο ένας πάνω στις ιδέες του άλλου με στόχο την ανάπτυξη της αυτενέργειας, του «ανήκειν» και μιας συνολικά θετικής ταυτότητας ως προς τα μαθηματικά. Μέσα από το συγκεκριμένο σχεδιασμό των δραστηριοτήτων, τη χρήση του προγραμματιστικού εργαλείου και την κοινωνική ενορχήστρωση των μαθητών σε ομάδες ο ερευνήτρια δημιουργεί ευκαιρίες για τους μαθητές να κάνουν εικασίες, να τις ελέγξουν, να συζητήσουν το αποτέλεσμα, να παρουσιάσουν τα μαθηματικά τους επιχειρήματα και όλα αυτά μέσα σε όλες τις δραστηριότητες που εμφανίζουν κυρίως τις φάσεις του “Explore”, “Explain” και “Exchange” από το μοντέλο των 5Es και οι οποίες συμβάλουν στην αύξηση της επιθυμίας να εμπλακούν οι μαθητές κατά τη μαθησιακή διαδικασία. Παράλληλα, ακολουθώντας τη μεγάλη ιδέα του Papert “learning by doing”, δίνεται η ευκαιρία στα παιδιά μέσα από όλες τις δραστηριότητες να δουν τον εαυτό τους ως κάποιον που είναι ικανός να κάνει μαθηματικά και να εξηγήσει τις μαθηματικές ιδιότητες που χρησιμοποιεί και το λόγο που τις χρησιμοποιεί, καθώς μαστορεύει τα μοντέλα των γραμμάτων, δίνοντας τους την ευκαιρία να νιώσουν ότι έχουν τον έλεγχο αυτών που δημιουργούν. Μάλιστα το ίδιο το προγραμματιστικό περιβάλλον, δημιουργεί ένα περιβάλλον όπου οι μαθητές νιώθουν άνετα να εκφραστούν και να πειραματιστούν, δοκιμάζοντας τις ιδέες τους πάνω στα μοντέλα των γραμμάτων χωρίς να έχουν το φόβο της αποτυχίας ή του λάθους που συχνά έχει αρνητικό αντίκτυπο μέσα στο σημερινό σχολείου. Το ζητούμενο μέσα από αυτό το μαστόρεμα των παιδιών και την εμπλοκή τους με τον προγραμματισμό είναι να αποκτήσουν μία μαθηματική ταυτότητα, μέσα από την ανθεκτική κατανόηση των μαθηματικών ιδιοτήτων που κρύβουν τα γράμματα και τη χρήση τους καθώς τα κατασκευάζουν ή τα αλλάζουν. Τέλος, οι ευκαιρίες που δίνονται στους μαθητές να κατασκευάσουν οι ίδιοι τους κώδικες που δημιουργούν τα ζητούμενα γράμματα, να χρησιμοποιήσουν μαθηματικά για να διορθώσουν ένα «χαλασμένο» μοντέλο ή να κατασκευάσουν μία δική τους δυναμική αφίσα είναι αυτές που αυξάνουν την αυτοπεποίθησή τους και το αίσθημα ότι είναι οι ίδιοι δημιουργοί των μαθηματικών ιδεών τους (authority) και δημιουργοί των μοντέλων τους, στοιχείο που επίσης λείπει από το σημερινό σχολείο, καθώς η πίεση του αναλυτικού προγράμματος δεν αφήνει τα παιδιά να ανακαλύψουν τα ίδια τα μαθηματικά, αλλά τις περισσότερες φορές απλά ακολουθούν τις «οδηγίες» του δασκάλου.

◆ 5η Διάσταση – Διαμορφωτική Αξιολόγηση

Η πέμπτη διάσταση αφορά στις ευκαιρίες που προσφέρουν οι δραστηριότητες για να γίνει φανερός ο τρόπος που εξελίσσεται η κατανόηση των παιδιών κατά τη μαθησιακή διαδικασία, ο τρόπος σκέψης τους και οι πιθανές παρανοήσεις τους, ώστε η εκπαιδευτικός να μπορεί να τους υποστηρίξει με διάφορους τρόπους και να τους ωθήσει σε μία βαθύτερη κατανόηση των ιδεών τους και του περιεχομένου, σύμφωνα με το μοντέλο TRU. Στην παρούσα διδακτική παρέμβαση, ο ίδιος ο προγραμματισμός γίνεται το εργαλείο μέσα από το οποίο οι μαθητές δείχνουν τον τρόπο σκέψης τους και την εξέλιξη της κατανόησης τους, καθώς σκέφτονται μαζί με αυτό, ενώ ταυτόχρονα το ίδιο το MaLT2 το οποίο λειτουργεί ως νοητικός καθρέπτης των παιδιών σε συνδυασμό με τις συγκεκριμένες δραστηριότητες που έχουν σχεδιαστεί στοχεύουν να υποστηρίξουν τους μαθητές ως προς τη βαθύτερη και πιο ανθεκτική κατανόηση της χρήσης ποικίλων μαθηματικών ιδιοτήτων κατά τη μοντελοποίηση των γραμμάτων. Η συγκεκριμένη διάσταση, όπως είναι φανερό, διαπερνά όλες τις δραστηριότητες του παραπάνω σχεδιασμού και δρα υποστηρικτικά ως προς τη δεύτερη διάσταση του μοντέλου TRU.

Εδώ ολοκληρώθηκε η περιγραφή του συνόλου των δραστηριοτήτων που σχεδίασε η ερευνήτρια. Παρουσιάστηκε αναλυτικά η τεκμηρίωση κάθε μοντέλου που δόθηκε στα παιδιά ως προς τη σειρά με την οποία δόθηκε στους μαθητές, ως προς τις μαθηματικές ιδιότητες που αυτό περιείχε -είτε σωστές, είτε κρυμμένες, είτε λανθασμένες- και ως προς τη σύνδεση κάθε δραστηριότητας με τα 3 θεωρητικά μοντέλα UDGS, 5Es και TRU.

4. Αποτελέσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας. Αρχικά θα παρουσιαστούν τα νοήματα που κατασκεύασαν οι μαθητές κατά την κατασκευή ή απασφαλμάτωση του κάθε γράμματος, ενώ ταυτόχρονα με τα νοήματα θα αναφέρονται από την ερευνήτρια και οι φάσεις των μοντέλων UDGS και 5Es όπου παρατηρήθηκαν αυτά. Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν τα νοήματα των μαθητών που κατασκευάστηκαν πάνω στην έννοια και τη χρήση της μεταβλητής, ενώ τέλος θα γίνει σύνδεση όλων αυτών με το πλαίσιο Διδασκαλίας για Ανθεκτική Κατανόηση.

4.1 Νοήματα που κατασκεύασαν οι μαθητές στα γράμματα Ν – Ζ

Explore

Το απόσπασμα που ακολουθεί προέκυψε κατά την 1η Δραστηριότητα όπου ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν ελεύθερα στο εργαλείο το γράμμα Ν. Οι μαθητές τοποθετούν τυχαίες τιμές στον κώδικα και έτσι εμφανίζονται οι φάσεις του Using και Explore.

Απόσπασμα 1

Μ1: «Για αρχή μπροστά 100.»
Μ2: «Μετά 30; 40;»
Μ1: «Ναι, ας το βάλουμε 35.»
Μ2: «Οκ. Μπροστά μετά;»
(εν τω μεταξύ εκτελεί τις μέχρι τώρα εντολές στο εργαλείο)
Μ1: «Ωπα. Όχι 35.»
Μ2: «Δεν στρίβει σωστά.»
Μ1: «Κοίτα ναι. Εμείς θέλουμε να είναι η γωνία αυτή 35.» (του δείχνει την εσωτερική γωνία του γράμματος Ν που έχει σχεδιάσει στο χαρτί.
Μ2: «Άρα θα πρέπει να στρίψει 145.»
Μ1: «Σωστά. 145 αφού κοιτάει ευθεία.»

Σε αυτό το πρώιμο στάδιο εμπλοκής των μαθητών με το εργαλείο, οι μαθητές εξερευνούν τις δυνατότητες του σπουργιτιού μέσα από τον πειραματισμό τους με το εργαλείο. Έτσι, αντιλαμβάνονται το λάθος τους μέσα από την ανατροφοδότηση του εργαλείου, εφόσον το σπουργίτι δεν στρίβει εκεί που στόχευαν, και δείχνουν να νοηματοδοτούν ως προς την έννοια της γωνίας ως στροφή, εντοπίζοντας την αιτία αυτού του αποτελέσματος και κατανοώντας τη διαφορά ανάμεσα στη γωνία που επιθυμούν οι ίδιοι να δημιουργήσουν και στη στροφή που θα πρέπει να κάνει το σπουργίτι για να το καταφέρουν αυτό. Με τη βοήθεια του εργαλείου, λοιπόν, διόρθωσαν μόνοι τους το λάθος τους χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των παραπληρωματικών γωνιών, το οποίο δεν ειπώθηκε σε «επίσημη» γλώσσα αναφέροντας τον όρο «παραπληρωματικές γωνίες», αλλά έδειξαν να χρησιμοποιούν την ιδιότητα του αθροίσματος μιας ευθείας γωνίας που είναι 180 μοίρες, αναφέροντας την κατεύθυνση του σπουργιτιού («αφού κοιτάει ευθεία»).

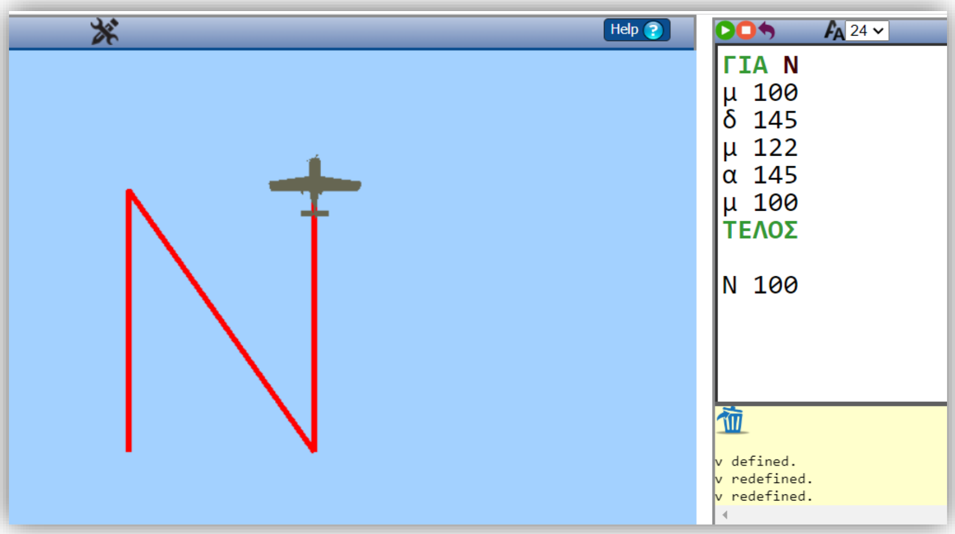
Explain

Και ο διάλογος των μαθητών συνεχίστηκε ως εξής:

<u>Απόσπασμα 2</u>

Μ1: «Ωραία. Πες ότι αυτά είναι 100 (δείχνει τις παράλληλες πλευρές του Ν). Η πλάγια πρέπει να είναι…»
Μ2: «Κοίτα. Μπορούμε να βάλουμε έναν αριθμό ο οποίος να είναι τυχαίος και μετά να το αλλάξουμε. Να βάλουμε 100;»
Μ1: «Όχι 100. Βάλε 150.»
Μ2: «Όχι ρε, θα έχει μεγάλη διαφορά.»
Μ1: «120;»
Ε: «Γιατί είπες όχι στο 100 που πρότεινε αρχικά ο συμμαθητής σου;»
Μ1: «Νομίζω ότι δεν θα φτάσει μέχρι κάτω. Πρέπει να είναι πιο μακρύ για να ακουμπάει κάτω, γιατί πάει διαγώνια.»

Σε αυτό το σημείο φαίνεται ότι ο Μ1 κατανοεί τη διαφορά που θα πρέπει να έχουν οι παράλληλες πλευρές με την πλάγια και εξηγεί τη σκέψη του μετά από ερώτηση της ερευνήτριας. Ο Μ2 αντίθετα δείχνει να μην τον νοιάζει ιδιαίτερα να σκεφτεί τον κατάλληλο αριθμό, αλλά νιώθει άνετα να πειραματιστεί με έναν τυχαίο αριθμό και να διορθώσει ό,τι χρειαστεί μετά την ανατροφοδότηση που θα λάβει από το εργαλείο, δηλαδή αφού αφήσει το ίχνος του το avatar.



Εικόνα 18: Στιγμιότυπο Ν με σταθερό κώδικα

Εφόσον οι μαθητές έχουν κατασκευάσει στις πρώτες 2 πλευρές του Ν και την περιεχόμενη γωνία σε αυτές, βρίσκονται στο σημείο που το αεροπλάνο – avatar βρίσκεται στο τέλος της πλάγιας πλευράς του Ν.

<u>Απόσπασμα 3</u>
<u>(Ικανότητα Χρήσης Ιδιότητας Γωνιών)</u>

Μ2: «Τώρα είμαστε εδώ. Να βάλουμε 60;»
Μ1: «Περίμενε. 60 δεν γίνεται. Θέλει περισσότερο. Αυτή η γωνία είπαμε είναι 35. Σωστά; Αυτή εδώ πόσο θα είναι;»
Μ2: «Πάλι 35. Ε; Ναι, η μέσα γωνία πάλι 35 δεν πρέπει να είναι και στις δύο περιπτώσεις;»

Μ1: «Μισό να το σκεφτώ. Ναι 35. Όταν είναι εντός και εναλλάξ είναι ίδια.»
Μ2: «Ναι ακριβώς. Το ξέρω γιατί έχουμε παράλληλες. Ωραία, άρα θα πρέπει να στρίψει…»
Μ1: «Λοιπόν, εδώ είναι ευθεία πες. Το αεροπλάνο κοιτάει εδώ και πρέπει να κάνει στροφή για να κοιτάει πάνω. Όλο αυτό είναι 180. Αλλά αφού έχει περάσει ήδη τα 35, 180-35=145.»

Όπως φαίνεται, σε αυτό το σημείο οι μαθητές κατάφεραν και ολοκλήρωσαν την ελεύθερη κατασκευή του γράμματος Ν, εκφράζοντας ιδιότητες γωνιών που γνωρίζουν, όπως οι παραπληρωματικές και οι εντός εναλλάξ γωνίες, και βάζοντας τες σε χρήση μέσα στο εργαλείο. Οι μαθητές, σε σύγκριση με το 1ο Απόσπασμα που έκαναν λάθος, δείχνουν να έχουν νοηματοδοτήσει ως προς την έννοια της γωνίας ως στροφή μέσα στο εργαλείο, γεγονός που φαίνεται αφενός γιατί χρησιμοποιούν το ρήμα «στρίβει» και αφετέρου γιατί ο Μ1 εξηγεί με λεπτομέρεια την πορεία του αεροπλάνου στην τελευταία γραμμή, διαχωρίζοντας την εσωτερική γωνία που επιθυμούν από την στροφή που θα πρέπει να κάνει το avatar στο εργαλείο. Παράλληλα, οι μαθητές εμφανίζονται ικανοί να σκεφτούν και να χρησιμοποιήσουν έννοιες γωνιών στο μοντέλο του Ν, χρησιμοποιώντας τόσο τη γραφική αναπαράσταση του εργαλείου, όσο και τη γνώση τους πάνω στις εντός εναλλάξ γωνίες την οποία χρησιμοποιούν για να επιβεβαιώσουν την επιλογή τους.

Συμπληρωματικά, μέσα από τα παραπάνω 3 αποσπάσματα παρατηρούμε τους μαθητές να βρίσκονται στη φάση του Using από το μοντέλο UDGS, χρησιμοποιώντας μαθηματικές (εντός εναλλάξ και παραπληρωματικές γωνίες) και μη μαθηματικές έννοιες (η πλάγια πλευρά φτιάχτηκε με έναν τυχαίο αριθμό και όχι βασιζόμενη στις άλλες δύο), χωρίς ιδιαίτερη προσοχή στο πραγματικό τους νόημα. Ο σκοπός των παιδιών ήταν απλά να κατασκευάσουν το γράμμα Ν (κάτι που επιβεβαιώνεται και από τα λεγόμενά τους σε επόμενο απόσπασμα), και έτσι οι μαθηματικές έννοιες χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές σαν ένα εργαλείο για λειτουργικούς καθαρά σκοπούς.

Exchange

Τα Αποσπάσματα που ακολουθούν δεν ανήκουν σε κάποια δραστηριότητα του προηγούμενου σχεδιασμού. Όταν οι μαθητές ολοκλήρωσαν το Ν τους με σταθερούς αριθμούς, τότε πήραν την πρωτοβουλία να δημιουργήσουν και ένα δεύτερο γράμμα Ν χρησιμοποιώντας μεταβλητές και κατασκευάζοντας έτσι έναν γενικευμένο κώδικα. Η ερευνήτρια άφησε τους μαθητές ελεύθερους να το υλοποιήσουν και δεν επενέβη καθόλου στην απόφασή τους.

Απόσπασμα 4
(Νοηματοδότηση Σταθερών & Μεταβλητών Στοιχείων)

Μ2: «Ωραία. Να το φτιάξουμε τώρα και με μεταβλητές; Με χ, ψ;»
Μ1: «Περίμενε να το σκεφτούμε.»
Μ2: «Οι γωνίες δεν αλλάζουν. Μόνο οι πλευρές αλλάζουν.»
Μ1: «Όχι και οι γωνίες μπορούν να αλλάζουν.»
Μ2: «Άμα αλλάζουν οι γωνίες, πώς θα γίνει το Ν; Μπορεί η γωνία να ανοίξει τελείως και να γίνει 180.»
Μ1: «Ναι, αλλά μέχρι ένα σημείο γίνεται.»
Μ2: «Ναι, αλλά δεν είναι όμως μέχρι ένα σημείο. Πρέπει να βγάζει Ν.»
Μ1: «Κάτσε λίγο να το σκεφτώ.»
(μετά από μισό λεπτό περίπου)

Μ1: «Ναι, ίσως έχεις δίκιο. Πάμε να ξεκινήσουμε και βλέπουμε.»

Εδώ οι μαθητές φαίνεται να επιχειρηματολογούν πάνω στις ιδέες τους με τον Μ2 να προσπαθεί να πείσει το συμμαθητή του και να διορθώσει την ιδέα του σχετικά με το ότι οι γωνίες του Ν μπορούν να αλλάζουν, υποστηρίζοντας πως θα πρέπει να παραμένουν σταθερές στο μοντέλο τους, αφού διαφορετικά θα το αλλοιώνουν. Αντίστοιχα, ο Μ1 φαίνεται να θέλει λίγο χρόνο να επεξεργαστεί αυτή την ιδέα, προσπαθώντας να συγκεκριμενοποιήσει στο μυαλό του την ιδέα των γωνιών σε ένα γενικευμένο μοντέλο του Ν η οποία δεν είχε διαμορφωθεί πλήρως ως τώρα. Βασιζόμενος στην ιδέα του συμμαθητή του, φαίνεται να αναστοχάζεται ως προς το αν πρέπει οι γωνίες του Ν να αλλάζουν ή να παραμένουν σταθερές και καταλήγει να τροποποιήσει την ιδέα του, κατανοώντας ότι το Ν πρέπει να μην αλλοιώνεται, «χτίζοντας» πάνω στην ιδέα του συμμαθητή του.
Το γεγονός ότι οι μαθητές επέλεξαν από μόνοι τους να κατασκευάσουν ένα δεύτερο Ν (χωρίς να τους ζητηθεί) με τη χρήση διαδικασίας και μεταβλητών ήδη από την αρχή της δραστηριότητας, δείχνει ξεκάθαρα ότι ο στόχος της ερευνήτριας να εμπλέξει προσωπικά τα παιδιά στην δραστηριότητα έχει επιτευχθεί. Έτσι, οι μαθητές δημιούργησαν μία «νέα» δραστηριότητα η οποία δεν είχε σχεδιαστεί από την ερευνήτρια και η οποία φαίνεται να ανήκει στη φάση του Exchange, καθώς οι μαθητές δεν εξηγούν απλά τη σκέψη τους, αλλά προσπαθούν να επιχειρηματολογήσουν πάνω στην ιδέα τους, ενώ φαίνεται ξεκάθαρα ο ένας να χτίζει πάνω στις ιδέες του άλλου μέσα από τα επιχειρήματα που προβάλουν πάνω στις γωνίες του Ν, σχετικά με το αν αυτές αλλάζουν ή στο πόσο μπορεί να ανοίξουν.

Explore – Explain

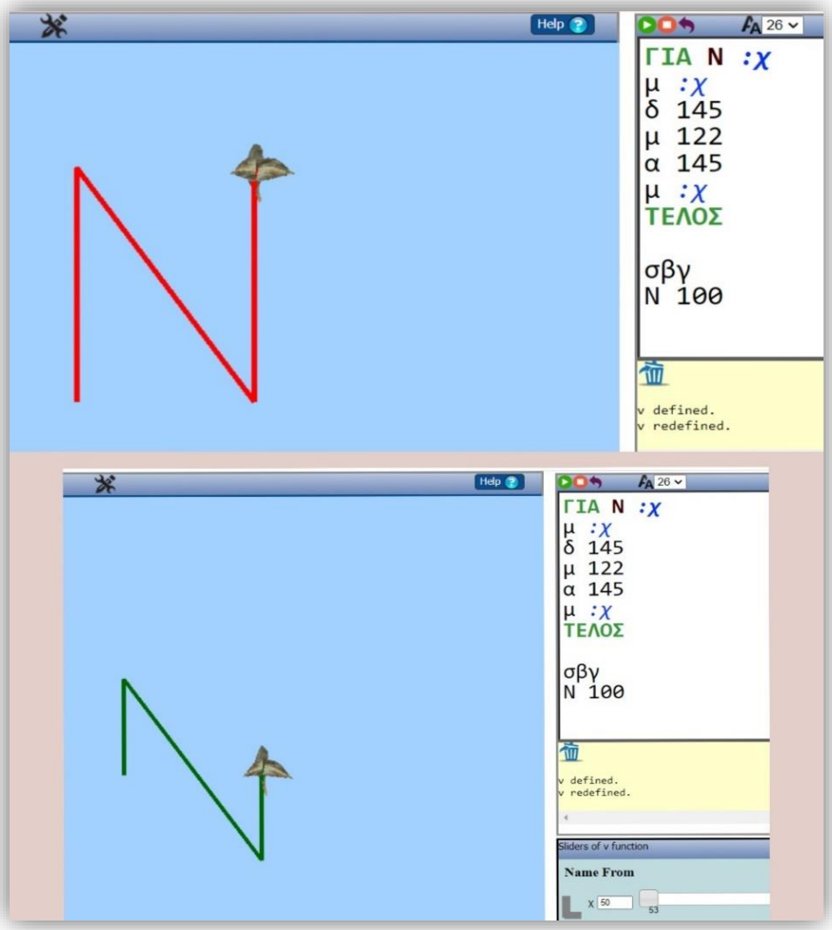
Σε συνέχεια του παραπάνω αποσπάσματος, ο Μ1 δείχνει να θεωρεί πλέον δεδομένο ότι δεν θα πειράξουν τις γωνίες του μοντέλου που έχουν ήδη και ακολουθεί ο εξής διάλογος:

Απόσπασμα 5
(Νοηματοδότηση εξάρτησης πλευρών & Ικανότητα Χρήσης Ιδιότητας Αναλογίας)

Μ2: «Αυτές εδώ δεν μας πειράζουν (δείχνει τις κάθετες πλευρές του Ν). Αυτή εδώ η πλάγια…»
Ε: «Γιατί σας προβληματίζει η πλάγια;»
Μ1: «Γιατί είναι διαφορετική από τα άλλα. Πρέπει να είναι πιο μεγάλη. Τα άλλα δύο πρέπει να είναι ίσα.»
Μ2: «Ωραία βάλε χ σε αυτές που ξέρουμε ότι είναι ίσες.»
Μ1: «Να βάλω και κάτω 120 να το εκτελέσουμε. Ή να βάλω 100;»
Μ2: «Ό,τι να΄ ναι. Αφού μετά μπορούμε να το αλλάζουμε με τη γραμμή (εννοεί τον ολισθητή).»
Μ1: «Α ναι. Εντάξει.»
(το εκτελούν)
Ε: «Τι παρατηρείτε;»
Μ2: «Ότι αλλάζουν μόνο οι παράλληλες, όμως η πλάγια μένει ίδια.»
Ε: «Γιατί νομίζετε ότι συμβαίνει αυτό;»
Μ2: «Γιατί δεν την έχουμε βάλει να αλλάζει. Έχουμε αφήσει αριθμό.»
Μ1: «Πώς μπορούμε το άλλο να το κάνουμε να τις ακολουθεί;»
(σκέφτονται 1 λεπτό)
Μ1: «Υπάρχει να βάλουμε τοις εκατό;»
Ε: «Δηλαδή;»
Μ1: «Δηλαδή σκέφτηκα εφόσον όταν είναι 100 η μία πλευρά, η άλλη να είναι 122 ας πούμε.»

Μ2: «Ναι κι εγώ το ίδιο σκέφτηκα! Με αναλογία.»
Μ1: «Ωραία. Άρα χ συν 22% του χ. Γίνεται να το γράψουμε αυτό;»
Ε: «Φυσικά. Απλά για να το αναγνωρίσει το εργαλείο θα το γράψετε με κλάσμα ή με δεκαδικό, όχι με το σύμβολο του ποσοστού.»

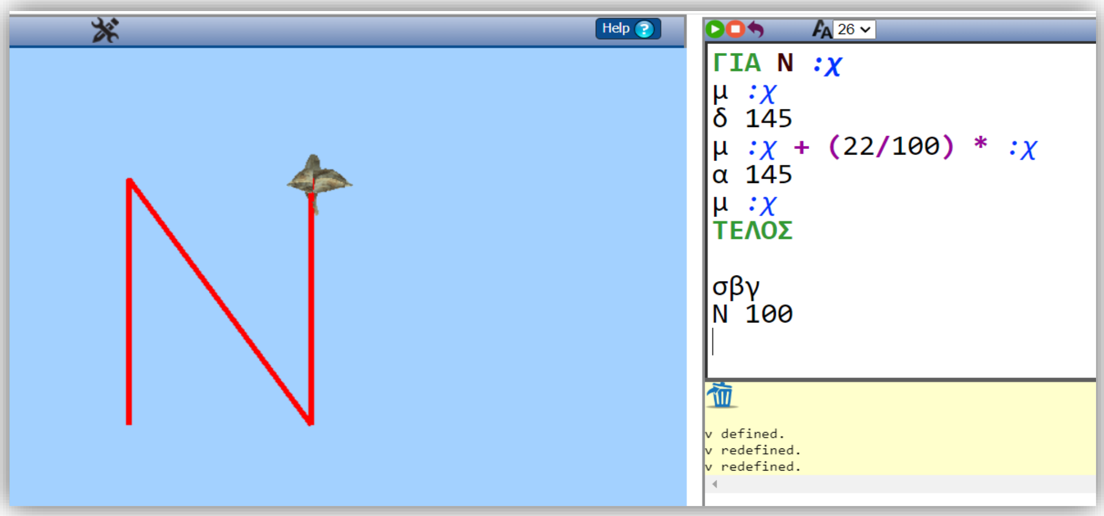
Εδώ φαίνεται η βασική νοηματοδότηση των μαθητών ως προς τα στοιχεία που αλλάζουν στο μοντέλο του γράμματος Ν και σε αυτά που παραμένουν σταθερά. Οι μαθητές προσπαθούν να γενικεύσουν το μοντέλο τους θέτοντας μεταβλητή στη θέση που οι ίδιοι πριν είχαν θέσει σταθερό αριθμό και μέσα από το προηγούμενο σταθερό μοντέλο κατανοούν ποιες πλευρές πρέπει να είναι ίσες. Με κάποιες σύντομες ερωτήσεις της ερευνήτριας, και χωρίς καθόλου η ίδια να τους καθοδηγεί, προσπαθεί να δώσει την ευκαιρία στους μαθητές να εξηγήσουν τις σκέψεις τους γύρω από τα εμπόδια που συναντούν και με αυτό τον τρόπο να αποσαφηνίσουν τις σκέψεις τους σε μεγαλύτερο βαθμό. Οι μαθητές δείχνουν να προβληματίζονται σχετικά με το μήκος της πλάγιας πλευράς του Ν, όμως όπως φαίνεται από το διάλογό τους, έχουν κατανοήσει τη σχέση εξάρτησης που υπάρχει ανάμεσα στην πλάγια και στις παράλληλες μέσα από τον δυναμικό χειρισμό του μοντέλου με το εργαλείο (μέσω του ολισθητή), ψάχνοντας τρόπο να κάνουν την πλάγια να «ακολουθεί» τις άλλες 2 παράλληλες πλευρές. Συγκεκριμένα, η νοηματοδότηση της εξάρτησης της πλάγιας πλευράς από τις άλλες 2, προέκυψε άμεσα από το ίδιο το εργαλείο, καθώς οι μαθητές κουνούσαν τον ολισθητή συνεχόμενα διερευνώντας το μοντέλο τους για 1-2 λεπτά.



Εικόνα 19: Στιγμιότυπα Ν με προσπάθεια γενίκευσης

Παραπάνω φαίνεται ο κώδικας που κατασκεύασαν αρχικά, όπου φαίνεται η τοποθέτηση μεταβλητής στην εντολή του πρώτου και τελευταίου «μπροστά», καθώς και η αλλοίωση του μοντέλου του Ν, όταν οι μαθητές μετακινούσαν τους κέρσορες, δεδομένου ότι στη δεύτερη εντολή του μπροστά είχαν αφήσει σταθερό αριθμό (122).

Σταδιακά, βέβαια, οι μαθητές βρήκαν έναν τρόπο να ξεπεράσουν αυτό το εμπόδιο εμφανίζοντας από μόνοι τους και χρησιμοποιώντας την έννοια της αναλογίας, όπως φαίνεται στον επόμενο κώδικα. Στην ουσία, εξέφρασαν τη σχέση εξάρτησης με μία αναλογία, έννοια που διατυπώθηκε ρητά από τους ίδιους. Με αυτόν τον τρόπο, πέτυχαν την κατασκευή ενός γενικευμένου μοντέλου του Ν, εμφανίζοντας μία γραμμική σχέση εξάρτησης των πλευρών του.

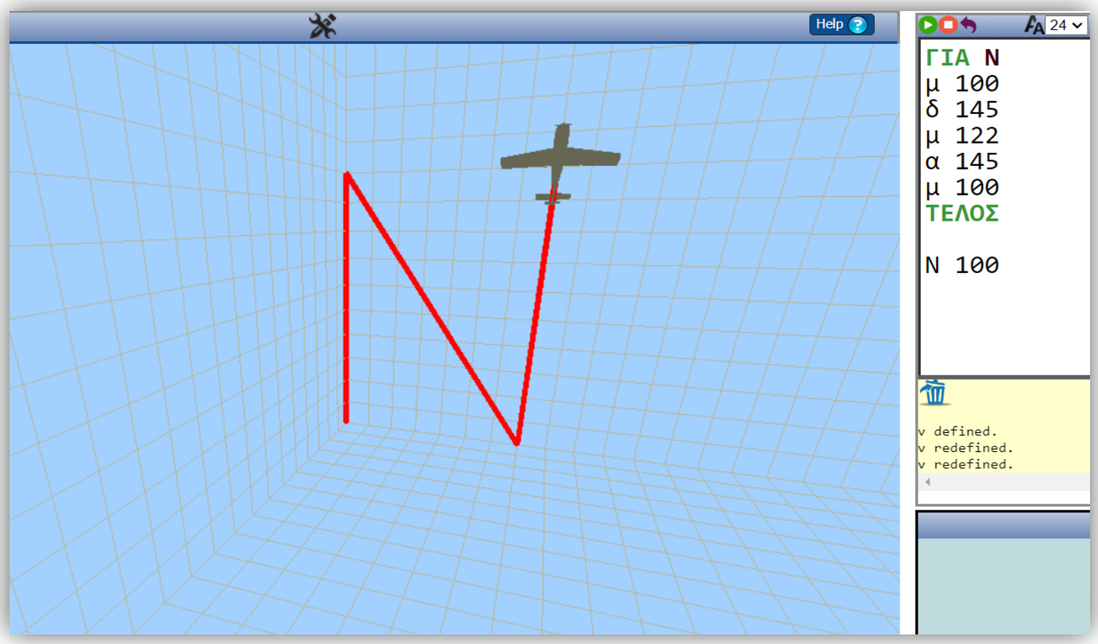


Εικόνα 10: Γενικευμένο μοντέλο Ν με χρήση αναλογίας

Συμπερασματικά, στην $1^{η}$ Δραστηριότητα όπου ζητήθηκε από τους μαθητές να κατασκευάσουν ελεύθερα το γράμμα Ν, τα παιδιά πήραν την πρωτοβουλία να δημιουργήσουν 2 μοντέλα του γράμματος, ένα με σταθερούς αριθμούς και ένα δυναμικό μοντέλο με μία μεταβλητή, κάτι που δεν είχε σχεδιαστεί εκ των προτέρων από την ερευνήτρια η οποία υπέθεσε πως οι μαθητές θα δημιουργούσαν μόνο έναν σταθερό κώδικα. Στην ερώτηση της ερευνήτριας – στο τέλος της δραστηριότητας – γιατί αποφάσισαν να κατασκευάσουν και ένα δεύτερο μοντέλο με μεταβλητές, η απάντησή τους ήταν γιατί τους άρεσε το εργαλείο και γιατί ένιωσαν ότι μπορούσαν να το κάνουν. Μάλιστα ανέφεραν χαρακτηριστικά το παρακάτω: «όταν κάπου χρησιμοποιείς μεταβλητή δείχνει ότι είσαι πιο καλός στα μαθηματικά».
Συνεπώς, οι μαθητές δεν πέρασαν μόνο μέσα από τη φάση του Using όπως προβλεπόταν, αλλά όπως φαίνεται προχώρησαν από μόνοι τους και στη φάση του Discriminating. Έτσι, παρατηρούμε πως οι μαθητές αρχικά χρησιμοποίησαν τις εντολές για την κατασκευή του γράμματος, περισσότερο πειραματιζόμενοι και χωρίς να δίνουν πλήρη σημασία στα μαθηματικά, και μάλιστα χρησιμοποιώντας κυρίως τη γραφική αναπαράσταση και το πλέγμα που παρέχει το εργαλείο (για να είναι ίσιο το γράμμα) και όχι τόσο τα μαθηματικά. Ενδεικτικά, η ερευνήτρια θα παραθέσει το τέλος του διαλόγου όταν οι μαθητές ολοκλήρωσαν τον $1^{ο}$ της κώδικα.

Απόσπασμα 6

M2: «Σωστό δεν είναι; Ίσιο φαίνεται. Α, κάτσε να δεις πώς θα το δούμε αυτό.» (εμφανίζει στην οθόνη το πλέγμα και εξετάζουν τη γραφική αναπαράσταση του Ν κουνώντας την κάμερα του MaLT2)
M1: «Δεν είναι για ελάχιστο. Βάλε αντί για 120, 122.»
M2: «Οκ. Καλό είναι.»



Εικόνα 11: Στιγμιότυπο Ν

Αυτό δείχνει ότι οι μαθητές μπορεί να είχαν νοηματοδοτήσει ως προς τις γωνίες του Ν οι οποίες έπρεπε να είναι ίσες, αλλά όχι ως προς τις πλευρές τις οποίες κατασκεύασαν τυχαία. Όταν, λοιπόν, συνέχισαν και προσπάθησαν να κατασκευάσουν το γενικευμένο μοντέλο του Ν, ξεκίνησαν να παρατηρούν τις εντολές που είχαν δημιουργήσει μια προς μια και να συζητούν για να το πού θα τοποθετήσουν μεταβλητή, γιατί και πώς θα καταφέρουν να συσχετίσουν και της 3 πλευρές του Ν, καταλήγοντας να χρησιμοποιήσουν την έννοια της αναλογίας μέσα στο μοντέλο τους. Αυτό δείχνει ότι κατά την κατασκευή του γενικευμένου μοντέλου, οι μαθητές παρουσιάστηκαν ικανοί μέσα από τη χρήση του εργαλείου να χρησιμοποιήσουν μαθηματικές ιδιότητες στα μοντέλα τους, τόσο όσο αναφορά στις πλευρές του Ν, όσο και τις γωνίες του.

Explore – Explain – Envisage

Κατά τη 2η Δραστηριότητα της Φάσης Α, η δραστηριότητα ζητούσε από της μαθητές να προβλέψουν και να διορθώσουν το μοντέλο του γράμματος Ν που τελικά προέκυπτε.

Απόσπασμα 7
(Νοηματοδότηση μέσω Αναστοχασμού)

M1: «Ωραία μοιάζει με Ν. Αλλά (πειράζουν τους ολισθητές) μοιάζει και με τρίγωνο.»

Μ2: «Ναι, είχες δίκιο τελικά ότι μοιάζει και με τρίγωνο. Αν είναι πάνω από 180 το αριστερά, έστω και 1, βγαίνει τρίγωνο.»
Μ1: «Για μεγάλωσε πολύ το χ… Ναι μετά αλλάζει και τη γωνία.»
Μ2: «Άρα αν αλλάζει η πλευρά, αλλάζει και η γωνία.»
Ε: «Πότε νομίζετε τελικά ότι θα βγαίνει τρίγωνο και πότε Ν;»
Μ1: «Στο Ν έστω ελάχιστα να μην είναι ίσια αυτή μέσα (εννοεί τις εντός εναλλάξ γωνίες), δηλαδή να μην είναι παράλληλες αυτές οι πλευρές, μετά θα γίνεται τρίγωνο.»
Μ2: «Ναι, αλλά και τη γωνία να αλλάζω μόνο πρέπει μετά να αλλάζω και την πλευρά. Γιατί και τώρα που το έχεις 181 δεν είναι τρίγωνο. Δεν φτάνει πάντα να αλλάζω το ένα.»

Σε αυτό το σημείο, μέσα από την νοητική πρόβλεψη που έκαναν οι μαθητές, αλλά και στη συνέχεια από τον πειραματισμό τους με το εργαλείο και κυρίως τους μεταβολείς, δείχνουν να δημιούργησαν νοήματα ως προς τη σχέση που έχουν οι πλευρές και οι γωνίες του δομήματος και ότι τελικά αυτές σχετίζονται μεταξύ τους. Αυτό δεν συνέβη στο γράμμα Ν, αλλά στην δεύτερη πρόβλεψη που είχαν κάνει η οποία ήταν ένα τρίγωνο, καθώς υπήρχε μεταβλητή στη θέση της 2ης στροφής του avatar. Αυτή η παρατήρηση των παιδιών θα τους βοηθήσει στη διόρθωση του μοντέλου, όπως θα φανεί στη συνέχεια.

Απόσπασμα 8
(Νοηματοδότηση Εξάρτησης Πλευρών - Γωνιών)

Μ2: «Ωραία, εγώ λέω το μπροστά αυτό και αυτό (εννοεί το 1ο και το 3ο μπροστά που αναφέρεται στις παράλληλες πλευρές του Ν) να το κρατήσουμε. Συμφωνείς;»
Μ1: «Οκ ναι. Το 2ο μπροστά πρέπει να αλλάξει.»
Μ2: «Συμφωνώ. Να βάλουμε και το αριστερά 135 απευθείας για να είναι ίσιο.»
Μ1: «Ωραία σβήνουμε εντελώς το ω γιατί μας χαλάει το σχήμα και βάζουμε 135.»
Ε: «Γιατί το κάνατε αυτό;»
Μ2: «Για να στρίψει το ίδιο. Να είναι ίσες οι γωνίες. Είναι εντός εναλλάξ.»
Μ1: «Είναι ίσιο; Πάτα πάνω του να δούμε και στο άξονα.»
Μ2: «Σωστό είναι. Να αλλάξουμε τώρα και αυτό το μπροστά που αφήσαμε (εννοεί την πλάγια).»
Μ1: «Να το κάνουμε με αναλογίες όπως πριν;»
Μ2: «Ας βάλουμε χ + 22%*χ, όπως πριν. Και ας το εκτελέσουμε.»
Μ1: «Δεν βγήκε…»
Ε: «Ποιο είναι το πρόβλημα;»
Μ1: «Η γραμμή η μεσαία.»
Μ2: «Δεν ακουμπάνε τα ποδαράκια στο έδαφος.»
Μ1: «Πρέπει η πλάγια να είναι μεγαλύτερη.»
Μ2: «Το βρήκα το λάθος μας. Πριν είχαμε άλλη γωνία. Και είπαμε πριν ότι αφού αλλάζει η γωνία, θα αλλάζει και η πλευρά στο τρίγωνο. Ε, το ίδιο είναι και εδώ.»
(Δοκιμάζουν με τους ολισθητές τιμές, όπως 135, 138, 140, 141.)
Μ1: «Ωραία. Άρα αλλάζουμε το 22/100 σε 41/100.»
Μ2: «Να τσεκάρουμε και με τους άξονες να δούμε αν ακουμπάει. Οκ φαίνεται…»

Από το παραπάνω απόσπασμα, φαίνεται πως οι μαθητές πλέον έχουν αρχίσει να χτίζουν μία ισχυρή κατανόηση ως προς τις γωνίες και τις παράλληλες πλευρές του Ν, οι οποίες πρέπει να είναι ίσες μέσα από τις προηγούμενες εμπειρίες τους και ταυτόχρονα κατανοούν ότι οι 3 πλευρές σχετίζονται μεταξύ τους και σε αυτό το μοντέλο. Μάλιστα ένιωσαν και οι δύο σίγουροι για τη χρήση της ιδιότητας των εντός εναλλάξ γωνιών και αφαίρεσαν τη μεταβλητή που υπήρχε στην αντίστοιχη εντολή της στροφής. Επίσης, γνωρίζουν ποιο είναι το πρόβλημα τους, δηλαδή η πλάγια πλευρά και επιλέγουν και σε αυτό να χρησιμοποιήσουν την έννοια της αναλογίας. Όμως δεν χρησιμοποιούν απλά την έννοια, αλλά και τον ίδιο αριθμό με το προηγούμενο μοντέλο, θεωρώντας προφανώς ότι δουλεύει πάντα. Η γραφική ανατροφοδότηση που έλαβαν όμως από το εργαλείο, τους έδειξε ότι αυτό δεν ισχύει και προσπάθησαν να διορθώσουν το λάθος τους μέσα από τον πειραματισμό τους με τους ολισθητές. Παρόλα αυτά, ο Μ2 δείχνει να νοηματοδοτεί ως προς τη λάθος εκτίμηση που έκαναν, αναφέροντας τη σχέση εξάρτησης γωνίας – πλευρών στο τρίγωνο που διερεύνησαν νωρίτερα και μεταφέροντας αυτή τη γνώση και σε αυτό το μοντέλο. Αυτό είναι μία ένδειξη γενίκευσης που πέτυχε ο Μ2, εφόσον είδε ένα μοτίβο που επαναλήφθηκε από το τρίγωνο στο Ν.
(Στο τέλος αυτής της δραστηριότητας, αν και οι μαθητές απασφαλμάτωσαν το μοντέλο που τους δόθηκε – δεν έδειχναν και πολύ πεπεισμένοι για αυτό. Κουνούσαν συνέχεια την κάμερα και τους μεταβολείς και έδειχναν ότι δεν ήταν σίγουροι για το μοντέλο τους. Η ερευνήτρια δεν θέλησε να κάνει κάποια ερώτηση, γιατί αυτή η ανασφάλεια που είχαν με τη χρήση της αναλογίας – όχι σαν μαθηματική ιδιότητα, αλλά σαν χρήση του συγκεκριμένου αριθμού το 41% – θα ερχόταν στο προσκήνιο στη συνέχεια.)

Explore – Explain

Στην 3η Δραστηριότητα της Φάσης Α, δόθηκε στους μαθητές η γραφική αναπαράσταση ενός γενικευμένου μοντέλου του γράμματος Ν και ζητήθηκε από αυτούς να ανακαλύψουν τον κώδικα που το κατασκευάζει.

<u>Απόσπασμα 9</u>
<u>(Πειραματισμός με εργαλείο)</u>

(Οι μαθητές πειραματίζονται για αρκετά λεπτά με τους ολισθητές και την κάμερα.)

Μ2: «Λοιπόν, παραμένουν σταθερές οι γωνίες και αλλάζει το μήκος των πλευρών, των γραμμών βασικά.»

Ε: «Τι νομίζετε ότι θα σας βοηθήσει να βρείτε τον κώδικα αυτού του μοντέλου;»

Μ2: «Εγώ πιστεύω ο άξονας. Αυτό από πίσω. Εσύ τι λες; Δεν έχουμε και κάτι άλλο.»

Μ1: «Δεν ξέρω. Να δούμε.»

Μ2: «Λοιπόν, ας δούμε τι έχουμε. Μας βοηθάει ότι το χ είναι οι πλευρές. Και ότι το αρχικό είναι 40.»

Μ1: «Ναι, αλλά τις γωνίες πώς θα τις βρούμε; Είναι σταθερές, αλλά πόσο;»

Μ2: «Θα τις βρούμε. Κάτι έχω στο μυαλό μου. Μου έχεις εμπιστοσύνη; Βασικά πρέπει να στο πω για με βοηθήσεις. Κοίτα λίγο. Δεν ξέρω αν έχει σημασία, αλλά στο 40 που ξεκινάει είναι 4 και 4 (τετραγωνάκια στο πλέγμα εννοεί). Στο 50 είναι 5 και 5. Στο 20 είναι 2 και 2 ας πούμε.»

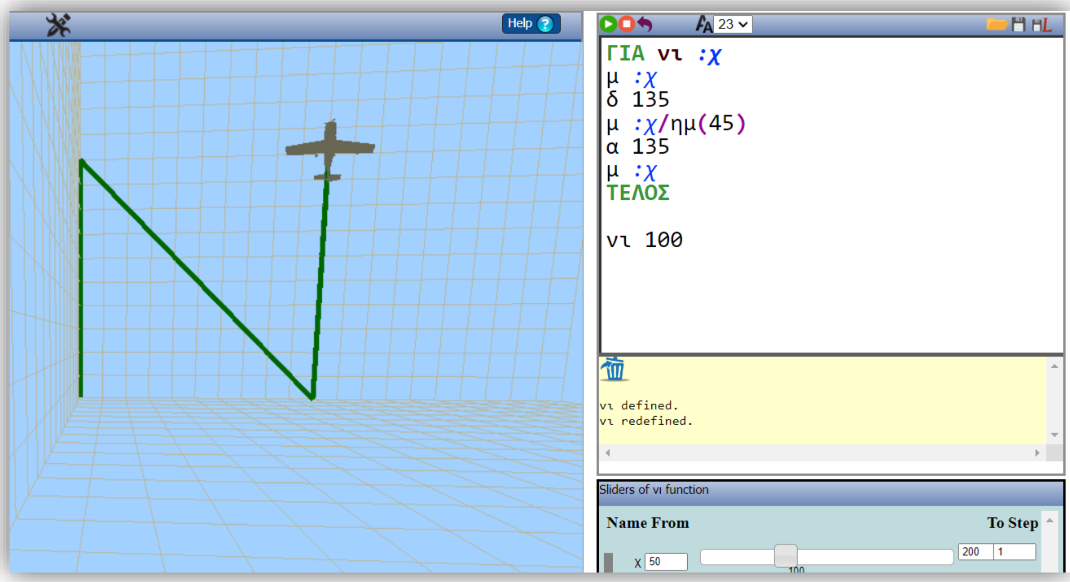
Ε: «Τι εννοείς;»

Μ2: «Είναι σαν να είναι μέσα σε ένα τετράγωνο. Νοητό. Βλέπεις τους άξονες;»

Αυτό ήταν ένα «δύσκολο» σημείο κατά την ερευνήτρια και μάλιστα, όπως είχε αναφερθεί και στο σχεδιασμό, αν οι μαθητές δεν παρατηρούσαν αυτή την αλλαγή των πλευρών και το τετράγωνο μέσα στο οποίο είχε κατασκευαστεί, η ίδια θα βοηθούσε τα παιδιά προς αυτή την κατεύθυνση. Όμως, οι συγκεκριμένοι μαθητές είχαν χρησιμοποιήσει αρκετά το πλέγμα του εργαλείου για να εξετάζουν αν τα γράμματά τους είναι ίσια όταν χρησιμοποιούσαν τις αναλογίες στα προηγούμενα μοντέλα και έτσι ήταν εξοικειωμένοι με αυτό.

<u>Απόσπασμα 10</u>
<u>(Ικανότητα Χρήσης Ιδιότητας Τετραγώνου)</u>

Ε: «Γιατί διαλέξατε το 135 για τη γωνία;»
Μ1: «Για να βγαίνει τετράγωνο όταν στρίβει.»
Μ2: «Ναι. 180 μείον 135 που στρίβει, οι μέσα (γωνίες εννοεί) είναι 45 μοίρες».
Ε: «Θα μπορούσαν να είναι και 50 μοίρες;»
Μ2: «Όχι. Αφού εδώ υπάρχει τετράγωνο, κάθε γωνία είναι 90 μοίρες. Αλλά η πλάγια είναι διαγώνιος του τετραγώνου.»
Μ1: «Άρα και διχοτόμος. Οπότε 90 δια 2 = 45. Οπότε 45 πρέπει να είναι.»
Μ2: «Ωραία. Πάνε οι γωνίες. Αυτή η γραμμή χωρίζει το τετράγωνο σε δύο τρίγωνα.»
Μ1: «Ίσα μεταξύ τους.»
Ε: «Τι τρίγωνα;»
Μ2: «Ισόπλευρα.»
Μ1: «Όχι ισοσκελή. Δύο πλευρές είναι ίσες. Αυτές του τετραγώνου.»
Μ2 : «Α ναι, η 3^{η} πλευρά δεν είναι ίση.»
Ε: «Γιατί όχι;»
Μ2: «Αφού χωρίζει το τετράγωνο στη μέση, έτσι όπως έρχεται πλάγια, είναι μεγαλύτερη από τις άλλες. Και γιατί το είδαμε και στο Ν πριν ότι δεν είναι ίση.»



Εικόνα 12: Γενικευμένο Ν με χρήση τριγωνομετρικού αριθμού

Από τη στιγμή που οι μαθητές βασίστηκαν στο νοητό τετράγωνο, έδειξαν πώς μπορούν να χρησιμοποιήσουν την ιδιότητα της διαγώνιου του τετραγώνου και να εξηγήσουν με άνεση στην εκπαιδευτικό το λόγο που σκέφτηκαν έτσι, καθώς και να αιτιολογήσουν γιατί δεν γίνεται να υπάρχει διαφορετική γωνία από τις 45 μοίρες. Το γεγονός, επίσης, ότι η πλάγια πλευρά είναι μεγαλύτερη από τις άλλες το επιβεβαιώνει ο Μ2 μέσα από τις προηγούμενες δραστηριότητες, γεγονός που δείχνει την κατανόηση του παιδιού πάνω στο μοντέλο που χτίζουν. Τελικά, οι μαθητές κατασκεύασαν τον κώδικα που έψαχναν, όπως φαίνεται στην παραπάνω εικόνα.

Απόσπασμα 11
(Νοηματοδότηση μέσω Συντονικότητας Σώματος)

Ε: «Πώς σκεφτήκατε να χρησιμοποιήσετε το ημίτονο;»
Μ2: «Όταν είδα ότι εδώ το Ν μπορούμε να το σκεφτούμε μέσα σε τετράγωνο και να φτιάξουμε τρίγωνα, σε αυτό το τρίγωνο πήγα και στάθηκα στην πάνω κορυφή, εδώ, και από εκεί το αεροπλάνο κοιτούσε απέναντι. Οπότε με το που είδα το απέναντι, σκέφτηκα και την υποτείνουσα και βγήκε έτσι το ημίτονο.»

Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, η ερευνήτρια είχε υποθέσει πως όταν οι μαθητές θα είχαν την πληροφορία του τετραγώνου και των ορθογώνιων τριγώνων τότε θα χρησιμοποιούσαν το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Παρόλα αυτά, σε αυτό το κρίσιμο επεισόδιο βλέπουμε ότι η ιδέα του ενός μαθητή προήλθε ξεκάθαρα από τη χρήση του εργαλείου MaLT2, όπου η συντονικότητα του σώματος (body syntonicity) η οποία έχει αναφερθεί στο Κεφάλαιο 3 έκανε την εμφάνισή της. Αυτό φαίνεται καθαρά μέσα από τα λόγια του και το πρόσωπο των ρημάτων που χρησιμοποιεί, καθώς το εξηγεί στην ερευνήτρια: «…πήγα και στάθηκα στην πάνω κορυφή, εδώ, και από εκεί το αεροπλάνο κοιτούσε απέναντι…». Ο Μ2 χρησιμοποιεί α' πρόσωπο και αναφέρει τα ρήματα «πήγα και στάθηκα», στοιχείο που δείχνει ότι νοητικά είχε μπει στη θέση του avatar και στη συνέχεια χρησιμοποιεί γ΄ πρόσωπο «και από εκεί το αεροπλάνο κοιτούσε απέναντι», στοιχείο που δείχνει ότι η κατεύθυνση του αεροπλάνου τον ώθησε να σκεφτεί την απέναντι πλευρά και κατ' επέκταση να χρησιμοποιήσει την έννοια του ημιτόνου.
Όπως φαίνεται, οι δραστηριότητες είναι ανοιχτές και δεν έχουν μία συγκεκριμένη λύση. Για παράδειγμα, το συγκεκριμένο μοντέλο θα μπορούσε να κατασκευαστεί είτε με πυθαγόρειο, είτε με χρήση ημιτόνου, είτε με χρήση συνημιτόνου, ακόμα και με χρήση αναλογιών, αλλά ο σκοπός της ερευνήτριας ήταν να μεταβούν οι μαθητές από τις αναλογίες που είχαν χρησιμοποιήσει νωρίτερα σε κάποιο από τα υπόλοιπα 3 μοντέλα, όπως και έγινε από τους μαθητές.
Στη συνέχεια, η ερευνήτρια έκανε στους μαθητές κάποιες ερωτήσεις αναστοχαστικού περιεχομένου με σκοπό οι μαθητές να σκεφτούν και να συγκρίνουν ίσως τα μοντέλα των Ν που είχαν κατασκευάσει μέχρι εκείνη τη στιγμή.

Απόσπασμα 12
(Νοηματοδότηση μέσω Αναστοχασμού)

Ε: «Στην προηγούμενη δραστηριότητα η γωνία ήταν πάλι 45 μοίρες. Πώς και δεν σκεφτήκατε πριν το ημίτονο;»
Μ1: «Δεν ήταν μέσα σε τετράγωνο πριν. Ήταν τυχαίο. Εδώ ξέραμε ότι οι πλευρές είναι χ και χ.»
Μ2: «Ναι πριν δεν σκεφτόμασταν καν έτσι και απλά προσπαθούσαμε να μας βγαίνει το Ν.»

Ε: «Ωραία. Και τελικά, αν τα δούμε συνολικά όλα σας τα Ν, τι διαφορά έχουν τα μοντέλα που κατασκευάσατε;»
Μ2: «Το πρώτο Ν ήταν πιο πολύ για να βγει Ν. Δεν κοιτάξαμε λεπτομέρειες για πλευρές και τέτοια. Το μόνο ίδιο πάντως ήταν οι παράλληλες πλευρές. Τα άλλα ήταν διαφορετικά.»
Ε: «Αν κάποιος σας έδινε αυτές τις δύο διαδικασίες που φτιάξατε με τις αναλογίες και το ημίτονο, ποια θα εμπιστευόσασταν πιο πολύ; Εννοείται πως και οι 2 φτιάχνουν το Ν μια χαρά.»
Μ2: «Εγώ θα έλεγα τις αναλογίες γιατί τις ξέρουμε πιο πολύ. Από πιο παλιά δηλαδή.»
Μ1: «Κι εγώ αναλογίες νομίζω γιατί τις ξέρουμε καλύτερα.»

Εδώ, οι μαθητές δείχνουν ότι έχουν επίγνωση των προσπαθειών τους και παραδέχονται πώς στα πρώτα μοντέλα προσπαθούσαν περισσότερο διαδικαστικά να κατασκευάσουν τα μοντέλα (Αποσπάσματα 1-3). Το ενδιαφέρον σημείο είναι ότι η προτίμησή τους στη χρήση αναλογιών με την αιτιολόγηση ότι τις έχουν κάνει περισσότερο στο σχολείο (καθώς τις διδάσκονται από το δημοτικό, ενώ το πυθαγόρειο και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς τα διδάχθηκαν μόλις την προηγούμενη χρονιά), μία άποψη η οποία, όμως, θα αλλάξει στην επόμενη δραστηριότητα και αυτός είναι και ο λόγος που παρέθεσε η ερευνήτρια το συγκεκριμένο απόσπασμα. Για να δείξει την αλλαγή στον τρόπο σκέψης των μαθητών.

Explore – Explain - bridgE

Μετά την εμπλοκή των μαθητών με το γράμμα Ν, στην τελευταία δραστηριότητα της 1ης Φάσης τους ζητήθηκε να κατασκευάσουν ένα γενικευμένο μοντέλο του Ζ. Το κρίσιμο συμβάν που ακολουθεί είναι κομμάτι αυτής της δραστηριότητας. Εδώ, αξίζει να υπενθυμίσουμε ότι το Ν και Ζ μοιράζονται παρόμοιες μαθηματικές ιδιότητες, γι' αυτό και επιλέχθηκαν κατά το σχεδιασμό της δραστηριότητας.

Απόσπασμα 13
(Νοηματοδότηση Μέσω Αναστοχαστικών Ερωτήσεων)

Μ1: «Βάλε 135, όπως και πριν.»
Ε: «Γιατί;»
Μ2: «Θα το κάνουμε σαν να είναι πάλι μέσα σε τετράγωνο. Όπως και πριν. Εμένα με βολεύει καλύτερα.»
Μ1: «Ναι κι εμένα.»
Μ2: «Ωραία βάλε εδώ και εδώ χ. (εννοεί στις παράλληλες πλευρές του Ζ)»
Μ1: «Ναι. Ωραία. Στην πλάγια έχουμε τώρα θέμα. (δοκιμάζουν στο χαρτί με αναλογίες) Αν το κάνουμε με αναλογίες, τότε βγαίνουν πάρα πολλά δεκαδικά.»
Ε: «Αν το 42,….. το κάνετε 43, θα βγει;»
(το δοκιμάζουν στο εργαλείο)
Μ2: «Βγαίνει.»
Ε: «Αν το κάνετε 41;»
(το δοκιμάζουν στο εργαλείο)
Μ1: «Πάλι βγαίνει.»
Ε: «Άρα πώς ξέρω…»
(η ερευνήτρια δεν ολοκληρώνει ποτέ την ερώτησή της γιατί ο Μ2 την διακόπτει)

Μ2: «Μισό μισό μισό! Αν θέσουμε την πλάγια που ψάχνουμε ως υποτείνουσα, τότε μπορώ να κάνω πυθαγόρειο! Αφού είπαμε να το κάνουμε σαν να είναι σε τετράγωνο! Γιατί να μπλέκουμε με αριθμούς στο περίπου;»
Μ1: «Σωστά. Και με ημίτονο μπορούμε, όπως πριν. Κοίτα. Πάλι σχηματίζονται ορθογώνια τρίγωνα και αυτή είναι 45 μοίρες (δείχνει την εσωτερική γωνία του Ζ).»
Μ2: «Ωραία. Με τι θες να το κάνουμε;»
Μ1: «Ας το κάνουμε με Πυθαγόρειο καλύτερα και βλέπουμε.»

Όπως ανέφεραν και πριν οι μαθητές, το πρώτο πράγμα που πάνε να δοκιμάσουν είναι οι αναλογίες, καθώς τις ξέρουν καλύτερα. Όταν, όμως, συναντάνε τους περιορισμούς των δεκαδικών, η ερευνήτρια παρεμβαίνει με ερωτήσεις αναστοχαστικού περιεχομένου και όχι καθοδήγησης με στόχο να τα βοηθήσει να κάνουν το «άλμα» στη σκέψη τους, κάτι που όμως δεν ολοκλήρωσε ποτέ. Ο Μ2 είδε ότι η πλάγια πλευρά είναι η υποτείνουσα και θυμήθηκε το πλαίσιο που οι ίδιοι αποφάσισαν να χρησιμοποιήσουν στην κατασκευή τους, δηλαδή το νοητό τετράγωνο γύρω από το γράμμα προτείνοντας την εφαρμογή του Πυθαγορείου. Αντίστοιχα, ο Μ1 πρότεινε την εφαρμογή του ημιτόνου, όπως έκαναν πριν και αυτό είναι μία ένδειξη της ανθεκτικής κατανόησης που η ερευνήτρια στόχευε για τα παιδιά και μία ένδειξη ότι αναγνώρισαν τις μαθηματικές ιδιότητες του Ζ μέσα από τη σύγκρισή του με το προηγούμενο μοντέλο του Ν, γεγονός που δείχνει ότι οι μαθητές γενικεύουν τις ιδέες τους μέσω της παρατήρησης μοτίβων σε σχέσεις και τρίγωνα. Έτσι, εδώ, το εύρος εφαρμογής της έννοιας του Πυθαγορείου ή του ημιτόνου που χρησιμοποιείται ως εργαλείο επεκτείνεται συνειδητά από τα παιδιά (Generalizing).
Το ενδιαφέρον στοιχείο, λοιπόν, είναι πώς αν και οι μαθητές είχαν δηλώσει ότι προτιμούν τις αναλογίες, έδειξαν να χρησιμοποιούν Πυθαγόρειο ή το ημίτονο στο συγκεκριμένο μοντέλο και μάλιστα με τον Μ2 να αναφέρει χαρακτηριστικά ότι δεν θέλει να μπλέξει με αριθμούς στο περίπου. Αυτό δείχνει μία αλλαγή στον τρόπο σκέψης του, όπου έμμεσα συγκρίνει τους τρόπους που μπορεί να κατασκευάσει το μοντέλο του Ζ και επιλέγει τον πιο σίγουρο ή τον πιο ακριβές ίσως. Εν τούτοις, το εξέφρασε ως το να μην έχει πολλά δεκαδικά ψηφία.

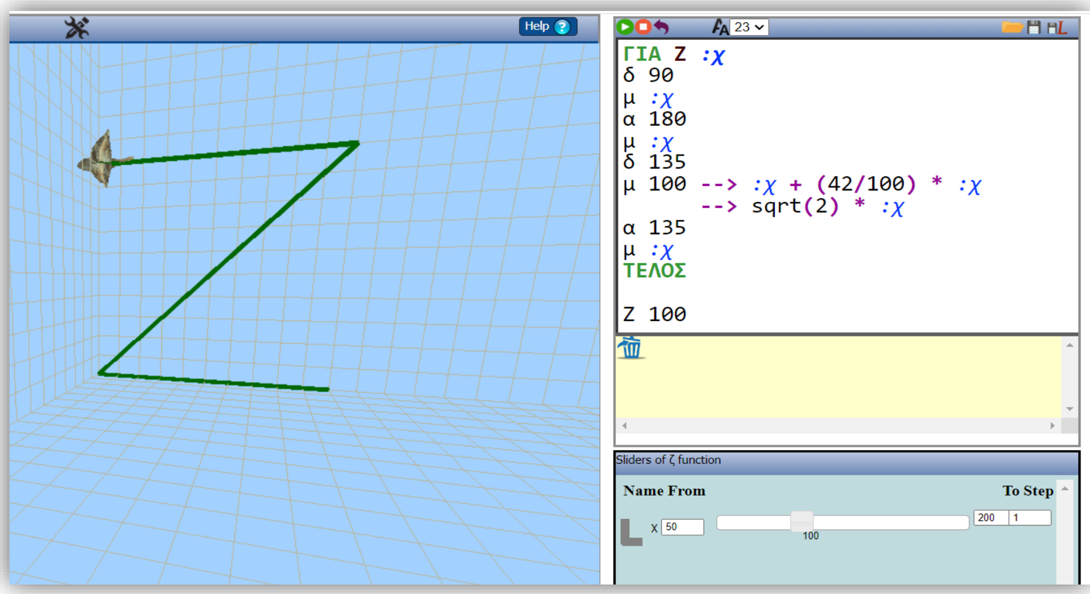
Στο τέλος της δραστηριότητας και της Φάσης Α συνολικά, η ερευνήτρια έκανε στους μαθητές την ίδια αναστοχαστική ερώτηση με πριν.

<u>Απόσπασμα 14</u>
<u>(Νοήματα στο πλαίσιο του Αναστοχασμού)</u>

Ε: «Ποιο θα επιλέγατε τελικά; Το προηγούμενο ή αυτό τώρα;»
Μ1: «Αυτό που κάναμε τώρα.»
Μ2: «Ναι αυτό.»
Ε: «Γιατί; Πριν επιλέξατε τις αναλογίες όταν σας ρώτησα στην προηγούμενη δραστηριότητα. Τι άλλαξε τώρα;»
Μ2: «Γιατί η αναλογία στο προηγούμενο έβγαινε και 41 και 42 και 43%...»
Μ1: «Δεν ήταν τελείως ακριβές, γιατί το βρίσκαμε με το μάτι και τους άξονες πίσω πιο πολύ.»
Μ2: «Ναι με το μάτι δοκιμάζοντας. Αυτό είναι πιο μαθηματικό.»
Μ1: «Πριν προτιμήσαμε τις αναλογίες γιατί μας ήρθαν στο μυαλό πιο εύκολα. Όμως το Πυθαγόρειο το βγάζει ακριβώς και ας έχει όσα δεκαδικά θέλει.»

M2: «Ναι αυτό. Με το Πυθαγόρειο δεν βλέπουμε καν τα δεκαδικά. Δεν τα χρειαζόμαστε.»

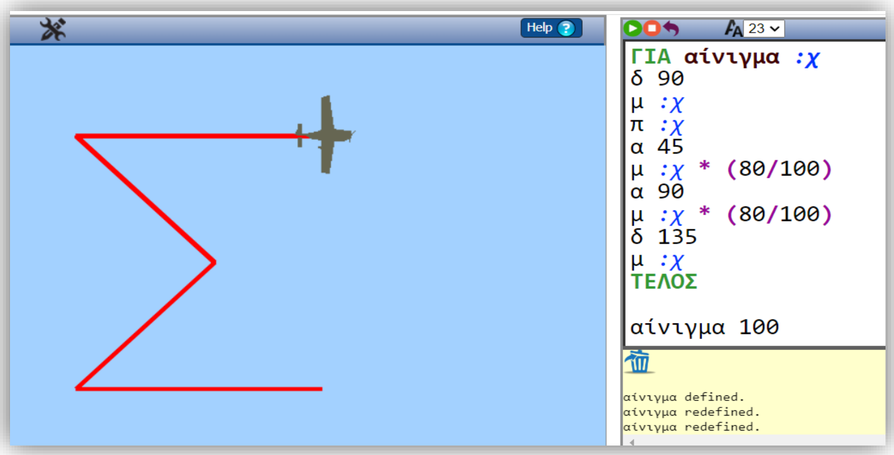
Εδώ, λοιπόν, οι μαθητές δείχνουν μία μεταστροφή στην αρχική τους προτίμηση. Οι δραστηριότητες που ακολούθησαν φαίνεται ότι τους έκαναν να σκεφτούν πιο μαθηματικά και να επιλέξουν να χρησιμοποιήσουν ιδιότητες με κριτήριο το αποτέλεσμά τους και όχι την ευκολία τους. Αυτό είναι ένα σημαντικό βήμα ως προς την κατανόηση των ιδιοτήτων που χρησιμοποίησαν και δείχνει ότι ανέπτυξαν παράλληλα την ικανότητα όχι απλής εφαρμογής μαθηματικών ιδιοτήτων, αλλά αιτιολογημένης χρήσης τους σε σκοπό τη μοντελοποίηση. Έτσι, οι μαθητές έδειξαν ότι τελικά χρησιμοποίησαν τα μαθηματικά ως εργαλείο για τις κατασκευές τους και ότι είχαν μία ανθεκτική κατανόηση ως προς τις ιδιότητες που η ερευνήτρια ενσωμάτωσε στο τελευταίο μοντέλο με το πλαίσιο του τετραγώνου γύρω από το γράμμα, κάτι που επέλεξαν και μόνοι τους να συνεχίσουν στο επόμενο ελεύθερο μοντέλο του Ζ.
Παρακάτω φαίνεται η διαδρομή που ακολούθησαν οι μαθητές κατά τη σταδιακή κατασκευή του μοντέλου του Ζ και όπου φαίνεται η διαδικασία γενίκευσης της σκέψης και μοντελοποίησης των μαθητών. Ξεκινώντας έθεσαν έναν σταθερό αριθμό για την πλάγια γραμμή, μέχρι να ολοκληρώσουν τις γωνίες και τις υπόλοιπες πλευρές που ήξεραν ότι είναι ίσες. Στη συνέχεια σκέφτηκαν να χρησιμοποιήσουν τις αναλογίες και τελικά εξέφρασαν την πλευρά με βάση το Πυθαγόρειο θεώρημα.



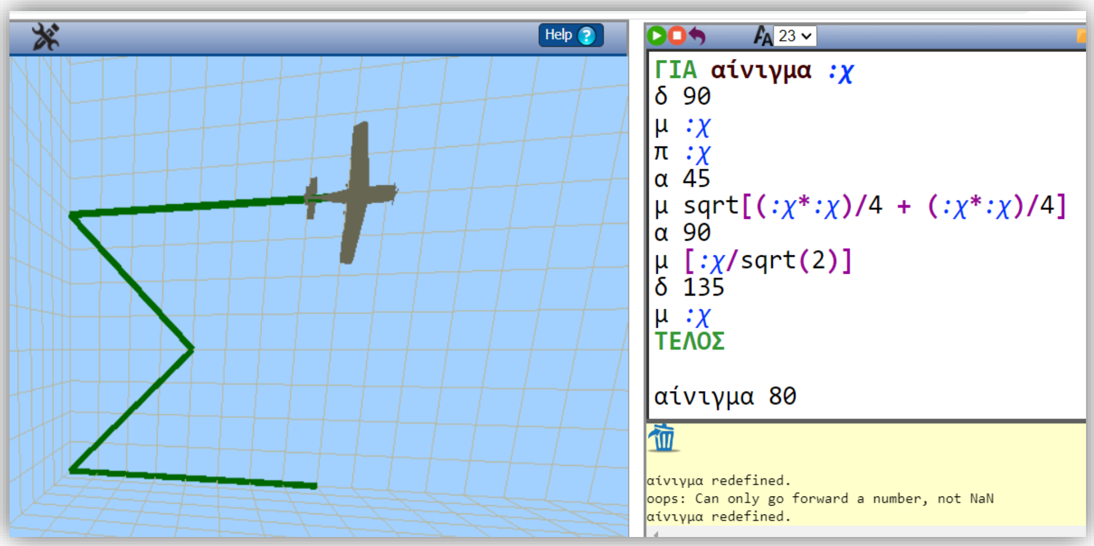
Εικόνα 13: Διαδικασία εξέλιξης Ζ σε γενικευμένο μοντέλο

4.2 Νοήματα που κατασκεύασαν οι μαθητές στα γράμματα Σ – Μ

<u>Exchange</u>
Αυτή ήταν η μοναδική ατομική εργασία, όπου οι μαθητές προέβλεψαν και διόρθωσαν μόνοι τους το γράμμα Σ και στη συνέχεια παρουσίασαν την εργασία τους στο συμμαθητή τους. Ο Μ1 χρησιμοποίησε αναλογίες και ο Μ2 το Πυθαγόρειο Θεώρημα, όπως φαίνεται:



Εικόνα 14: Προσπάθεια Μ1



Εικόνα 15: Προσπάθεια Μ2

<u>Απόσπασμα 15</u>

…

Μ2: «Κι εγώ έκανα την ίδια αρχή με σένα για να φτιαχτεί η κάτω πλευρά. Έκανα και αριστερά 45 και μετά χρησιμοποίησα Πυθαγόρειο σε αυτό το τρίγωνο.»
Μ1: «Πού είναι η ορθή;»
Μ2: «Εδώ (του δείχνει). Αυτή είναι η υποτείνουσα και αυτό το τρίγωνο.»
Μ1: «Μισό.»
Μ2: «Κοίτα. Αυτό το τρίγωνο που σχηματίζεται εδώ είναι ορθογώνιο αν φέρουμε μία νοητή κάθετη γραμμή για να κλείσει. Σωστά;»
Μ1: «Ναι.»
Μ2: «Και αν υποθέσουμε ότι το κλείνουμε μέσα σε ένα τετράγωνο, τότε αυτές οι δύο πλευρές είναι μισές του χ. Αφού όλο είναι χ, αυτές είναι χ/2. Φαντάσου ένα πιο μικρό τρίγωνο από το τρίγωνο που κάναμε στο Ν.»
Μ1: «Το έπιασα. Πάντως το δικό μου είναι πιο απλό.»

Μ2: «Ναι εντάξει το δικό μου είναι πιο σύνθετο σε κώδικα, αλλά είναι εύκολο. Απλά είναι πιο ακριβές νομίζω γιατί χρησιμοποίησα κάτι που ισχύει σε ορθογώνια τρίγωνα. Κατάλαβες; Όμως και το δικό σου μια χαρά βγαίνει.»
Μ1: «Ναι, εντάξει. Συμφωνώ. Αλλά αν δει κάποιος μαθητής το δικό μου θα το καταλάβει πιο γρήγορα. Αυτό εννοώ.»
Μ2: «Ναι, αλλά αν δει κάποιος μαθηματικός το δικό μου θα καταλάβει ότι ξέρω μαθηματικά.»

Ο Μ2 φαίνεται να έχει αναπτύξει μία πιο ανθεκτική κατανόηση ως προς τη χρήση του Πυθαγορείου μέσα στο μοντέλο που εμφανίζει ορθογώνια τρίγωνα και κατανοεί ότι αυτό που κάνει είναι σωστό γιατί βασίζεται σε μία ιδιότητα που ισχύει σε ορθογώνια τρίγωνα, όπως ο ίδιος αναφέρει και νιώθει σίγουρος για τον εαυτό του, δείχνοντας πράγματα για την ταυτότητά του ως προς τα μαθηματικά. Ο Μ1 αντίθετα επιλέγει να χρησιμοποιήσει τις αναλογίες και να δημιουργήσει ένα μοντέλο του Σ πιο απλό, όπως ο ίδιος υποστηρίζει. Φυσικά δεν υπάρχει λάθος και σωστό στην κατασκευή μοντέλων και στις δραστηριότητες. Ο σκοπός ήταν οι μαθητές να δουλέψουν μόνοι τους σε μία δραστηριότητα για να έχουν την ευκαιρία να παρουσιάσουν ο ένας στον άλλο το μοντέλο τους με τις ιδιότητες που χρησιμοποίησαν και να το στηρίξουν επιχειρηματολογώντας, ενώ ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι 2 δύο τελευταίες γραμμές όπου οι μαθητές δείχνουν την οπτική από την οποία βλέπει ο καθένας το μοντέλο του. Ο Μ1 το κατασκεύασε σαν «μαθητής», ενώ ο Μ2 σαν «μαθηματικός».

Explore - Explain

Τα αποσπάσματα που ακολουθούν είναι από τη λέξη ΝΗΣΙ. Οι μαθητές διόρθωσαν πολύ γρήγορα τη συγκεκριμένη λέξη, δείχνοντας ότι μέσα από τις προηγούμενες δραστηριότητες νοηματοδότησαν ανθεκτικά ως προς τις μαθηματικές ιδιότητες που κρύβονταν στα μοντέλα ή που έπρεπε να χρησιμοποιήσουν μόνοι τους με βάση τα στοιχεία που δίνονταν ή την προηγούμενη εμπειρία τους.

Απόσπασμα 16
(Ανθεκτική Κατανόηση & Χρήση Ιδιοτήτων)

Μ1: «Πάμε με το Ν. Νομίζω είναι έτοιμο, απλά πρέπει να διορθώσουμε το αριστερά.»
Μ2: «135, σωστά;»
Μ1: «Ναι εύκολο αυτό. Αφού έχουμε παράλληλες ευθείες.»
Μ2: «Ναι είναι εντός εναλλάξ το κάναμε και πριν.»
Μ1: «Οι πλευρές φαίνονται οκ. Την πλάγια την έχει κάνει με πυθαγόρειο, όπως και εμείς πριν.»
Μ2: «Ναι ρίζα 2 επί χ. Σωστό.»

Απόσπασμα 17
(Ανθεκτική Κατανόηση & Χρήση Ιδιοτήτων)

Μ2: «Πάμε στο Σ. Αυτό μου θυμίζει λίγο αυτό που έκανα εγώ. Για κάτσε να το δούμε.»
Μ1: «Ναι Πυθαγόρειο χρησιμοποιεί, αλλά το έχει κάνει με χ, ενώ πριν είπαμε ότι έχω τα μισά τρίγωνα. Άρα θέλει χ/2. Έτσι δεν είναι; Για δες το κι εσύ που το σκέφτηκες πρώτος στο προηγούμενο Σ.»

Τα συγκεκριμένα αποσπάσματα επιβεβαιώνουν την ισχυρή κατανόηση ως προς τη χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος που έχουν οι μαθητές για τις πλάγιες πλευρές (υποτείνουσα) των γενικευμένων μοντέλων των γραμμάτων Ν και Σ, αλλά και ως προς τις γωνίες τους. Μάλιστα και στα δύο γράμματα οι ίδιοι οι μαθητές αναφέρουν λέξεις όπως «πριν» ή «προηγούμενο», με τον Μ1 να αναγνωρίζει το σφάλμα που υπάρχει στο Σ σχετικά με το Πυθαγόρειο, αν και στην προηγούμενη δραστηριότητα ο ίδιος δεν το είχε χρησιμοποιήσει.

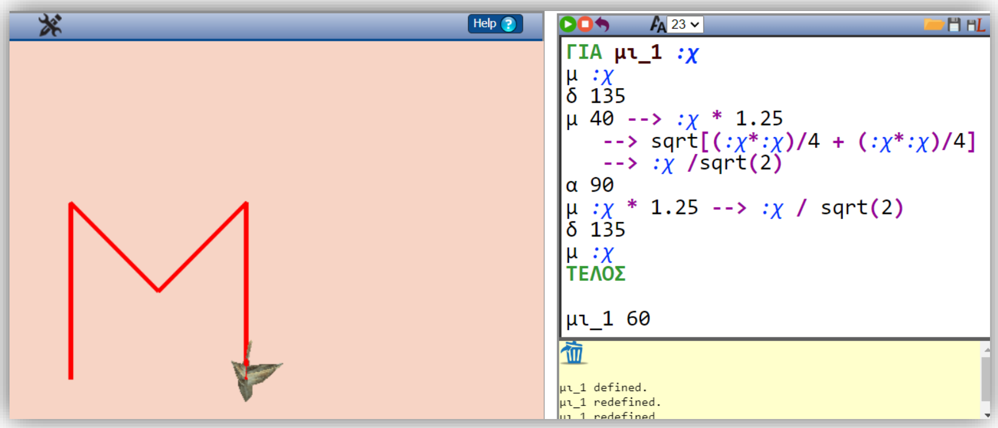
Explore - Explain

Τα αποσπάσματα που ακολουθούν είναι από τη λέξη ΑΜΜΟΣ. Η προσοχή της ερευνήτριας επικεντρώθηκε στα νοήματα που κατασκεύασαν οι μαθητές κυρίως γύρω από γράμματα Μ και Σ.

<u>Απόσπασμα 18</u>

<u>(Ανθεκτική Κατανόηση & Χρήση Ιδιοτήτων λόγω προηγούμενων δραστηριοτήτων)</u>

Μ1: «Λοιπόν, μπροστά χ και δεξιά 135 είναι εντάξει λογικά. Μπροστά 40 λέει μετά. Αυτό είναι λάθος.»
Μ2: «Ναι ισχύει. Πρέπει να είναι κάτι με χ για να αλλάζει. Αλλιώς όσο το κουνάμε, αυτή η πλευρά μένει 40 και το χαλάει.»
Μ1: «Α! Η άλλη πλευρά είναι χ επί 1,25. Αυτές πρέπει να είναι ίσες στο Μ. Σωστά; Άρα μπορούμε να αλλάξουμε το 40 και να βάλουμε χ επί 1,25. Δίνει αναλογία μόνο του.»
Μ2: «Για άλλαξε το να δούμε. Συμφωνώ ότι αυτές πρέπει να είναι ίσες, αλλά…»
Μ1: «Βγαίνει. Πώς σου φαίνεται;.»
Μ2: «Αν σβήσουμε την αναλογία και κάνουμε Πυθαγόρειο; Ποιος μας λέει ότι αυτή η αναλογία είναι σωστή; Ας μην το κάνουμε με το μάτι πάλι. Αφού έχουμε τρίγωνο.»
Μ1: «Λες; Οκ. Πυθαγόρειο.»
Μ2: «Αν φτιάξουμε το τέλειο Μ με πυθαγόρειο δεν θα μπορεί να μας αμφισβητήσει κανείς.»
Μ1: «Ας το φτιάξουμε στο χαρτί πρώτα. Να πηγαίνει μέχρι τη μέση εδώ. Συμφωνείς; Α! Αφού πηγαίνει μέχρι τη μέση, έχουμε πάλι τα μισά τρίγωνα. Ρε είναι ίδιο με το Σ που κάναμε πριν. χ/2 οι πλευρές και τέλος. Το’ χουμε.»



Εικόνα 16: Σταδιακή Πορεία Απασφαλμάτωσης Μ

Σε αυτό το κρίσιμο επεισόδιο είχαμε σημαντικά νοήματα των παιδιών τα οποία κατασκευάστηκαν στο γράμμα Μ. Αρχικά οι μαθητές εντόπισαν τη λανθασμένη σταθερή πλευρά (40) που δινόταν και έδειξαν πως κατανόησαν ότι δεν γίνεται να είναι σταθερή, αλλά πρέπει να έχει κάποια σχέση με το χ το οποίο αλλάζει. Στη συνέχεια, νοηματοδότησαν ως προς τις ίσες πλάγιες πλευρές του Μ και αρχικά επέλεξαν να βάλουν την ίδια αναλογία που δινόταν στη δεύτερη πλάγια πλευρά. Παρόλα αυτά, αν και εδώ θα μπορούσαν να είχαν σταματήσει, ο Μ2 αμφισβητεί τη χρήση αναλογίας στο συγκεκριμένο μοντέλο και προτείνει να αντικατασταθεί από το Πυθαγόρειο θεώρημα. Δηλώνει ότι δεν θέλει να το φτιάξει με το μάτι, εφόσον έχει ορθογώνια νοητά τρίγωνα και αυτό είναι μία ένδειξη ανθεκτικής κατανόησης του μαθητή ως προς την ικανότητα του να αποφασίζει με έναν μαθηματικό τρόπο σκέψης. Μάλιστα δείχνει ότι νιώθει σίγουρος όταν χρησιμοποιεί τη μαθηματική ιδιότητα του Πυθαγορείου για το μήκος της υποτείνουσας, καθώς αναφέρει ότι έτσι δεν θα μπορεί να τους αμφισβητήσει κανείς.
Εδώ, η ερευνήτρια θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι εμφανίζονται αντίστοιχα το bridgE και το Generalizing-Synthesising, καθώς ο μαθητής όχι απλά κάνει σύνδεση του προγραμματιστικού περιβάλλοντος με τα «επίσημα» μαθηματικά, αλλά δείχνει να γενικεύει την έννοια του Πυθαγορείου και να επιλέγει συνειδητά να την εφαρμόσει σε αυτό το μοντέλο, το οποίο μάλιστα εμπεριείχε ήδη μία άλλη έννοια, αυτή της αναλογίας. Ο μαθητής δηλαδή, νιώθει άνετα να αφήσει πίσω του ακόμη και το εργαλείο, να μην μείνει δηλαδή στην καλή απεικόνιση του Μ που του έδωσε το εργαλείο με τη χρήση της αναλογίας και να χρησιμοποιήσει το Πυθαγόρειο το οποίο είναι κάτι σίγουρο για αυτόν στα ορθογώνια τρίγωνα.
Αντίστοιχα, ο Μ1 δείχνει να συμφωνεί με τον συμμαθητή του και μάλιστα αναγνωρίζει ότι το Μ μοιάζει με το Σ που κατασκεύασαν νωρίτερα, αφού ακολουθούν τις ίδιες ιδιότητες και χρησιμοποιούν ορθογώνια τρίγωνα με πλευρές χ/2, δείχνοντας με αυτό τον τρόπο την ανθεκτική κατανόηση του ως προς τις ιδιότητες που μοιράζονται τα μοντέλα των 2 αυτών γραμμάτων.
Στην παραπάνω εικόνα απεικονίζονται οι σταδιακές αλλαγές των παιδιών στον κώδικα. Για την αποφυγή παρανόησης του αναγνώστη, θα ήταν σκόπιμο να αναφερθεί ότι η σχέση sqrt[(:χ*:χ)/4 + (:χ*:χ)/4] και η σχέση :χ /sqrt(2) είναι ισοδύναμες. Απλά ο Μ2 συνέχισε να κάνει πράξεις στο πρόχειρο και προχώρησε τη σχέση αλγεβρικά, κάτι που μοιράστηκε στη συνέχεια με το συμμαθητή του. Το αποτέλεσμα της εκτέλεσης του κώδικα είναι το ίδιο.

Explore – Explain

Το απόσπασμα που ακολουθεί αντιστοιχεί στο γράμμα Σ της λέξης ΑΜΜΟΣ.

<u>Απόσπασμα 19</u>
<u>(Ανθεκτική Κατανόηση & Χρήση Ιδιοτήτων)</u>

Μ2: «Λέει tan. Τι είναι το tan; Για να δούμε στον πίνακα. Α, έχει εφαπτομένη μέσα.»
Μ1: «Ας ακολουθήσουμε μία-μία τις εντολές για αρχή.»
Μ2: «Ναι έτσι κι αλλιώς το Σ το έχουμε ξανακάνει πριν. Λοιπόν, τις γωνίες τις βλέπω καλές.»
Μ1: «Ναι δεν χαλάνε. Και στρίβει όπως το κάναμε κι εμείς πριν. Δηλαδή έχω 45 μοίρες. Είναι σε τετράγωνο.»
Μ2: «Άρα η διαφορά είναι στην εφαπτομένη. Εμείς κάναμε πυθαγόρειο πριν στο μικρό ορθογώνιο τρίγωνο. Άρα ας δούμε την εφαπτομένη σε αυτό το ορθογώνιο.»

M1: «Ωραία ναι. Άρα αυτή είναι 45 μοίρες και η κάτω πλευρά είναι χ. Συμφωνείς; Άρα έχουμε μία πλευρά και μία γωνία.»,
M2: «Κάτσε κάτσε. Είμαστε σε αυτό το τρίγωνο. Η εφαπτομένη δίνει απέναντι και προσκείμενη. Εμείς θέλουμε υποτείνουσα. Το πουλί πάει μπροστά την υποτείνουσα.»
M1: «Άρα η εφαπτομένη είναι άχρηστη τότε. Μισό.»
M2: «Α! Ναι! Άρα αλλάζουμε την εφαπτομένη με ημίτονο ή συνημίτονο που έχει μέσα υποτείνουσα.»
M1: «Σωστά. Άλλαξε το και εκτέλεσε το.»
M2: «Τέλειο!»

Όσο οι δραστηριότητες προχωρούσαν και τα μισοψημένα γράμματα εμφανίζονταν στους μαθητές ξανά με διαφορετικό τρόπο κάθε φορά, οι ίδιοι δείχνουν όπως φαίνονται πιο σίγουροι για την ικανότητά τους να τα διορθώσουν και πλέον επικεντρώνονται πιο γρήγορα στις μαθηματικές ιδιότητες που υπάρχουν μέσα σε αυτά, όπως φαίνεται από τον τρόπο που συνομιλούν. Πλέον χρησιμοποιούν μαθηματικές ιδιότητες και έννοιες και τις εκφράζουν ρητά, εξηγώντας αναλυτικά τι βλέπουν στο εργαλείο και τι φαντάζονται νοητικά. Στο συγκεκριμένο μισοψημένο μοντέλο του Σ εντόπισαν γρήγορα ότι η διαφορά έγκειται στην εφαπτομένη, αν και δεν την είχαν χρησιμοποιήσει νωρίτερα, και ξεκίνησαν να εξερευνούν τις εντολές και το ορθογώνιο τρίγωνο. Γνώριζαν τις πλευρές με τις οποίες ορίζεται η εφαπτομένη και έτσι κατέληξαν ότι αυτή δεν τους χρειάζεται. Στην ουσία έδειξαν να ακολουθούν τις εντολές και την πορεία του πουλιού και να αναγνωρίζουν ότι η πορεία του πουλιού διαγράφει την πορεία της υποτείνουσας του νοητού τριγώνου, ενώ ταυτόχρονα φάνηκαν ικανοί να χρησιμοποιήσουν το ημίτονο ή το συνημίτονο για να εκφράσουν την υποτείνουσα με τη βοήθεια των σωστών τριγωνομετρικών αριθμών.

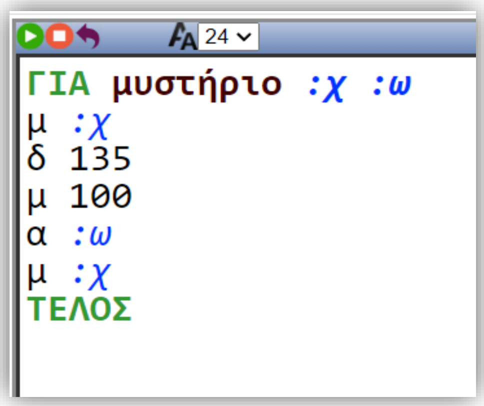
Στην παραπάνω ανάλυση, η ερευνήτρια προσπάθησε να εμφανίσει τα αποτελέσματα με μία γραμμικότητα, καθώς με αυτό τον τρόπο θα γινόταν κατανοητή η ικανότητα της ανθεκτικής κατανόησης που ανέπτυξαν οι μαθητές σταδιακά, μέσα από τα μοντέλα των γραμμάτων που χειρίζονταν. Σε διαφορετική περίπτωση, τα νοήματα που έχτιζαν οι μαθητές σταδιακά μετά από κάθε μοντέλο δεν θα γίνονταν κατανοητά από τον αναγνώστη.

4.3 Νοήματα πάνω στην έννοια της μεταβλητής

Σε αυτή την παράγραφο η ερευνήτρια θα αναλύσει τα νοήματα που κατασκεύασαν οι μαθητές γύρω από τις διαφορετικές χρήσης της μεταβλητής. Όπως, έχει αναφερθεί ήδη, οι μαθητές συναντούν κατά κύριο λόγο στο σχολείο το γράμμα ως άγνωστο με αποτέλεσμα να μην είναι εύκολο για αυτούς να μεταβούν σε κάποια άλλη αναπαράσταση μέσα από τα στατικά μέσα και τις ασκήσεις του βιβλίου, γεγονός που βάζει φρένο και ως προς την διαδικασία της γενίκευσης. Το προγραμματιστικό εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε έδειξε ότι βοήθησε προς αυτή την κατεύθυνση, όπως θα φανεί και παρακάτω, τόσο μέσω του κώδικα, όσο και μέσω των μεταβολέων που διαθέτει και δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να χειρίζονται δυναμικά τα μοντέλα που κατασκευάζουν οι ίδιοι.
Ταυτόχρονα, σε κάθε κρίσιμο συμβάν θα αναλύεται και η φάση του μοντέλου των 5Es που αντιστοιχεί, καθώς αυτή η αντιστοίχιση θα βοηθήσει και σε επόμενη ανάλυση που ακολουθεί.

Envisage – Explore – Explain

Στη 2η Δραστηριότητα της Φάσης Α, δόθηκε στους μαθητές ο κώδικας που φαίνεται παρακάτω και ζητήθηκε από αυτούς να προβλέψουν αυτό που κατασκευάζει.



Εικόνα 17: Κώδικας μυστήριο για πρόβλεψη

Απόσπασμα 20

Μ2: «Εγώ νομίζω ότι βγαίνει Ν.»
Μ1: «Κι εγώ αυτό νομίζω. Βασικά περίμενε.»
Μ2: «Λοιπόν, εδώ πάει μπροστά χ. Πες ότι είναι τόσο το χ. Αριστερά εντάξει. Μπροστά 100. Δεν πάει τόσο πολύ μπροστά.»
Μ1: «Δεν σου λέει πόσο πάει στην αρχή. Αυτό είναι λιγότερο.»
Μ2: «Πού το ξέρεις αφού δεν σου λέει.»
Μ1: «Να προβλέψουμε θέλει.»
Μ2: «Άρα δεν ξέρουμε αν είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από το 100. Περίμενε. Ξέρεις τι θα βγει; Σαν αυτό που κάναμε εμείς στην αρχή. Αυτά τα χ μπορεί να είναι όσο θέλουμε.»

Σε αυτή τη δραστηριότητα της πρόβλεψης, οι μαθητές στην αρχή συμφωνούν ότι ο κώδικας που τους δόθηκε, πιθανότατα κατασκευάζει το γράμμα Ν. Το κρίσιμο σημείο στον παραπάνω διάλογο, όμως, είναι η νοηματοδότηση των παιδιών ως προς το ρόλο της μεταβλητής. Στην αρχή και οι δύο μαθητές υπέθεσαν σιωπηρά μέσα στο μυαλό τους πως το χ είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός. Μάλιστα, όπως φαίνεται, ο Μ1 υπέθεσε ότι το γράμμα χ είναι κάποιος αριθμός μικρότερος του 100, ενώ ο Μ2 υπέθεσε ότι είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος του 100. Έτσι για τον μεν δεν δημιουργείται κάποιο πρόβλημα στην κατασκευή του Ν όπως την φαντάζεται, ενώ για τον δε δημιουργείται το πρόβλημα ότι η πλάγια γραμμή του Ν (δεδομένου ότι η πρόβλεψή του σχηματίζει το Ν) είναι «κοντή» και δεν φτάνει κάτω (αυτό εννοεί ο Μ2 λέγοντας ότι το σπουργίτι δεν πάει τόσο μπροστά). Έτσι, λοιπόν, και οι δύο μαθητές φαίνεται στην αρχή να χρησιμοποιούν το γράμμα χ ως άγνωστο, δηλαδή ως έναν συγκεκριμένο αριθμό που δεν τον ξέρουν αυτή τη δεδομένη στιγμή. Μέσα, όμως, από τη σύντομη αυτή συζήτησή τους και εφόσον γίνεται φανερό ότι ο καθένας έχει υποθέσει κάτι διαφορετικό για αυτό το γράμμα χ, ο Μ2 φαίνεται να νοηματοδοτεί με βάση την προηγούμενη κατασκευή τους με το γράμμα Ν (όπου κατασκεύασαν μόνοι τους ένα γενικευμένο μοντέλο και εισήγαγαν γράμμα στον κώδικα) και αλλάζει το ρόλο του γράμματος από άγνωστο σε γενικευμένο αριθμό. Έτσι, λοιπόν, η προηγούμενη κατασκευή του Ν ήταν η αφορμή για να κατανοήσει ο μαθητής ότι το χ δεν αναφέρεται σε κάποιον συγκεκριμένο αριθμό, αλλά χρησιμοποιείται μέσα στο μοντέλο όπως ακριβώς τον χρησιμοποίησαν και οι ίδιοι νωρίτερα, ως ένα χ που μπορεί να πάρει διαφορετικές τιμές.

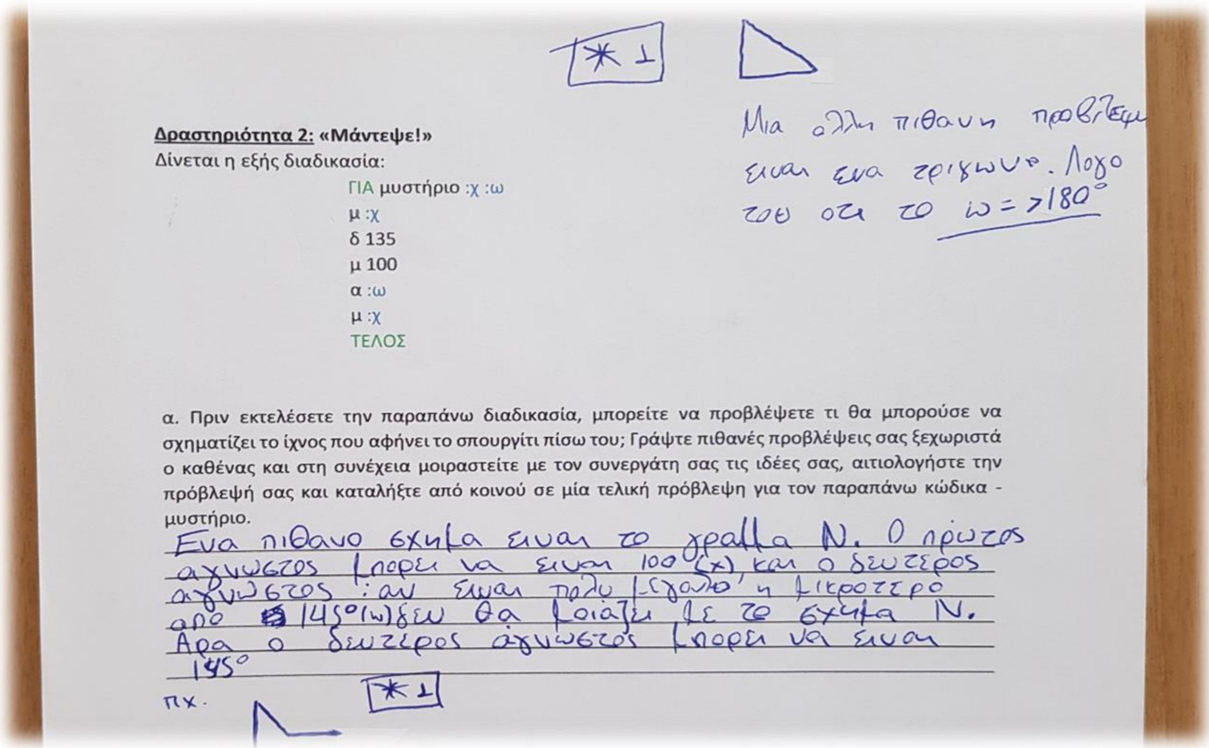
Exchange

<u>Απόσπασμα 21</u>

Μ2: «Εδώ στο αριστερά το έχει ω, άρα πάλι στο έχει να αλλάζει.»
Μ1: «Για αυτό λέει να προβλέψουμε τι μπορεί να βγει.»
…
Μ2: «Οπότε ένα πιθανό σχήμα είναι το γράμμα Ν».
Μ1: «Ναι ας καταλήξουμε σε αυτό. Ο πρώτος άγνωστος (εννοεί το γράμμα χ) είναι…»
Μ2: «Ένας οποιοσδήποτε αριθμός.»
Μ1: «Όχι ένας οποιοσδήποτε.»
Μ2: «Οποιοσδήποτε δεν μπορεί να είναι το χ;»
Μ1: «Ναι, αλλά αν είναι φουλ μικρό ή φουλ μεγάλο δεν θα φαίνεται μετά σαν Ν. Να υποθέσουμε ότι ο πρώτος άγνωστος είναι 80 ή 100.»
Μ2: «Γιατί να πούμε πόσο είναι;»
Μ1: «Ωραία ας πούμε ότι ο πρώτος άγνωστος είναι χ και γράψε σε παρένθεση 100 και ο δεύτερος άγνωστος (εννοεί το γράμμα ω)…»
Μ2: «Οποιοσδήποτε αριθμός.»
Μ1: «Τι οποιοσδήποτε ρε συ πάλι; Αφού είναι αριστερά!»
Μ2: «Μα ο άγνωστος, οποιοσδήποτε άγνωστος εδώ μπορεί να είναι ένας οποιοδήποτε αριθμός. Αφού το κουνάμε κάτω και του βάζουμε διάφορες τιμές. Δεν θυμάσαι πριν;»
Μ1: «Ναι, αλλά στο σχήμα δεν μπορεί να στρίψει οποιοδήποτε αριθμό. Αν είναι λιγότερο από 135 θα φύγει και αν είναι πάνω από 180 το αριστερά, θα κάνει τρίγωνο. Όχι Ν.»
Μ2: «Άλλο αυτό. Εδώ συμφωνώ ότι πρέπει το ω να είναι ακριβώς 135 για να βγει Ν. Αυτό το ξέρουμε από πριν με τις εντός εναλλάξ.»

Από το συγκεκριμένο κρίσιμο επεισόδιο, φαίνονται πως ο Μ2 συνεχίζει να έχει στο μυαλό του τα γράμματα σαν γενικευμένους αριθμούς και δεν νιώθει την ανάγκη να περιορίσει το χ («Γιατί να πούμε πόσο είναι;»), ενώ ο Μ1 προσπαθεί να τον περιορίσει ή να τον συγκεκριμενοποιήσει δίνοντας του τιμές όπως το 80 ή το 100 και αιτιολογώντας την άποψή του λέγοντας πως διαφορετικά δεν θα μοιάζει με Ν. Στην ουσία, και οι δύο μαθητές δεν λένε κάτι λάθος εδώ, αλλά συζητάνε υπό άλλη οπτική γωνία ο καθένας. Ο Μ2 αναφέρεται γενικά στα γράμματα με βάση τη νοηματοδότηση που έκανε σε σχέση με την προηγούμενη εμπειρία τους, ενώ ο Μ1 μιλάει για το συγκεκριμένο μοντέλο όπου επειδή η πλάγια γραμμή είναι 100 προσπαθεί να περιορίσει το χ σε τιμές κάτω από 100 για να βγαίνει Ν. Στην ουσία, αυτό που έκαναν οι μαθητές είναι – αν και είχαν ήδη συμφωνήσει στην πρόβλεψή τους – να συνεχίσουν να εξερευνούν τον κώδικα σε βάθος και να εμφανίζουν το γράμμα είτε σαν γενικευμένο αριθμό, είτε σαν παράμετρο με συγκεκριμένα όρια τιμών. Την πρώτη προσέγγιση προώθησε τόσο ο προηγούμενος κώδικας των παιδιών, όσο και το ίδιο το εργαλείο, καθώς ο Μ2 αναφέρει χαρακτηριστικά ότι αν κουνάνε τους ολισθητές, τότε οι τιμές του χ αλλάζουν. Τη δεύτερη προσέγγιση είχε ο Μ1 ο οποίος μάλιστα προέβλεψε το τι θα κάνει το δόμημα αν στρίψει κάτω από 135 μοίρες ή πάνω από 180. Αντίστοιχα, ο Μ2 αν και θεωρεί τα γράμματα ως γενικευμένους αριθμούς στη

συζήτηση που κάνει με το συμμαθητή του, όταν συγκεκριμενοποιεί ότι αναφέρεται στο Ν, τότε συμφωνεί με το συμμαθητή του και μπορούμε να ισχυριστούμε ότι εμφανίζει μία ανθεκτική κατανόηση ως προς τις ιδιότητες των γωνιών του Ν («ακριβώς 135 – εντός εναλλάξ»), εφόσον πάλι αναφέρει ότι το έκαναν και νωρίτερα, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες μαθηματικές ιδιότητες.
Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να ανήκει σχεδιαστικά στην φάση του “Envisage”, καθώς οι μαθητές καλούνται να προβλέψουν την γραφική αναπαράσταση του κώδικα, όμως στην ουσία οι μαθητές περνάνε και μέσα από τη φάση του “Exchange”, όπως φαίνεται, εφόσον επιχειρηματολογούν πάνω στις ιδέες του ο καθένας, αναστοχάζονται και τροποποιούν τις ιδέες τους, όπως έκανε ο Μ2, «χτίζοντας» πάνω στην ιδέα του συμμαθητή του για τη μεταβλητή που αναφέρεται στη γωνία στο συγκεκριμένο μοντέλο.
Αυτό που πυροδότησε τη συζήτηση αυτή, ήταν ένα κρίσιμο δεδομένο το οποίο απέκρυψε η ερευνήτρια από τον κώδικα και αυτό ήταν οι τιμές εκτέλεσης του Ν στο τέλος του κώδικα, στοιχείο το οποίο αναφέρεται και στην ανάλυση των δραστηριοτήτων. Αν η σχεδιάστρια είχε δώσει και τις τιμές εκτέλεσης μαζί με το μισοψημένο μοντέλο, τότε οι μαθητές δεν θα είχαν κάνει όλες αυτές τις διαφορετικές υποθέσεις, δεν θα είχαν διαφωνήσει μεταξύ τους και δεν θα είχαν προσπαθήσει να υπερασπιστούν την άποψή τους και να την αιτιολογήσουν. Έτσι, εδώ εμφανίστηκε έντονα και η φάση του “**Exchange”** από το μοντέλο των 5Es, κάτι που δεν είχε συμπεριλάβει υποθετικά η ερευνήτρια στο σχεδιασμό και είχε μείνει στη φάση του “Explain”.



Εικόνα 18: Απαντήσεις μαθητών στην πρόβλεψη

Explore – Explain

Το κρίσιμο συμβάν που ακολουθεί αναφέρεται στην 3η Δραστηριότητα της Φάσης Α, όπου δίνεται η γραφική αναπαράσταση ενός γενικευμένου μοντέλου του Ν και οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν τον κώδικα που το κατασκευάζει.

<u>Απόσπασμα 22</u>

Μ1: «Άρα η απέναντι είναι 40 και αυτή (η πλάγια εννοεί) είναι χ.»
Ε: «Πάντα θα είναι αυτή 40;»
Μ2: «Όχι αλλά ας λύσουμε πρώτα για 40 και το αλλάζουμε μετά.»
(λύνουν σε χαρτί μαζί)
…
Μ2: «Κάνουμε και χιαστί, Άρα το χ είναι 40 προς ημ45.»
Ε: «Άρα τι βρήκατε τώρα;»
Μ2: «Ότι το χ είναι 40/ημ45.»
Ε: «Ποιο είναι το χ;»
Μ1: «Αυτή η πλάγια. Η υποτείνουσα δηλαδή είναι 40/ημ45.»
Μ2: «Όπα. Μισό. Γιατί… Περίμενε. Μπερδέψαμε τα χ ρε!»
Ε: «Τι εννοείς;»
Μ2: «Βάλαμε στο χαρτί χ για να το λύσουμε, με το χ να είναι η υποτείνουσα. Δηλαδή το μπροστά μας. Άλλο αυτό το χ.»
Μ1: «Ακόμα δεν κατάλαβα.»
Μ2: «Κοίτα. Ρε στο σχολείο ό,τι ψάχνουμε το βάζουμε χ. Σωστά; Όμως εδώ χ είναι η απέναντι πλευρά, αυτή του τετραγώνου, και όχι η υποτείνουσα που βάλαμε εμείς χ.»
Μ1: «Ωχ! Ναι μισό… Όντως βάλαμε χ σε άλλη πλευρά. Και επίσης το 40 είναι χ κανονικά στον κώδικα. Ό,τι να΄ ναι κάναμε. Το έπιασα τώρα! Πάμε πάλι.»

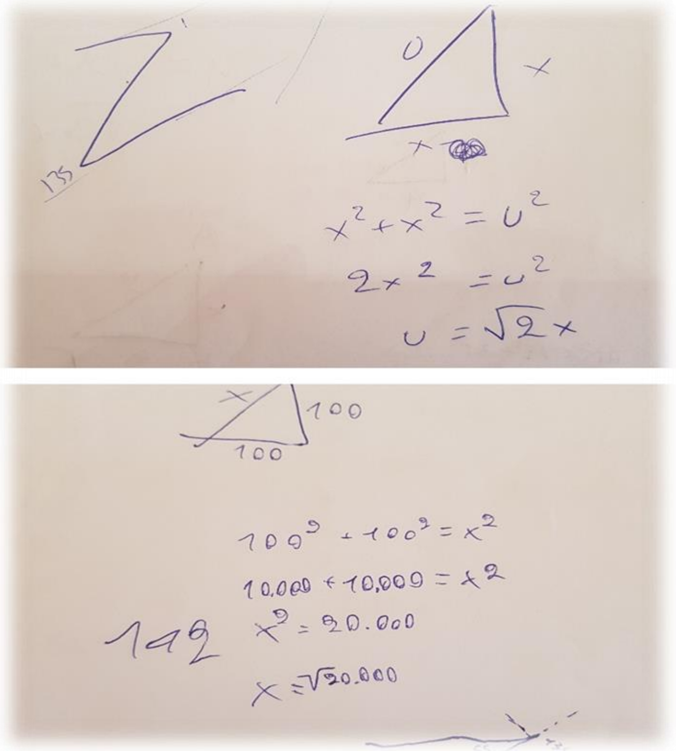
Το συγκεκριμένο απόσπασμα ήταν αρκετά ενδιαφέρον, καθώς ο Μ2 δείχνει να συνειδητοποιεί όχι απλά το λάθος που έκαναν στον κώδικα, αλλά και το λάθος που όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο ίδιος κάνουν στην σχολική τους καθημερινότητα και επιβεβαιώνει τη χρήση του γράμματος καθολικά ως άγνωστο. Οι μαθητές έθεσαν ως χ την απέναντι κάθετη πλευρά του τριγώνου, όπως ήταν το σωστό καθώς είχαν παρατηρήσει ότι το γράμμα βρίσκεται μέσα σε ένα τετράγωνο με πλευρές χ, οι οποίες μεταβάλλονται από τους μεταβολείς-ολισθητές, αλλά έθεσαν λανθασμένα χ και την υποτείνουσα, καθώς όπως ανέφερε ο Μ2 την έψαχναν. Έτσι, η αναστοχαστική ερώτηση της ερευνήτριας «Ποιο είναι το χ;» σε συνδυασμό με τη συμβολική γλώσσα προγραμματισμού και την εντολή «μπροστά» έδωσαν το έναυσμα για να νοηματοδοτήσει ο μαθητής ως προς αυτόν τον διαχωρισμό της χρήσης του γράμματος χ, να κατανοήσει το λάθος του και στη συνέχεια να το εξηγήσει και στο συμμαθητή του. Αντίστοιχα, ο Μ1 κατάλαβε και αυτός την παρανόηση που δημιουργήθηκε και νοηματοδότησε ως προς τον αριθμό 40 που έβλεπαν για τιμή εκτέλεσης σε σύγκριση με τον γενικευμένο αριθμό χ.
Επιπρόσθετα, σύμφωνα με τα παραπάνω, η ερευνήτρια θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι εμφανίστηκε και η φάση **bridgE** (η οποία δεν υπήρχε αρχικά στο σχεδιασμό της δραστηριότητας), καθώς οι μαθητές έκαναν σύνδεση μεταξύ του προγραμματιστικού περιβάλλοντος του MaLT2 και των μαθηματικών μέσα από μία αναπλαισίωση των ιδεών τους πάνω στην έννοια και τη χρήση της μεταβλητής.

Explore – Explain
Το κρίσιμο επεισόδιο που ακολουθεί προέρχεται από την κατασκευή του γενικευμένου μοντέλου του γράμματος Ζ που ζητείται από τους μαθητές στην τελευταία δραστηριότητα της Φάσης Α.

Απόσπασμα 23

(το προσπαθεί ο καθένας στο χαρτί του για 1-2 λεπτά)
Μ1: «Εγώ δοκίμασα ένα πυθαγόρειο με πλευρά το 100 που θα βάλουμε σαν τιμή κάτω.»
Μ2: «Εγώ δεν έβαλα αριθμό. Έκανα $χ^2 + χ^2$ = αυτή στη δευτέρα (δείχνει την υποτείνουσα).»
Ε: «Τι διαφορετικό έκανε ο καθένας;»
Μ1: «Και οι δύο πυθαγόρειο κάναμε, αλλά… Το δικό σου είναι σωστό Μ2, γιατί η πλευρά του είναι χ. Το δικό σου θα βάλουμε. Εγώ για κάποιο λόγο του έβαλα τον αριθμό που θα ξεκινούσε. Λάθος μου.»

Εδώ ο Μ1 δείχνει δυσκολία ως προς τη χρήση του Πυθαγορείου σε γενικευμένο μοντέλο, κάτι που είναι αναμενόμενο καθώς είναι η πρώτη φορά που το συναντάνε και έτσι χρησιμοποιεί την τιμή εκτέλεσης του μοντέλου που είναι το 100. Αντίθετα, ο Μ2 εμφανίζεται να έχει κατανοήσει σε υψηλότερο βαθμό τη γενίκευση του μοντέλου και έτσι μεταφέρει το νοητό τρίγωνο του Ζ δίπλα, όπως φαίνεται από το πρόχειρο του παρακάτω, και εφαρμόζει το Πυθαγόρειο θέτοντας χ τις κάθετες πλευρές και υ την υποτείνουσα, χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα και την έννοια του γενικευμένου αριθμού ως προς το χ και την έννοια της ετικέτας ως προς το υ, την υποτείνουσα δηλαδή. Μάλιστα όταν έγραφε, ανέφερε φωναχτά «Αυτή είναι υ, όχι χ.», θέλοντας να μην επαναλάβει το λάθος που εμφανίστηκε στο προηγούμενο κρίσιμο επεισόδιο, όπου οι μαθητές έθεσαν χ και τις κάθετες πλευρές, αλλά και την υποτείνουσα ως άγνωστη, γεγονός που δείχνει τα νοήματα και την ανθεκτική κατανόηση που έχτισε ο μαθητής πάνω σε αυτή τη χρήση της μεταβλητής. Μετά το τέλος των προσπαθειών τους, οι μαθητές μοιράστηκαν τις προσπάθειές τους και ο Μ1 συνειδητοποίησε αμέσως τη διαφορά τους. Κατανόησε ότι έχουν κάνει και οι δύο Πυθαγόρειο, αλλά με διαφορετικές πλευρές και τροποποίησε τη σκέψη του, «χτίζοντας» πάνω στο μοντέλο του συμμαθητή του και αναγνωρίζοντας το λάθος του.



Εικόνα 19: Στιγμιότυπα από προσπάθειες παιδιών

Explore
Το απόσπασμα που ακολουθεί αναφέρεται στη διόρθωση του γράμματος Ν μέσα στη λέξη ΝΗΣΙ. Οι μαθητές διόρθωσαν ήδη πολύ γρήγορα τη γωνία που τους προκαλούσε πρόβλημα και έτσι πίστεψαν πώς έχουν τελειώσει προχωρώντας στο επόμενο γράμμα της λέξης. Όταν, όμως, κάποια στιγμή εκτέλεσαν τον κώδικα, διαπίστωσαν ότι το Ν αλλοιώνεται ξανά.

<u>Απόσπασμα 24</u>

Μ2: «Για εκτέλεσε το μία. Πω… Γιατί χαλάει το Ν; Αφού το φτιάξαμε!»
Μ1: «Και γιατί εμφανίστηκαν 2 μπάρες; (εννοεί τους μεταβολείς)»
Μ2: «Για κούνα τους να δούμε τι κάνουν, γιατί τόση ώρα τα διορθώνουμε μόνοι μας και δεν το τσεκάρουμε στο πρόγραμμα.»
Μ1: «Ρε έχει ψ και εδώ χ. Κοίτα, όταν κουνάς το ψ, αυτή η πλευρά λειτουργεί με το ψ και για να αλλάξω αυτή πρέπει να το κάνω με το κάτω (τον άλλο μεταβολέα εννοεί). Αν όπου ψ, τα βάλουμε όλα χ πειράζει;»
Μ2: «Όχι, αυτό πρέπει να κάνουμε. Δεν γίνεται να πηγαίνει μπροστά η μία πλευρά χ και η άλλη ψ. Αφού αυτές θέλουμε να είναι ίσες στο Ν. Κοίτα παγίδα που είχε!»

Όταν οι μαθητές διόρθωσαν τον κώδικα του Ν, σίγουροι για τον εαυτό τους και τις ιδιότητες που πρέπει να χρησιμοποιήσουν, έδωσαν σημασία στις γωνίες και στις πλευρές του και δεν πρόσεξαν ότι μέσα στον κώδικα υπήρχαν 2 γράμματα, χ και ψ. Ο πειραματισμός και η εξερεύνηση με το εργαλείο ήταν αυτά που τους βοήθησαν να νοηματοδοτήσουν ως προς το τι αναπαριστά το καθένα, ενώ η εμπειρία τους και η ανθεκτική κατανόηση που πέτυχαν μέσα από τα διαδοχικά μοντέλα του Ν που κατασκεύασαν και διόρθωσαν στην προηγούμενη φάση, τους έκαναν να κατανοήσουν πολύ γρήγορα ότι το ένα γράμμα είναι άχρηστο μέσα στον κώδικα, βασιζόμενοι στην ισότητα των παράλληλων πλευρών του Ν.

4.4 Σύνδεση νοημάτων στο Πλαίσιο Διδασκαλίας για Ανθεκτική Κατανόηση

Το πλαίσιο Διδασκαλίας για Ανθεκτική Κατανόηση δεν αναφέρεται στη χρήση ψηφιακών εργαλείων κατά τη μαθησιακή διαδικασία. Η ερευνήτρια έκανε μία προσπάθεια μέσα από την παρούσα εργασία να συνδυάσει το μοντέλο των 5Es και του UDGS (η σύνδεση του UDGS υπάρχει στον Πίνακα 1 στην παράγραφο 4.3.1) τα οποία αναφέρονται σε προγραμματιστικά μέσα με το πλαίσιο Διδασκαλίας για Ανθεκτική Κατανόηση και να αναδείξει με αυτό τον τρόπο την αξία της διδασκαλίας των μαθηματικών μέσω του προγραμματισμού, γεγονός που τα δεδομένα της διδακτικής παρέμβασης που παρουσιάστηκαν το επιβεβαιώνουν.
Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων σύμφωνα με τις φάσεις **E**xplore-**E**xplain-**E**nvisage-**E**xchange-bridg**E** εμφανίζουν υποσχόμενα αποτελέσματα στη δημιουργία ενός περιβάλλοντος ανθεκτικής κατανόησης για τους μαθητές και η αντιστοίχιση των φάσεων αυτών με τις 5 διαστάσεις του **TRU** εμφανίζονται παρακάτω. Προφανώς δεν υπάρχει μία προς μία αυστηρή αντιστοιχία των μεν με τις δε, καθώς σε πολλά σημεία της μαθησιακής διαδικασίας οι διαστάσεις αλληλοκαλύπτονται σε κάποιο βαθμό και οι φάσεις συνδυάζονται μεταξύ τους. Το πλαίσιο TRU παρέχει διαστάσεις οι οποίες έχουν αξία για την διδασκαλία των μαθηματικών και είναι έτσι διαμορφωμένο ώστε αυτές οι 5 διαστάσεις να είναι εύκολα κατανοητές και ανοιχτές από τον εκπαιδευτικό ώστε ο ίδιος να μπορεί να

σχεδιάσει πάνω τους ένα μάθημα μαθηματικών που να έχει αξία για τους μαθητές. Από την άλλη πλευρά, οι φάσεις των 5Es δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές για εμπλοκή και κατασκευή νοημάτων μέσα από το εργαλείο, αλλά μένουν εντοπισμένα σε αυτά τα δύο στοιχεία και όχι στη γενικότερη αξία της μαθησιακής διαδικασίας ή στο ρόλο του εκπαιδευτικού.
Συνεπώς, η ερευνήτρια έκρινε πως ο συνδυασμός των δύο αυτών θεωρητικών μοντέλων μπορεί να δώσει μία καλύτερη οπτική για τη δημιουργία ενός ισχυρού μαθησιακού περιβάλλοντος το οποίο να βασίζεται στον προγραμματισμό για την καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης των παιδιών και το οποίο να καλλιεργεί ισχυρούς στοχαστές, ικανούς να κάνουν και να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά προς όφελός τους.

Πίνακας 2: Συνδυασμός TRU - 5Es

Διαστάσεις TRU	**Φάσεις 5Es**
The Mathematics	5Es
Cognitive Demand	Explore, Explain, Exchange, Envisage
Access to Mathematical Content	Explore, Explain, Exchange
Agency, Authority, Identity	5Es
Formative Assessment	Explain, Exchange, bridgE

◆ 1η Διάσταση – Τα Μαθηματικά

Η πρώτη αυτή διάσταση του μοντέλου TRU αφορά, όπως έχει ήδη αναφερθεί, στην ποιότητα της μαθηματικής εμπειρίας των μαθητών. Οι δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν από τον ερευνητή πάνω στο προγραμματιστικό περιβάλλον, βασιζόμενες στα μοντέλα των UDGS και 5Es, έδειξαν πως παρείχαν στους μαθητές ευκαιρίες να δημιουργήσουν νοήματα και να χρησιμοποιήσουν μαθηματικές έννοιες και πρακτικές, κάνοντας οι ίδιοι μαθηματικά, γεγονός που αύξησε εκθετικά την ποιότητα της μαθηματικής εμπειρίας των παιδιών. Τα παραπάνω φαίνονται από το σύνολο των αποσπασμάτων 1-24 τα οποία η ερευνήτρια παρέθεσε νωρίτερα αναλυτικά. Οι μαθητές έδειξαν να δημιούργησαν συνδέσεις ανάμεσα στο περιεχόμενο, δηλαδή στις μαθηματικές ιδιότητες των μοντέλων των γραμμάτων, και στον τρόπο που χρησιμοποίησαν αυτές τις ιδιότητες, στοιχείο που τονίστηκε ιδιαίτερα και κατά την ανάλυση του σχεδιασμού. Οι μαθητές αφέθηκαν αρχικά ελεύθεροι να χρησιμοποιήσουν τις δικές τους ιδιότητες (π.χ. αναλογίες), ενώ σταδιακά η ερευνήτρια ώθησε τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν το Πυθαγόρειο και του τριγωνομετρικούς αριθμούς μέσα από τα μισοψημένα μοντέλα, και φάνηκε ότι οι μαθητές όχι απλά δημιούργησαν νοήματα σε κάθε μαθηματική ιδιότητα και διαδικασία ξεχωριστά, αλλά έφτασαν στο σημείο να νιώσουν ικανοί να επιλέξουν την μαθηματική ιδιότητα που θα χρησιμοποιήσουν στο γενικευμένο μοντέλο τους (Απόσπασμα 18).
Συνεπώς, μέσα από τα μοντέλα των γραμμάτων που διερεύνησαν οι μαθητές εμφανίστηκαν ευκαιρίες να αναπτύξουν παραγωγικές συνήθειες του νου και να αποκτήσουν μία ισχυρή και ανθεκτική μαθηματική κατανόηση η οποία να τους εξελίξει σε ισχυρούς στοχαστές και λύτες προβλημάτων. Ολοκληρώνοντας, η ερευνήτρια θα ήθελε να τονίσει, την μοναδική ευκαιρία που έδωσε ο ίδιος προγραμματισμός και το δυναμικό μαστόρεμα των μοντέλων στο να κάνουν να παιδιά μαθηματικά μέσα σε ένα περιβάλλον που προωθεί τον πειραματισμό και διευκολύνει τη γενίκευση της σκέψης των παιδιών.

◆ 2η Διάσταση – Γνωστικό Αίτημα

Σε συνέχεια των όσων διατυπώθηκαν παραπάνω, η δεύτερη διάσταση αφορά στις προκλήσεις που παρέχει το μαθησιακό περιβάλλον στους μαθητές για να εμπλακούν ενεργά με τα μαθηματικά και για να δημιουργήσουν νοήματα με στόχο τη μαθηματική τους εξέλιξη. Σύμφωνα με τα παραπάνω αποσπάσματα, οι μαθητές έδειξαν πως είχαν ευκαιρίες αφενός να νοηματοδοτήσουν πάνω σε σημαντικές ιδέες και αφετέρου να δείξουν τον τρόπο που αυτές χρησιμοποιούνται μέσα στη δραστηριότητα. Η διάσταση αυτή εμφανίζεται στο σύνολο των δραστηριοτήτων, με το ίδιο το μαστόρεμα των μοντέλων μέσα σε ένα προγραμματιστικό περιβάλλον να δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να δείξουν την κατανόησή τους και την εξέλιξή τους, είτε μέσα από τις εξηγήσεις που έδιναν μεταξύ τους κατά το συνεργατικό μαστόρεμα, είτε μέσα από τις ιδέες που εμφάνιζαν στη διάρκεια της ροής των δραστηριοτήτων ή ως αποτέλεσμα της εμπειρίας τους από τις προηγούμενες δραστηριότητες.

Τα δεδομένα έδειξαν ότι το επίπεδο των προκλήσεων που εμφανίστηκε στις δραστηριότητες αντιστοιχούσε, σύμφωνα με τον σχεδιαστή, σε αυτό που το μοντέλο TRU ονομάζει «παραγωγική πάλη» για τους μαθητές, καθώς οι δραστηριότητες δεν είναι πολύ εύκολες για τους μαθητές, κάτι που θα οδηγούσε σε έλλειψη ενδιαφέροντος από τους ίδιους και μηδενική εξέλιξή τους, αλλά ούτε και επικίνδυνα απαιτητικές, ώστε να δημιουργήσουν ένα χάος στη διερεύνηση των παιδιών χωρίς νόημα και ουσιώδες αποτέλεσμα. Ήταν δομημένες με τέτοιο τρόπο, ώστε και οι μαθητές να δημιουργήσουν σταδιακά νοήματα πάνω στις μαθηματικές ιδιότητες και στη χρήση τους, γεγονός που επιβεβαιώνεται από τα κρίσιμα επεισόδια που αναφέρθηκαν. Εδώ επίσης, να προσθέσουμε ότι όλες οι δραστηριότητες επιλύθηκαν από τους μαθητές.

◆ 3η Διάσταση – Ισότιμη Πρόσβαση στο Μαθηματικό Περιεχόμενο

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι μέσα από το σχεδιασμό των δραστηριοτήτων σύμφωνα με το μοντέλο των 5Es και τον προγραμματισμό, δόθηκε η δυνατότητα για ενεργό εμπλοκή των παιδιών κυρίως μέσα από τις φάσεις “Explore” και “Envisage” και για ενεργό συμμετοχή τους κυρίως μέσα από τις φάσεις “Explain” και “Exchange”, ενώ καταλυτικός υπήρξε ο ρόλος του ψηφιακού εργαλείου ο οποίος παρείχε ουσιαστικούς τρόπους εμπλοκής των μαθητών με τα μαθηματικά (“meaningful mathematical participation”). Η εμπλοκή αυτή φαίνεται από το σύνολο των αποσπασμάτων 1-24 τα οποία παρατέθηκαν και σχολιάστηκαν νωρίτερα.

◆ 4η Διάσταση – Αυτενέργεια, Αίσθηση Σιγουριάς/Ιδιοκτησίας και Ταυτότητα

Η τέταρτη διάσταση αφορά, όπως έχει ήδη αναφερθεί, στις ευκαιρίες που προσφέρονται στους μαθητές να συμμετέχουν σε συζητήσεις σχετικά με τις ιδέες τους και να «χτίζουν» ο ένας πάνω στις ιδέες του άλλου με στόχο την ανάπτυξη της αυτενέργειας, το αίσθημα ότι είναι οι ίδιοι δημιουργοί των μαθηματικών ιδεών τους (authority) και δημιουργοί των μοντέλων τους και την απόκτηση μιας συνολικά θετικής ταυτότητας ως προς τα μαθηματικά. Τα δεδομένα έδειξαν ότι ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων και το εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε από τους μαθητές τους έδωσε την ευκαιρία να κάνουν εικασίες, να τις ελέγξουν, να τις διορθώσουν μέσα από την ανατροφοδότηση του MaLT2, να συζητήσουν και να παρουσιάσουν τα μαθηματικά τους επιχειρήματα και όλα αυτά κυρίως μέσα από τα αποσπάσματα που αναφέρονταν στις φάσεις του “Explore”, “Explain” και “Exchange” από το μοντέλο των 5Es.

Η ερευνήτρια, όπως φαίνεται από το σύνολο των αποσπασμάτων 1-24, δεν ξεκινούσε κάποια συζήτηση, ούτε καθοδηγούσε τις ιδέες των παιδιών. Συμμετείχε στη συζήτηση μόνο όταν έκρινε απαραίτητο ότι θα ήθελε οι μαθητές να εξηγήσουν παραπάνω τη σκέψη τους και αυτό για να τους βοηθήσει μέσα από αυτή τη διαδικασία παρουσίασης των ιδεών τους να συνειδητοποιήσουν οι ίδιοι πού βρίσκονται και να συνεχίσουν μόνοι τους. Για

παράδειγμα, στα αποσπάσματα 5, 8 και 10 η ερευνήτρια θέτει κάποιες σύντομες ερωτήσεις για να εξηγήσουν οι μαθητές ποιο είναι το εμπόδιό τους ή για ποιο λόγο έβαλαν στον κώδικα τις συγκεκριμένες τιμές με στόχο απλά να τους κάνει να εξηγήσουν και να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους, ώστε να καταλάβει και η ερευνήτρια και οι μαθητές μεταξύ τους τον τρόπο που σκέφτονται. Βέβαια, όλες οι απαντήσεις των μαθητών έρχονται σε συνδυασμό με το εργαλείο, όπου βλέπουν τις δοκιμές τους.
Μάλιστα κάποιες φορές δεν πρόλαβε καν να ολοκληρώσει τις αναστοχαστικές ερωτήσεις της, αφού οι μαθητές νοηματοδοτούσαν άμεσα και συνέχιζαν την κατασκευή τους, όπως στο Απόσπασμα 13 ή εντόπιζαν την παρανόηση που είχαν κάνει, όπως στο Απόσπασμα 22, όπου η ερώτηση της ερευνήτριας «Ποιο είναι το χ;» ήταν καθοριστική για να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές την παρανόηση τους και να νοηματοδοτήσουν ως προς τη χρήση της μεταβλητής.
Οι μαθητές έδειξαν εξ αρχής μία μεγάλη επιθυμία να εμπλακούν κατά τη μαθησιακή διαδικασία, όταν ήδη από την 1η Δραστηριότητα πήραν την απόφαση να κατασκευάσουν 2 μοντέλα του Ν, χωρίς να τους ζητηθεί, αλλά και στη συνέχεια τα παιδιά μέσα από τις δραστηριότητες είδαν τον εαυτό τους ως κάποιον που είναι ικανός να κάνει μαθηματικά και να εξηγήσει τις μαθηματικές ιδιότητες που χρησιμοποιεί και το λόγο που τις χρησιμοποιεί, νιώθοντας με αυτό τον τρόπο ότι είχαν τον έλεγχο αυτών που δημιουργούν και ότι ήταν οι ίδιοι δημιουργοί των μαθηματικών ιδεών τους και δημιουργοί των μοντέλων τους. Μόνοι τους οι μαθητές δημιούργησαν τα αρχικά μοντέλα του Ν χρησιμοποιώντας τις αναλογίες (δημιουργοί των μαθηματικών ιδεών τους), μόνοι τους σκέφτηκαν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς και το Πυθαγόρειο στη συνέχεια και μόνοι τους έδειξαν ότι ελέγχουν τα δομήματα που κατασκεύαζαν, ξεκινώντας από ένα πρώιμο στάδιο όπου τα έλεγχαν στο εργαλείο με το μάτι (Απόσπασμα 6) και καταλήγοντας να πάρουν τον έλεγχο ενός μισοψημένου Μ στα χέρια τους (Απόσπασμα 18), να αφαιρέσουν την γραμμική σχέση αναλογίας που υπήρχε και να χρησιμοποιήσουν μία διαφορετική ιδιότητα, αυτή του Πυθαγορείου.
Βέβαια, το ίδιο το προγραμματιστικό περιβάλλον, δημιούργησε ένα περιβάλλον όπου οι μαθητές ένιωθαν άνετα να εκφραστούν και να πειραματιστούν, δοκιμάζοντας τις ιδέες τους πάνω στα μοντέλα των γραμμάτων χωρίς να έχουν το φόβο της αποτυχίας ή του λάθους που συχνά έχει αρνητικό αντίκτυπο μέσα στο σημερινό σχολείο. Άλλωστε, στο σύνολο των δραστηριοτήτων βλέπουμε τους μαθητές να παίρνουν πρωτοβουλία, να δοκιμάζουν και να ελέγχουν τις ιδέες τους. Μάλιστα, θα μπορούσαμε να πούμε πως το ίδιο το εργαλείο «έθετε ερωτήσεις» στους μαθητές τις στιγμές που αυτό που είχαν προβλέψει δεν ήταν ίδιο με αυτό που τελικά έδειχνε η γραφική αναπαράσταση του κώδικα. Λέγοντας «έθετε ερωτήσεις», η ερευνήτρια εννοεί ότι κάθε φορά που το avatar έκανε κάτι διαφορετικό από αυτό που είχε προβλεφθεί, οι μαθητές ήταν σαν να άκουγαν την ερώτηση «Γιατί έγινε αυτό;», λειτουργώντας έτσι το ίδιο ως αναστοχαστικός βοηθός των παιδιών και χωρίς να χρειάζεται η εμπλοκή της ερευνήτριας σε αυτές τις φάσεις.
Στοιχείο που δείχνει επίσης τη μαθηματική ταυτότητα που ανέπτυξαν σταδιακά οι μαθητές είναι κάτι που κάνει την εμφάνισή του έντονα σε 3 σημεία μέσα:

> Στο απόσπασμα 14: - Μ1: «Δεν ήταν τελείως ακριβές, γιατί το βρίσκαμε το μάτι και τους άξονες πίσω πιο πολύ.» - Μ2: «Ναι με το μάτι δοκιμάζοντας. <u>Αυτό είναι πιο μαθηματικό.</u>»
>
> Στο απόσπασμα 15: - Μ2: «Ναι, αλλά αν δει κάποιος μαθηματικός το δικό μου <u>θα καταλάβει ότι ξέρω μαθηματικά</u>.»
>
> Στο απόσπασμα 18: - Μ2: «Αν σβήσουμε την αναλογία και κάνουμε Πυθαγόρειο; Ποιος μας λέει ότι αυτή η αναλογία είναι σωστή; Ας μην το κάνουμε με το μάτι πάλι. Αφού έχουμε τρίγωνο.» - Μ1: «Λες; Οκ. Πυθαγόρειο.» - Μ2: «Αν φτιάξουμε το τέλειο Μ με πυθαγόρειο <u>δεν θα μπορεί να μας αμφισβητήσει κανείς</u>.»

Από τις παραπάνω φράσεις γίνεται φανερό ότι οι μαθητές ένιωσαν όχι μόνο την αυτοπεποίθηση να χρησιμοποιήσουν μαθηματικά μέσα στα μοντέλα τους, αλλά ένιωσαν και την αίσθηση της ιδιοκτησίας για αυτά, θέλοντας να τα κατασκευάσουν με τέτοιο τρόπο ώστε να μην μπορεί κανείς να τους τα αλλοιώσει ή να τους τα αμφισβητήσει.
Συνεπώς, όπως φαίνεται, μέσα από το μαστόρεμα των παιδιών και την εμπλοκή τους με τον προγραμματισμό η ερευνήτρια είναι σε θέση να ισχυριστεί ότι οι μαθητές όντως φαίνεται να απέκτησαν μία μαθηματική ταυτότητα, μέσα από την ανθεκτική κατανόηση των μαθηματικών ιδιοτήτων που έχτισαν σταδιακά μέσα από τις δραστηριότητες και τη χρήση τους μέσα στο περιβάλλον του προγραμματισμού, καθώς μαστόρευαν τα μοντέλα των γραμμάτων.

- <u>5η Διάσταση – Διαμορφωτική Αξιολόγηση</u>

Η τελευταία διάσταση του μοντέλου TRU, όπως έχει ήδη περιγραφεί, αφορά στις ευκαιρίες που προσφέρουν οι δραστηριότητες για να γίνει φανερός ο τρόπος που εξελίσσεται η κατανόηση των παιδιών κατά τη μαθησιακή διαδικασία, ο τρόπος σκέψης τους και οι πιθανές παρανοήσεις τους, ώστε ο εκπαιδευτικός να μπορεί να τους υποστηρίξει με διάφορους τρόπους και να τους ωθήσει σε μία βαθύτερη κατανόηση των ιδεών τους και του περιεχομένου. Σύμφωνα με τα δεδομένα που συλλέχθηκαν, φάνηκε πως ο ίδιος ο προγραμματισμός έγινε το εργαλείο μέσα από το οποίο οι μαθητές έδειξαν τον τρόπο σκέψης τους μέσα από τον τρόπο που δόμησαν τις εντολές για να κατασκευάσουν τα δομήματα των γραμμάτων, καθώς και την εξέλιξη της κατανόησης τους, καθώς σκέφτονταν μαζί με το εργαλείο και έπαιρναν άμεση ανατροφοδότηση από το ίδιο για να συνεχίσουν. Προφανώς, όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη διάσταση, η εκπαιδευτικός ήταν εκεί:
Για να θέσει αναστοχαστικές ερωτήσεις στους μαθητές και να τους ωθήσει να τεκμηριώσουν την άποψή τους:

> Απόσπασμα 10: - Ε: «Θα μπορούσαν να είναι και 50 μοίρες;» - Μ2: «Όχι. Αφού εδώ υπάρχει τετράγωνο, κάθε γωνία είναι 90 μοίρες. Αλλά η πλάγια είναι διαγώνιος του τετραγώνου.» - Μ1: «Άρα και διχοτόμος. Οπότε 90 δια 2 = 45. Οπότε 45 πρέπει να είναι.»

Για να ζητήσει από τα παιδιά να εξηγήσουν λεπτομερέστερα τη σκέψη τους:

> Απόσπασμα 11: - Ε: «Πώς σκεφτήκατε να χρησιμοποιήσετε το ημίτονο;» Μ2: «Όταν είδα ότι εδώ το Ν μπορούμε να το σκεφτούμε μέσα σε τετράγωνο και να φτιάξουμε τρίγωνα, σε αυτό το τρίγωνο πήγα και στάθηκα στην πάνω κορυφή, εδώ, και από εκεί το αεροπλάνο κοιτούσε απέναντι. Οπότε με το που είδα το απέναντι, σκέφτηκα και την υποτείνουσα και βγήκε έτσι το ημίτονο.»

Για να θέσει διευκρινιστικές ερωτήσεις στους μαθητές και να τους ωθήσει να κατανοήσουν μόνοι τους την παρανόησή τους:

> Απόσπασμα 22: - Ε: «Ποιο είναι το χ;» - Μ1: «Αυτή η πλάγια. Η υποτείνουσα δηλαδή είναι 40/ημ45.» - Μ2: «Όπα. Μισό. Γιατί… Περίμενε. Μπερδέψαμε τα χ ρε!» - Ε: «Τι εννοείς;» - Μ2: «Βάλαμε στο χαρτί χ για να το λύσουμε, αλλά το χ είναι η υποτείνουσα. Δηλαδή το μπροστά μας. Άλλο αυτό το χ.»

Και γενικότερα να πάρει τους μαθητές από το επίπεδο κατανόησης και αντίληψης που βρίσκονταν και να τους ωθήσει προς τα πάνω.

> Απόσπασμα 14: - Ε: «Ποιο θα επιλέγατε τελικά; Το προηγούμενο ή αυτό τώρα;» - Μ1: «Αυτό που κάναμε τώρα.» - Μ2: «Ναι αυτό.» - Ε: «Γιατί; Πριν επιλέξατε τις αναλογίες όταν σας ρώτησα στην προηγούμενη δραστηριότητα. Τι άλλαξε τώρα;» - Μ2: «Γιατί η αναλογία στο προηγούμενο

έβγαινε και 41 και 42 και 43%...» - Μ1: «Δεν ήταν τελείως ακριβές, γιατί το βρίσκαμε το μάτι και τους άξονες πίσω πιο πολύ.»

Ταυτόχρονα, η ερευνήτρια επέλεξε στο πρώτο κομμάτι της ανάλυσης των αποτελεσμάτων να παραθέσει αποσπάσματα των διαλόγων των μαθητών με τη σειρά των γραμμάτων που δόθηκαν στους μαθητές, ώστε να φανούν τα νοήματα που κατασκεύασαν τα παιδιά σταδιακά. Συνεπώς, ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων με τη συγκεκριμένη ροή των μοντέλων σε συνδυασμό με την εμπλοκή των παιδιών με το ψηφιακό εργαλείο αποτέλεσαν στοιχεία που έδειχναν χωρίς διακοπή τον τρόπο που εξελισσόταν η κατανόηση των παιδιών κατά τη μαθησιακή διαδικασία. Η συγκεκριμένη διάσταση, όπως είναι φανερό, διαπερνά όλες τις δραστηριότητες του σχεδιασμού και έδρασε υποστηρικτικά ως προς τη δεύτερη διάσταση του μοντέλου TRU.

Συμπληρωματικά σε όσα αναφέρθηκαν παραπάνω σχετικά με τις 5 διαστάσεις, ακολουθεί ένας πίνακας με στοιχεία-ευκαιρίες που πρέπει να δίνει το μάθημα στον κάθε μαθητή σύμφωνα με το πλαίσιο TRU, όπου εμφανίζονται κάποια επιπρόσθετα αποσπάσματα των μαθητών τα οποία επιβεβαιώνουν και τεκμηριώνουν την εμφάνιση της κάθε διάστασης στην έρευνα που πραγματοποιήθηκε.

Πίνακας 3: Διαστάσεις TRU για το μαθητή

The Mathematics	Cognitive Demand	Access to Mathematical Content	Agency, Authority, Identity	Formative Assessment
• Ασχολείται με τα μαθηματικά με τρόπους που αναδεικνύουν σημαντικές έννοιες, διαδικασίες, στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων και εφαρμογές. **• Έχει ευκαιρίες για ανάπτυξη παραγωγικών μαθηματικών συνηθειών του νου.** • Έχει ευκαιρίες για μαθηματική αιτιολόγηση, προφορικά και γραπτά, χρησιμοποιώντας κατάλληλη μαθηματική γλώσσα. ***Η χρήση μαθηματικών ιδιοτήτων, όχι μέσα σε μία άσκηση στο χαρτί ή σε ένα διαγώνισμα αξιολόγησης του σχολείου, αλλά μέσα σε ένα προγραμματιστικό περιβάλλον και η διερεύνηση της συμπεριφοράς του μοντέλο κάθε φορά αυξάνει εκθετικά την ποιότητα της μαθηματικής εμπειρίας του παιδιού και τα νοήματα που το ίδιο κατασκευάζει.***	• Επιδιώκει ενεργά να εξερευνήσει τα όρια της τρέχουσας αντίληψης του. **• Αιτιολογεί και δοκιμάζει ιδέες με τρόπους που συνδέονται και βασίζονται σε αυτά που γνωρίζει.** • Εξηγεί τι έχει κάνει μέχρι τώρα πριν ζητήσει βοήθεια. ***Μ2: «Και αν υποθέσουμε ότι το κλείνουμε μέσα σε ένα τετράγωνο, τότε αυτές οι δύο πλευρές είναι μισές του χ. Αφού όλο είναι χ, αυτές είναι χ/2. Φαντάσου ένα πιο μικρό τρίγωνο από το τρίγωνο που κάναμε στο Ν.» Μ1: «Το έπιασα. Πάντως το δικό μου είναι πιο απλό.» Μ2: «Ναι εντάξει το δικό μου είναι πιο σύνθετο σε κώδικα, αλλά είναι εύκολο. Απλά είναι πιο ακριβές νομίζω γιατί χρησιμοποίησα κάτι που ισχύει σε ορθογώνια τρίγωνα.»***	• Ακούει ενεργά τους άλλους μαθητές και βασίζεται στις ιδέες τους. **• Υποστηρίζει την ανάπτυξη της κατανόησης άλλων μαθητών.** • Εξηγεί, ερμηνεύει, εφαρμόζει και αναστοχάζεται πάνω σε σημαντικές μαθηματικές ιδέες. • Συμμετέχει με νόημα στη μαθηματική δραστηριότητα. ***Μ1: «Λοιπόν, εδώ είναι ευθεία πες. Το αεροπλάνο κοιτάει εδώ και πρέπει να κάνει στροφή για να κοιτάει πάνω. Όλο αυτό είναι 180. Αλλά αφού έχει περάσει ήδη τα 35, 180-35=145. Κατάλαβες;»***	**• Αναλαμβάνει την ευθύνη της μαθησιακής διαδικασίας στο σχεδιασμό,** την παρακολούθηση και τον αναστοχασμό ατομικής ή/και συλλογικής εργασίας. • Κάνει ερωτήσεις και προτάσεις που υποστηρίζουν την ανάλυση, την αξιολόγηση, την εφαρμογή και σύνθεση μαθηματικών ιδεών. • Βασίζεται στις συνεισφορές άλλων και βοηθάει άλλους να δουν ή να κάνουν συνδέσεις. • Θεωρεί τους συμμαθητές και τον εαυτό του ικανούς για την αιτιολόγηση των θέσεων τους. ***Μ2: «Αν σβήσουμε την αναλογία και κάνουμε Πυθαγόρειο; Ποιος μας λέει ότι αυτή η αναλογία είναι σωστή; Ας μην το κάνουμε με το μάτι πάλι. Αφού έχουμε τρίγωνο.»***	**• Εξηγεί τη σκέψη του, ακόμα κι αν δεν είναι «ώριμη».** **• Βλέπει τα λάθη ως ευκαιρίες για νέα μάθηση.** • Αναλογίζεται με συνέπεια όσα κάνει, αλλά και την εργασία των συνομηλίκων. • Χρησιμοποιεί την ανατροφοδότηση στην αναθεώρηση της δουλειάς του. ***Μ2: «Μα ο άγνωστος, οποιοσδήποτε άγνωστος εδώ μπορεί να είναι ένας οποιοδήποτε αριθμός. Αφού το κουνάμε κάτω και του βάζουμε διάφορες τιμές. Δεν θυμάσαι πριν;» Μ1: «Ναι, αλλά στο σχήμα δεν μπορεί να στρίψει οποιοδήποτε αριθμό. Αν είναι λιγότερο από 135 θα φύγει και αν είναι πάνω από 180 το αριστερά, θα κάνει τρίγωνο. Όχι Ν.» Μ2: «Άλλο αυτό. Εδώ συμφωνώ ότι πρέπει το ω να είναι ακριβώς 135 για να βγει Ν. Αυτό το ξέρουμε από πριν με τις εντός εναλλάξ.»***
5Es	**Explore, Explain, Exchange & Envisage**	**Explain & Exchange**	**Explain, Exchange & Explore**	**Explain, Exchange & bridgE**

Συμπερασματικά, μετά από όλη αυτή την ανάλυση των νοημάτων που κατασκεύασαν οι μαθητές μέσα από την εμπλοκή τους με τις δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν με το εργαλείο MaLT2, η ερευνήτρια μπορεί να ισχυριστεί πως εμφανίστηκαν και οι πέντε διαστάσεις που ορίζει το πλαίσιο Διδασκαλίας για Ανθεκτική Κατανόηση των μαθητών και έτσι προκύπτει το συμπέρασμα ότι μία τέτοια παρέμβαση δημιούργησε ένα ισχυρό μαθησιακό περιβάλλον για τα παιδιά που έχει νόημα και αξία για την μαθηματική τους εξέλιξη.
Μάλιστα, το πλαίσιο TRU προτείνει και μία ρουμπρίκα αξιολόγησης του μαθήματος για τον εκπαιδευτικό, σύμφωνα με τις 5 διαστάσεις ερωτημάτων που φαίνονται παρακάτω:

- **Τα Μαθηματικά:** *Πόσο ακριβές, συναφές και καλά τεκμηριωμένο είναι το μαθηματικό περιεχόμενο;*
- **Γνωστική Απαίτηση:** *Σε ποιο βαθμό οι μαθητές υποστηρίζονται ώστε να «παλεύουν» και να νοηματοδοτούν με τις μαθηματικές έννοιες;*
- **Ισότιμη Πρόσβαση:** *Σε ποιο βαθμό ο εκπαιδευτικός υποστηρίζει την πρόσβαση στο περιεχόμενο του μαθήματος για όλους τους μαθητές;*
- **Αυτενέργεια, Αίσθημα Ιδιοκτησίας, Μαθηματική Ταυτότητα:** *Σε ποιο βαθμό οι μαθητές είναι οι ίδιοι πηγή των ιδεών και της συζήτησης αυτών;*
- **Χρήσεις Αξιολόγησης:** *Σε ποιο βαθμό βγαίνει στην επιφάνεια η μαθηματική σκέψη των μαθητών; Σε ποιο βαθμό οι οδηγίες βασίζονται στις ιδέες των μαθητών όταν αυτές έχουν αξία ή αναφέρονται σε παρανοήσεις που προκύπτουν;*

Στόχος είναι ο ίδιος ο εκπαιδευτικός να έχει την ευκαιρία να αξιολογεί το μάθημά του, ενώ σύμφωνα με τα αποτελέσματα που η ερευνήτρια ανέλυσε παραπάνω θα τολμούσε να ισχυριστεί ότι μία τέτοια δραστηριότητα προσέγγισε την ανώτερη κλίμακα της συγκεκριμένης ρουμπρίκας σε όλες τις διαστάσεις της.

Summary Rubric

	The Mathematics	Cognitive Demand	Access to Mathematical Content	Agency, Authority, and Identity	Uses of Assessment
	How accurate, coherent, and well justified is the mathematical content?	*To what extent are students supported in grappling with and making sense of mathematical concepts?*	*To what extent does the teacher support access to the content of the lesson for all students?*	*To what extent are students the source of ideas and discussion of them? How are student contributions framed?*	*To what extent is students' mathematical thinking surfaced; to what extent does instruction build on student ideas when potentially valuable or address misunderstandings when they arise?*
1	Classroom activities are unfocused or skills-oriented, lacking opportunities for engagement with key grade level content (as specified in the Common Core Standards)	Classroom activities are structured so that students mostly apply memorized procedures and/or work routine exercises.	There is differential access to or participation in the mathematical content, and no apparent efforts to address this issue.	The teacher initiates conversations. Students' speech turns are short (one sentence or less), and constrained by what the teacher says or does.	Student reasoning is not actively surfaced or pursued. Teacher actions are limited to corrective feedback or encouragement.
2	Activities are at grade level but are primarily skills-oriented, with few opportunities for making connections (e.g., between procedures and concepts) or for mathematical coherence (see glossary).	Classroom activities offer possibilities of conceptual richness or problem solving challenge, but teaching interactions tend to "scaffold away" the challenges, removing opportunities for productive struggle.	There is uneven access or participation but the teacher makes some efforts to provide mathematical access to a wide range of students.	Students have a chance to explain some of their thinking, but the teacher is the primary driver of conversations and arbiter of correctness. In class discussions, student ideas are not explored or built upon.	The teacher refers to student thinking, perhaps even to common mistakes, but specific students' ideas are not built on (when potentially valuable) or used to address challenges (when problematic).
3	Classroom activities support meaningful connections between procedures, concepts and contexts (where appropriate) and provide opportunities for building a coherent view of mathematics.	The teacher's hints or scaffolds support students in productive struggle in building understandings and engaging in mathematical practices.	The teacher actively supports and to some degree achieves broad and meaningful mathematical participation; **OR** what appear to be established participation structures result in such engagement.	Students explain their ideas and reasoning. The teacher may ascribe ownership for students' ideas in exposition, **AND/OR** students respond to and build on each other's ideas.	The teacher solicits student thinking and subsequent instruction responds to those ideas, by building on productive beginnings or addressing emerging misunderstandings.

Εικόνα 30: Ρουμπρίκα TRU για τον εκπαιδευτικό

5. Συμπεράσματα

Το πρώτο στοιχείο που η ερευνήτρια θα ήθελε να επισημάνει μέσα από την παρούσα εργασία είναι η εμπλοκή που έδειξαν οι μαθητές στις δραστηριότητες, κάτι που λείπει από το σημερινό σχολείο, όπου οι μαθητές νιώθουν αποκομμένοι και αποξενωμένοι από αυτό, χωρίς συχνά να βρίσκουν κάποιο ενδιαφέρον μέσα στα μαθηματικά. Όλη η δραστηριότητα είχε στηριχθεί στην ενεργητική μάθηση των μαθηματικών και έτσι ήταν οι ίδιοι οι μαθητές που κατασκεύασαν μοντέλα και νοήματα και δεν έλαβαν κάποιου είδους διάλεξη από την εκπαιδευτικό, αλλά ανακάλυψαν μόνοι τους τις μαθηματικές ιδιότητες που κρύβονταν μέσα στα γράμματα και τις χρησιμοποίησαν, νοηματοδοτώντας τελικά ως προς την αξία της χρήσης τους κάθε φορά. Επίσης, το γεγονός ότι οι δραστηριότητες δεν εμπεριείχαν σχήματα, αλλά μοντέλα γραμμάτων, αύξησε ιδιαίτερα το ενδιαφέρον των μαθητών και «έκρυψε» έξυπνα τα μαθηματικά μέσα τους, αφήνοντας τους μαθητές να τα ανακαλύψουν σε πρώτη φάση και στη συνέχεια να τα διορθώσουν ή να τα χρησιμοποιήσουν όπως αυτοί επιθυμούσαν.

Οι δραστηριότητες ήταν ανοιχτές σε χρήση μαθηματικών ιδιοτήτων και αυτό ήταν ένα στοιχείο που έδινε αυτονομία και προωθούσε την αυτενέργεια των μαθητών, στοιχείο που επίσης λείπει από τη σημερινή τάξη, όπου οι μαθητές καλούνται να λύσουν τις ασκήσεις με τον τρόπο που θα ορίσει ο καθηγητής. Ένα ακόμη πολύ σημαντικό στοιχείο το οποίο αύξησε την ποιότητα της μαθηματικής εμπειρίας των μαθητών ήταν ότι οι δραστηριότητες έκρυβαν μέσα τους μαθηματικές έννοιες, ιδιότητες και διαδικασίες που οι μαθητές είχαν συναντήσει και στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου, αλλά και στις δύο τελευταίες τάξεις του Δημοτικού. Αντίθετα με ότι συμβαίνει στο σχολείο – όπου αν οι μαθητές είναι στο κεφάλαιο του Πυθαγορείου θεωρήματος, για παράδειγμα, τότε γνωρίζουν εκ των προτέρων ότι οι ασκήσεις που θα έχουν για εξάσκηση θα λύνονται με το Πυθαγόρειο θεώρημα – στις συγκεκριμένες δραστηριότητες οι μαθητές δεν είχαν καμία σύνδεση με κεφάλαια και ύλη μαθηματικών στην οποία αναφέρονταν οι δραστηριότητες και αυτό ήταν μία ευκαιρία για να αντιληφθούν και να αντιμετωπίσουν τα μαθηματικά ως σύνολο.

Η χρήση του μοντέλου των UDGS που ακολούθησε σχεδιαστικά η ερευνήτρια στις δύο φάσεις ώθησε σταδιακά τα παιδιά να γενικεύσουν τον τρόπο σκέψης τους, αλλά και τη χρήση των μαθηματικών ιδιοτήτων μέσα στα μοντέλα και να συζητήσουν για τις εντολές που έδιναν στο εργαλείο, χρησιμοποιώντας λεξιλόγιο στην αρχή τυχαίο, αλλά στη συνέχεια πιο μαθηματικό, καθώς διερευνούσαν πιο διεξοδικά τα μοντέλα τους και δημιουργούσαν νοήματα πάνω σε ήδη υπάρχοντα. Παράλληλα, η χρήση του μοντέλου των 5Es κατά τον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων είχε ως στόχο την πιο ισχυρή και ανθεκτική κατανόηση ήδη γνωστών για τα παιδιά εννοιών και την προσφορά πλούσιων μαθηματικών εμπειριών μέσα από κάθε φάση, στοχεύοντας να αναπτύξει μαθητές ικανούς να κάνουν, να τεκμηριώνουν και να επιχειρηματολογούν μαθηματικά, όπως και φάνηκε από τα δεδομένα της έρευνας.

Η ερευνήτρια, μέσα από την παρούσα έρευνα, έκανε μία προσπάθεια να συνδυάσει τα παραπάνω δύο μοντέλα που αναφέρονταν σε ψηφιακά μέσα με τις διαφορετικές διαστάσεις του πλαισίου Διδασκαλίας για Ανθεκτική Κατανόηση το οποίο δεν κάνει καμία αναφορά σε διδασκαλία με τη χρήση ψηφιακών μέσων. Φαίνεται πως αυτός ο συνδυασμός έδωσε την ευκαιρία να δημιουργηθεί ένα ισχυρό μαθηματικό περιβάλλον μάθησης για τους μαθητές το οποίο αναδεικνύει τα βασικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής γνώσης, όπως η αφαίρεση, η γενίκευση και η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, γεγονός που οδηγεί στην ανάπτυξη του Μαθηματικού Γραμματισμού των παιδιών, δηλαδή στην ικανότητά τους να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά ως εργαλείο για την εξερεύνηση και κατανόηση του κόσμου γύρω τους. Το ιδιαίτερο στοιχείο της σύνδεσής τους είναι πως αυτά τα 3 θεωρητικά μοντέλα δημιουργήθηκαν ανεξάρτητα το ένα με το

άλλο, ξεκινώντας με το πρώτο το 1987 και καταλήγοντας με το τελευταίο μετά από 30 ολόκληρα χρόνια. Παρόλα αυτά, ο συνδυασμός τους και συγκεκριμένα η ροή των δραστηριοτήτων που βασίστηκε πάνω στο «ώριμο» μοντέλο του παρελθόντος, το UDGS, ήταν ένα από τα βασικά στοιχεία των αποτελεσμάτων που έδειξε ότι συνέβαλε καθοριστικά στην ανθεκτική κατανόηση των μαθηματικών ιδιοτήτων από τους μαθητές. Παράλληλα, το μοντέλο των 5Es, φαίνεται να μπορεί να συνδεθεί και να φέρει στην επιφάνεια κάθε διάσταση του πλαισίου Ανθεκτικής Κατανόησης και έτσι, να διασφαλίζει την εμφάνιση και των 5 διαστάσεων, στοιχείο απαραίτητο για να θεωρηθεί ένα μαθησιακό περιβάλλον ως ισχυρό για τους μαθητές, Συνεπώς, με βάση όλα τα παραπάνω και κυρίως τα αποτελέσματα της έρευνας, η ερευνήτρια κατέληξε στο συμπέρασμα πως ο συνδυασμός των τριών αυτών θεωρητικών μοντέλων μπορεί να δώσει μία καλύτερη οπτική για τη δημιουργία ενός ισχυρού μαθησιακού περιβάλλοντος το οποίο να βασίζεται στον προγραμματισμό για την καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης των παιδιών και το οποίο να καλλιεργεί ισχυρούς στοχαστές, ικανούς να κάνουν και να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά προς όφελός τους.
Σαφώς σε όλα τα παραπάνω, η χρήση του προγραμματιστικού εργαλείου MaLT2 ήταν καθοριστικός παράγοντας για την ενεργητική άσκηση των μαθηματικών, για την κατασκευή νοημάτων μέσα από την εμπλοκή τους με τον προγραμματισμό και για τον αναστοχασμό που προωθούσε το ίδιο μέσω της άμεσης ανατροφοδότησης που έδινε ή των διαφορετικών δυναμικών αναπαραστάσεων που πρόσφερε στα παιδιά και φυσικά για την ευκαιρία να αντιμετωπίσουν το γράμμα μέσα από διαφορετικούς ρόλους και χρήσεις του και όχι μόνο ως άγνωστη ποσότητα. Ειδικά, στο κομμάτι της μεταβλητής, τα νοήματα που ανέπτυξαν τα παιδιά και οι παρανοήσεις που διόρθωσαν ήταν ιδιαίτερες, όπως φάνηκε από τα αποτελέσματα της έρευνας, ενώ δεν θα μπορούσαν σε καμία περίπτωση να κατασκευαστούν αυτά τα νοήματα από τους μαθητές με τα κλασσικά αναπαραστασιακά μέσα του χαρτιού-μολυβιού. Άλλωστε ο ψηφιακός μετασχηματισμός της έρευνας κρύβεται κυρίως μέσα στην αναδόμηση των αναπαραστασιακών δομών των συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών και ιδιοτήτων που εμφανίστηκαν μέσα στις δραστηριότητες.
Ολοκληρώνοντας, στόχος της ερευνήτριας ήταν να μελετήσει αν τελικά ο συνδυασμός των 3 θεωρητικών μοντέλων στον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων και η χρήση του προγραμματισμού θα είχε ως αποτέλεσμα την καλλιέργεια της ικανότητας των μαθητών να αναπτύξουν μία ανθεκτική κατανόηση μιας ποικιλίας μαθηματικών εννοιών και ιδιοτήτων που ήδη γνώριζαν και να βάλουν σε χρήση τα μαθηματικά, ερμηνεύοντας και αξιολογώντας το αποτέλεσμα ταυτόχρονα. Τα αποτελέσματα της έρευνας, όπως φάνηκε από την ανάλυσή τους, ήταν υποσχόμενα και ήταν ένας τρόπος να ρίξει η έρευνα αυτή φως σχετικά με τον τρόπο που θα μπορούσαμε να συνδυάσουμε τον προγραμματισμό με τα μαθηματικά στο ελληνικό σχολείο. Το να καταφέρνουν οι μαθητές να χρησιμοποιούν τις μαθηματικές ιδιότητες, όχι μέσα σε μία άσκηση στο χαρτί ή σε ένα διαγώνισμα αξιολόγησης του σχολείου, αλλά μέσα σε ένα προγραμματιστικό περιβάλλον και να αξιολογούν το πώς συμπεριφέρεται το μοντέλο τους κάθε φορά έχει άλλη αξία για την μαθηματική εμπειρία του παιδιού και τα νοήματα που το ίδιο κατασκευάζει, κάτι που επιβεβαιώνει τόσο η βιβλιογραφία χρόνων πάνω στην αξία χρήσης του προγραμματισμού μέσα στη μαθησιακή διαδικασία, όσο και αυτό το μικρό δείγμα δεδομένων της παρούσας έρευνας μέσα από το συγκεκριμένο σχεδιασμό δραστηριοτήτων.
Σίγουρα υπάρχουν περιορισμοί στη συγκεκριμένη έρευνα, όπως το μικρό δείγμα μαθητών στο οποίο πραγματοποιήθηκε η διδακτική παρέμβαση, όμως όλη η έρευνα δείχνει στο σύνολό της στοιχεία που θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν σε βάθος και να ληφθούν υπόψιν στη σημερινή πραγματικότητα, όπως στοιχεία που πιέζουν το σχολείο να καλλιεργήσει μαθητές ικανούς να μπορούν να ανταπεξέλθουν σε κάθε πρόκληση που

θα συναντήσουν στον σημερινό κόσμο που αλλάζει με συνεχόμενο και γρήγορο ρυθμό. Η αξιοποίηση του προγραμματισμού στα μαθηματικά μαζί με την ευκαιρία της μοντελοποίησης που δίνουν τα ψηφιακά εργαλεία, όπως το MaLT2, δείχνει να είναι ένας τρόπος να προωθήσουμε τους μαθητές να αναπτύξουν έναν μαθηματικό τρόπο σκέψης, ο οποίος θα τους συντροφεύει σε όλη τους τη ζωή σαν μία γενικότερη ικανότητα - competence. Το ζητούμενο, άλλωστε, δεν είναι να πάρει ο προγραμματισμός τη θέση των μαθηματικών, ούτε να προσθέσουμε τον προγραμματισμό αποξενωμένο από τα μαθηματικά. Το ζητούμενο είναι να μελετήσουμε με ποιον τρόπο και μέσα σε ποια πλαίσια οι μαθητές μπορούν να γίνουν μαθηματικά ικανοί μέσω της ανάπτυξης της ικανότητας τους για ανθεκτική κατανόηση και χρήση των μαθηματικών ιδιοτήτων, θέτοντας τον προγραμματισμό στην υπηρεσία των μαθηματικών μέσα από το σχεδιασμό συγκεκριμένων δραστηριοτήτων και η παρούσα έρευνα ελπίζω πώς έριξε λίγο φως προς αυτή την κατεύθυνση.

Τέλος, η ερευνήτρια παραθέτει κάποιες προτάσεις για περαιτέρω έρευνα:

α. Θα είχε ένα ενδιαφέρον να μελετηθούν τα καμπυλόγραμμα γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου (Ο, Θ, Ρ, Β, Φ κτλ.) ως προς τα ίδια ερευνητικά ερωτήματα, τα οποία κρύβουν διαφορετικές μαθηματικές ιδιότητες, ώστε να διαπιστώσουμε αν σε αυτές τις ιδιότητες τα αποτελέσματα θα είναι το ίδιο υποσχόμενα.

β. Θα είχε αξία να μελετηθούν τα ίδια γράμματα και οι ίδιες ιδιότητες με κάποιο διαφορετικό ψηφιακό εργαλείο για τη διδασκαλία των μαθηματικών, ώστε να λάβουμε ανατροφοδότηση ως προς το αν τα νοήματα που κατασκεύασαν οι μαθητές ήταν μοναδικά ως προς τη χρήση του προγραμματιστικού εργαλείου MaLT2 με βάση τις λειτουργικότητες του ή τι είδους νοήματα μπορούν να κατασκευάσουν οι μαθητές πάνω σε αυτές τις μαθηματικές ιδιότητες με κάποιο άλλο εργαλείο.

6. Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση

Abelson, H. & DiSessa, A. (1981). *Turtle Geometry: The Computer as a Medium for Exploring Mathematics.* Cambridge, M.A.: MIT Press.

Bakker, A., van Eerde, D. (2014). An Introduction to Design-Based Research with an Example From Statistics Education. In Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., Presmeg, N. (Eds), Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education, 429-466. Advances in Mathematics Education. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_16

Bardini, C., Radford, L. & Sabena, C. (2005). Struggling with Variables, Parameters and Indeterminate Objects or How to Go Insane in Mathematics. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 129-136. Melbourne: PME. https://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29RRPapers/PME29Vol2BardiniEtAl.pdf

Benton, L., Hoyles, C., Kalas, I. & Noss, R. (2016). *Building mathematical knowledge with programming: insights from the ScratchMaths project.* Retrieved from: https://www.researchgate.net/publication/295912532_Building_mathematical_knowledge_with_programming_insights_from_the_ScratchMaths_project

Benton, L., Hoyles, C., Kalas, I. & Noss, R. (2017). “Bridging primary programming and mathematics: Some findings of design research in England”. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 3 (2). 115-138. https://doi.org/10.1007/s40751-017-0028-x

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Murphy Gardiner, A., Isler, I. & Kim, J-S. (2015). The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. Journal for Research in Mathematics Education, 46, 1, 39-87. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Cevikbas, M., Kaiser, G. & Schukajlow, S. (2021). A systematic literature review of the current discussion on mathematical modelling competencies: state-of-the-art developments in conceptualizing, measuring, and fostering. Educational Studies in Mathematics. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10104-6

Clifton, Y. (2012) "Should Students Learn to Be Literate in Democracy? The Goals of John Dewey's Progressive Education and Its Practical Implementation". Michigan Reading Journal, 45(1), Article 5. https://scholarworks.gvsu.edu/mrj/vol45/iss1/5

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, 32 (1), 9-13.

Collins, A. (1992). Toward a Design Science of Education. In E. Scanlon & T. O'Shea. (Eds), New Directions in Educational Technology, 15-22.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyz, K. (2004). Design Research: Theoretical and Methodological Issues. *The Journal of Learning Sciences*, 13 (1), 15-42.

Dede, Y. (2004). The Concept of Variable and Identification its Learning Difficulties. *Educational Science: Theory & Practice*, 4(1), 48-56. Retrieved from: https://www.academia.edu/1364830/The_Concept_of_Variable_and_Identification_its_Learning_Difficulties

Delamare Le Deist, F. & Winterton, J. (2005). What Is Competence, *Human Resource Development International*, 8:1, 27-46. https://doi.org/10.1080/1367886042000338227

DiSessa, A. (1991). Epistemological micromodels: The case of coordination and quantities. In J. Montanegro, & A. Tryphon (Eds.), Psychologie génétique et sciences cognitives, 169-194.
Dubinsky, E. (2000). Meaning and Formalism in Mathematics. International Journal of Computers for Mathematical Learning 5, 211–240. https://doi.org/10.1023/A:1009806206292
Ely, R. & Adams, A. (2012). Unknown, placeholder, or variable: What is x?. Mathematics Education Research Journal, 24. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0029-9
Ferrara, F., Pratt, D. & Robutti O. (2006). The Role and Uses of Technologies for the teaching of Algebra and Calculus, In A. Gutierrez & P. Boero (Eds), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future, 235-274. The Netherlands: Sense Publishers.
Fischer, K. W., Rotenberg, E. J., Bullock, D. H., & Raya, P. (1993). The dynamics of competence: How context contributes directly to skill. In R. H. Wozniak & K. W. Fischer (Eds.), *Development in context: Acting and thinking in specific environments*, 93-117. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an Educational Task. Dordrecht: Reidel. Retrieved from: https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2
Goetz, J., & Lecompte, M. D. (1984). Ethnography and Qualitive Design in Educational Research. London: Academic Press.
Goldenberg, E. P. & Cuoco, A. (1998). What is Dynamic Geometry? In R. Lehrer &D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing of Geometry and Space*, pp.351-368. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: A mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*, 32:6, 777-796. https://doi.org/10.1080/00220270050167170
Hoyles, C. (1987). Tools for Learning – Insights for Mathematics Educator from a Logo Programming Environment. *For the Learning of Mathematics*, 7(2), 32-37.
Jankvist, U. T., Geraniou, E., Misfeldt, M. (2018). The KOM framework's aids and tools competency in relation to digital technologies – a networking of theories perspective. In H.-G. Weigand, A. Clark-Wilson, A. Donevska-Todorova, E. Faggiano, N. Grønbæk, & J. Trgalova (Eds.), Research Proceedings of the Fifth ERME Topic Conference (ETC 5) on Mathematics Education in the Digital Age (MEDA). Copenhagen, Denmark: University of Copenhagen and ERME.
Kafai, Y., & Resnick, M. (Eds.) (1996). *Constructionism in Practice. Designing, Thinking and Learning in a Digital World*. Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.
Sutton, K. (2012). A study of students' misconceptions regarding variables in the Pythagorean theorem and slope/intercept formula. Retrieved from: http://hdl.handle.net/1951/58390
Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. Mathematics in School, 7, 23-26. Retrieved from: https://www.researchgate.net/publication/281367139_Children's_understanding_of_numerical_variables
Kynigos, C. (2012). Constructionism: theory of learning or theory of design? In Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. Seoul, South Korea.
Kynigos, C. (2007a). Half-baked Microworlds in Use in Challenging teacher educators' knowing. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 12(2), 87-111.
Kynigos, C. (2007b). Half-baked Logo Microworlds as Boundary Objects in Integrated Design. Informatics in Education, 6(2), 335-358.

Kynigos, C., & Grizioti, M. (2018). Programming Approaches to Computational Thinking: Integrating Turtle Geometry, Dynamic Manipulation and 3D Space. Informatics in Education, 17(2), 321-340. https://doi.org/10.15388/infedu.2018.17

Kynigos, C., & Latsi, M. (2007). Turtle's Navigation and Manipulation of Geometrical Figures Constructed by Variable Processes in a 3d Simulated Space. *Informatics in Education*, 6 (2), 359-372. https://doi.org/10.15388/infedu.2007.23

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. & Strasser, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present and future*, 273-304. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Li, Y. & Schoenfeld, A. H. (2019). Problematizing teaching and learning mathematics as “given” in STEM education. *International Journal of STEM education, 6:44.* https://doi.org/10.1186/s40594-019-0197-9

McClelland, D. C. (1973). Testing for competence rather than for "intelligence." *American Psychologist, 28*(1), 1-14. https://doi.org/10.1037/h0034092

Mitchelmore, M.C., White, P. (2000). Development of Angle Concepts by Progressive Abstraction and Generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 209-238. https://doi.org/10.1023/A:1003927811079

Noss, R. & Hoyles, C. (1996). Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. http://dx.doi.org/10.1007/978-94-009-1696-8

Niss, M. A. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM project.

Niss, M. (2015). Mathematical competencies and PISA. In K. Stacey, & R. Turner (Eds.), Assessing mathematical literacy: The PISA experience (pp. 35–56). New York: Springer.

Niss, M., & Højgaard, T. (2011). Competencies and Mathematical Learning – Ideas and Inspiration for the Development of Mathematics Teaching and Learning in Denmark (No. 485). Roskilde: MFUFA, Roskilde University. English translation of part I-VI of Niss and Jensen (2002).

Niss, M. & Højgaard, T. (2019). Mathematical competences revisited. Educational Studies in Mathematics, 102, 9-28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

Orhun, N. (2022). Student's Mistakes and Misconceptions on Teaching of Trigonometry. Retrieved from: https://www.researchgate.net/publication/268187349_Student's_Mistakes_and_Misconceptions_on_Teaching_of_Trigonometry

Papert, S. (1980). *Mindstorms. Children, Computers and Powerful Ideas*. Boston, Massachusetts: Harvester Press.

Papert, S., & Harel, I. (1991). *Situating Constructionism*. Ablex Publishing Corporation. Retrieved from: https://web.media.mit.edu/~calla/web_comunidad/Reading-En/situating_constructionism.pdf

Piaget, J. (1975). 'Piaget's Theory'. In P. B. Neubauer (Eds.), The Process of Child Development, 164-212. New York: Jason Aronson.

Psycharis, G. & Kynigos, C. (2009). Normalising Geometrical Figures: Dynamic Manipulation and Construction of Meanings for Ratio and Proportion. Research in Mathematics Education, 11:2, 149-166. http://dx.doi.org/10.1080/14794800903063349

Radford, L. (1996). The roles of Geometry and Arithmetic in the development of

Elementary Algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, L. Lee (Eds.), Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching, 39-53. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Rudi, Suryadi, D., & Rosjanuardi, R. (2020). Identifying Students' Difficulties in Understanding and Applying Pythagorean Theorem with an Onto Semiotic Approach. MaPan: Jurnal Matematika dan Pembelajaran, 8(1), 1-18. https://doi.org/10.24252/mapan.2020v8n1a1

Sinclair, N., Yerushalmy, M. (2016). Digital Technology in Mathematics Teaching and Learning. In: Gutiérrez, Á., Leder, G.C., Boero, P. (Eds) The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education, 237-274 SensePublishers, Rotterdam. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_7

Schoenfeld, A. H. (2013). Classroom observations in theory and practice. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 45(4), 607-621, doi:10.1007/s11858-012-0483-1

Schoenfeld, A.H. (2017). Teaching for Robust Understanding for Essential Mathematics. In T. McDougal (Ed.), *Essential Mathematics for The Next Generation: What and How Students Should Learn* (pp.104-129). Tokyo, International Math-teacher Professionalization Using Lesson Study (IMPULUS): Tokyo Gakugei University.

Schoenfeld, A. H. (2018). Video analyses for research and professional development: the teaching for robust understanding (TRU) framework. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education,* 50, 491-506. doi:10.1007/s11858-017-0908-y

Schoenfeld, A. H., & the Teaching for Robust Understanding Project. (2016). *An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework.* Berkeley, CA: Graduate School of Education. Retrieved from http://map.mathshell.org/trumath.php

Schoenfeld, A. H. & Arcavi, A. (1988). On the Meaning of Variable. Mathematics Teacher, 81(6), 420-427. https://doi.org/10.5951/MT.81.6.0420

Skemp, R. (1986). The Psychology of Learning Mathematics. Harmondsworth: Penguin.

Stacey, K. & Turner, R. (2015). The Evolution and Key Concepts of the PISA Mathematics Frameworks. In K. Stacey, R. Turner (Eds.), Assessing Mathematical Literacy, 2-33. Springer International Publishing, Switzerland. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10121-7_1

Van der Klink, M.R. and Boon, J. (2003). 'Competencies: the triumph of a fuzzy concept', Int. J. Human Resources Development and Management, 3(2), 125-137. https://doi.org/10.1504/IJHRDM.2003.002415

White, R. W. (1959). Motivation reconsidered: The concept of competence. *Psychological Review*, 66(5), 297-333. https://doi.org/10.1037/h0040934

Wilensky, U. & Papert, S. (2010). Restructurations: Reformulations of knowledge disciplines through new representational forms. *Constructionism.* Retrieved from: https://ccl.northwestern.edu/2010/wilensky_restructurations_Constructionism%202010-latest.pdf

Ελληνόγλωσση

Κυνηγός, Χ. (2011). Το Μάθημα της Διερεύνησης. Αθήνα: Τόπος.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι – ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

Δραστηριότητα 1: «Ας κατασκευάσουμε!»
Φτιάξτε μία διαδικασία στο MaLT η οποία όταν εκτελείται να δημιουργεί μία γραφική αναπαράσταση που να μοιάζει με το κεφαλαίο γράμμα Ν. Στη διαδικασία αυτή, τα σημεία της βάσης του γράμματος φροντίστε να είναι στην ίδια οριζόντια ευθεία, δηλαδή σαν να ακουμπάει το γράμμα Ν σε μία γραμμή του τετραδίου σας.

Δραστηριότητα 2: «Μάντεψε!»
Δίνεται η εξής διαδικασία:

```
ΓΙΑ μυστήριο :χ :ω
μ :χ
δ 135
μ 100
α :ω
μ :χ
ΤΕΛΟΣ
```

α. Πριν εκτελέσετε την παραπάνω διαδικασία, μπορείτε να προβλέψετε τι θα μπορούσε να σχηματίζει το ίχνος που αφήνει το σπουργίτι πίσω του; Γράψτε πιθανές προβλέψεις σας ξεχωριστά ο καθένας και στη συνέχεια μοιραστείτε με τον συνεργάτη σας τις ιδέες σας, αιτιολογήστε την πρόβλεψή σας και καταλήξτε από κοινού σε μία τελική πρόβλεψη για τον παραπάνω κώδικα - μυστήριο.

β. Τώρα εκτελέστε τον κώδικα με όποιες τιμές θέλετε εσείς. Με τι μοιάζει αυτό που σχηματίζει τελικά; Αν το μαντέψατε, γράψτε τι ήταν αυτό που σας βοήθησε να το προβλέψετε, πώς σκεφτήκατε ή σε τι βασιστήκατε. Αν πάλι δεν βρήκατε το μυστήριο, δεν πειράζει! Γράψτε τον τρόπο που σκεφτήκατε και ποιο στοιχείο - εντολή σας «ξεγέλασε».

γ. Πώς θα μπορούσατε να βελτιώσετε τον παραπάνω κώδικα ώστε να σχηματίζει ένα πιο «όμορφο» γράμμα Ν χωρίς αυτό να αλλοιώνεται με την κίνηση των κερσόρων; Γράψτε τον νέο κώδικα παρακάτω και αιτιολογήστε τις αλλαγές που κάνατε σε αυτόν.

Νέος Κώδικας	Αλλαγές + Αιτιολόγηση

<u>Δραστηριότητα 3:</u> «Βρες τον κώδικα!»

Εκτελέστε τη διαδικασία "mystery" που δίνεται στο εργαλείο MaLT.

α. Μπορείτε να συντάξετε τις εντολές του κώδικα οι οποίες να κατασκευάζουν το μοντέλο που απεικονίζεται γραφικά στην οθόνη σας;

β. Ο τελικός κώδικας που δημιουργήσατε στο ερώτημα (α) έχει κάποια διαφορά σε σύγκριση με τους προηγούμενους κώδικες που δημιουργήσατε για το γράμμα Ν; Αν ναι, ποια ή ποιες είναι αυτές;

<u>Δραστηριότητα 4:</u> «Ας μαστορέψουμε λίγο ακόμα!»

Σε μία νέα καρτέλα, ανοίξτε πάλι το MaLT και προσπαθήστε να δημιουργήσετε μία διαδικασία η οποία όταν εκτελείται να δημιουργεί το μοντέλο του κεφαλαίου γράμματος Ζ χωρίς αυτό να αλλοιώνεται.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ – ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

Δραστηριότητα 1: «Μάντεψε!»

Δίνεται η εξής διαδικασία:

```
ΓΙΑ αίνιγμα :χ :ψ :ω
δεξιά 90
μπροστά :χ
πίσω :χ
αριστερά 45
μπροστά 80
αριστερά :ω
μπροστά :ψ
δεξιά 135
μπροστά :χ
ΤΕΛΟΣ

σβγ
αίνιγμα 120 50 50
```

α. Πριν εκτελέσεις την παραπάνω διαδικασία στο MaLT2, μπορείς να προβλέψεις τι θα μπορούσε να σχηματίζει το ίχνος που αφήνει το αεροπλάνο πίσω του; Γράψε πιθανές προβλέψεις.

β. Τώρα εκτέλεσε τον κώδικα. Με τι μοιάζει αυτό που σχηματίζει τελικά; Είσαι ελεύθερος να το αλλάξεις όπως εσύ επιθυμείς.

γ. Αφού ολοκληρώσεις τη δραστηριότητα, θα παρουσιάσεις στο συμμαθητή σου το μοντέλο που κατασκεύασες αιτιολογώντας τις επιλογές σου.

Δραστηριότητα 2: «Έτοιμοι για το καλοκαίρι…!»

Και καθώς το καλοκαίρι πλησιάζει, κάποιες λέξεις φωνάζουν από μακριά!
Όμως κάποιος θέλει να μας τις χαλάσει! Τι λέτε; Θα καταφέρετε να τις διορθώσετε;

(Προσέξτε όταν κάποιος κινεί τους μεταβολείς, να αυξομειώνεται η λέξη χωρίς να αλλοιώνονται τα γράμματα ή ολόκληρη η λέξη.)

«Δημιουργήστε τη δική σας δυναμική αφίσα!»

Τώρα είστε ελεύθεροι να κατασκευάσετε στο MaLT2 κάποια λέξη που εκφράζει την ομάδας σας, κάποιο μήνυμα που θέλετε να στείλετε σε κάποιον ή ακόμα και κάποιο δόμημα (σχήμα), χρησιμοποιώντας τα γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου! 😊

Μπορείτε να δημιουργήσετε ακόμα και ένα μικρό βιντεάκι και να το μοιραστείτε με τους συμμαθητές σας ή τους φίλους σας!

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ III - Πες μας για σένα! (pre test)

1. Σου αρέσει να δουλεύεις μόνος σου ή μέσα σε ομάδα; Γιατί;

   ____
   ____
   ____
   ____

2. Πόσο νομίζεις ότι «το έχεις» με τα μαθηματικά; Κύκλωσε την απάντηση που σε εκφράζει:

   a. Ούτε καν! Δεν το έχω καθόλου!
   b. Ε, λίγο…
   c. Μέτρια, αλλά κάτι καταφέρνω.
   d. Τα πάω καλά τις περισσότερες φορές.
   e. Το΄χω με τα μαθηματικά!

3. Τι θεωρείς ότι σου αρέσει στα μαθηματικά;

   ____
   ____
   ____
   ____

4. Τι θεωρείς ότι δεν σου αρέσει στα μαθηματικά ή τι σε δυσκολεύει;

   ____
   ____
   ____
   ____

5. Σου αρέσει να ασχολείσαι με τον υπολογιστή; Τι κάνεις συνήθως σε αυτόν;

   ____
   ____
   ____
   ____

6. Έχεις ασχοληθεί με το ίδιο ή με κάποιο άλλο προγραμματιστικό εργαλείο;
   Αν ναι, τι σου άρεσε σε αυτό;

   ____
   ____
   ____
   ____

Σε ευχαριστώ!

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ IV - Πίνακας Εντολών του “MaLT2”

Για να εκτελέσουμε μία εντολή ή μια διαδικασία, γράφουμε τις εντολές στο δεξιά πάνω παράθυρο του συντάκτη, τις επιλέγουμε και πατάμε το 

Σε όλες τις εντολές που ακολουθούν, μπορούμε στη θέση των σταθερών αριθμών να θέσουμε όπου επιθυμούμε μεταβλητές, τοποθετώντας το σύμβολο **:** μπροστά από το γράμμα που συμβολίζει την κάθε μεταβλητή.

Εντολή	Περιγραφή	Παράδειγμα
Κίνηση και Κατεύθυνση Σπουργιτιού		
μπροστά / μ forward / fd	Το σπουργίτι προχωράει μπροστά όσες μονάδες μήκους είναι ο αριθμός που ακολουθεί.	μπροστά 70 ή μ 70
πίσω / π backward / bk	Το σπουργίτι προχωράει πίσω όσες μονάδες μήκους είναι ο αριθμός που ακολουθεί.	πίσω 40 ή π 70
δεξιά / δ right / rt	Το σπουργίτι στρίβει δεξιά (χωρίς να αλλάζει θέση) τόσες μοίρες όσες ο αριθμός που ακολουθεί.	δεξιά 35
αριστερά / α left / lt	Το σπουργίτι στρίβει αριστερά (χωρίς να αλλάζει θέση) τόσες μοίρες όσες ο αριθμός που ακολουθεί.	αριστερά 180
πάνω up	Το σπουργίτι στρίβει προς τα πάνω (κοιτάει πάνω) τόσες μοίρες όσες ο αριθμός που ακολουθεί.	πάνω 50
κάτω down	Το σπουργίτι στρίβει προς τα κάτω (κοιτάει κάτω) τόσες μοίρες όσες ο αριθμός που ακολουθεί.	κάτω 90
περιστροφήδεξιά / πδ roll_right / rr	Το σπουργίτι περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του και στρίβει προς τα δεξιά τόσες μοίρες όσες ο αριθμός που ακολουθεί.	πδ 40
περιστροφήαριστερά / πα roll_left / rl	Το σπουργίτι περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του και στρίβει προς τα αριστερά τόσες μοίρες όσες ο αριθμός που ακολουθεί.	πα 60
Ίχνος και Θέση Σπουργιτιού		
στυλοπάνω / σπ penup / pu	Το σπουργίτι δεν αφήνει ίχνος όταν μετακινείται μετά από αυτή την εντολή.	

στυλοκάτω / σκ pendown / pd	Το ίχνος του σπουργιτιού εμφανίζεται μετά από αυτή την εντολή.	
σβησεγραφικα / σβγ cleargraphics / cs	Σβήνει όλο το ίχνος από τη σκηνή και επιστρέφει το σπουργίτι στην αρχική του θέση (0, 0, 0).	
θεσεχρωμαστυλο [ ] setpencolor [ ]	Αλλάζει το χρώμα του ίχνους που αφήνει το σπουργίτι.	Μαύρο [0 0 0] Κόκκινο [255 0 0] Πράσινο [0 255 0] Μπλε [0 0 255] Άσπρο [255 255 255]
εμφανισεχελωνα / εχ showturtle / st	Εμφανίζει το σπουργίτι στη σκήνη.	
κρυψεχελωνα / κχ hideturtle / ht	Κρύβει το σπουργίτι από τη σκηνή.	
στηναρχη home	Μετακινεί το σπουργίτι στην αρχική του θέση, δηλαδή στο κέντρο της σκηνής (0, 0, 0).	
θεσεθεση [ ] setpos [ ]	Θέτει το σπουργίτι στη θέση (x, y, z) που ορίζουν οι τρεις αριθμοί που ακολουθούν.	θεσεθεση [40 -30 70]
	Μαθηματικές Εντολές	
ρίζα *αριθμός* sqrt *number*	Δίνει το αποτέλεσμα της τετραγωνικής ρίζας του αριθμού που ακολουθεί.	ρίζα 49 → 7
δύναμη *β ν* power *b n*	Δίνει το αποτέλεσμα της δύναμης που δημιουργείται με βάση β και εκθέτη ν.	δύναμη 2 3 → 8
ημ *μοίρες* sin *degrees*	Δίνει την τιμή του ημιτόνου της γωνίας (σε μοίρες).	ημ90 → 1
συν *μοίρες* cos *degrees*	Δίνει την τιμή του συνημίτονου της γωνίας (σε μοίρες).	συν60 → 0.5
εφ *μοίρες* tan *degrees*	Δίνει την τιμή της εφαπτομένης της γωνίας (σε μοίρες).	εφ45 → 1
τοξημ *αριθμός* arcsin *number*	Δίνει την τιμή του τόξου ημιτόνου του αριθμού που δίνεται.	τοξημ0.5 → 30
τοξσυν *αριθμός* arccos *number*	Δίνει την τιμή του τόξου συνημιτόνου του αριθμού που δίνεται.	τοξσυν0.5 → 60
τοξεφ *αριθμός* arctan *number*	Δίνει την τιμή του τόξου εφαπτομένης του αριθμού που δίνεται.	τοξεφ1 → 45
πι pi	Δίνει την τιμή του αριθμού π.	3.14

Ορισμός Διαδικασίας και Επιπρόσθετες Εντολές		
ΓΙΑ όνομα_διαδικασίας εντολή_1 εντολή_2 … εντολή_ν ΤΕΛΟΣ	Δημιουργία διαδικασίας με σταθερούς αριθμούς.	ΓΙΑ δρόμος μπροστά 30 δεξιά 90 μπροστά 100 αριστερά 40 ΤΕΛΟΣ
ΓΙΑ όνομα_διαδ. :μεταβλητή εντολή_1 εντολή_2 … εντολή_ν ΤΕΛΟΣ όνομα_διαδ. *αριθμός*	Δημιουργία διαδικασίας με μεταβλητές.	ΓΙΑ δρόμος :χ μπροστά :χ δεξιά 90 μπροστά (:χ+20) αριστερά 40 ΤΕΛΟΣ δρόμος 80
επανάλαβε ν [εντολές] repeat n [commands]	Επαναλαμβάνονται οι εντολές που υπάρχουν μέσα στις αγκύλες ν φορές.	ΓΙΑ τετράγωνο επανάλαβε 4 [μπροστά 70 δεξιά 90] ΤΕΛΟΣ
αν *συνθήκη* [εντολές] if *condition* [commands]	Αν η συνθήκη είναι αληθής, τότε εκτελείται το σύνολο των εντολών μέσα στις αγκύλες [].	αν :κ > 5 [μ 100 δ 40]
αναλλιως *συνθήκη* [εντολές_A] [εντολές_B] ifelse *condition* [commands_A] [commands_B]	Αν η συνθήκη είναι αληθής, τότε εκτελείται το σύνολο των εντολών που υπάρχει μέσα στις πρώτες αγκύλες [A]. Αλλιώς, αν η συνθήκη είναι ψευδής εκτελούνται οι εντολές που υπάρχουν μέσα στις δεύτερες αγκύλες [B].	αναλλιως :x > 3 [α 90 μ 30] [δ 80 π 70]
φτιάξε “μεταβλητή αριθμός make “variable number	Ορίζει τη μεταβλητή και της δίνει μία τιμή (τον αριθμό που ακολουθεί). Στη συνέχεια, μπορείς να ξανακαλείς τη μεταβλητή όπως την έχεις ορίσει ή μπορείς ακόμη και να της αλλάξεις τιμή, όπως στο παράδειγμα της διαδικασίας που φαίνεται δίπλα.	TO test :x make "x 90 repeat 3 [fd :x rt 30 make "x (:x+50)] END

ΚΑΛΟ ΜΑΣΤΟΡΕΜΑ!
http://etl.ppp.uoa.gr/malt2/