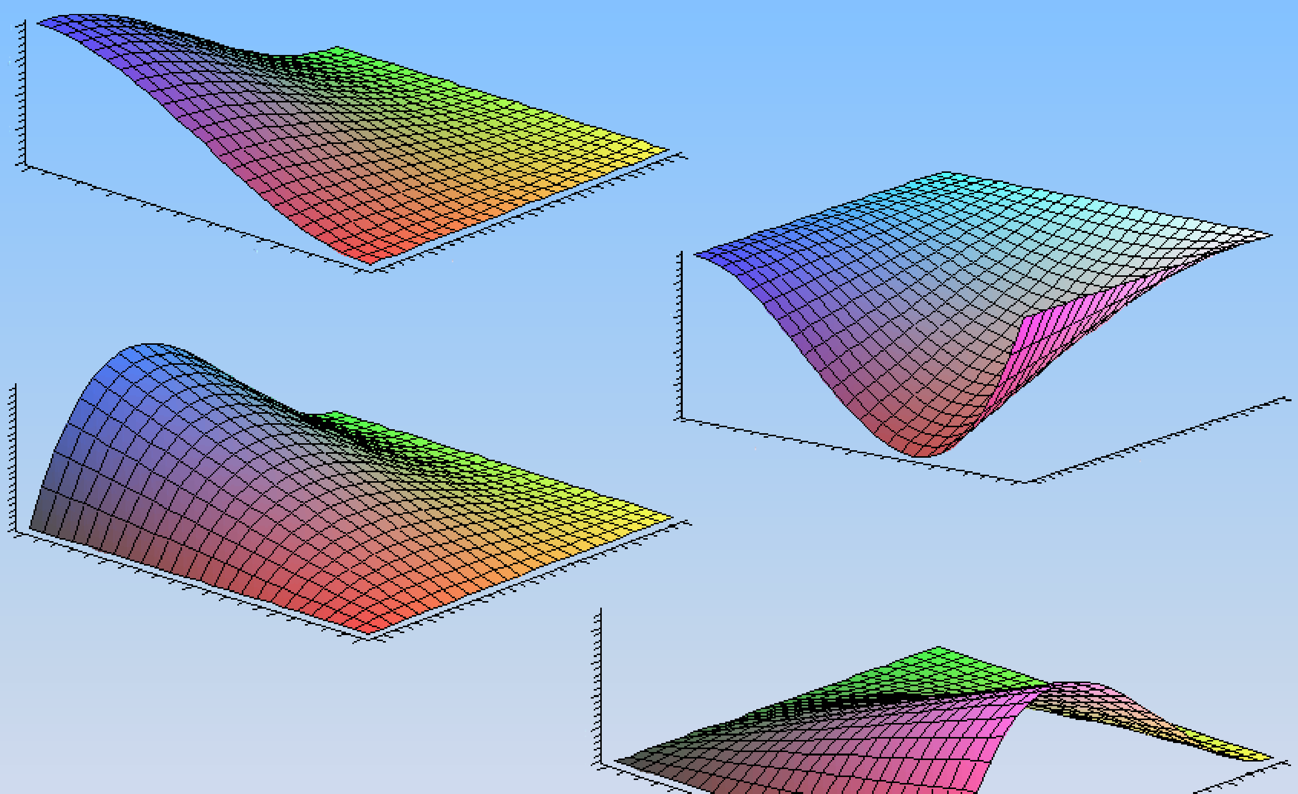
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΛΕΠΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ



Διπλωματική Εργασία

Τσιλεδάκης Γεώργιος

Αθήνα 2022

Επιβλεπων Καθηγητης : Τριανταφυλλος-Φιλης Κοκκινος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Ονοματεπώνυμο φοιτητή: **Τσιλεδάκης Γεώργιος**

Τίτλος Διπλωματικής Εργασίας:

ΑΝΑΛΥΣΗ ΛΕΠΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Η διπλωματική εργασία εξετάστηκε επιτυχώς από την κάτωθι
Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή:

Digitally signed by Triantafyllos-Filis Kokkinos
Date: 2022.10.22 14:19:08 +03'00'

Τριαντάφυλλος - Φίλης Κόκκινος
Αναπληρωτής Καθηγητής
Επιβλέπων

Nikolaos Pnevmatikos
Digitally signed by Nikolaos Pnevmatikos
Date: 2022.11.02 09:15:33 +02'00'

Νικόλαος Πνευματικός
Καθηγητής
Μέλος

Stavroula Denezaki
Digitally signed by Stavroula Denezaki
Date: 2022.10.22 14:54:16 +03'00'

Σταυρούλα Δενεζάκη
Λέκτορας
Μέλος

Οκτώβριος 2022, ΑΙΓΑΛΕΩ

ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο κάτωθι υπογεγραμμένος **Τσιλεδάκης Γεώργιος** του Παύλου, με αριθμό μητρώου 44546244, φοιτητής του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής της Σχολής Μηχανικών του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών, δηλώνει υπεύθυνα ότι:

«Είμαι συγγραφέας της παρούσας διπλωματικής εργασίας με τίτλο *ΑΝΑΛΥΣΗ ΛΕΠΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ* και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, οι όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε ακριβώς είτε παραφρασμένες, αναφέρονται στο σύνολό τους, με πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών, που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία έχει συγγραφεί από μένα αποκλειστικά και αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου, όσο και του Ιδρύματος.

Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του διπλώματός μου».

Ο Δηλών

Γ. Τσιλεδάκης

Τσιλεδάκης Γεώργιος

UNIVERSITY OF WEST ATTICA
SCHOOL OF ENGINEERING
Department of Civil Engineering

Abstract

Diploma Thesis Title:

Analysis of Thin Plates
Using the Finite Element Method

Author: **Tsiledakis George** (October 2022)

This diploma thesis studies thin isotropic rectangular plates subjected to distributed loads over different parts of the structure and being supported with different types of supports along their boundaries. This problem is very complicated and its solution can be achieved numerically using the Finite Element Method (FEM).

Initially, there is a presentation and thorough study of the theory of thin plates and their equations. The plate is studied in the three dimensions and the analysis of the differential equation of the problem and the accompanying equations are explicitly discussed and analyzed. This procedure is required in order to develop the mathematical modeling of the typical element. The adopted finite element is the rectangular four-node one for which each node has three degrees of freedom. These are the deflection and its derivatives with respect to the two in-plane directions of the plate (x and y). Therefore, each element has twelve shape functions and these have to be determined in a closed form. Since this task is very tedious, it is achieved by using symbolic algebra and the Maple software. The finite element model for the analysis of rectangular thin plates is implemented into a Matlab code. The data, which are the material properties, the plate geometry including the nodal coordinates and connectivity and, also, the loading of the plate are introduced manually through an Excel file. Similarly, the results are rendered into another Excel file and they include nodal deflections, slopes in both plate directions and stresses.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η διπλωματική αυτή έχει σκοπό την ανάλυση των ισότροπων ορθογώνιων λεπτών πλακών πάνω σε οποιαδήποτε στήριξη και επιβάλλοντας κατανεμημένα φόρτια σε διάφορα μέρη πάνω στην πλάκα. Για να μπορέσουμε να προσεγγίσουμε κάτι τέτοιο αφού είναι περίπλοκο. Η λύση επιτυγχάνεται με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method, FEM) και με την μέθοδος των συνοριακών στοιχείων (Boundary Element Method, BEM). Στην εργασία η ανάλυση γίνεται με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method, FEM).

Αρχικά γίνεται μελέτη της θεωρίας των λεπτών πλακών και των εξισώσεών τους. Η συμπεριφορά της πλάκας μελετάται στους τρεις άξονες (x,y,z), όπου αναλύεται η διαφορική εξίσωση της πλάκας καθώς και οι υπόλοιπες εξισώσεις και η μεταξύ τους σχέση. Είναι βήματα απαραίτητα καθώς πρέπει να αναλυθεί ένα τυπικό στοιχείο της πλάκας, έτσι ώστε να μπορέσει υπάρξει λύση ακριβής καθώς είναι περίπλοκο πρόβλημα.

Γίνετε ανάλυση ενός ορθογωνίου πεπερασμένου στοιχείου με τέσσερεις κόμβους, όπου ο κάθε κόμβος έχει τρείς βαθμούς ελευθερίας. Επομένως, σε κάθε τέτοιο στοιχείο προκύπτουν δώδεκα άγνωστοι. Σε αυτό το σημείο γίνεται επίλυση με την μέθοδο Lagrange σε δώδεκα συστήματα δώδεκα εξισώσεων. Όπου ανάλογα με τις συνθήκες διαμορφώνονται οι εξισώσεις στην προκειμένη περίπτωση, η παραγώγιση της βύθισης κάθε κόμβου ως προς την κατεύθυνση x και y αντίστοιχα δείχνουν την κλήση της κατεύθυνσης. Η αναλυτική επίλυση γίνεται στο πρόγραμμα Maple, που έχει την δυνατότητα να κάνει γρήγορα πολλές πράξεις και με εύκολο τρόπο. Πάνω σε αυτό το πρόγραμμα όπου έχει δυνατότητα εισαγωγής και εξαγωγής πίνακα λύνεται και το μητρώο στιβαρότητας της πλάκας, με βάση τις αναλυτικές εξισώσεις της πλάκας.

Μέσω του προγράμματος Matlab έχει αναπτυχθεί κώδικας εφαρμογής της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση της πλάκας. Ο κώδικας εισάγει πίνακες από το Excel ως δεδομένα που μπαίνουν χειροκίνητα, τα δεδομένα αυτά είναι δεδομένη μετατόπιση κόμβων της πλάκας κατανεμημένη τάση με βάση δυο κόμβους, τις συντεταγμένες κόμβων και ιδιότητες υλικών. Στην συνέχεια και αφού γίνετε εισαγωγή από το Maple το μητρώο στιβαρότητας της πλάκας και κάποιες παραγωγίσεις όπου χρειάζονται με βάση τις εξισώσεις για να γίνει επεξεργασία ώστε να βγουν τα αποτελέσματα. Με το που γίνει η επεξεργασία τα αποτελέσματα (τάσεις μετατοπίσεις ροπές δυνάμεις) γράφονται στα επόμενα δυο φύλλα του Excel από όπου έγινε η εισαγωγή, κάνει και ένα σχέδιο τρισδιάστατο με την πλάκα και τις μετατοπίσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΑΚΩΝ

Πλάκα λέγεται ο επίπεδος επιφανειακός φορέας που το πάχος του είναι μικρό σε σύγκριση με τις άλλες δυο διαστάσεις του και η φόρτιση του, τις περισσότερες φορές, είναι κάθετη στην επιφάνειά του.

Επιφανειακός φορέας μπορεί να είναι δίσκος, κέλυφος πλάκα, πτυχωτοί φορείς με τη μια διάσταση να είναι πολύ μικρότερη σε σχέση με τις άλλες δύο, επομένως αυτή λέμε ότι είναι το πάχος της. Διακρίνονται ανάλογα με την μορφή της μέσης επιφάνειας τους, της επιφάνειας που διχοτομεί σε κάθε θέση το πάχος της. Δηλαδή το κέλυφος έχει μέση επιφάνεια καμπύλη οι πτυχωτοί φορείς έχει μέση επιφάνεια που αποτελείτε από τουλάχιστον δυο επίπεδες επιφάνειες. Η διαφορά ανάμεσα σε επιφανειακών φορέων σε δίσκους και πλάκες, οι δίσκοι υπόκειντai φόρτιση αποκλειστικά στην μέση της επιφάνειας τους ενώ οι πλάκες υποβάλλονται σε φόρτιση κάθετη στο μέσο επίπεδο τους.

Τα σύνορα μιας πλάκας μπορούν να αποτελούνται είτε από ευθείες η καμπύλες γραμμές. Μπορεί να στηρίζεται με σημειακή η γραμμική στήριξη στο σύνορο της, καθώς με σημειακή η γραμμική ή και επιφανειακή στήριξη στο εσωτερικό της. Μπορεί να είναι απλά εδραζόμενη, πακτωμένη ή ελαστική.

Ο τρόπος που παραλαμβάνει τα φορτία η πλάκα μοιάζει με των δοκών. Έτσι θα μπορούσαμε να προσομοιάσουμε την πλάκα με εσχάρα δοκών. Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι μια καλή προσέγγιση για το πως συμπεριφέρεται η πλάκα αφού διακόπτεται η συνέχεια του πραγματικού φορέα και αγνοείται η στερητική ακαμψία όπου στην ανάληψη φορτίων συμβάλλει.

Από την φόρτιση η πλάκα έχει παραμόρφωση οπότε τα σημεία της μέσης επιφάνειας έχουν μικρές κάθετες μετατοπίσεις στο επίπεδο. Έτσι παραμορφώνεται η επιφάνια της πλάκας. Τις μετατοπίσεις αυτές τις ονομάζουμε βέλη κάμψεως. Όταν τα μέγιστα βέλη των σημείων τις πλάκας, τα συγκρίνουμε με το πάχος της πλάκας και είναι μικρό ποσοστό του περίπου <20% τότε λέμε ότι η πλάκα έχει μικρά βέλη. Ενώ όταν είναι μεγάλο ποσοστό του πάχους της πλάκας περίπου>20% τότε λέμε ότι η πλάκα έχει μεγάλα βέλη.

Οι πλάκες διακρίνονται σε τέσσερις κατηγορίες, με τον τρόπο που μεταβαίνουν τα φορτία προς τις στηρίξεις, σε κάθε μια από τις περιπτώσεις αντιστοιχεί διαφορετικός τρόπος υπολογισμού.

- Λεπτές πλάκες με μικρά βέλη κάμψεως

Λεπτές πλάκες με μικρά βέλη κάμψεως ονομάζουμε αυτές που το πάχος τους κυμαίνεται από το 1/10 έως το 1/50 της μικρότερης από τις δυο διαστάσεις της μέσης επιφάνειας τους. Οι πλάκες αυτές τις συναντάμε πιο συχνά και αναλύονται με την θεωρία του Kirchhoff, σε αυτήν την περίπτωση ισχύει η αρχή της επαλληλίας και τα κάθετα φορτία μεταβιβάζονται στις στηρίξεις μέσω των τεμνουσών δυνάμεων.

- Λεπτές πλάκες με μεγάλα βέλη κάμψεως

.Λεπτές πλάκες με μεγάλα βέλη κάμψεως ονομάζουμε αυτές που το πάχος τους είναι μικρότερο του 1/50 της πιο μικρής διάστασης της μέσης επιφάνειας του. Η μετάβαση των κάθετων φορτίων γίνεται με τις τέμνουσες δυνάμεις και σύγχρονος δυνάμεις συν επίπεδες με την ελαστική επιφάνειας της πλάκας που τις ονομάζουμε μεμβρανικές δυνάμεις. Η ανάλυση τους γίνεται με την θεωρία του von Karman. Στην πράξη αποφεύγεται η κατασκευή τους λόγο λειτουργικών προβλημάτων. Ενώ η αρχή της επαλληλίας δεν εφαρμόζετε.

- Πολύ λεπτές πλάκες η μεμβράνες

Η κατηγορία αυτή μπορεί να θεωρηθεί μια υποκατηγορία στις λεπτές πλάκες με μεγάλα βέλη κάμψεως. Το πάχος των μεμβρανών είναι πολύ μικρό αρά το προσεγγίζουμε με μηδενική ακαμψία, τα κάθετα φορτία μεταβιβάζονται μόνο από τις μεμβρανικές δυνάμεις.

- Χονδρές πλάκες

Χονδρές πλάκες ονομάζουμε αυτές που το πάχος τους είναι από το 1/5 έως το 1/10 της πιο μικρής διάστασης της μέσης επιφάνειας του και η συμπεριφορά τους μοιάζει περισσότερο σαν τρισδιάστατος φορέας από επιφανειακός φορέας. Η ανάλυση τους γίνεται με θεωρίες που έχουν υπόψιν τους διατμητικές παραμορφώσεις, με την θεωρία Reissner ή την θεωρία Mindlin. Ο υπολογισμός τους βασίζεται στην γενική θεωρία της ελαστικότητας η ένταση τους ορίζεται με την βοήθεια τάσεων αφού είναι αδύνατον να ορισθεί με την βοήθεια εντατικών μεγεθών διατμητικών.

Στον παρακάτω πίνακα 2.1 παρουσιάζονται οι κατηγορίες πλακών που προαναφέρθηκαν καθώς και η θεωρία ανάλυση τους.

	Χονδρές πλάκες	Λεπτές πλάκες με μικρά βέλη κάμψεως	Λεπτές πλάκες με μεγάλα βέλη κάμψεως η πολύ λεπτές πλάκες
min{d/lx, d/ly}	1/5-1/10	1/10-1/50	<1/50
	Λαμβάνονται υπόψη διατμητικές παραμορφώσεις	Συνήθως οι πιο συναντόμενες πλάκες σε έργα πολιτικού μηχανικού	Γεωμετρική μη γραμμικότητα με μεβρανική παραμόρφωση
	Reissner Mindlin	Kirchhoff	Von Karman

Πίνακας 2.1 κατηγορίες πλακών και θεωρία ανάλυση τους [1].

Σε αυτήν την διπλωματική θα ασχοληθούμε με την ανάλυση λεπτών πλακών με μικρό βέλος κάμψης. Με την θεωρία του Kirchhoff είναι μια καλή προσέγγιση αφού ισχύουν οι παρακάτω παραδοχές.

1. Το υλικό να είναι γραμμικό ελαστικό και ομογενές.
2. Να είναι επίπεδη η μέση επιφάνειας της πλάκας.
3. Οι δυο διαστάσεις της πλάκας να είναι πολύ μεγαλύτερες σε σχέση με το πάχος της
4. Μικρές στροφές διατομών

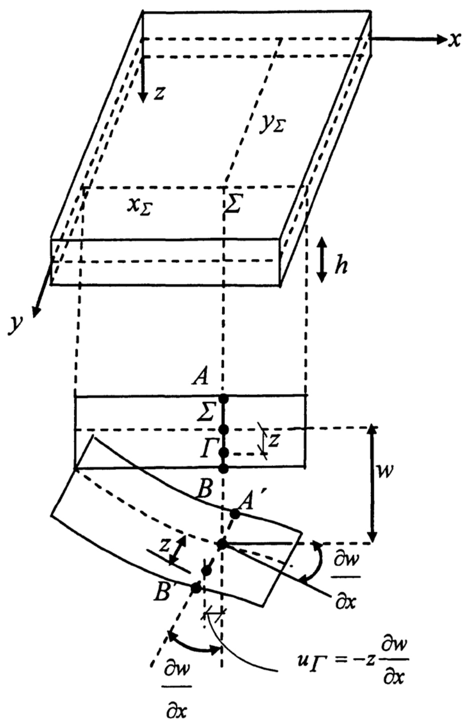
5. Το πάχος της πλάκας να είναι πολύ μεγαλύτερο σε σχέση με τα βέλη κάμψεως. Αρά οι κλίσεις της ελαστικής επιφάνειας να είναι πολύ μικρές

6. Πριν και μετά την παραμόρφωση οι ευθείες κάθετες γραμμές παραμένουν ευθείες κάθετες στην μέση επιφάνεια. Επομένως οι διατμητικές παραμωρφώασεις γ_{xz} και γ_{yz} θεωρούνται αμελητέες όπως και οι παραμορφώσεις ε_z η επιμήκυνση των κάθετων.

7. Σε σχέση με την κατεύθυνση της καθέτου στην μέση επιφάνεια ορθή της τάση σ_z είναι πολύ μικρότερη σε σχέση με τις άλλες δυο σ_x και σ_y. Αυτό δεν μπορεί να συμβεί στα κάθετα συγκεντρωμένα φορτία.

2.1 Γεωμετρία καμπτόμενων λεπτών πλακών

Πριν την κάμψη της λεπτής πλάκας θεωρούμε ότι η μέση επιφάνεια της ταυτίζεται με το επίπεδο xy. Αφού η πλάκα φορτίζεται όλα τα σημεία της μέσης επιφάνειας έχουν μικρές μετατοπίσεις w κάθετες στο επίπεδο. Οι μετατοπίσεις αυτές ονομάζονται βέλη κάμψεως της πλάκας και η ελαστική επιφάνεια της w(x,y) η επιφάνεια κάμψεως της πλάκας.



Σχήμα 2.1 τομή καμπτόμενης πλάκας στον άξονα y [1].

Όπως παρατηρούμε στο παραπάνω σχήμα η τομή της καμπτόμενης πλάκας κάθετη στον άξονα y πριν και μετά την φόρτιση και την παραμόρφωση της. Μπορούμε να ορίσουμε την κλίση της επιφάνειας στον άξονα x

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.1}$$

Αντιστοίχως ορίζουμε την κλίση της ελαστικής επιφάνειας και ως προς τον άξονα y

$$\varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.2}$$

Σε μια τυχαία διεύθυνση n του επίπεδου xy που η γωνία του α με τον άξονα x

$$\phi_n = \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dn} \tag{2.3}$$

Και από τριγωνομετρία μπορούμε να φτάσουμε στην παρακάτω σχέση

$$\phi_n = \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\alpha \tag{2.4}$$

Η μέγιστη κλίση α_1 μπορούμε να την υπολογίσουμε από τον μηδενισμό της πρώτης παραγώγου της Εξ.(2.4) προς την μεταβλητή α

$$\tan\alpha_1 = \frac{\dfrac{\partial w}{\partial y}}{\dfrac{\partial w}{\partial x}} \tag{2.5}$$

Κάνοντας αντικατάσταση της γωνίας α_1 στην Εξ. (2.4) υπολογίζουμε την μέγιστη κλίση

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} \tag{2.6}$$

Αφού μηδενίσουμε το δεύτερο μέλος της Εξ. (2.4) υπολογίζουμε την διεύθυνση α_2 οπού η κλίση της ελαστικής επιφάνειας μηδενίζεται

$$\tan\alpha_2 = -\frac{\dfrac{\partial w}{\partial x}}{\dfrac{\partial w}{\partial y}} \tag{2.7}$$

Από τις Εξ.(2.5) και (2.7) εύκολα συμπεραίνουμε

$$\tan a_1 \tan a_2 = -1 \tag{2.8}$$

Επόμενος μπορούμε να διαπιστώσουμε από την Εξ. (2.8) ότι η μέγιστη και η μηδενική κλίση της ελαστικής επιφάνειας είναι μεταξύ τους κάθετες.

Σύμφωνα με την πέμπτη παραδοχή με την οποία τα βέλη κάμψεως της πλάκας είναι πολύ μικρά σε σχέση με το πάχος της πλάκας. Σε κάθε διεύθυνση η κλίση της ελαστικής επιφάνειας μπορούμε να την θεωρήσουμε ίση με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ελαστική επιφάνεια από το επίπεδο xy με αυτήν την διεύθυνση και το τετράγωνο της κλίσης σε σχέση με την μονάδα αυτή μπορούμε να το αμελήσουμε. Με βάση τα προηγούμενα η καμπυλότητα της μέσης επιφάνειας στο παράλληλο επίπεδο με το xz μπορούμε να το υπολογίσουμε με την σχέση

$$\frac{1}{r_x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = -\frac{\partial w^2}{\partial x^2} = k_x \tag{2.9}$$

Με τον αντίστοιχο τρόπο στο επίπεδο yz παράλληλο με την καμπυλότητα της μέση επιφάνειας υπολογίζουμε την σχέση

$$\frac{1}{r_y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = -\frac{\partial w^2}{\partial y^2} = k_y \tag{2.10}$$

Σε μια τυχαία διεύθυνση n στο επίπεδου xy με γωνία α προς τον άξονα x ορίζουμε την καμπυλότητα ως προς αυτήν την διεύθυνση

$$\frac{1}{r_n} = -\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right) = k_n \tag{2.11}$$

Κάνοντας αντικατάσταση την Εξ. (2.4) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha \tag{2.12}$$

Άρα ερχόμαστε στις παρακάτω εξισώσεις

$$\frac{1}{r_n} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\alpha\right) \Rightarrow$$

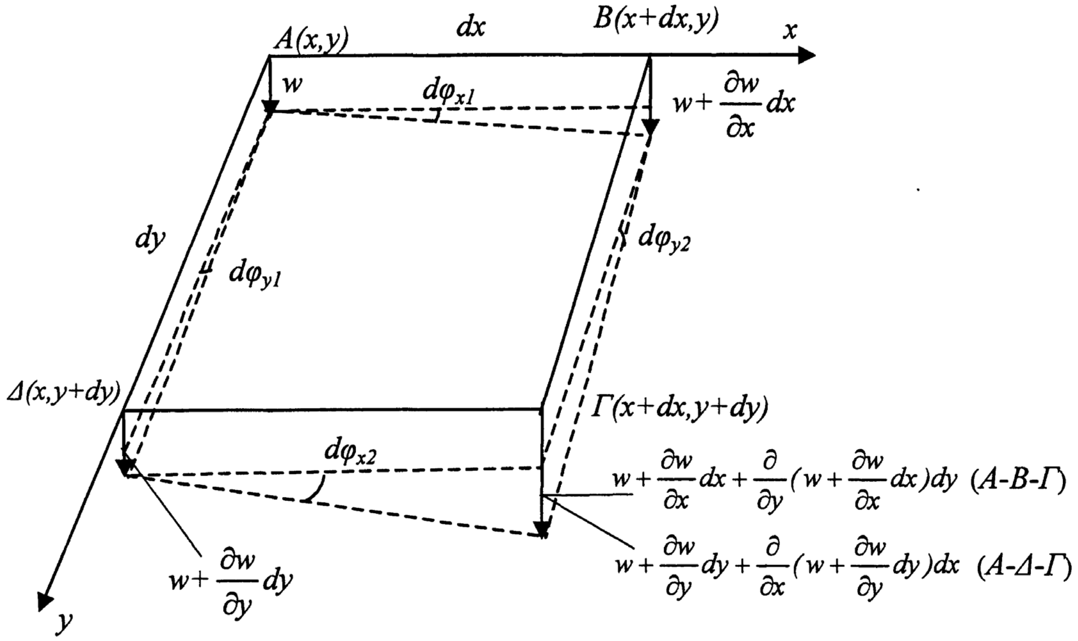
$$\frac{1}{r_n} = \frac{1}{r_x}\cos^2\alpha - 2\frac{1}{r_{xy}}\sin 2\alpha + \frac{1}{r_y}\sin^2\alpha \tag{2.13}$$

Για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε την καμπυλότητα κατά τυχαία διεύθυνση n σε ένα σημείο της μέσης επιφάνειας της πλάκας πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε

$$\frac{1}{r_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.14α}$$

$$\frac{1}{r_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{2.14β}$$

$$\frac{1}{r_{xy}} = -\frac{\partial^2 w}{\partial xy} \tag{2.15}$$



Σχήμα 2.2 Στοιχειώδες τμήμα πλάκας διαστάσεων dx, dy [1].

Από το σχήμα (2.2) παρατηρούμε το βέλος κάμψεως στο σημείο Γ(x+dx,y+dy) εκφράζεται με δυο τρόπους με την διαδρομή Α-Β-Γ και Α-Δ-Γ άρα ισχύει

$$w + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(w + \frac{\partial w}{\partial x}dx\right)dy = w + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial x}\left(w + \frac{\partial w}{\partial y}dy\right)dx \tag{2.16}$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \tag{2.17}$$

Επίσης από το σχήμα (2.2) παρατηρούμε

$$d\varphi_{y1} = \frac{w + \frac{\partial w}{\partial y}dy - w}{dy} = \frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.18α}$$

$$d\varphi_{y2} = \frac{w + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial x}\left(w + \frac{\partial w}{\partial y}dy\right)dx - \left(w + \frac{\partial w}{\partial x}dx\right)}{dy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.18β}$$

Σύμφωνα με το σχήμα (2.2) η διεύθυνση του άξονα x μεταβάλετε με κλίση κατά τον άξονα y φ_y

$$d\varphi_y = d\varphi_{y2} - d\varphi_{y1} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}dx \tag{2.19}$$

Όπου εδώ εύκολα συμπεραίνεται

$$\frac{d\varphi_y}{dx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1}{r_{xy}} = k_{xy} \tag{2.20}$$

Με αντίστοιχο τρόπο σύμφωνα με το σχήμα (2.2) η διεύθυνση του άξονα x μεταβάλετε με κλίση κατά τον άξονα y φ_y

$$\frac{d\varphi_x}{dy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1}{r_{xy}} = k_{xy} \tag{2.21}$$

Εκλέγουμε μια νέα διεύθυνση t που είναι κάθετη στην n άρα η νέα γωνία που σχηματίζεται είναι α=α+π/2 από την Εξ.(2.13) έχουμε

$$\frac{1}{r_t} = \frac{1}{r_x}\sin^2\alpha + 2\frac{1}{r_{xy}}\sin 2\alpha + \frac{1}{r_y}\cos^2\alpha \tag{2.22}$$

Αθροίζοντας τις δυο Εξ.(2.22) και (2.13) έχουμε

$$\frac{1}{r_t} + \frac{1}{r_n} = \frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} = -\nabla^2 w \tag{2.23}$$

Από την Εξ.(2.23) παρατηρούμε ότι το άθροισμα δυο κάθετων αξόνων μεταξύ τους είναι ανεξάρτητο της γωνίας α. Αυτό ονομάζεται μέση καμπυλότητα της ελαστικής επιφάνειας της πλάκας

Ως προς τους δυο άξονες (n,t) η συστροφή της επιφάνειας εκφράζεται από την εξίσωση

$$\frac{1}{r_{nt}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dw}{dn}\right) = k_{nt} \tag{2.24}$$

Κάνοντας αντικατάσταση την Εξ.(2.4) στην Εξ.(2.24) καθώς και η παράγωγος ως προς t μπορεί να λυθεί με την Εξ.(2.12) και η γωνία είναι α=α+π/2

$$\frac{1}{r_{nt}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)\left(-\frac{\partial w}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\alpha\right)$$

$$\frac{1}{r_{nt}} = \frac{1}{2}\sin 2a\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \cos 2a\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{1}{r_{nt}} = \frac{1}{2}\sin 2a\left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y}\right) + \cos 2a\frac{1}{r_{xy}} \tag{2.25}$$

Με βάση τις Εξ.(2.13), (2.22) και (2.25) παρατηρείτε ότι από ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων πήγαμε σε ένα δεύτερο που μεταβλήθηκε κατά γωνία α. Οι εξισώσεις αυτές δίνουν ένα συμμετρικό τανυστή δευτέρας τάξης έτσι ερχόμαστε στο συμπέρασμα ότι

$$\begin{pmatrix} k_x & -k_{xy} \\ -k_{xy} & k_y \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

Επομένως ισχύουν όλες οι ιδιότητες του συμμετρικού τανυστή δευτέρας τάξεως. Άρα θα υπάρχουν δύο κάθετες διευθύνσεις μεταξύ τους για τις οποίες ο τανυστής θα λαμβάνει την διαγώνιο μορφή.

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

Ο k_1 και k_2 του (2.27) είναι οι ακρότατες (μέγιστη και ελάχιστη) και τις ονομάζουμε κύριες καμπυλότητες. Η διαφορά των δυο γωνιών α που είναι π/2 και μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος ως προς το α από Εξ.(2.13) έχουμε

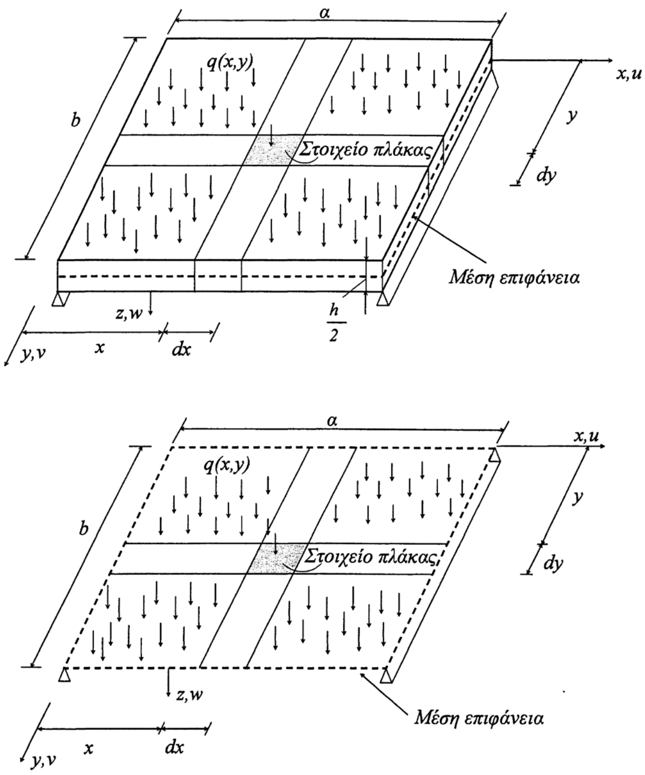
$$. \quad \frac{1}{r_x}\sin 2\alpha + 2\frac{1}{r_{xy}}\cos 2\alpha - \frac{1}{r_y}\sin 2\alpha = 0 \tag{2.28}$$

$$\tan 2a = \frac{\frac{2}{r_{xy}}}{\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y}} \tag{2.29}$$

Όπου αν αντικαταστήσουμε στην Εξ(2.13) παίρνουμε τις κύριες καμπυλότητες.

2.2 Μετατοπίσεις παραμορφώσεις τάσεις και εντατικά μεγέθη

Θεωρούμε ότι η πλάκα κάμπτεται κατά δύο διεύθυνσης όπως το παρακάτω σχήμα (2.3)



Σχήμα 2.3 Πλακά καμπτόμενη κατά δύο διεύθυνσης [1].

Με βάση το σχήμα(2.3) και την πέμπτη παραδοχή που έχουμε αναφέρει παραπάνω έχουμε

$$\partial = \tan \partial = \frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.30}$$

Παρατηρούμε επιπλέον από το σχήμα (2.3) η μετατόπιση u στον άξονα x βρίσκεται σε απόσταση

$$u = -\tan \partial = -z\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.31α}$$

Με αντίστοιχο τρόπο και η μετατόπιση v στον άξονα y

$$y = -z\frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.31β}$$

Είναι και η μετατόπιση w

$$w = w(x, y) \tag{2.31γ}$$

Με βάση τις μετατοπίσεις Εξ(2.31) και τις παραμορφώσεις ερχόμαστε στις παρακάτω εξισώσεις

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.32α}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{2.32β}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.32γ}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.32δ}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{2.32ε}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{2.32στ}$$

Με βάση τις Εξ.(2.32) και τις σχέσεις των τάσεων και των παραμορφώσεων έχουμε

$$\sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2} z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{2.33α}$$

$$\sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2} z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{2.33β}$$

$$\sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2} z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.33γ}$$

Με βάση τις παραπάνω Εξ.(2.33) ερχόμαστε στο συμπέρασμα ότι οι τάσεις είναι γραμμικές κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας.

Οι ορθές τάσεις σ_x και σ_y παράγουν καμπτικές ροπές όπως και με τις δοκούς. Αν λοιπον ολοκληρώσουμε σε σχέση με το πάχος της πλάκας τις τάσεις αυτές θα παραλάβουμε τις ροπές

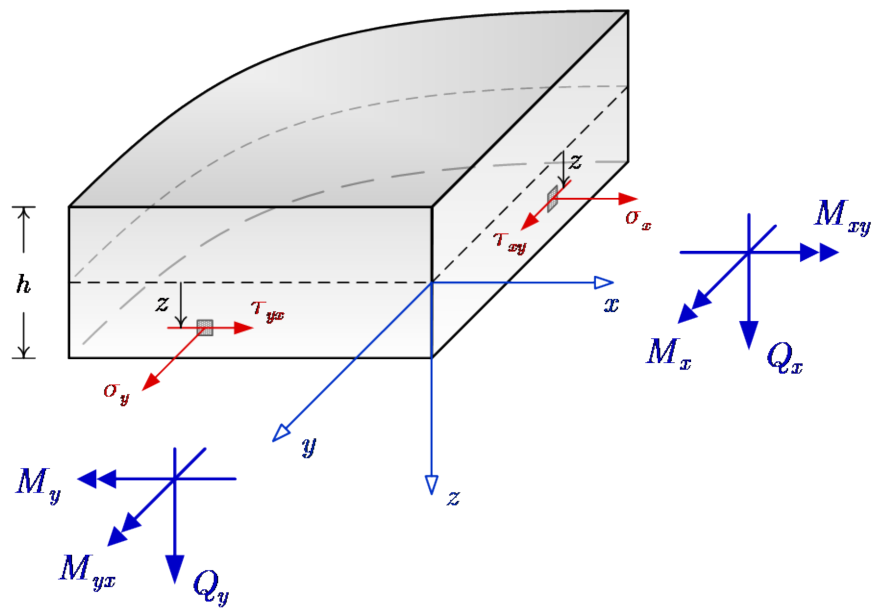
$$M_x \Delta y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \Delta y dz \tag{2.34α}$$

$$M_y \Delta x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \Delta x dz \tag{2.34β}$$

Με αντίστοιχο τρόπο αφού ολοκληρώσουμε τις διατμιτικές τάσεις τ_{xy} και τ_{yx} οπου αυτές οι δύο είναι ίσες, πάλι στο πάχος της πλάκας θα παραλάβουμε τις ροπές συστροφής

$$M_{xy} \Delta y = -\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \Delta y dz \tag{2.35α}$$

$$M_{yx} \Delta x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z \Delta x dz \tag{2.35β}$$



Σχήμα 2.4 Κομμάτι πλακάς με εντατικά μεγέθη

Με βάση τις παραπάνω Εξ.(2.33) (2.24) και (2.35) και αφού γίνει η ολοκλήρωση έχουμε

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{2.36α}$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{2.36β}$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.36γ}$$

όπου το D είναι η καμπτική ακαμψία της πλάκας και υπολογίζεται ως

$$D = \frac{Eh_e^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \tag{2.37}$$

Παρατηρούμε οι δύο ροπές συστροφής έχουν M_{xy} και M_{yx} έχουν αντίθετο πρόσημο η θετική είναι αυτή που απομακρύνεται από την τομή.

Σε μία τυχαία διεύθυνση η μπορούμε να υπολογίσουμε τις ροπές.

$$M_n = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_n z dz \tag{2.38α}$$

$$M_{ns} = -\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{ns} z dz \tag{2.38β}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma M_n = 0 \;\Rightarrow\; & M_n dl + M_{xy} dy \sin\theta - M_x dy \cos\theta - M_{yx} dx \cos\theta - M_y dx \sin\theta = 0 \\
\Rightarrow\; & M_n + M_{xy}\frac{dy}{dl}\sin\theta - M_x \frac{dy}{dl}\cos\theta - M_{yx}\frac{dx}{dl}\cos\theta - M_y \frac{dx}{dl}\sin\theta = 0 \\
\Rightarrow\; & M_n + M_{xy}\cos\theta\sin\theta - M_x\cos^2\theta - M_{yx}\sin\theta\cos\theta - M_y\sin^2\theta = 0 \\
\Rightarrow\; & M_n = M_x\cos^2\theta - 2M_{xy}\sin\theta\cos\theta + M_y\sin^2\theta
\end{aligned} \tag{2.39α}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma M_s = 0 \;\Rightarrow\; & M_{ns} dl - M_{xy} dy \cos\theta - M_x dy \sin\theta - M_{yx} dx \sin\theta + M_y dx \cos\theta = 0 \\
\Rightarrow\; & M_{ns} - M_{xy}\frac{dy}{dl}\cos\theta - M_x \frac{dy}{dl}\sin\theta - M_{yx}\frac{dx}{dl}\sin\theta + M_y \frac{dx}{dl}\cos\theta = 0 \\
\Rightarrow\; & M_{ns} - M_{xy}\cos^2\theta - M_x\cos\theta\sin\theta - M_{yx}\sin^2\theta + M_y\sin\theta\cos\theta = 0 \\
\Rightarrow\; & M_{ns} = \left(M_x - M_y\right)\sin\theta\cos\theta + M_{xy}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)
\end{aligned} \tag{2.39β}$$

Αν ολοκληρώσουμε την Εξ.(2.38) έχουμε και όμοιο τρόπο με τις Εξ(2.36)

$$M_n = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) \tag{2.40α}$$

$$M_{ns} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s} \tag{2.40β}$$

Η γωνία στο επίπεδο s είναι θ=θ+π/2 σε σχέση με το επίπεδο n και την γωνία θ με βάση την Εξ.(2.39) άρα η καμπτική ροπή έχουμε

$$M_s = M_x \sin^2\theta + 2M_{xy}\sin\theta\cos\theta + M_y\cos^2\theta \tag{2.41}$$

Με βάση τις Εξ.(2.39) και (2.41) παρατηρείτε ότι από ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων πήγαμε σε ένα δεύτερο που μεταβλήθηκε κατά γωνία θ. Οι εξισώσεις αυτές δίνουν ένα συμμετρικό τανυστή δευτέρας τάξης έτσι ερχόμαστε στο συμπέρασμα ότι

$$\begin{pmatrix} M_x & -M_{xy} \\ -M_{xy} & M_y \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

Επομένως ισχύουν όλες οι ιδιότητες του συμμετρικού τανυστή δευτέρας τάξεως. Άρα θα υπάρχουν δύο κάθετες διευθύνσεις μεταξύ τους για τις οποίες ο τανυστής θα λαμβάνει την διαγώνιο μορφή.

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

Ο M_1 και M_2 του (2.43) είναι οι ακρότατες (μέγιστη και ελάχιστη) και τις ονομάζουμε κύριες ροπές. Η διαφορά των δυο γωνιών α που είναι π/2 και μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος ως προς το θ από Εξ.(2.39) έχουμε

$$M_x \sin 2\alpha + 2M_{xy}\cos 2\alpha - M_y \sin 2\alpha = 0 \tag{2.44}$$

$$\tan 2a = \frac{2M_{xy}}{M_x - M_y} \tag{2.45}$$

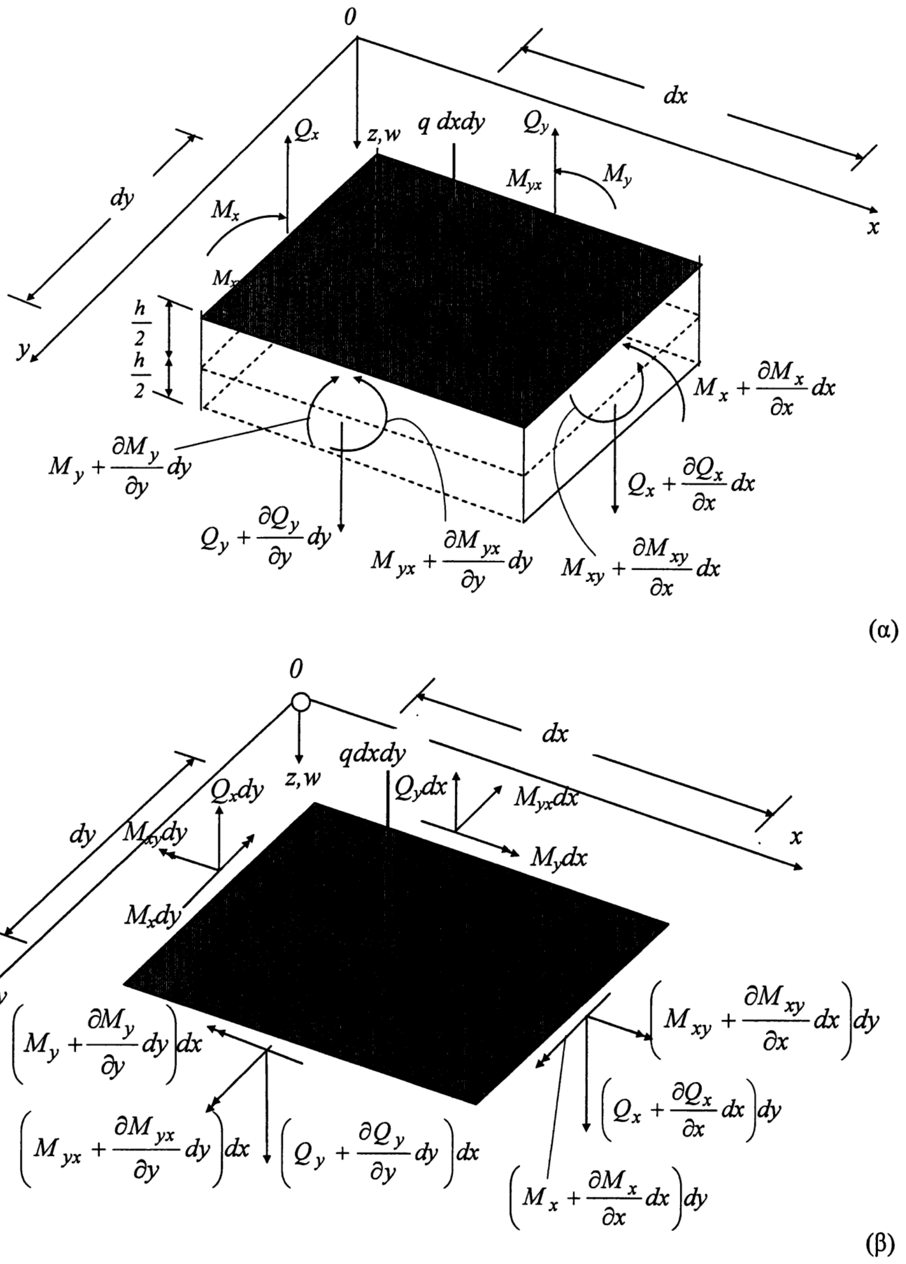
Αν γίνει αντικατάσταση στην Εξ.(2.39α) τις κύριες ροπές και διαμορφώνεται ως εξής

$$M_{1,2} = \frac{M_x + M_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(M_x - M_y\right)^2 + 4{M_{xy}}^2} \tag{2.46}$$

Είναι δεκτό ότι η ορθή τάση $\sigma_z = 0$ το ίδιο και για την παραμόρφωση $\varepsilon_z = 0$ όμως δεν μπορούμε να πούμε το ίδιο και για τις διατμητικές τάσεις τ_{xz} και τ_{yz} όπου η ολοκλήρωση τους ως προς τον άξονα z δίνει τις τέμνουσες δυνάμεις Q_x και Q_y

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \tag{2.47α}$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \tag{2.47β}$$



Σχήμα 2.5 Πλάκα καμπτόμενη σε δύο διευθύνσεις [1].

Με βάση το παραπάνω σχήμα(2.5) για μα ισορροπεί ο άξονας z πρέπει να ισχύει η παρακάτω εξίσωση

$$qdxdy+\left(Q_x+\frac{\partial Q_x}{\partial x}dx\right)dy+\left(Q_y+\frac{\partial Q_y}{\partial y}dy\right)dx-Q_xdx-Q_ydy=0 \tag{2.48α}$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y}+\frac{\partial Q_x}{\partial x}+q=0 \tag{2.48β}$$

Με βάση το παραπάνω σχήμα(2.5) για μα ισορροπεί ο άξονας x πρέπει να ισχύει η παρακάτω εξίσωση

$$M_ydx-\left(M_y+\frac{\partial M_y}{\partial y}dy\right)dx-M_{xy}dy+\left(M_{xy}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}dx\right)dy+\left(Q_y+\frac{\partial Q_y}{\partial y}dy\right)dx\frac{dy}{2}+Q_ydx\frac{dy}{2}=0 \tag{2.49α}$$

$$Q_y=\frac{\partial M_y}{\partial y}-\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \tag{2.49β}$$

Με την ίδια μέθοδο λύνουμε στον άξονα y και παίρνουμε την τέμνουσα Q_x

$$Q_x=\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \tag{2.50}$$

2.2 Διαφορική εξίσωση της πλάκας

Με βάση τις Εξ. (2.49),(2.50) και (2.36) οπού γίνονται οι αντικαταστάσεις έχουμε

$$Q_x=-D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{2.51α}$$

$$Q_y=-D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{2.51β}$$

Με βάση τις Εξ. (2.49),(2.50) και (2.48) και ότι το $M_{yx}=-M_{xy}$ οπού γίνονται οι αντικαταστάσεις έχουμε

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}=-q \tag{2.51}$$

Αφού έχουμε την Εξ.(2.51) και κάνουμε αντικατάσταση με βάση την Εξ.(2.36) έχουμε την διαφορική εξίσωση της πλάκας

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q}{D} \tag{2.52α}$$

ή

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} \tag{2.52β}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΕΤΡΑΚΟΜΒΙΚΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΠΛΑΚΑΣ

Το πεδίο των μετατοπίσεων $w(x,y)$ στο εσωτερικό του ορθογωνίου τετρακομβικού στοιχείου προσεγγίζεται με πολυώνυμα τετάρτου βαθμού ως προς x και y, που όμως δεν είναι πλήρη τετάρτου βαθμού, αλλά πλήρη τρίτου βαθμού. Οι πολυωνυμικές σχέσεις για τη μετατόπιση και τις παραγώγους αυτής, δηλαδή τις στροφές, σε κάθε σημείο του στοιχείου θα έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} w^e(x,y) = {} & c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy + c_5x^2 + c_6y^2 + c_7x^2y + c_8xy^2 \\ & + c_9x^3 + c_{10}y^3 + c_{11}x^3y + c_{12}xy^3 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial w^e(x,y)}{\partial x} = c_2 + c_4y + 2c_5x + 2c_7xy + c_8y^2 + 3c_9x^2 + 3c_{11}x^2y + c_{12}y^3 \tag{3.2α}$$

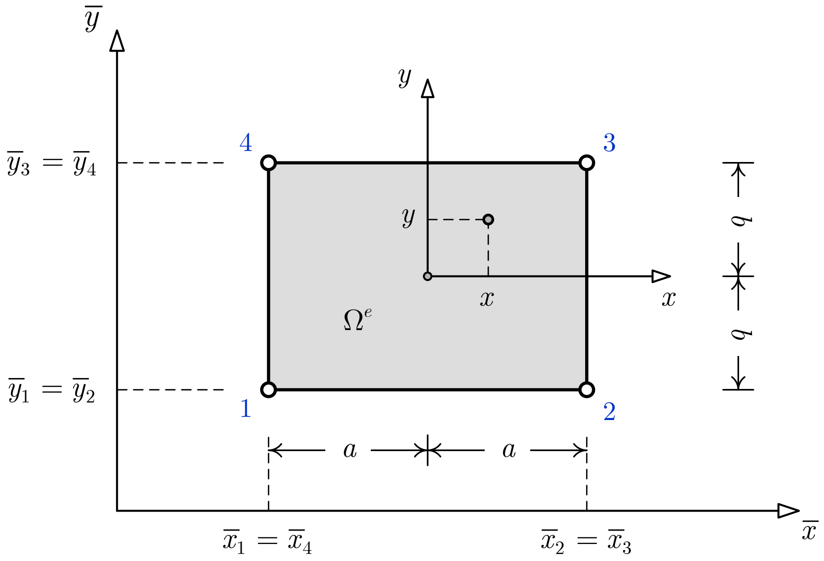
$$\frac{\partial w^e(x,y)}{\partial y} = c_3 + c_4x + 2c_6y + c_7x^2 + 2c_8xy + 3c_{10}y^2 + c_{11}x^3 + 3c_{12}xy^2 \tag{3.2β}$$

όπου (x,y) είναι το τοπικό σύστημα με αρχή στο κέντρο του στοιχείου. Η γραμμική μεταβολή της μετατόπισης στο εσωτερικό του στοιχείου e εκφράζεται, επίσης, μέσω συναρτήσεων σχήματος ως

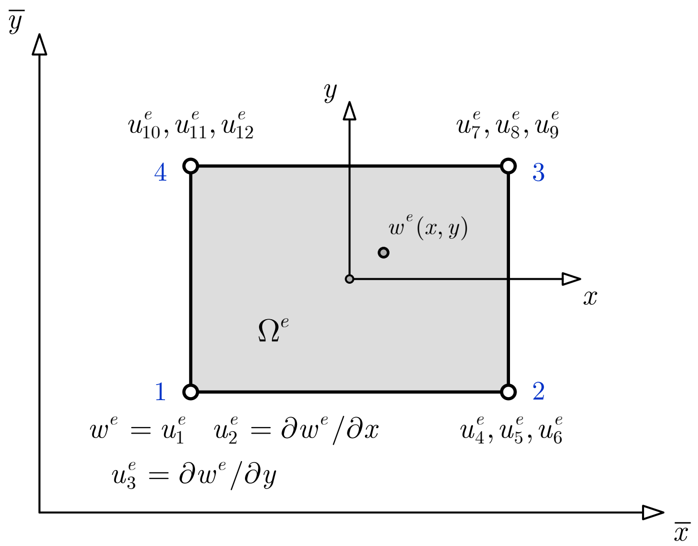
$$w^e(x,y) = \sum_{i=1}^{12} u_i^e \, \psi_i^e(x,y) \tag{3.3}$$

στην οποία u_i $(i = 1,2,\ldots,12)$ συμβολίζουν τις γενικευμένες επικόμβιες τιμές. Αυτές στους τέσσερες κόμβους $k = 1,2,3,4$ ορίζονται ως

$$u^e_{3k-2} = w^e(x_k, y_k), \qquad u^e_{3k-1} = \left.\frac{\partial w^e(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_k \\ y=y_k}}, \qquad u^e_{3k} = \left.\frac{\partial w^e(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_k \\ y=y_k}} \tag{3.4}$$



Σχήμα 3.1 Συντεταγμένες ορθογωνίου 4-κομβικού στοιχείου στο καθολικό και τοπικό σύστημα αξόνων.



Σχήμα 3.2 Βαθμοί ελευθερίας στους κόμβους και στο εσωτερικό ορθογωνίου 4-κομβικού στοιχείου.

Οι συναρτήσεις σχήματος $\psi_i^e(x,y)$ $(i=1,2,\ldots,12)$ μεταβάλλονται μέσα στο στοιχείο Ω^e έχοντας την κάτωθι πολυωνυμική μορφή:

$$\begin{aligned}\psi_i^e(x,y) = {} & c_{i,1} + c_{i,2}x + c_{i,3}y + c_{i,4}xy + c_{i,5}x^2 + c_{i,6}y^2 + c_{i,7}x^2y + c_{i,8}xy^2 \\ & + c_{i,9}x^3 + c_{i,10}y^3 + c_{i,11}x^3y + c_{i,12}xy^3 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Οι συντελεστές των όρων του πολυωνύμου προσδιορίζονται από τις συνθήκες που ικανοποιούν οι συναρτήσεις σχήματος στους τέσσερες κόμβους του στοιχείου. Για την πρώτη εξ αυτών θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
&\psi_1^e\left(x_1,y_1\right)=1\,, \qquad \left.\frac{\partial\psi_1^e(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\y=y_1}}=0\,, \qquad \left.\frac{\partial\psi_1^e(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_1\\y=y_1}}=0 \\
&\psi_1^e\left(x_2,y_2\right)=0\,, \qquad \left.\frac{\partial\psi_1^e(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2\\y=y_2}}=0\,, \qquad \left.\frac{\partial\psi_1^e(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_2\\y=y_2}}=0 \\
&\psi_1^e\left(x_3,y_3\right)=0\,, \qquad \left.\frac{\partial\psi_1^e(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_3\\y=y_3}}=0\,, \qquad \left.\frac{\partial\psi_1^e(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_3\\y=y_3}}=0 \\
&\psi_1^e\left(x_4,y_4\right)=0\,, \qquad \left.\frac{\partial\psi_1^e(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_4\\y=y_4}}=0\,, \qquad \left.\frac{\partial\psi_1^e(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_4\\y=y_4}}=0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

στις οποίες $x_1 = x_4 = -a$, $x_2 = x_3 = +a$, $y_1 = y_2 = -b$ και $y_3 = y_4 = +b$. Μητρώο επικόμβιων μετατοπίσεων του τυπικού ορθογωνίου τετρακομβικού στοιχείου e:

$$\left[D^e\right]_{12\times1} = \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ \hline u_4^e \\ u_5^e \\ u_6^e \\ \hline u_7^e \\ u_8^e \\ u_9^e \\ \hline u_{10}^e \\ u_{11}^e \\ u_{12}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} w^e \\ \partial w^e/\partial x \\ \partial w^e/\partial y \end{bmatrix}_{\substack{x=-a \\ y=-b}} \\ \hdashline \begin{bmatrix} w^e \\ \partial w^e/\partial x \\ \partial w^e/\partial y \end{bmatrix}_{\substack{x=+a \\ y=-b}} \\ \hdashline \begin{bmatrix} w^e \\ \partial w^e/\partial x \\ \partial w^e/\partial y \end{bmatrix}_{\substack{x=+a \\ y=+b}} \\ \hdashline \begin{bmatrix} w^e \\ \partial w^e/\partial x \\ \partial w^e/\partial y \end{bmatrix}_{\substack{x=-a \\ y=+b}} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Συνάρτηση σχήματος $\psi_1^e(x,y)$:

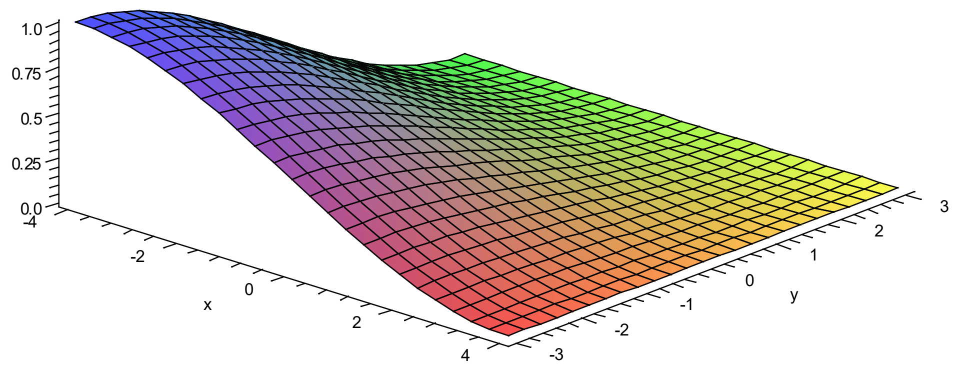
$$\begin{aligned} &c_{1,1} = \frac{1}{4}, \quad c_{1,2} = -\frac{3}{8a}, \quad c_{1,3} = -\frac{3}{8b}, \quad c_{1,4} = \frac{1}{2ab}, \quad c_{1,5} = 0, \quad c_{1,6} = 0, \\ &c_{1,7} = 0, \quad c_{1,8} = 0, \quad c_{1,9} = \frac{1}{8a^3}, \quad c_{1,10} = \frac{1}{8b^3}, \quad c_{1,11} = -\frac{1}{8a^3b}, \quad c_{1,12} = -\frac{1}{8ab^3} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Από την σχέση (3.8) προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\psi_1^e(x,y) = \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\frac{x}{a} - \frac{3}{8}\frac{y}{b} + \frac{1}{2}\frac{x}{a}\frac{y}{b} + \frac{1}{8}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \frac{1}{8}\left(\frac{y}{b}\right)^3 - \frac{1}{8}\left(\frac{x}{a}\right)^3\frac{y}{b} - \frac{1}{8}\frac{x}{a}\left(\frac{y}{b}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\psi_1^e(x,y) = \frac{1}{8}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)\left[2-\frac{x}{a}\left(1+\frac{x}{a}\right)-\frac{y}{b}\left(1+\frac{y}{b}\right)\right] \tag{3.9}$$

$$\left(-a \le x \le a, \; -b \le y \le b\right)$$



Σχήμα 3.3 Συνάρτηση σχήματος $\psi_1^e(x,y)$ αναφερόμενη στον πρώτο βαθμό ελευθερίας κίνησης του ορθογωνίου 4-κομβικού στοιχείου.

Παραγωγίζοντας την Εξ.(3.9) έχουμε:

$$\frac{\partial \psi_1^e(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{8a}\left(1-\frac{y}{b}\right)\left[3\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-\frac{y}{b}\left(1+\frac{y}{b}\right)\right] \tag{3.10}$$

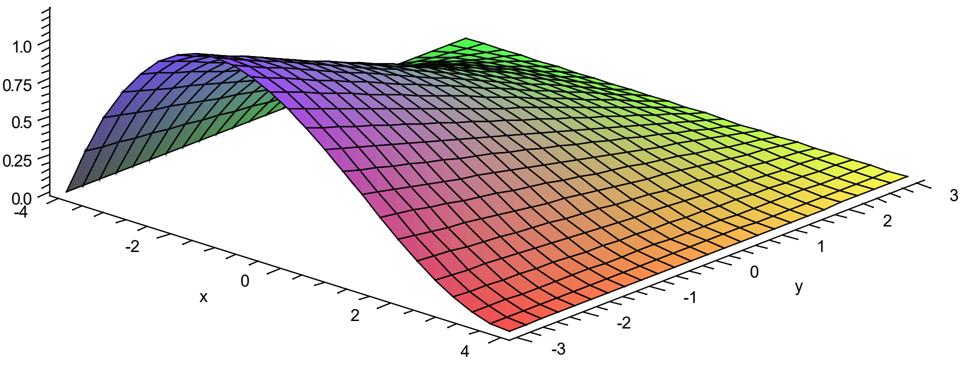
$$\frac{\partial \psi_1^e(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{8b}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left[3\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)-\frac{x}{a}\left(1+\frac{x}{a}\right)\right] \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1^e(x,y)}{\partial x^2} = \frac{3}{4a^2}\frac{x}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right) \qquad \frac{\partial^2 \psi_1^e(x,y)}{\partial y^2} = \frac{3}{4b^2}\left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{y}{b} \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1^e(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{8ab}\left(4-3\frac{x^2}{a^2}-3\frac{y^2}{b^2}\right) \tag{3.13}$$

Συνάρτηση σχήματος $\psi_2^e(x,y)$:

$$\begin{aligned} &c_{2,1}=\frac{a}{8}, \quad c_{2,2}=-\frac{1}{8}, \quad c_{2,3}=-\frac{a}{8b}, \quad c_{2,4}=\frac{1}{8b}, \quad c_{2,5}=-\frac{1}{8a}, \quad c_{2,6}=0, \\ &c_{2,7}=\frac{1}{8ab}, \quad c_{2,8}=0, \quad c_{2,9}=\frac{1}{8a^2}, \quad c_{2,10}=0, \quad c_{2,11}=-\frac{1}{8a^2b}, \quad c_{2,12}=0 \end{aligned} \tag{3.14}$$



Σχήμα 3.4 Συνάρτηση σχήματος $\psi_2^e(x,y)$ αναφερόμενη στον πρώτο βαθμό ελευθερίας κίνησης του ορθογωνίου 4-κομβικού στοιχείου.

Από την σχέση (3.14) προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\psi_2^e(x,y) = \frac{a}{8} - \frac{1}{8}x - \frac{a}{8b}y + \frac{1}{8b}xy - \frac{1}{8a}x^2 + \frac{1}{8ab}x^2y + \frac{1}{8a^2}x^3 - \frac{1}{8a^2b}x^3y \;\Rightarrow$$

$$\psi_2^e(x,y) = \frac{a}{8}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{3.15}$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(3.15) έχουμε:

$$\frac{\partial \psi_2^e(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{8}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+3\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{3.16}$$

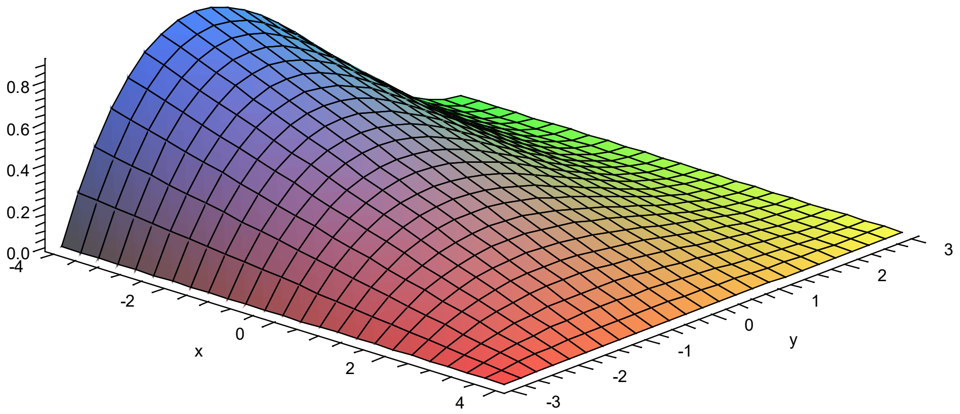
$$\frac{\partial \psi_2^e(x,y)}{\partial y} = -\frac{a}{8b}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2^e(x,y)}{\partial x^2} = -\frac{1}{4a}\left(1-3\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) \qquad \frac{\partial^2 \psi_2^e(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2^e(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{8b}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+3\frac{x}{a}\right) \tag{3.19}$$

Συνάρτηση σχήματος $\psi_3^e(x,y)$:

$$\begin{aligned} &c_{3,1} = \frac{b}{8}, \quad c_{3,2} = -\frac{b}{8a}, \quad c_{3,3} = -\frac{1}{8}, \quad c_{3,4} = \frac{1}{8a}, \quad c_{3,5} = 0, \quad c_{3,6} = -\frac{1}{8b}, \\ &c_{3,7} = 0, \quad c_{3,8} = \frac{1}{8ab}, \quad c_{3,9} = 0, \quad c_{3,10} = \frac{1}{8b^2}, \quad c_{3,11} = 0, \quad c_{3,12} = -\frac{1}{8ab^2} \end{aligned} \tag{3.20}$$



Σχήμα 3.5 Συνάρτηση σχήματος $\psi_3^e(x,y)$ αναφερόμενη στον πρώτο βαθμό ελευθερίας κίνησης του ορθογωνίου 4-κομβικού στοιχείου.

Από την σχέση (3.20) προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\psi_3^e(x,y) = \frac{b}{8} - \frac{b}{8a}x - \frac{1}{8}y + \frac{1}{8a}xy - \frac{1}{8b}y^2 + \frac{1}{8ab}xy^2 + \frac{1}{8b^2}y^3 - \frac{1}{8ab^2}xy^3 \Rightarrow$$

$$\psi_3^e(x,y) = \frac{b}{8}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)^2\left(1+\frac{y}{b}\right) \tag{3.21}$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(3.21) έχουμε:

$$\frac{\partial \psi_3^e(x,y)}{\partial x} = -\frac{b}{8a}\left(1-\frac{y}{b}\right)^2\left(1+\frac{y}{b}\right) \tag{3.22}$$

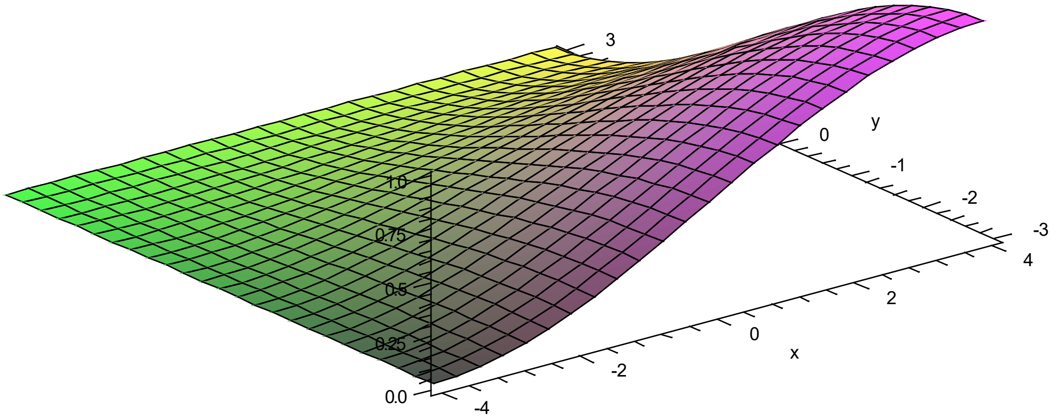
$$\frac{\partial \psi_3^e(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{8}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+3\frac{y}{b}\right) \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_3^e(x,y)}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \psi_2^e(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{1}{4b}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-3\frac{y}{b}\right) \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_3^e(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{8a}\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+3\frac{y}{b}\right) \tag{3.25}$$

Συνάρτηση σχήματος $\psi_4^e(x,y)$:

$$c_{4,1}=\frac{1}{4},\quad c_{4,2}=\frac{3}{8a},\quad c_{4,3}=-\frac{3}{8b},\quad c_{4,4}=-\frac{1}{2ab},\quad c_{4,5}=0,\quad c_{4,6}=0,$$
$$c_{4,7}=0,\quad c_{4,8}=0,\quad c_{4,9}=-\frac{1}{8a^3},\quad c_{4,10}=\frac{1}{8b^3},\quad c_{4,11}=\frac{1}{8a^3b},\quad c_{4,12}=\frac{1}{8ab^3} \tag{3.26}$$



Σχήμα 3.6 Συνάρτηση σχήματος $\psi_4^e(x,y)$ αναφερόμενη στον πρώτο βαθμό ελευθερίας κίνησης του ορθογωνίου 4-κομβικού στοιχείου.

Από την σχέση (3.26) προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\psi_4^e(x,y)=\frac{1}{4}+\frac{3}{8a}x-\frac{3}{8b}y-\frac{1}{2ab}xy-\frac{1}{8a^3}x^3+\frac{1}{8b^3}y^3+\frac{1}{8a^3b}x^3y+\frac{1}{8ab^3}xy^3 \quad\Rightarrow$$
$$\psi_4^e(x,y)=\frac{1}{8}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)\left[\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(2+\frac{y}{b}\right)+\frac{x}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)\right] \tag{3.27}$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(3.27) έχουμε:

$$\frac{\partial\psi_4^e(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{8a}\left(1-\frac{y}{b}\right)\left[1-3\frac{x^2}{a^2}+\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(2+\frac{y}{b}\right)\right] \tag{3.28}$$

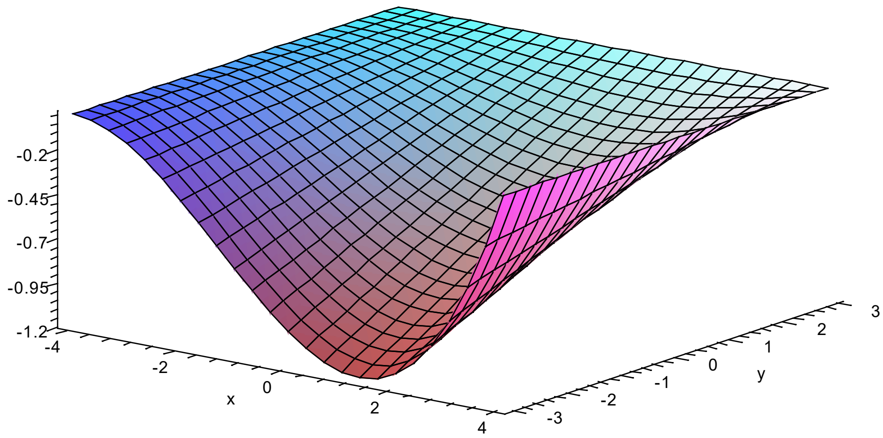
$$\frac{\partial\psi_4^e(x,y)}{\partial y}=-\frac{1}{8b}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left[3\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)+\frac{x}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2\psi_4^e(x,y)}{\partial x^2}=-\frac{3}{4a^2}\frac{x}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right)\qquad \frac{\partial^2\psi_4^e(x,y)}{\partial y^2}=\frac{3}{4b^2}\left(1+\frac{x}{a}\right)\frac{y}{b} \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial^2\psi_4^e(x,y)}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{8ab}\left(4-3\frac{x^2}{a^2}-3\frac{y^2}{b^2}\right) \tag{3.30}$$

Συνάρτηση σχήματος $\psi_5^e(x,y)$:

$$c_{5,1} = -\frac{a}{8}, \quad c_{5,2} = -\frac{1}{8}, \quad c_{5,3} = \frac{a}{8b}, \quad c_{5,4} = \frac{1}{8b}, \quad c_{5,5} = \frac{1}{8a}, \quad c_{5,6} = 0,$$
$$c_{5,7} = -\frac{1}{8ab}, \quad c_{5,8} = 0, \quad c_{5,9} = \frac{1}{8a^2}, \quad c_{5,10} = 0, \quad c_{5,11} = -\frac{1}{8a^2 b}, \quad c_{5,12} = 0 \tag{3.31}$$



Σχήμα 3.7 Συνάρτηση σχήματος $\psi_5^e(x,y)$ αναφερόμενη στον πρώτο βαθμό ελευθερίας κίνησης του ορθογωνίου 4-κομβικού στοιχείου.

Από την σχέση (3.31) προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\psi_5^e(x,y) = -\frac{a}{8} - \frac{1}{8}x + \frac{a}{8b}y + \frac{1}{8b}xy + \frac{1}{8a}x^2 - \frac{1}{8ab}x^2 y + \frac{1}{8a^2}x^3 - \frac{1}{8a^2 b}x^3 y \;\Rightarrow$$

$$\psi_5^e(x,y) = -\frac{a}{8}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{a}\right)^2\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{3.32}$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(3.32) έχουμε:

$$\frac{\partial \psi_5^e(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{8}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-3\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{3.33}$$

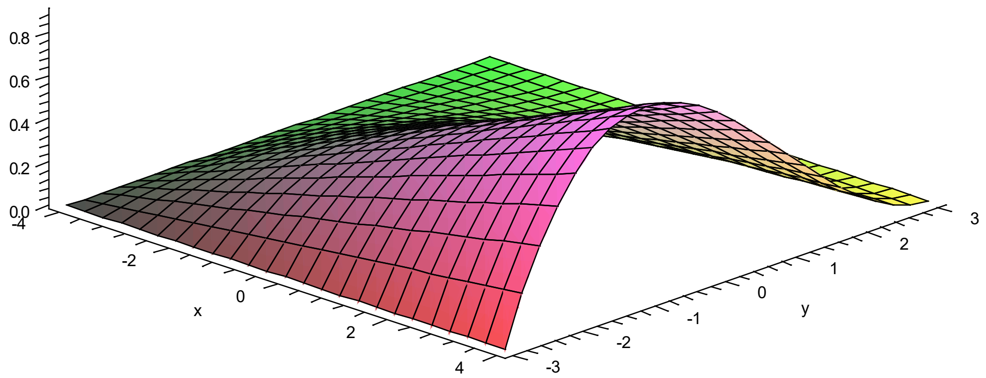
$$\frac{\partial \psi_5^e(x,y)}{\partial y} = \frac{a}{8b}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{a}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 \psi_5^e(x,y)}{\partial x^2} = \frac{1}{4a}\left(1+3\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) \qquad \frac{\partial^2 \psi_5^e(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_5^e(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{8b}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-3\frac{x}{a}\right) \tag{3.35}$$

Συνάρτηση σχήματος $\psi_6^e(x,y)$:

$$\begin{aligned} &c_{6,1} = \frac{b}{8}, \quad c_{6,2} = \frac{b}{8a}, \quad c_{6,3} = -\frac{1}{8}, \quad c_{6,4} = -\frac{1}{8a}, \quad c_{6,5} = 0, \quad c_{6,6} = -\frac{1}{8b}, \\ &c_{6,7} = 0, \quad c_{6,8} = -\frac{1}{8ab}, \quad c_{6,9} = 0, \quad c_{6,10} = \frac{1}{8b^2}, \quad c_{6,11} = 0, \quad c_{6,12} = \frac{1}{8ab^2} \end{aligned} \tag{3.36}$$



Σχήμα 3.8 Συνάρτηση σχήματος $\psi_6^e(x,y)$ αναφερόμενη στον πρώτο βαθμό ελευθερίας κίνησης του ορθογωνίου 4-κομβικού στοιχείου.

Από την σχέση (3.36) προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\psi_6^e(x,y) = \frac{b}{8} + \frac{b}{8a}x - \frac{1}{8}y - \frac{1}{8a}xy - \frac{1}{8b}y^2 - \frac{1}{8ab}xy^2 + \frac{1}{8b^2}y^3 + \frac{1}{8ab^2}xy^3 \Rightarrow$$

$$\psi_6^e(x,y) = \frac{b}{8}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)^2\left(1+\frac{y}{b}\right) \tag{3.37}$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(3.37) έχουμε:

$$\frac{\partial \psi_6^e(x,y)}{\partial x} = \frac{b}{8a}\left(1-\frac{y}{b}\right)^2\left(1+\frac{y}{b}\right) \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial \psi_6^e(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{8}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+3\frac{y}{b}\right) \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_6^e(x,y)}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \psi_6^e(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{1}{4b}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-3\frac{y}{b}\right) \tag{3.40}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_6^e(x,y)}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{8a}\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+3\frac{y}{b}\right) \tag{3.41}$$

Συνάρτηση σχήματος $\psi_7^e(x,y)$:

$$\begin{aligned} &c_{7,1} = \frac{1}{4}, \quad c_{7,2} = \frac{3}{8a}, \quad c_{7,3} = \frac{3}{8b}, \quad c_{7,4} = \frac{1}{2ab}, \quad c_{7,5} = 0, \quad c_{7,6} = 0, \\ &c_{7,7} = 0, \quad c_{7,8} = 0, \quad c_{7,9} = -\frac{1}{8a^3}, \quad c_{7,10} = -\frac{1}{8b^3}, \quad c_{7,11} = -\frac{1}{8a^3 b}, \quad c_{7,12} = -\frac{1}{8ab^3} \end{aligned} \tag{3.42}$$

Από την σχέση (3.42) προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned} \psi_7^e(x,y) &= \frac{1}{4} + \frac{3}{8a}x + \frac{3}{8b}y + \frac{1}{2ab}xy - \frac{1}{8a^3}x^3 - \frac{1}{8b^3}y^3 - \frac{1}{8a^3 b}x^3 y - \frac{1}{8ab^3}xy^3 \Rightarrow \\ \psi_7^e(x,y) &= \frac{1}{8}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)\left[2+\frac{x}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)+\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.43}$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(3.43) έχουμε:

$$\frac{\partial \psi_7^e(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{8a}\left(1+\frac{y}{b}\right)\left[3\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)+\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right)\right] \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial \psi_7^e(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{8b}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left[3\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)+\frac{x}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)\right] \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_7^e(x,y)}{\partial x^2} = -\frac{3}{4a^2}\frac{x}{a}\left(1+\frac{y}{b}\right) \qquad \frac{\partial^2 \psi_7^e(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{3}{4b^2}\frac{y}{b}\left(1+\frac{x}{a}\right) \tag{3.46}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_7^e(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{8ab}\left(4-3\frac{x^2}{a^2}-3\frac{y^2}{b^2}\right) \tag{3.47}$$

Συνάρτηση σχήματος $\psi_8^e(x,y)$:

$$\begin{aligned} &c_{8,1}=-\frac{a}{8}, \quad c_{8,2}=-\frac{1}{8}, \quad c_{8,3}=-\frac{a}{8b}, \quad c_{8,4}=-\frac{1}{8b}, \quad c_{8,5}=\frac{1}{8a}, \quad c_{8,6}=0, \\ &c_{8,7}=\frac{1}{8ab}, \quad c_{8,8}=0, \quad c_{8,9}=\frac{1}{8a^2}, \quad c_{8,10}=0, \quad c_{8,11}=\frac{1}{8a^2b}, \quad c_{8,12}=0 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Από την σχέση (3.48) προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\psi_8^e(x,y)=-\frac{a}{8}-\frac{1}{8}x-\frac{a}{8b}y-\frac{1}{8b}xy+\frac{1}{8a}x^2+\frac{1}{8ab}x^2y+\frac{1}{8a^2}x^3+\frac{1}{8a^2b}x^3y \;\Rightarrow$$

$$\psi_8^e(x,y)=-\frac{a}{8}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{a}\right)^2\left(1+\frac{y}{b}\right) \tag{3.49}$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(3.49) έχουμε:

$$\frac{\partial\psi_8^e(x,y)}{\partial x}=-\frac{1}{8}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-3\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right) \tag{3.50}$$

$$\frac{\partial\psi_8^e(x,y)}{\partial y}=-\frac{a}{8b}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{a}\right)^2 \tag{3.51}$$

$$\frac{\partial^2\psi_8^e(x,y)}{\partial x^2}=\frac{1}{4a}\left(1+3\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right) \qquad \frac{\partial^2\psi_8^e(x,y)}{\partial y^2}=0 \tag{3.52}$$

$$\frac{\partial^2\psi_8^e(x,y)}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{8b}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-3\frac{x}{a}\right) \tag{3.53}$$

Συνάρτηση σχήματος $\psi_9^e(x,y)$:

$$\begin{aligned} &c_{9,1}=-\frac{b}{8}, \quad c_{9,2}=-\frac{b}{8a}, \quad c_{9,3}=-\frac{1}{8}, \quad c_{9,4}=-\frac{1}{8a}, \quad c_{9,5}=0, \quad c_{9,6}=\frac{1}{8b}, \\ &c_{9,7}=0, \quad c_{9,8}=\frac{1}{8ab}, \quad c_{9,9}=0, \quad c_{9,10}=\frac{1}{8b^2}, \quad c_{9,11}=0, \quad c_{9,12}=\frac{1}{8ab^2} \end{aligned} \tag{3.54}$$

Από την σχέση (3.54) προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\psi_9^e(x,y)=-\frac{b}{8}-\frac{b}{8a}x-\frac{1}{8}y-\frac{1}{8a}xy+\frac{1}{8b}y^2+\frac{1}{8ab}xy^2+\frac{1}{8b^2}y^3+\frac{1}{8ab^2}xy^3 \;\Rightarrow$$

$$\psi_9^e(x,y)=-\frac{b}{8}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)^2 \tag{3.55}$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(3.55) έχουμε:

$$\frac{\partial \psi_9^e(x,y)}{\partial x} = -\frac{b}{8a}\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)^2 \tag{3.56}$$

$$\frac{\partial \psi_9^e(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{8}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-3\frac{y}{b}\right) \tag{3.57}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_9^e(x,y)}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \psi_9^e(x,y)}{\partial y^2} = \frac{1}{4b}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+3\frac{y}{b}\right) \tag{3.58}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_9^e(x,y)}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{8a}\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-3\frac{y}{b}\right) \tag{3.59}$$

Συνάρτηση σχήματος $\psi_{10}^e(x,y)$:

$$\begin{aligned} &c_{10,1} = \frac{1}{4}, \quad c_{10,2} = -\frac{3}{8a}, \quad c_{10,3} = \frac{3}{8b}, \quad c_{10,4} = -\frac{1}{2ab}, \quad c_{10,5} = 0, \quad c_{10,6} = 0, \\ &c_{10,7} = 0, \quad c_{10,8} = 0, \quad c_{10,9} = \frac{1}{8a^3}, \quad c_{10,10} = -\frac{1}{8b^3}, \quad c_{10,11} = \frac{1}{8a^3 b}, \quad c_{10,12} = \frac{1}{8ab^3} \end{aligned} \tag{3.60}$$

Από την σχέση (3.60) προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\psi_{10}^e(x,y) = \frac{1}{4} - \frac{3}{8a}x + \frac{3}{8b}y - \frac{1}{2ab}xy + \frac{1}{8a^3}x^3 - \frac{1}{8b^3}y^3 + \frac{1}{8a^3 b}x^3 y + \frac{1}{8ab^3}xy^3 \Rightarrow$$

$$\psi_{10}^e(x,y) = \frac{1}{8}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)\left[2-\frac{x}{a}\left(1+\frac{x}{a}\right)+\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right)\right] \tag{3.61}$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(3.61) έχουμε:

$$\frac{\partial \psi_{10}^e(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{8a}\left(1+\frac{y}{b}\right)\left[3\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)+\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right)\right] \tag{3.62}$$

$$\frac{\partial \psi_{10}^e(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{8b}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left[3\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)-\frac{x}{a}\left(1+\frac{x}{a}\right)\right] \tag{3.63}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{10}^e(x,y)}{\partial x^2} = \frac{3}{4a^2}\frac{x}{a}\left(1+\frac{y}{b}\right) \qquad \frac{\partial^2 \psi_{10}^e(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{3}{4b^2}\left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{y}{b} \tag{3.64}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{10}^e(x,y)}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{8ab}\left(4 - 3\frac{x^2}{a^2} - 3\frac{y^2}{b^2}\right) \tag{3.65}$$

Συνάρτηση σχήματος $\psi_{11}^e(x,y)$:

$$\begin{aligned} &c_{11,1} = \frac{a}{8}, \quad c_{11,2} = -\frac{1}{8}, \quad c_{11,3} = \frac{a}{8b}, \quad c_{11,4} = -\frac{1}{8b}, \quad c_{11,5} = -\frac{1}{8a}, \quad c_{11,6} = 0, \\ &c_{11,7} = -\frac{1}{8ab}, \quad c_{11,8} = 0, \quad c_{11,9} = \frac{1}{8a^2}, \quad c_{11,10} = 0, \quad c_{11,11} = \frac{1}{8a^2 b}, \quad c_{11,12} = 0 \end{aligned} \tag{3.66}$$

Από την σχέση (3.67) προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\psi_{11}^e(x,y) = \frac{a}{8} - \frac{1}{8}x + \frac{a}{8b}y - \frac{1}{8b}xy - \frac{1}{8a}x^2 - \frac{1}{8ab}x^2 y + \frac{1}{8a^2}x^3 + \frac{1}{8a^2 b}x^3 y \Rightarrow$$

$$\psi_{11}^e(x,y) = \frac{a}{8}\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2\left(1 + \frac{y}{b}\right) \tag{3.67}$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(3.67) έχουμε:

$$\frac{\partial \psi_{11}^e(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{8}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 + 3\frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right) \tag{3.68}$$

$$\frac{\partial \psi_{11}^e(x,y)}{\partial y} = \frac{a}{8b}\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \tag{3.69}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{11}^e(x,y)}{\partial x^2} = -\frac{1}{4a}\left(1 - 3\frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right) \qquad \frac{\partial^2 \psi_{11}^e(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{3.70}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{11}^e(x,y)}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{8b}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 + 3\frac{x}{a}\right) \tag{3.71}$$

Συνάρτηση σχήματος $\psi_{12}^e(x,y)$:

$$\begin{aligned} &c_{12,1} = -\frac{b}{8}, \quad c_{12,2} = \frac{b}{8a}, \quad c_{12,3} = -\frac{1}{8}, \quad c_{12,4} = \frac{1}{8a}, \quad c_{12,5} = 0, \quad c_{12,6} = \frac{1}{8b}, \\ &c_{12,7} = 0, \quad c_{12,8} = -\frac{1}{8ab}, \quad c_{12,9} = 0, \quad c_{12,10} = \frac{1}{8b^2}, \quad c_{12,11} = 0, \quad c_{12,12} = -\frac{1}{8ab^2} \end{aligned} \tag{3.72}$$

Από την σχέση (3.72) προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\psi_{12}^{e}(x,y) = -\frac{b}{8} + \frac{b}{8a}x - \frac{1}{8}y + \frac{1}{8a}xy + \frac{1}{8b}y^2 - \frac{1}{8ab}xy^2 + \frac{1}{8b^2}y^3 - \frac{1}{8ab^2}xy^3 \quad \Rightarrow$$

$$\psi_{12}^{e}(x,y) = -\frac{b}{8}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)^2 \tag{3.73}$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(3.73) έχουμε:

$$\frac{\partial\psi_{12}^{e}(x,y)}{\partial x} = \frac{b}{8a}\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)^2 \tag{3.74}$$

$$\frac{\partial\psi_{12}^{e}(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{8}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-3\frac{y}{b}\right) \tag{3.75}$$

$$\frac{\partial^2\psi_{12}^{e}(x,y)}{\partial x^2} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial^2\psi_{12}^{e}(x,y)}{\partial y^2} = \frac{1}{4b}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+3\frac{y}{b}\right) \tag{3.76}$$

$$\frac{\partial^2\psi_{12}^{e}(x,y)}{\partial x\partial y} = \frac{1}{8a}\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-3\frac{y}{b}\right) \tag{3.77}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΕΤΡΑΚΟΜΒΙΚΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΠΛΑΚΑΣ

Διαφορική εξίσωση της καμπτόμενης πλάκας (διαρμονικός τελεστής ∇^4):

$$\nabla^2\left(D\nabla^2 w\right) = q \;\Rightarrow\; D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\nabla^2 w = q \;\Rightarrow\; D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = q$$

$$\Rightarrow\; D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = q \tag{4.1}$$

όπου

$$D = \frac{E h_e^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \tag{4.2}$$

Το πεδίο των μετατοπίσεων ορίζεται ως:

$$u(x,y,z) = -z\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \qquad (4.3α)$$

$$v(x,y,z) = -z\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \qquad (4.3β)$$

$$w(x,y,z) = w(x,y) \qquad (4.3γ)$$

Οι ανηγμένες παραμορφώσεις ορίζονται ως:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{4.4α}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{4.4β}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{4.4γ}$$

Οι καταστατικές εξισώσεις για το υλικό του επίπεδου φορέα διατυπώνονται, εν γένει, ως εξής:

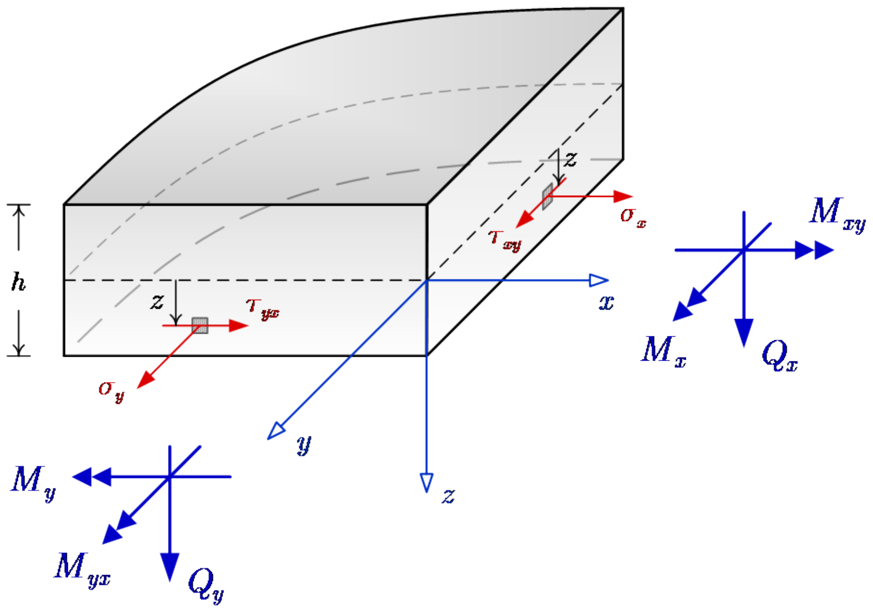
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_y\right) \tag{4.5α}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu\,\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) \tag{4.5β}$$

$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy} \tag{4.5γ}$$

στην οποία το μέτρο διάτμησης G δίνεται ως

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{4.6}$$



$$M_x = \int_{-h_e/2}^{+h_e/2} z\sigma_x\,dz = \int_{-h_e/2}^{+h_e/2} z\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_y\right)dz = \int_{-h_e/2}^{+h_e/2} z\frac{E}{1-\nu^2}\left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)dz$$

$$= -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\int_{-h_e/2}^{+h_e/2} z^2\,dz = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-h_e/2}^{+h_e/2}$$

$$= -\frac{E}{1-\nu^2}\frac{h_e^3}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \Rightarrow M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{4.6}$$

όπου, έτσι προκύπτει ο συντελεστής D της διαφορικής εξίσωσης, που δίνεται στην Εξ. (4.2):

$$D = \frac{Eh_e^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$$

$$M_y = \int_{-h_e/2}^{+h_e/2} z\sigma_y\,dz = \int_{-h_e/2}^{+h_e/2} z\frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu\,\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)dz = \int_{-h_e/2}^{+h_e/2} z\frac{E}{1-\nu^2}\left(-\nu z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)dz$$

$$= -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\int_{-h_e/2}^{+h_e/2} z^2\,dz = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-h_e/2}^{+h_e/2}$$

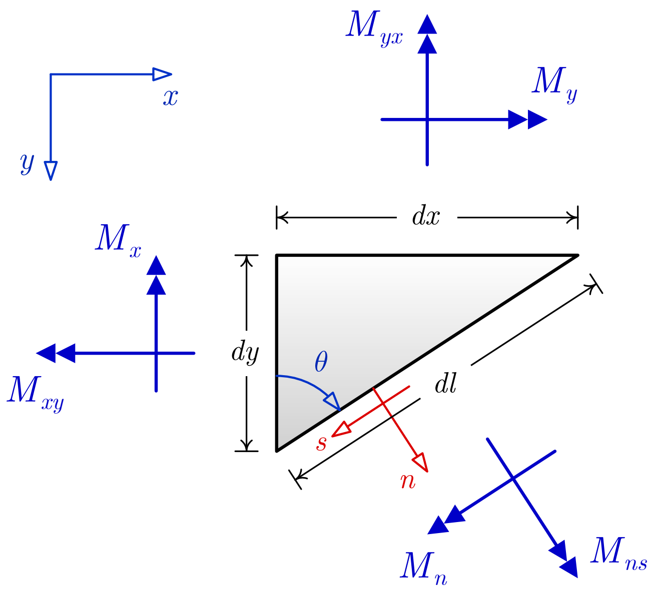
$$= -\frac{E}{1-\nu^2}\frac{h_e^3}{12}\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \Rightarrow M_y = -D\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{4.7}$$

$$M_{yx} = \int_{-h_e/2}^{+h_e/2} z\tau_{yx}\,dz = \int_{-h_e/2}^{+h_e/2} zG\,\gamma_{xy}\,dz = \int_{-h_e/2}^{+h_e/2} zG\left(-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)dz$$

$$= -2G\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\int_{-h_e/2}^{+h_e/2} z^2\,dz = -2G\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-h_e/2}^{+h_e/2} = -2G\frac{h_e^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

$$= -2\frac{E}{2(1+\nu)}\frac{h_e^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \Rightarrow M_{yx} = -(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{4.8}$$

$$M_{xy} = -\int_{-h_e/2}^{+h_e/2} z\tau_{xy}\,dz = -\int_{-h_e/2}^{+h_e/2} zG\,\gamma_{xy}\,dz = -M_{yx} \Rightarrow M_{xy} = (1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{4.9}$$



Σε μια τομή κλήσης θ με τη διεύθυνση y, οι ροπές στη κάθετη και εφαπτομενική προς την τομή αυτή διεύθυνση θα είναι:

$$\Sigma M_n = 0 \;\Rightarrow\; M_n dl + M_{xy} dy \sin\theta - M_x dy \cos\theta - M_{yx} dx \cos\theta - M_y dx \sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow\; M_n + M_{xy}\frac{dy}{dl}\sin\theta - M_x\frac{dy}{dl}\cos\theta - M_{yx}\frac{dx}{dl}\cos\theta - M_y\frac{dx}{dl}\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow\; M_n + M_{xy}\cos\theta\sin\theta - M_x\cos^2\theta - M_{yx}\sin\theta\cos\theta - M_y\sin^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow\; M_n = M_x\cos^2\theta - 2M_{xy}\sin\theta\cos\theta + M_y\sin^2\theta \tag{4.10}$$

$$\Sigma M_s = 0 \;\Rightarrow\; M_{ns} dl - M_{xy} dy \cos\theta - M_x dy \sin\theta - M_{yx} dx \sin\theta + M_y dx \cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow\; M_{ns} - M_{xy}\frac{dy}{dl}\cos\theta - M_x\frac{dy}{dl}\sin\theta - M_{yx}\frac{dx}{dl}\sin\theta + M_y\frac{dx}{dl}\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow\; M_{ns} - M_{xy}\cos^2\theta - M_x\cos\theta\sin\theta - M_{yx}\sin^2\theta + M_y\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow\; M_{ns} = \left(M_x - M_y\right)\sin\theta\cos\theta + M_{xy}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \tag{4.11}$$

Εφαρμόζεται η Μέθοδος των Σταθμισμένων Υπολοίπων (*Galerkin Weighted Residual Method*) για το τυπικό πεπερασμένο στοιχείο e του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων της πλάκας. Βάσει της διαφορικής εξίσωσης (4.1) προκύπτει:

$$\int_{V^e}\left[D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) - q\right]\cdot\delta w\; dV = 0 \tag{4.12}$$

και επειδή $dV = h_e d\Omega$, η ανωτέρω σχέση γράφεται:

$$\int_{\Omega^e} \left\{ D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(1-\nu)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] - q \right\} \cdot \delta w \; h_e d\Omega = 0 \;\; \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot \delta w \; d\Omega + \int_{\Omega^e} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \cdot \delta w \; d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega^e} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left[(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \cdot \delta w \; d\Omega + \int_{\Omega^e} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\nu D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot \delta w \; d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega^e} q \cdot \delta w \; d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Για τις μερικές παραγώγους του γινομένου δύο συναρτήσεων δύο μεταβλητών ισχύει γενικά:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\big[f(x,y) \cdot g(x,y) \big] = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot g(x,y) + f(x,y) \cdot \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \\
&\quad \Rightarrow \;\; \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot g(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\big[f(x,y) \cdot g(x,y) \big] - f(x,y) \cdot \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}
\end{aligned} \tag{4.14α}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\big[f(x,y) \cdot g(x,y) \big] = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot g(x,y) + f(x,y) \cdot \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\
&\quad \Rightarrow \;\; \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot g(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\big[f(x,y) \cdot g(x,y) \big] - f(x,y) \cdot \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}
\end{aligned} \tag{4.14β}$$

Οπότε, σύμφωνα με την ολοκλήρωση κατά παράγοντες ή ολοκλήρωση κατά μέρη για τις συναρτήσεις αυτές των δύο μεταβλητών, η Εξ. (4.13) θα πάρει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
&\oint_{\Gamma^e} n_x \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot \delta w \; ds - \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial x} \; d\Omega \\
&\quad + \oint_{\Gamma^e} n_x \frac{\partial}{\partial y}\left[(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \cdot \delta w \; ds - \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial y}\left[(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial x} \; d\Omega \\
&\quad + \oint_{\Gamma^e} n_y \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \cdot \delta w \; ds - \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial y} \; d\Omega \\
&\quad + \oint_{\Gamma^e} n_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot \delta w \; ds - \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial y} \; d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega^e} q \cdot \delta w \; d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για τα επιφανειακά ολοκληρώματα της Εξ. (4.15), στα οποία εμφανίζονται μερικές παράγωγοι της βύθισης, προκύπτει:

$$
\begin{aligned}
&\oint_{\Gamma^e} n_x \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot \delta w \; ds \\
&-\left[\oint_{\Gamma^e} n_x \left(D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot \frac{\partial \delta w}{\partial x}\; ds - \int_{\Omega^e}\left(D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}\; d\Omega\right] \\
&+\oint_{\Gamma^e} n_x \frac{\partial}{\partial y}\left[(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right]\cdot \delta w \; ds \\
&-\left[\oint_{\Gamma^e} n_y (1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\cdot \frac{\partial \delta w}{\partial x}\; ds - \int_{\Omega^e}(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y}\; d\Omega\right] \\
&+\oint_{\Gamma^e} n_y \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right]\cdot \delta w \; ds \\
&-\left[\oint_{\Gamma^e} n_x (1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\cdot \frac{\partial \delta w}{\partial y}\; ds - \int_{\Omega^e}(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y}\; d\Omega\right] \\
&+\oint_{\Gamma^e} n_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot \delta w \; ds \\
&-\left[\oint_{\Gamma^e} n_y \left(\nu D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot \frac{\partial \delta w}{\partial y}\; ds - \int_{\Omega^e}\left(\nu D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}\; d\Omega\right] \\
&-\int_{\Omega^e} q\cdot \delta w \; d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

Εάν στην ανωτέρω Εξ.(4.16) αντικατασταθούν οι εκφράσεις των ροπών από τις Εξ. (4.6) έως και (4.9), δηλαδή,

$$
M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad M_y = -D\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad M_{xy} = -M_{yx} = (1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
$$

τότε η Εξ. (16) θα πάρει την μορφή,

$$\begin{aligned}
&\oint_{\Gamma^e} n_x \frac{\partial}{\partial x}(-M_x)\cdot \delta w\, ds - \oint_{\Gamma^e} n_x(-M_x)\cdot \frac{\partial \delta w}{\partial x}\, ds + \int_{\Omega^e}\left(D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}\, d\Omega \\
&+\oint_{\Gamma^e} n_x \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\cdot \delta w\, ds - \oint_{\Gamma^e} n_y M_{xy}\cdot \frac{\partial \delta w}{\partial x}\, ds + \int_{\Omega^e}(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y}\, d\Omega \\
&+\oint_{\Gamma^e} n_y \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\cdot \delta w\, ds - \oint_{\Gamma^e} n_x M_{xy}\cdot \frac{\partial \delta w}{\partial y}\, ds + \int_{\Omega^e}(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y}\, d\Omega \\
&+\oint_{\Gamma^e} n_y \frac{\partial}{\partial y}(-M_y)\cdot \delta w\, ds - \oint_{\Gamma^e} n_y(-M_y)\cdot \frac{\partial \delta w}{\partial y}\, ds + \int_{\Omega^e}\left(\nu D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}\, d\Omega \\
&-\int_{\Omega^e} q\cdot \delta w\, d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

η οποία στη συνέχεια γράφεται ως,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e}\left(D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}\, d\Omega + \int_{\Omega^e} 2(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y}\, d\Omega \\
&+\int_{\Omega^e}\left(\nu D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}\, d\Omega - \int_{\Omega^e} q\cdot \delta w\, d\Omega \\
&+\oint_{\Gamma^e} n_x\left(-\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)\cdot \delta w\, ds + \oint_{\Gamma^e} n_y\left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y}\right)\cdot \delta w\, ds \\
&+\oint_{\Gamma^e}\left(n_x M_x - n_y M_{xy}\right)\cdot \frac{\partial \delta w}{\partial x}\, ds + \oint_{\Gamma^e}\left(-n_x M_{xy} + n_y M_y\right)\cdot \frac{\partial \delta w}{\partial y}\, ds = 0
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Σε ένα τμήμα της πλάκας, όμως, είναι γνωστό από παραπάνω κεφάλαιο ότι οι τέμνουσες δυνάμεις θα δίνονται συναρτήσει των ροπών από τις κάτωθι σχέσεις:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = Q_x \tag{4.19α}$$

$$-\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y \tag{4.19β}$$

οπότε η Εξ. (4.18) μπορεί να γραφεί ως:

$$\int_{\Omega^e} \left(D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}\, d\Omega + \int_{\Omega^e} 2(1-\nu) D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y}\, d\Omega$$
$$+\int_{\Omega^e} \left(\nu D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}\, d\Omega - \int_{\Omega^e} q \cdot \delta w\, d\Omega - \oint_{\Gamma^e} \left(Q_x n_x + Q_y n_y \right) \cdot \delta w\, ds$$
$$+\oint_{\Gamma^e} \left[\left(M_x n_x - M_{xy} n_y \right) \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \left(-M_{xy} n_x + M_y n_y \right) \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right] ds = 0 \tag{4.20}$$

Μια λοξή τομή της πλάκας δημιουργεί επιφάνεια με κάθετο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$, το οποίο έχει συνιστώσες $n_x = \cos\theta$ και $n_y = \sin\theta$ κατά τις διευθύνσεις x και y, αντίστοιχα. Τότε για τη λοξή αυτή επιφάνεια του τμήματος της πλάκας ισχύει,

$$\frac{\partial \delta w}{\partial x} = \frac{\partial \delta w}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial \delta w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} \;\Rightarrow\; \frac{\partial \delta w}{\partial x} = \frac{\partial \delta w}{\partial n} n_x + \frac{\partial \delta w}{\partial s}(-n_y) \tag{4.21α}$$

$$\frac{\partial \delta w}{\partial y} = \frac{\partial \delta w}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial y} + \frac{\partial \delta w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} \;\Rightarrow\; \frac{\partial \delta w}{\partial y} = \frac{\partial \delta w}{\partial n} n_y + \frac{\partial \delta w}{\partial s} n_x \tag{4.21α}$$

και

$$Q_x dy + Q_y dx - Q_n dl = 0 \;\Rightarrow\; Q_x \frac{dy}{dl} + Q_y \frac{dx}{dl} = Q_n \;\Rightarrow\; Q_n = Q_x n_x + Q_y n_y \tag{4.22}$$

Συνεπώς, η Εξ. (4.20) θα πάρει τη μορφή

$$\int_{\Omega^e} \left(D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}\, d\Omega + \int_{\Omega^e} 2(1-\nu) D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y}\, d\Omega$$
$$+\int_{\Omega^e} \left(\nu D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}\, d\Omega - \int_{\Omega^e} q \cdot \delta w\, d\Omega - \oint_{\Gamma^e} Q_n \cdot \delta w\, ds$$
$$+\oint_{\Gamma^e} \left(M_x n_x - M_{xy} n_y \right) \cdot \left(\frac{\partial \delta w}{\partial n} n_x - \frac{\partial \delta w}{\partial s} n_y \right) ds$$
$$+\oint_{\Gamma^e} \left(-M_{xy} n_x + M_y n_y \right) \cdot \left(\frac{\partial \delta w}{\partial n} n_y + \frac{\partial \delta w}{\partial s} n_x \right) ds = 0 \;\Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e}\left(D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}\,d\Omega+\int_{\Omega^e}2(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2\delta w}{\partial x\partial y}\,d\Omega\\
&\quad+\int_{\Omega^e}\left(\nu D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial^2\delta w}{\partial y^2}\,d\Omega-\int_{\Omega^e}q\cdot\delta w\,d\Omega-\oint_{\Gamma^e}Q_n\cdot\delta w\,ds\\
&\quad+\oint_{\Gamma^e}\left[\left(M_x n_x-M_{xy}n_y\right)n_x+\left(-M_{xy}n_x+M_y n_y\right)n_y\right]\cdot\frac{\partial\delta w}{\partial n}\,ds\\
&\quad+\oint_{\Gamma^e}\left[-\left(M_x n_x-M_{xy}n_y\right)n_y+\left(-M_{xy}n_x+M_y n_y\right)n_x\right]\cdot\frac{\partial\delta w}{\partial s}\,ds=0\;\Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e}\left(D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}\,d\Omega+\int_{\Omega^e}2(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2\delta w}{\partial x\partial y}\,d\Omega\\
&\quad+\int_{\Omega^e}\left(\nu D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial^2\delta w}{\partial y^2}\,d\Omega-\int_{\Omega^e}q\cdot\delta w\,d\Omega-\oint_{\Gamma^e}Q_n\cdot\delta w\,ds\\
&\quad+\oint_{\Gamma^e}\left[\left(M_x\cos\theta-M_{xy}\sin\theta\right)\cos\theta+\left(-M_{xy}\cos\theta+M_y\sin\theta\right)\sin\theta\right]\cdot\frac{\partial\delta w}{\partial n}\,ds\\
&\quad+\oint_{\Gamma^e}\left[-\left(M_x\cos\theta-M_{xy}\sin\theta\right)\sin\theta+\left(-M_{xy}\cos\theta+M_y\sin\theta\right)\cos\theta\right]\cdot\frac{\partial\delta w}{\partial s}\,ds=0\;\Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e}\left(D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}\,d\Omega+\int_{\Omega^e}2(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2\delta w}{\partial x\partial y}\,d\Omega\\
&\quad+\int_{\Omega^e}\left(\nu D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial^2\delta w}{\partial y^2}\,d\Omega-\int_{\Omega^e}q\cdot\delta w\,d\Omega-\oint_{\Gamma^e}Q_n\cdot\delta w\,ds\\
&\quad+\oint_{\Gamma^e}\left(M_x\cos^2\theta+M_y\sin^2\theta-2M_{xy}\sin\theta\cos\theta\right)\cdot\frac{\partial\delta w}{\partial n}\,ds\\
&\quad+\oint_{\Gamma^e}\left[-M_x\sin\theta\cos\theta+M_{xy}\left(\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)+M_y\sin\theta\cos\theta\right]\cdot\frac{\partial\delta w}{\partial s}\,ds=0\;\Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e}\left(D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}\,d\Omega+\int_{\Omega^e}2(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2\delta w}{\partial x\partial y}\,d\Omega\\
&\quad+\int_{\Omega^e}\left(\nu D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial^2\delta w}{\partial y^2}\,d\Omega-\int_{\Omega^e}q\cdot\delta w\,d\Omega\\
&\quad-\oint_{\Gamma^e}Q_n\cdot\delta w\,ds+\oint_{\Gamma^e}M_n\cdot\frac{\partial\delta w}{\partial n}\,ds-\oint_{\Gamma^e}M_{ns}\cdot\frac{\partial\delta w}{\partial s}\,ds=0
\end{aligned}
}
\tag{4.23}
$$

Η ανωτέρω εξίσωση αποτελεί την ασθενή μορφή (*weak form*) του προβλήματος της κάμψης δοκών, και αποτελεί, επίσης, έκφραση της ολικής δυναμικής ενέργειας για το εν λόγω πρόβλημα. Ο τελευταίος όρος της ανωτέρω εξίσωσης μπορεί να ολοκληρωθεί κατά μέρη και να γραφεί,

$$\oint_{\Gamma^e} M_{ns} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial s}\, ds = \left[M_{ns} \cdot \delta w \right]_{\Gamma^e} - \oint_{\Gamma^e} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \cdot \delta w\; ds = -\oint_{\Gamma^e} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \cdot \delta w\; ds \tag{4.24}$$

στην οποία θεωρείται ότι $\left[M_{ns} \cdot \delta w \right]_{\Gamma^e} = 0$. Έτσι, τα τρία επικαμπύλια ολοκληρώματα της έκφρασης (4.23) γράφονται ως εξής,

$$\begin{aligned}
&-\oint_{\Gamma^e} Q_n \cdot \delta w\; ds + \oint_{\Gamma^e} M_n \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial n}\, ds - \oint_{\Gamma^e} M_{ns} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial s}\, ds \\
&\quad = -\oint_{\Gamma^e} Q_n \cdot \delta w\; ds + \oint_{\Gamma^e} M_n \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial n}\, ds - \left(-\oint_{\Gamma^e} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \cdot \delta w\; ds \right) \\
&\quad = -\oint_{\Gamma^e} \left(Q_n - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \right) \cdot \delta w\; ds + \oint_{\Gamma^e} M_n \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial n}\, ds = -\oint_{\Gamma^e} V_n \cdot \delta w\; ds + \oint_{\Gamma^e} M_n \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial n}\, ds
\end{aligned} \tag{4.25}$$

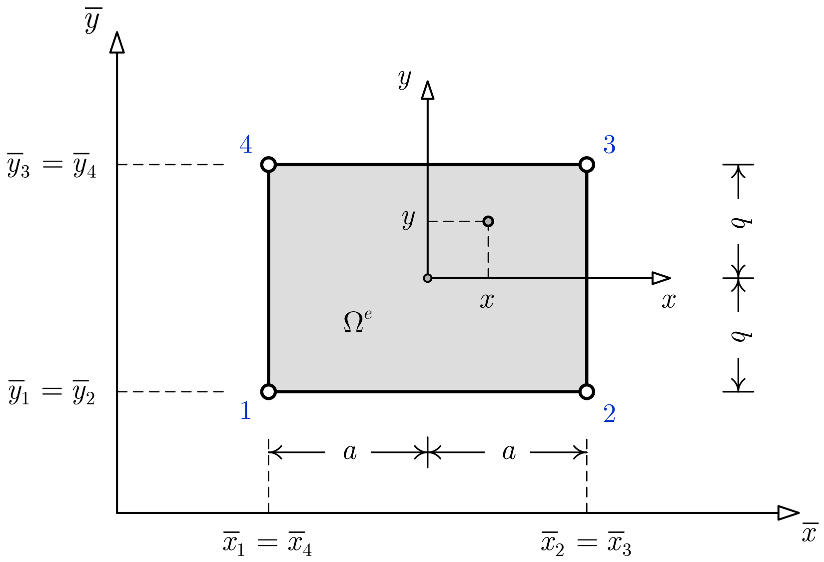
στην οποία

$$V_n = Q_n - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \tag{4.26}$$

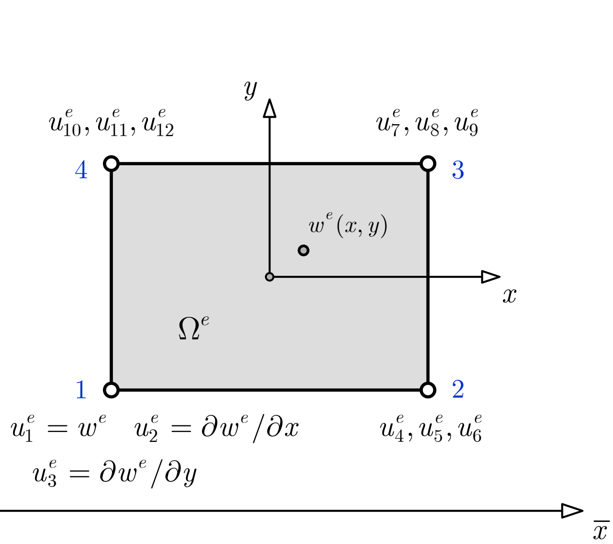
όπου η δύναμη V_n ονομάζεται *ενεργός* ή *υποκατάστατη τέμνουσας* και αποτελεί τη συνθήκη του ελεύθερου άκρου κατά Kirchhoff (*Kirchhoff free-edge condition*). Συνεπώς, ενσωματώνοντας τα αποτελέσματα της Εξ. (4.25) στην Εξ. (4.23) καταλήγουμε στην τελική έκφραση της ασθενούς μορφής του προβλήματος της κάμψης πλακών,

$$\boxed{\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}\, d\Omega + \int_{\Omega^e} 2(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y}\, d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega^e} \left(\nu D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}\, d\Omega - \int_{\Omega^e} q \cdot \delta w\; d\Omega \\
&\quad - \oint_{\Gamma^e} V_n \cdot \delta w\; ds + \oint_{\Gamma^e} M_n \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial n}\, ds = 0
\end{aligned}} \tag{4.27}$$

Ορθογώνιο Τετρακομβικό Στοιχείο Πλάκας



Καθολικό και τοπικό σύστημα αξόνων ορθογωνίου 4-κομβικού στοιχείου.



Βαθμοί ελευθερίας του ορθογωνίου 4-κομβικού στοιχείου.

Το πεδίο των μετατοπίσεων $w^e(x,y)$ στο εσωτερικό του τυπικού ορθογωνίου τετρακομβικού στοιχείου προσεγγίζεται με πολυώνυμα τετάρτου βαθμού ως προς x και y, που όμως δεν είναι πλήρη τετάρτου βαθμού, αλλά πλήρη τρίτου βαθμού. Οι πολυωνυμικές σχέσεις για τη μετατόπιση και τις παραγώγους αυτής, δηλαδή τις στροφές, σε κάθε σημείο του στοιχείου θα έχουν τη μορφή

$$w^e(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 xy + c_5 x^2 + c_6 y^2 + c_7 x^2 y + c_8 xy^2 + c_9 x^3 + c_{10} y^3 + c_{11} x^3 y + c_{12} xy^3 \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial w^e(x,y)}{\partial x} = c_2 + c_4 y + 2c_5 x + 2c_7 xy + c_8 y^2 + 3c_9 x^2 + 3c_{11} x^2 y + c_{12} y^3 \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial w^e(x,y)}{\partial y} = c_3 + c_4 x + 2c_6 y + c_7 x^2 + 2c_8 xy + 3c_{10} y^2 + c_{11} x^3 + 3c_{12} xy^2 \tag{4.30}$$

όπου (x,y) είναι το τοπικό σύστημα με αρχή στο κέντρο του στοιχείου. Η γραμμική μεταβολή της μετατόπισης στο εσωτερικό του στοιχείου e εκφράζεται, επίσης, μέσω συναρτήσεων σχήματος ως

$$w^e(x,y) = \sum_{i=1}^{12} u_i^e \ \psi_i^e(x,y) \tag{4.31}$$

στην οποία $u_i \ \ (i = 1,2,\ldots,12)$ συμβολίζουν τις γενικευμένες επικόμβιες τιμές. Αυτές στους τέσσερες κόμβους $k = 1,2,3,4$ ορίζονται ως

$$u_{3k-2}^e = w^e(x_k, y_k), \qquad u_{3k-1}^e = \left.\frac{\partial w^e(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_k \\ y=y_k}}, \qquad u_{3k}^e = \left.\frac{\partial w^e(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_k \\ y=y_k}} \tag{4.32}$$

Επομένως, αντικαθιστώντας στην Εξ. (4.27) τη μετατόπιση $w = w^e(x,y)$, σύμφωνα με την έκφραση της Εξ. (4.31) και θέτοντας $\delta w = \psi_i^e(x,y)$ με $i = 1,2,\ldots,12$, παράγεται το μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων της πλάκας για ορθογώνια τετρακομβικά στοιχεία ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e} \left(D\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu D\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\sum_{j=1}^{12} u_j^e \ \psi_j^e(x,y) \right) \cdot \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial x^2} \, d\Omega \\
&+ \int_{\Omega^e} 2(1-\nu) D \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\sum_{j=1}^{12} u_j^e \ \psi_j^e(x,y) \right) \cdot \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial x \partial y} \, d\Omega \\
&+ \int_{\Omega^e} \left(\nu D\frac{\partial^2}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\sum_{j=1}^{12} u_j^e \ \psi_j^e(x,y) \right) \cdot \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial y^2} \, d\Omega \\
&- \int_{\Omega^e} q \cdot \psi_i^e(x,y) \, d\Omega - \oint_{\Gamma^e} V_n \cdot \psi_i^e(x,y) \, ds + \oint_{\Gamma^e} M_n \cdot \frac{\partial \psi_i^e(x,y)}{\partial n} \, ds = 0
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^{12} u_j^e \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial x^2}\left(D\frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial x^2} + \nu D \frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial y^2}\right) d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^{12} u_j^e \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial x \partial y} 2(1-\nu) D \frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial x \partial y}\, d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^{12} u_j^e \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial y^2}\left(\nu D\frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial y^2}\right) d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega^e} q \cdot \psi_i^e(x,y)\, d\Omega - \oint_{\Gamma^e} V_n \cdot \psi_i^e(x,y)\, ds + \oint_{\Gamma^e} M_n \cdot \frac{\partial \psi_i^e(x,y)}{\partial n}\, ds = 0
\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{12} u_j^e \int_{\Omega^e} \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial x^2}\left(D\frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial x^2} + \nu D \frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial y^2}\right) d\Omega \\
&\quad + \sum_{j=1}^{12} u_j^e \int_{\Omega^e} \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial x \partial y} 2(1-\nu) D \frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial x \partial y}\, d\Omega \\
&\quad + \sum_{j=1}^{12} u_j^e \int_{\Omega^e} \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial y^2}\left(\nu D\frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial y^2}\right) d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega^e} q \cdot \psi_i^e(x,y)\, d\Omega - \oint_{\Gamma^e} V_n \cdot \psi_i^e(x,y)\, ds + \oint_{\Gamma^e} M_n \cdot \frac{\partial \psi_i^e(x,y)}{\partial n}\, ds = 0
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{12} u_j^e \left[\int_{\Omega^e} \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial x^2}\left(D\frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial x^2} + \nu D \frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial y^2}\right) d\Omega \right.\\
&\qquad + \int_{\Omega^e} \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial x \partial y} 2(1-\nu) D \frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial x \partial y}\, d\Omega \\
&\qquad \left. + \int_{\Omega^e} \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial y^2}\left(\nu D\frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial y^2}\right) d\Omega \right] \\
&\qquad - \int_{\Omega^e} q \cdot \psi_i^e(x,y)\, d\Omega - \oint_{\Gamma^e} V_n \cdot \psi_i^e(x,y)\, ds + \oint_{\Gamma^e} M_n \cdot \frac{\partial \psi_i^e(x,y)}{\partial n}\, ds = 0
\end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\sum_{j=1}^{12} K_{ij}^e u_j^e - \int_{\Omega^e} q \cdot \psi_i^e(x,y)\, d\Omega - \oint_{\Gamma^e} V_n \cdot \psi_i^e(x,y)\, ds + \oint_{\Gamma^e} M_n \cdot \frac{\partial \psi_i^e(x,y)}{\partial n}\, ds = 0 \tag{4.37}$$

όπου

$$\boxed{\begin{aligned} K_{ij}^{e} =& \int\limits_{\Omega^e} \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial x^2}\left(D\frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial x^2} + \nu D\frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial y^2}\right) d\Omega \\ &+ \int\limits_{\Omega^e} \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial x \partial y} 2(1-\nu) D \frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial x \partial y}\, d\Omega \\ &+ \int\limits_{\Omega^e} \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial y^2}\left(\nu D\frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial y^2}\right) d\Omega \end{aligned}} \tag{4.38α}$$

$$\boxed{\begin{aligned} K_{ij}^{e} =& D\int\limits_{\Omega^e} \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial x^2}\, d\Omega + \nu D\int\limits_{\Omega^e} \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial y^2}\, d\Omega \\ &+ 2(1-\nu) D\int\limits_{\Omega^e} \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial x \partial y}\, d\Omega \\ &+ \nu D\int\limits_{\Omega^e} \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial x^2}\, d\Omega + D\int\limits_{\Omega^e} \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial y^2}\, d\Omega \end{aligned}} \tag{4.38β}$$

$$\int\limits_{\Omega^e} \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial x^2}\, d\Omega \qquad \text{(ka, πίνακας στο Maple)}$$

$$\int\limits_{\Omega^e} \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial y^2}\, d\Omega \qquad \text{(kb, πίνακας στο Maple)}$$

$$\int\limits_{\Omega^e} \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial x \partial y}\, d\Omega \qquad \text{(kc, πίνακας στο Maple)}$$

$$\int\limits_{\Omega^e} \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial y^2}\, d\Omega \qquad \text{(kd, πίνακας στο Maple)}$$

$$\int\limits_{\Omega^e} \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \psi_j^e(x,y)}{\partial x^2}\, d\Omega \qquad \text{(ke, πίνακας στο Maple)}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi_i^e(x,y)}{\partial x \partial y} \quad \left(i = 1, 2, \ldots, 12\right)$$

Παρακάτω φαίνεται η αναλυτική λύση στο πρόγραμμα Maple για την εύρεση του μητρώου στιβαρότητας

$$ddx\_psi1 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{8\, a^3\, b^3}\left((b-y)\,(a-x)\,\left(2\, a^2\, b^2 - a^2\, b\, y - a^2\, y^2 - b^2\, x\, a - b^2\, x^2\right)\right)\right); ddx\_psi1(x, y); \mathbf{factor}(\%);$$

$$ddy\_psi1 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{8\, a^3\, b^3}\left((b-y)\,(a-x)\,\left(2\, a^2\, b^2 - a^2\, b\, y - a^2\, y^2 - b^2\, x\, a - b^2\, x^2\right)\right)\right); ddy\_psi1(x, y); \mathbf{factor}(\%);$$

$$ddxy\_psi1 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{1}{8\, a^3\, b^3}\left((b-y)\,(a-x)\,\left(2\, a^2\, b^2 - a^2\, b\, y - a^2\, y^2 - b^2\, x\, a - b^2\, x^2\right)\right)\right); ddxy\_psi1(x, y); \mathbf{factor}(\%);$$

```
interface(rtablesize = 12);
```

$$ddx\_psi1 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\, b^3}\left((b-y)\,(a-x)\,\left(2\, a^2\, b^2 - a^2\, b\, y - a^2\, y^2 - b^2\, x\, a - b^2\, x^2\right)\right)\right)$$

$$-\frac{(b-y)\,\left(-a\, b^2 - 2\, b^2\, x\right)}{4\, a^3\, b^3} - \frac{(b-y)\,(a-x)}{4\, b\, a^3}$$

$$\frac{3\,(b-y)\, x}{4\, b\, a^3}$$

$$ddy\_psi1 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\, b^3}\left((b-y)\,(a-x)\,\left(2\, a^2\, b^2 - a^2\, b\, y - a^2\, y^2 - b^2\, x\, a - b^2\, x^2\right)\right)\right)$$

$$-\frac{(a-x)\,\left(-a^2\, b - 2\, a^2\, y\right)}{4\, a^3\, b^3} - \frac{(b-y)\,(a-x)}{4\, a\, b^3}$$

$$\frac{3\,(a-x)\, y}{4\, a\, b^3}$$

$$ddxy\_psi1 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\, b^3}\left((b-y)\,(a-x)\,\left(2\, a^2\, b^2 - a^2\, b\, y - a^2\, y^2 - b^2\, x\, a - b^2\, x^2\right)\right)\right)$$

$$\frac{2\, a^2\, b^2 - a^2\, b\, y - a^2\, y^2 - b^2\, x\, a - b^2\, x^2}{8\, a^3\, b^3} - \frac{(b-y)\,\left(-a^2\, b - 2\, a^2\, y\right)}{8\, a^3\, b^3} - \frac{(a-x)\,\left(-a\, b^2 - 2\, b^2\, x\right)}{8\, a^3\, b^3}$$

$$\frac{4\, a^2\, b^2 - 3\, a^2\, y^2 - 3\, b^2\, x^2}{8\, a^3\, b^3}$$

$[10, 10]$

$$ddx\_psi2 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{(a+x)\,(-x+a)^2\,(b-y)}{8\, a^2\, b}\right);$$

$ddx\_psi2(x, y);$ **factor**(%);

$$ddy\_psi2 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{(a+x)\,(-x+a)^2\,(b-y)}{8\, a^2\, b}\right);$$

$ddy\_psi2(x, y)$; **factor**(%);

$$ddxy\_psi2 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{(a+x)\,(-x+a)^2\,(b-y)}{8\, a^2\, b}\right);$$

$ddxy\_psi2(x, y)$; **factor**(%);

$$ddx\_psi2 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(a+x)\,(a-x)^2\,(b-y)}{a^2\, b}\right)$$

$$-\frac{(a-x)\,(b-y)}{2\, a^2\, b} + \frac{(a+x)\,(b-y)}{4\, a^2\, b}$$

$$-\frac{(b-y)\,(a-3\, x)}{4\, a^2\, b}$$

$$ddy\_psi2 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(a+x)\,(a-x)^2\,(b-y)}{a^2\, b}\right)$$

0

0

$$ddxy\_psi2 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(a+x)\,(a-x)^2\,(b-y)}{a^2\, b}\right)$$

$$-\frac{(a-x)^2}{8\, a^2\, b} + \frac{(a+x)\,(a-x)}{4\, a^2\, b}$$

$$\frac{(a-x)\,(a+3\, x)}{8\, a^2\, b}$$

$$ddx\_psi3 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{(b+y)\,(-y+b)^2\,(a-x)}{8\,a\,b^2}\right);$$

$ddx\_psi3(x, y)$; **factor**(%);

$$ddy\_psi3 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{(b+y)\,(-y+b)^2\,(a-x)}{8\,a\,b^2}\right);$$

$ddy\_psi3(x, y)$; **factor**(%);

$$ddxy\_psi3 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{(b+y)\,(-y+b)^2\,(a-x)}{8\,a\,b^2}\right);$$

$ddxy\_psi3(x, y)$; **factor**(%);

$$ddx\_psi3 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b+y)\,(b-y)^2\,(a-x)}{a\,b^2}\right)$$

0

0

$$ddy\_psi3 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b+y)\,(b-y)^2\,(a-x)}{a\,b^2}\right)$$

$$-\frac{(b-y)\,(a-x)}{2\,a\,b^2} + \frac{(b+y)\,(a-x)}{4\,a\,b^2}$$

$$-\frac{(a-x)\,(b-3\,y)}{4\,a\,b^2}$$

$$ddxy\_psi3 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b+y)\,(b-y)^2\,(a-x)}{a\,b^2}\right)$$

$$-\frac{(b-y)^2}{8\,a\,b^2} + \frac{(b+y)\,(b-y)}{4\,a\,b^2}$$

$$\frac{(b-y)\,(b+3\,y)}{8\,a\,b^2}$$

$$ddx\_psi4 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\Big((b-y)\,(a+x)\,\big(-a^2\,y\,b + 2\,a^2\,b^2 - a^2\,y^2 + b^2\,x\,a - b^2\,x^2\big)\Big)\right);$$ $ddx\_psi4(x, y)$; **factor**(%);

$$ddy\_psi4 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\Big((b-y)\,(a+x)\,\big(-a^2\,y\,b + 2\,a^2\,b^2 - a^2\,y^2 + b^2\,x\,a - b^2\,x^2\big)\Big)\right);$$ $ddy\_psi4(x, y)$; **factor**(%);

$$ddxy\_psi4 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\Big((b-y)\,(a+x)\,\big(-a^2\,y\,b + 2\,a^2\,b^2 - a^2\,y^2 + b^2\,x\,a - b^2\,x^2\big)\Big)\right);$$ $ddxy\_psi4(x, y)$; **factor**(%);

$$ddx\_psi4 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\big((b-y)\,(a+x)\,\big(-a^2\,b\,y+2\,a^2\,b^2 - a^2\,y^2+b^2\,x\,a-b^2\,x^2\big)\big)\right)$$

$$\frac{(b-y)\,\big(a\,b^2-2\,b^2\,x\big)}{4\,a^3\,b^3}-\frac{(a+x)\,(b-y)}{4\,b\,a^3}$$

$$-\frac{3\,(b-y)\,x}{4\,b\,a^3}$$

$$ddy\_psi4 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\big((b-y)\,(a+x)\,\big(-a^2\,b\,y+2\,a^2\,b^2 - a^2\,y^2+b^2\,x\,a-b^2\,x^2\big)\big)\right)$$

$$-\frac{(a+x)\,\big(-a^2\,b-2\,a^2\,y\big)}{4\,a^3\,b^3}-\frac{(a+x)\,(b-y)}{4\,a\,b^3}$$

$$\frac{3\,(a+x)\,y}{4\,a\,b^3}$$

$$ddxy\_psi4 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\big((b-y)\,(a+x)\,\big(-a^2\,b\,y+2\,a^2\,b^2 - a^2\,y^2+b^2\,x\,a-b^2\,x^2\big)\big)\right)$$

$$-\frac{2\,a^2\,b^2-a^2\,y\,b-a^2\,y^2+b^2\,x\,a-b^2\,x^2}{8\,a^3\,b^3}+\frac{(b-y)\,\big(-a^2\,b-2\,a^2\,y\big)}{8\,a^3\,b^3}-\frac{(a+x)\,\big(a\,b^2-2\,b^2\,x\big)}{8\,a^3\,b^3}$$

$$-\frac{4\,a^2\,b^2-3\,a^2\,y^2-3\,b^2\,x^2}{8\,a^3\,b^3}$$

$$ddx\_psi5 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(a-x)\,(x+a)^2\,(b-y)}{a^2\,b}\right);$$

$ddx\_psi5(x, y)$; **factor(%);**

$$ddy\_psi5 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(a-x)\,(x+a)^2\,(b-y)}{a^2\,b}\right);$$

$ddy\_psi5(x, y)$; **factor(%);**

$$ddxy\_psi5 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(a-x)\,(x+a)^2\,(b-y)}{a^2\,b}\right);$$

$ddxy\_psi5(x, y)$; **factor(%);**

$$ddx\_psi5 := (x, y) \to \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(a-x)\,(a+x)^2\,(b-y)}{a^2\,b}\right)$$

$$\frac{(a+x)\,(b-y)}{2\,a^2\,b} - \frac{(a-x)\,(b-y)}{4\,a^2\,b}$$

$$\frac{(b-y)\,(a+3\,x)}{4\,a^2\,b}$$

$$ddy\_psi5 := (x, y) \to \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(a-x)\,(a+x)^2\,(b-y)}{a^2\,b}\right)$$

$$0$$

$$0$$

$$ddxy\_psi5 := (x, y) \to \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(a-x)\,(a+x)^2\,(b-y)}{a^2\,b}\right)$$

$$-\frac{(a+x)^2}{8\,a^2\,b} + \frac{(a+x)\,(a-x)}{4\,a^2\,b}$$

$$\frac{(a+x)\,(a-3\,x)}{8\,a^2\,b}$$

$$ddx\_psi6 := (x, y) \to \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b+y)\,(-y+b)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right);$$

$ddx\_psi6(x, y)$; **factor**(%);

$$ddy\_psi6 := (x, y) \to \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b+y)\,(-y+b)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right);$$

$ddy\_psi6(x, y)$; **factor**(%);

$$ddxy\_psi6 := (x, y) \to \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b+y)\,(-y+b)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right);$$

$ddxy\_psi6(x, y)$; **factor**(%);

$$ddx\_psi6 := (x, y) \to \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b+y)\,(b-y)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right)$$

$$0$$

$$0$$

$$ddy\_psi6 := (x, y) \to \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b+y)\,(b-y)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right)$$

$$-\frac{(b-y)\,(a+x)}{2\,a\,b^2} + \frac{(b+y)\,(a+x)}{4\,a\,b^2}$$

$$-\frac{(a+x)\,(b-3\,y)}{4\,a\,b^2}$$

$$ddxy\_psi6 := (x, y) \to \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b+y)\,(b-y)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right)$$

$$\frac{(b-y)^2}{8\,a\,b^2} - \frac{(b+y)\,(b-y)}{4\,a\,b^2}$$

$$-\frac{(b-y)\,(b+3\,y)}{8\,a\,b^2}$$

$$ddx\_psi7 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b+y)\,(a+x)\,\left(a^2\,y\,b+2\,a^2\,b^2-a^2\,y^2+b^2\,x\,a-b^2\,x^2\right)\right)\right); ddx\_psi7(x,y); \mathbf{factor}(\%);$$

$$ddy\_psi7 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b+y)\,(a+x)\,\left(a^2\,y\,b+2\,a^2\,b^2-a^2\,y^2+b^2\,x\,a-b^2\,x^2\right)\right)\right); ddy\_psi7(x,y); \mathbf{factor}(\%);$$

$$ddxy\_psi7 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b+y)\,(a+x)\,\left(a^2\,y\,b+2\,a^2\,b^2-a^2\,y^2+b^2\,x\,a-b^2\,x^2\right)\right)\right); ddxy\_psi7(x,y); \mathbf{factor}(\%);$$

$$ddx\_psi7 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b+y)\,(a+x)\,\left(a^2\,b\,y+2\,a^2\,b^2-a^2\,y^2+b^2\,x\,a-b^2\,x^2\right)\right)\right)$$

$$\frac{(b+y)\,\left(a\,b^2-2\,b^2\,x\right)}{4\,a^3\,b^3}-\frac{(b+y)\,(a+x)}{4\,b\,a^3}$$

$$-\frac{3\,(b+y)\,x}{4\,b\,a^3}$$

$$ddy\_psi7 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b+y)\,(a+x)\,\left(a^2\,b\,y+2\,a^2\,b^2-a^2\,y^2+b^2\,x\,a-b^2\,x^2\right)\right)\right)$$

$$\frac{(a+x)\,\left(a^2\,b-2\,a^2\,y\right)}{4\,a^3\,b^3}-\frac{(b+y)\,(a+x)}{4\,a\,b^3}$$

$$-\frac{3\,(a+x)\,y}{4\,a\,b^3}$$

$$ddxy\_psi7 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b+y)\,(a+x)\,\left(a^2\,b\,y+2\,a^2\,b^2-a^2\,y^2+b^2\,x\,a-b^2\,x^2\right)\right)\right)$$

$$\frac{2\,a^2\,b^2 + a^2\,y\,b - a^2\,y^2 + b^2\,x\,a - b^2\,x^2}{8\,a^3\,b^3} + \frac{(b+y)\,\left(a^2\,b - 2\,a^2\,y\right)}{8\,a^3\,b^3} + \frac{(a+x)\,\left(a\,b^2 - 2\,b^2\,x\right)}{8\,a^3\,b^3}$$

$$\frac{4\,a^2\,b^2 - 3\,a^2\,y^2 - 3\,b^2\,x^2}{8\,a^3\,b^3}$$

$$ddx\_psi8 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(a-x)\,(x+a)^2\,(b+y)}{a^2\,b}\right);$$

$ddx\_psi8(x, y)$; **factor**(%);

$$ddy\_psi8 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(a-x)\,(x+a)^2\,(b+y)}{a^2\,b}\right);$$

$ddy\_psi8(x, y)$; **factor**(%);

$$ddxy\_psi8 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(a-x)\,(x+a)^2\,(b+y)}{a^2\,b}\right);$$

$ddxy\_psi8(x, y)$; **factor**(%);

$$ddx\_psi8 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(a-x)\,(a+x)^2\,(b+y)}{a^2\,b}\right)$$

$$\frac{(a+x)\,(b+y)}{2\,a^2\,b} - \frac{(a-x)\,(b+y)}{4\,a^2\,b}$$

$$\frac{(b+y)\,(a+3\,x)}{4\,a^2\,b}$$

$$ddy\_psi8 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(a-x)\,(a+x)^2\,(b+y)}{a^2\,b}\right)$$

0

0

$$ddxy\_psi8 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(a-x)\,(a+x)^2\,(b+y)}{a^2\,b}\right)$$

$$\frac{(a+x)^2}{8\,a^2\,b} - \frac{(a+x)\,(a-x)}{4\,a^2\,b}$$

$$-\frac{(a+x)\,(a-3\,x)}{8\,a^2\,b}$$

$$ddx\_psi9 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(b-y)\,(y+b)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right);$$

$ddx\_psi9(x, y)$; **factor**(%);

$$ddy\_psi9 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(b-y)\,(y+b)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right);$$

$ddy\_psi9(x, y)$; **factor**(%);

$$ddxy\_psi9 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(b-y)\,(y+b)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right);$$

$ddxy\_psi9(x, y)$; **factor**(%);

$$ddx\_psi9 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{8}\frac{(b-y)(b+y)^2(a+x)}{a\,b^2}\right)$$

$$0$$

$$0$$

$$ddy\_psi9 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{8}\frac{(b-y)(b+y)^2(a+x)}{a\,b^2}\right)$$

$$\frac{(b+y)(a+x)}{2\,a\,b^2} - \frac{(b-y)(a+x)}{4\,a\,b^2}$$

$$\frac{(a+x)(b+3\,y)}{4\,a\,b^2}$$

$$ddxy\_psi9 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\left(-\frac{1}{8}\frac{(b-y)(b+y)^2(a+x)}{a\,b^2}\right)$$

$$\frac{(b+y)^2}{8\,a\,b^2} - \frac{(b+y)(b-y)}{4\,a\,b^2}$$

$$-\frac{(b+y)(b-3\,y)}{8\,a\,b^2}$$

$$ddx\_psi10 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{8}\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b+y)(a-x)\left(2\,a^2\,b^2 + a^2\,y\,b - a^2\,y^2 - b^2\,x\,a - b^2\,x^2\right)\right)\right); ddx\_psi10(x, y); \mathbf{factor}(\%);$$

$$ddy\_psi10 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{8}\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b+y)(a-x)\left(2\,a^2\,b^2 + a^2\,y\,b - a^2\,y^2 - b^2\,x\,a - b^2\,x^2\right)\right)\right); ddy\_psi10(x, y); \mathbf{factor}(\%);$$

$$ddxy\_psi10 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{8}\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b+y)(a-x)\left(2\,a^2\,b^2 + a^2\,y\,b - a^2\,y^2 - b^2\,x\,a - b^2\,x^2\right)\right)\right); ddxy\_psi10(x, y); \mathbf{factor}(\%);$$

$$ddx\_psi10 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{8}\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b+y)(a-x)\left(2\,a^2\,b^2 + a^2\,b\,y - a^2\,y^2 - b^2\,x\,a - b^2\,x^2\right)\right)\right)$$

$$-\frac{(b+y)\left(-a\,b^2 - 2\,b^2\,x\right)}{4\,a^3\,b^3} - \frac{(a-x)(b+y)}{4\,b\,a^3}$$

$$\frac{3\,(b+y)\,x}{4\,b\,a^3}$$

$$ddy\_psi10 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3 b^3}\left((b+y)\,(a-x)\,\left(2\,a^2 b^2 + a^2\,b\,y - a^2 y^2 - b^2\,x\,a - b^2 x^2\right)\right)\right)$$

$$\frac{(a-x)\,\left(a^2\,b - 2\,a^2\,y\right)}{4\,a^3\,b^3} - \frac{(a-x)\,(b+y)}{4\,a\,b^3}$$

$$-\frac{3\,(a-x)\,y}{4\,a\,b^3}$$

$$ddxy\_psi10 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3 b^3}\left((b+y)\,(a-x)\,\left(2\,a^2 b^2 + a^2\,b\,y - a^2 y^2 - b^2\,x\,a - b^2 x^2\right)\right)\right)$$

$$-\frac{2\,a^2 b^2 + a^2\,y\,b - a^2 y^2 - b^2\,x\,a - b^2 x^2}{8\,a^3\,b^3} - \frac{(b+y)\,\left(a^2\,b - 2\,a^2\,y\right)}{8\,a^3\,b^3} + \frac{(a-x)\,\left(-a\,b^2 - 2\,b^2\,x\right)}{8\,a^3\,b^3}$$

$$-\frac{4\,a^2 b^2 - 3\,a^2 y^2 - 3\,b^2 x^2}{8\,a^3\,b^3}$$

$ddx\_psi11 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(a+x)\,(-x+a)^2\,(b+y)}{a^2\,b}\right);$

$ddx\_psi11(x, y);$ **factor(%);**

$ddy\_psi11 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(a+x)\,(-x+a)^2\,(b+y)}{a^2\,b}\right);$

$ddy\_psi11(x, y)$; **factor(%);**

$ddxy\_psi11 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(a+x)\,(-x+a)^2\,(b+y)}{a^2\,b}\right);$

$ddxy\_psi11(x, y)$; **factor(%);**

$$ddx\_psi11 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(a+x)\,(a-x)^2\,(b+y)}{a^2\,b}\right)$$

$$-\frac{(a-x)\,(b+y)}{2\,a^2\,b} + \frac{(a+x)\,(b+y)}{4\,a^2\,b}$$

$$-\frac{(b+y)\,(a-3\,x)}{4\,a^2\,b}$$

$$ddy\_psi11 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(a+x)\,(a-x)^2\,(b+y)}{a^2\,b}\right)$$

$$0$$

$$0$$

$$ddxy\_psi11 := (x, y) \to \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\left(\frac{1}{8}\, \frac{(a+x)\,(a-x)^2\,(b+y)}{a^2\, b}\right)$$

$$\frac{(a-x)^2}{8\, a^2\, b} - \frac{(a+x)\,(a-x)}{4\, a^2\, b}$$

$$-\frac{(a-x)\,(a+3\,x)}{8\, a^2\, b}$$

$$ddx\_psi12 := (x, y) \to \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{8}\, \frac{(b-y)\,(y+b)^2\,(a-x)}{a\, b^2}\right);$$

$ddx\_psi12(x, y);$ **factor**(%);

$$ddy\_psi12 := (x, y) \to \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{8}\, \frac{(b-y)\,(y+b)^2\,(a-x)}{a\, b^2}\right);$$

$ddy\_psi12(x, y)$; **factor**(%);

$$ddxy\_psi12 := (x, y) \to \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(-\frac{1}{8}\, \frac{(b-y)\,(y+b)^2\,(a-x)}{a\, b^2}\right);$$

$ddxy\_psi12(x, y)$; **factor**(%);

$$ddx\_psi12 := (x, y) \to \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{8}\, \frac{(b-y)\,(b+y)^2\,(a-x)}{a\, b^2}\right)$$

0

0

$$ddy\_psi12 := (x, y) \to \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{8}\, \frac{(b-y)\,(b+y)^2\,(a-x)}{a\, b^2}\right)$$

$$\frac{(b+y)\,(a-x)}{2\, a\, b^2} - \frac{(b-y)\,(a-x)}{4\, a\, b^2}$$

$$\frac{(a-x)\,(b+3\,y)}{4\, a\, b^2}$$

$$ddxy\_psi12 := (x, y) \to \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\left(-\frac{1}{8}\, \frac{(b-y)\,(b+y)^2\,(a-x)}{a\, b^2}\right)$$

$$-\frac{(b+y)^2}{8\, a\, b^2} + \frac{(b+y)\,(b-y)}{4\, a\, b^2}$$

$$\frac{(b+y)\,(b-3\,y)}{8\, a\, b^2}$$

$ddx\_psi := Matrix(12, 1, [ddx\_psi1(x, y), ddx\_psi2(x, y), ddx\_psi3(x, y), ddx\_psi4(x, y), ddx\_psi5(x, y), ddx\_psi6(x, y), ddx\_psi7(x, y), ddx\_psi8(x, y), ddx\_psi9(x, y), ddx\_psi10(x, y), ddx\_psi11(x, y), ddx\_psi12(x, y)])$

$$ddx\_psi := \begin{bmatrix} -\frac{(b-y)\left(-a\,b^2-2\,b^2\,x\right)}{4\,a^3\,b^3}-\frac{(b-y)\,(a-x)}{4\,b\,a^3} \\ -\frac{(a-x)\,(b-y)}{2\,a^2\,b}+\frac{(a+x)\,(b-y)}{4\,a^2\,b} \\ 0 \\ \frac{(b-y)\left(a\,b^2-2\,b^2\,x\right)}{4\,a^3\,b^3}-\frac{(a+x)\,(b-y)}{4\,b\,a^3} \\ \frac{(a+x)\,(b-y)}{2\,a^2\,b}-\frac{(a-x)\,(b-y)}{4\,a^2\,b} \\ 0 \\ \frac{(b+y)\left(a\,b^2-2\,b^2\,x\right)}{4\,a^3\,b^3}-\frac{(b+y)\,(a+x)}{4\,b\,a^3} \\ \frac{(a+x)\,(b+y)}{2\,a^2\,b}-\frac{(a-x)\,(b+y)}{4\,a^2\,b} \\ 0 \\ -\frac{(b+y)\left(-a\,b^2-2\,b^2\,x\right)}{4\,a^3\,b^3}-\frac{(a-x)\,(b+y)}{4\,b\,a^3} \\ -\frac{(a-x)\,(b+y)}{2\,a^2\,b}+\frac{(a+x)\,(b+y)}{4\,a^2\,b} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$ddy\_psi := Matrix(12, 1, [ddy\_psi1(x, y), ddy\_psi2(x, y), ddy\_psi3(x, y), ddy\_psi4(x, y), ddy\_psi5(x, y), ddy\_psi6(x, y), ddy\_psi7(x, y), ddy\_psi8(x, y), ddy\_psi9(x, y), ddy\_psi10(x, y), ddy\_psi11(x, y), ddy\_psi12(x, y)])$$

$$ddy\_psi := \left[\begin{array}{c} -\frac{(a-x)\left(-a^2 b-2 a^2 y\right)}{4 a^3 b^3}-\frac{(b-y)(a-x)}{4 a b^3} \\ 0 \\ -\frac{(b-y)(a-x)}{2 a b^2}+\frac{(b+y)(a-x)}{4 a b^2} \\ -\frac{(a+x)\left(-a^2 b-2 a^2 y\right)}{4 a^3 b^3}-\frac{(a+x)(b-y)}{4 a b^3} \\ 0 \\ -\frac{(b-y)(a+x)}{2 a b^2}+\frac{(b+y)(a+x)}{4 a b^2} \\ \frac{(a+x)\left(a^2 b-2 a^2 y\right)}{4 a^3 b^3}-\frac{(b+y)(a+x)}{4 a b^3} \\ 0 \\ \frac{(b+y)(a+x)}{2 a b^2}-\frac{(b-y)(a+x)}{4 a b^2} \\ \frac{(a-x)\left(a^2 b-2 a^2 y\right)}{4 a^3 b^3}-\frac{(a-x)(b+y)}{4 a b^3} \\ 0 \\ \frac{(b+y)(a-x)}{2 a b^2}-\frac{(b-y)(a-x)}{4 a b^2} \end{array}\right]$$

$ddxy\_psi := Matrix(12, 1, [ddxy\_psi1(x, y), ddxy\_psi2(x, y), ddxy\_psi3(x, y), ddxy\_psi4(x, y), ddxy\_psi5(x, y), ddxy\_psi6(x, y), ddxy\_psi7(x, y), ddxy\_psi8(x, y), ddxy\_psi9(x, y), ddxy\_psi10(x, y), ddxy\_psi11(x, y), ddxy\_psi12(x, y)])$

$$ddxy\_psi := \left[\left[\frac{2\,a^2\,b^2 - a^2\,b\,y - a^2\,y^2 - b^2\,x\,a - b^2\,x^2}{8\,a^3\,b^3} - \frac{(b-y)\left(-a^2\,b - 2\,a^2\,y\right)}{8\,a^3\,b^3} - \frac{(a-x)\left(-a\,b^2 - 2\,b^2\,x\right)}{8\,a^3\,b^3}\right],\right.$$

$$\left[-\frac{(a-x)^2}{8\,a^2\,b} + \frac{(a+x)\,(a-x)}{4\,a^2\,b}\right],$$

$$\left[-\frac{(b-y)^2}{8\,a\,b^2} + \frac{(b+y)\,(b-y)}{4\,a\,b^2}\right],$$

$$\left[-\frac{2\,a^2\,b^2 - a^2\,b\,y - a^2\,y^2 + b^2\,x\,a - b^2\,x^2}{8\,a^3\,b^3} + \frac{(b-y)\left(-a^2\,b - 2\,a^2\,y\right)}{8\,a^3\,b^3} - \frac{(a+x)\left(a\,b^2 - 2\,b^2\,x\right)}{8\,a^3\,b^3}\right],$$

$$\left[-\frac{(a+x)^2}{8\,a^2\,b} + \frac{(a+x)\,(a-x)}{4\,a^2\,b}\right],$$

$$\left[\frac{(b-y)^2}{8\,a\,b^2} - \frac{(b+y)\,(b-y)}{4\,a\,b^2}\right],$$

$$\left[\frac{2\,a^2\,b^2 + a^2\,b\,y - a^2\,y^2 + b^2\,x\,a - b^2\,x^2}{8\,a^3\,b^3} + \frac{(b+y)\left(a^2\,b - 2\,a^2\,y\right)}{8\,a^3\,b^3} + \frac{(a+x)\left(a\,b^2 - 2\,b^2\,x\right)}{8\,a^3\,b^3}\right],$$

$$\left[\frac{(a+x)^2}{8\,a^2\,b} - \frac{(a+x)\,(a-x)}{4\,a^2\,b}\right],$$

$$\left[\frac{(b+y)^2}{8\,a\,b^2} - \frac{(b+y)\,(b-y)}{4\,a\,b^2}\right],$$

$$\left[-\frac{2\,a^2\,b^2 + a^2\,b\,y - a^2\,y^2 - b^2\,x\,a - b^2\,x^2}{8\,a^3\,b^3} - \frac{(b+y)\left(a^2\,b - 2\,a^2\,y\right)}{8\,a^3\,b^3} + \frac{(a-x)\left(-a\,b^2 - 2\,b^2\,x\right)}{8\,a^3\,b^3}\right],$$

$$\left[\frac{(a-x)^2}{8\,a^2\,b} - \frac{(a+x)\,(a-x)}{4\,a^2\,b}\right],$$

$$\left.\left[-\frac{(b+y)^2}{8\,a\,b^2} + \frac{(b+y)\,(b-y)}{4\,a\,b^2}\right]\right]$$

$$kaa := matrix\left(12,\ 12,\ (i, j) \rightarrow \left(\int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} ddx\_psi(i) \cdot ddx\_psi(j)\, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \right) \right);$$

$$kbb := matrix\left(12,\ 12,\ (i, j) \rightarrow \left(\int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} ddx\_psi(i) \cdot ddy\_psi(j)\, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \right) \right);$$

$$kcc := matrix\left(12,\ 12,\ (i, j) \rightarrow \left(\int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} ddxy\_psi(i) \cdot ddxy\_psi(j)\, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \right) \right);$$

$$kdd := matrix\left(12,\ 12,\ (i, j) \rightarrow \left(\int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} ddy\_psi(i) \cdot ddy\_psi(j)\, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \right) \right);$$

$$kee := matrix\left(12,\ 12,\ (i, j) \rightarrow \left(\int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} ddy\_psi(i) \cdot ddx\_psi(j)\, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \right) \right);$$

$$ka := \left[\left[\frac{b}{a^3}, \frac{b}{a^2}, 0, -\frac{b}{a^3}, \frac{b}{a^2}, 0, -\frac{b}{2\,a^3}, \frac{b}{2\,a^2}, 0, \frac{b}{2\,a^3}, \frac{b}{2\,a^2}, 0\right],\right.$$

$$\left[\frac{b}{a^2}, \frac{4\,b}{3\,a}, 0, -\frac{b}{a^2}, \frac{2\,b}{3\,a}, 0, -\frac{b}{2\,a^2}, \frac{b}{3\,a}, 0, \frac{b}{2\,a^2}, \frac{2\,b}{3\,a}, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[-\frac{b}{a^3}, -\frac{b}{a^2}, 0, \frac{b}{a^3}, -\frac{b}{a^2}, 0, \frac{b}{2\,a^3}, -\frac{b}{2\,a^2}, 0, -\frac{b}{2\,a^3}, -\frac{b}{2\,a^2}, 0\right],$$

$$\left[\frac{b}{a^2}, \frac{2\,b}{3\,a}, 0, -\frac{b}{a^2}, \frac{4\,b}{3\,a}, 0, -\frac{b}{2\,a^2}, \frac{2\,b}{3\,a}, 0, \frac{b}{2\,a^2}, \frac{b}{3\,a}, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[-\frac{b}{2\,a^3}, -\frac{b}{2\,a^2}, 0, \frac{b}{2\,a^3}, -\frac{b}{2\,a^2}, 0, \frac{b}{a^3}, -\frac{b}{a^2}, 0, -\frac{b}{a^3}, -\frac{b}{a^2}, 0\right],$$

$$\left[\frac{b}{2\,a^2}, \frac{b}{3\,a}, 0, -\frac{b}{2\,a^2}, \frac{2\,b}{3\,a}, 0, -\frac{b}{a^2}, \frac{4\,b}{3\,a}, 0, \frac{b}{a^2}, \frac{2\,b}{3\,a}, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[\frac{b}{2\,a^3}, \frac{b}{2\,a^2}, 0, -\frac{b}{2\,a^3}, \frac{b}{2\,a^2}, 0, -\frac{b}{a^3}, \frac{b}{a^2}, 0, \frac{b}{a^3}, \frac{b}{a^2}, 0\right],$$

$$\left[\frac{b}{2\,a^2}, \frac{2\,b}{3\,a}, 0, -\frac{b}{2\,a^2}, \frac{b}{3\,a}, 0, -\frac{b}{a^2}, \frac{2\,b}{3\,a}, 0, \frac{b}{a^2}, \frac{4\,b}{3\,a}, 0\right],$$

$$\left.\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right]\right]$$

$$kb := \left[\left[\frac{1}{4\,a\,b}, 0, \frac{1}{2\,a}, -\frac{1}{4\,a\,b}, 0, -\frac{1}{2\,a}, \frac{1}{4\,a\,b}, 0, 0, -\frac{1}{4\,a\,b}, 0, 0\right],\right.$$

$$\left[\frac{1}{2\,b}, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{1}{2\,b}, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[-\frac{1}{4\,a\,b}, 0, -\frac{1}{2\,a}, \frac{1}{4\,a\,b}, 0, \frac{1}{2\,a}, -\frac{1}{4\,a\,b}, 0, 0, \frac{1}{4\,a\,b}, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, -\frac{1}{2\,b}, 0, -1, \frac{1}{2\,b}, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[\frac{1}{4\,a\,b}, 0, 0, -\frac{1}{4\,a\,b}, 0, 0, \frac{1}{4\,a\,b}, 0, -\frac{1}{2\,a}, -\frac{1}{4\,a\,b}, 0, \frac{1}{2\,a}\right],$$

$$\left[0, 0, 0, \frac{1}{2\,b}, 0, 0, -\frac{1}{2\,b}, 0, 1, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[-\frac{1}{4\,a\,b}, 0, 0, \frac{1}{4\,a\,b}, 0, 0, -\frac{1}{4\,a\,b}, 0, \frac{1}{2\,a}, \frac{1}{4\,a\,b}, 0, -\frac{1}{2\,a}\right],$$

$$\left[-\frac{1}{2\,b}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2\,b}, 0, -1\right],$$

$$\left.\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right]\right]$$

$$
\begin{aligned}
kc := \Big[&\Big[\frac{7}{20\,a\,b}, \frac{1}{20\,b}, \frac{1}{20\,a}, -\frac{7}{20\,a\,b}, \frac{1}{20\,b}, -\frac{1}{20\,a}, \frac{7}{20\,a\,b}, -\frac{1}{20\,b}, -\frac{1}{20\,a}, -\frac{7}{20\,a\,b}, -\frac{1}{20\,b}, \frac{1}{20\,a}\Big],\\
&\Big[\frac{1}{20\,b}, \frac{2\,a}{15\,b}, 0, -\frac{1}{20\,b}, -\frac{a}{30\,b}, 0, \frac{1}{20\,b}, \frac{a}{30\,b}, 0, -\frac{1}{20\,b}, -\frac{2\,a}{15\,b}, 0\Big],\\
&\Big[\frac{1}{20\,a}, 0, \frac{2\,b}{15\,a}, -\frac{1}{20\,a}, 0, -\frac{2\,b}{15\,a}, \frac{1}{20\,a}, 0, \frac{b}{30\,a}, -\frac{1}{20\,a}, 0, -\frac{b}{30\,a}\Big],\\
&\Big[-\frac{7}{20\,a\,b}, -\frac{1}{20\,b}, -\frac{1}{20\,a}, \frac{7}{20\,a\,b}, -\frac{1}{20\,b}, \frac{1}{20\,a}, -\frac{7}{20\,a\,b}, \frac{1}{20\,b}, \frac{1}{20\,a}, \frac{7}{20\,a\,b}, \frac{1}{20\,b}, -\frac{1}{20\,a}\Big],\\
&\Big[\frac{1}{20\,b}, -\frac{a}{30\,b}, 0, -\frac{1}{20\,b}, \frac{2\,a}{15\,b}, 0, \frac{1}{20\,b}, -\frac{2\,a}{15\,b}, 0, -\frac{1}{20\,b}, \frac{a}{30\,b}, 0\Big],\\
&\Big[-\frac{1}{20\,a}, 0, -\frac{2\,b}{15\,a}, \frac{1}{20\,a}, 0, \frac{2\,b}{15\,a}, -\frac{1}{20\,a}, 0, -\frac{b}{30\,a}, \frac{1}{20\,a}, 0, \frac{b}{30\,a}\Big],\\
&\Big[\frac{7}{20\,a\,b}, \frac{1}{20\,b}, \frac{1}{20\,a}, -\frac{7}{20\,a\,b}, \frac{1}{20\,b}, -\frac{1}{20\,a}, \frac{7}{20\,a\,b}, -\frac{1}{20\,b}, -\frac{1}{20\,a}, -\frac{7}{20\,a\,b}, -\frac{1}{20\,b}, \frac{1}{20\,a}\Big],\\
&\Big[-\frac{1}{20\,b}, \frac{a}{30\,b}, 0, \frac{1}{20\,b}, -\frac{2\,a}{15\,b}, 0, -\frac{1}{20\,b}, \frac{2\,a}{15\,b}, 0, \frac{1}{20\,b}, -\frac{a}{30\,b}, 0\Big],\\
&\Big[-\frac{1}{20\,a}, 0, \frac{b}{30\,a}, \frac{1}{20\,a}, 0, -\frac{b}{30\,a}, -\frac{1}{20\,a}, 0, \frac{2\,b}{15\,a}, \frac{1}{20\,a}, 0, -\frac{2\,b}{15\,a}\Big],\\
&\Big[-\frac{7}{20\,a\,b}, -\frac{1}{20\,b}, -\frac{1}{20\,a}, \frac{7}{20\,a\,b}, -\frac{1}{20\,b}, \frac{1}{20\,a}, -\frac{7}{20\,a\,b}, \frac{1}{20\,b}, \frac{1}{20\,a}, \frac{7}{20\,a\,b}, \frac{1}{20\,b}, -\frac{1}{20\,a}\Big],\\
&\Big[-\frac{1}{20\,b}, -\frac{2\,a}{15\,b}, 0, \frac{1}{20\,b}, \frac{a}{30\,b}, 0, -\frac{1}{20\,b}, -\frac{a}{30\,b}, 0, \frac{1}{20\,b}, \frac{2\,a}{15\,b}, 0\Big],\\
&\Big[\frac{1}{20\,a}, 0, -\frac{b}{30\,a}, -\frac{1}{20\,a}, 0, \frac{b}{30\,a}, \frac{1}{20\,a}, 0, -\frac{2\,b}{15\,a}, -\frac{1}{20\,a}, 0, \frac{2\,b}{15\,a}\Big]\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
kd := \Bigg[& \left[\frac{a}{b^3}, 0, \frac{a}{b^2}, \frac{a}{2\,b^3}, 0, \frac{a}{2\,b^2}, -\frac{a}{2\,b^3}, 0, \frac{a}{2\,b^2}, -\frac{a}{b^3}, 0, \frac{a}{b^2} \right], \\
& [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\
& \left[\frac{a}{b^2}, 0, \frac{4\,a}{3\,b}, \frac{a}{2\,b^2}, 0, \frac{2\,a}{3\,b}, -\frac{a}{2\,b^2}, 0, \frac{a}{3\,b}, -\frac{a}{b^2}, 0, \frac{2\,a}{3\,b} \right], \\
& \left[\frac{a}{2\,b^3}, 0, \frac{a}{2\,b^2}, \frac{a}{b^3}, 0, \frac{a}{b^2}, -\frac{a}{b^3}, 0, \frac{a}{b^2}, -\frac{a}{2\,b^3}, 0, \frac{a}{2\,b^2} \right], \\
& [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\
& \left[\frac{a}{2\,b^2}, 0, \frac{2\,a}{3\,b}, \frac{a}{b^2}, 0, \frac{4\,a}{3\,b}, -\frac{a}{b^2}, 0, \frac{2\,a}{3\,b}, -\frac{a}{2\,b^2}, 0, \frac{a}{3\,b} \right], \\
& \left[-\frac{a}{2\,b^3}, 0, -\frac{a}{2\,b^2}, -\frac{a}{b^3}, 0, -\frac{a}{b^2}, \frac{a}{b^3}, 0, -\frac{a}{b^2}, \frac{a}{2\,b^3}, 0, -\frac{a}{2\,b^2} \right], \\
& [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\
& \left[\frac{a}{2\,b^2}, 0, \frac{a}{3\,b}, \frac{a}{b^2}, 0, \frac{2\,a}{3\,b}, -\frac{a}{b^2}, 0, \frac{4\,a}{3\,b}, -\frac{a}{2\,b^2}, 0, \frac{2\,a}{3\,b} \right], \\
& \left[-\frac{a}{b^3}, 0, -\frac{a}{b^2}, -\frac{a}{2\,b^3}, 0, -\frac{a}{2\,b^2}, \frac{a}{2\,b^3}, 0, -\frac{a}{2\,b^2}, \frac{a}{b^3}, 0, -\frac{a}{b^2} \right], \\
& [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\
& \left[\frac{a}{b^2}, 0, \frac{2\,a}{3\,b}, \frac{a}{2\,b^2}, 0, \frac{a}{3\,b}, -\frac{a}{2\,b^2}, 0, \frac{2\,a}{3\,b}, -\frac{a}{b^2}, 0, \frac{4\,a}{3\,b} \right] \Bigg]
\end{aligned}
$$

$$ke := \Big[\Big[\frac{1}{4\,a\,b}, \frac{1}{2\,b}, 0, -\frac{1}{4\,a\,b}, 0, 0, \frac{1}{4\,a\,b}, 0, 0, -\frac{1}{4\,a\,b}, -\frac{1}{2\,b}, 0\Big],$$
$$\Big[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\Big],$$
$$\Big[\frac{1}{2\,a}, 1, 0, -\frac{1}{2\,a}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\Big],$$
$$\Big[-\frac{1}{4\,a\,b}, 0, 0, \frac{1}{4\,a\,b}, -\frac{1}{2\,b}, 0, -\frac{1}{4\,a\,b}, \frac{1}{2\,b}, 0, \frac{1}{4\,a\,b}, 0, 0\Big],$$
$$\Big[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\Big],$$
$$\Big[-\frac{1}{2\,a}, 0, 0, \frac{1}{2\,a}, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\Big],$$
$$\Big[\frac{1}{4\,a\,b}, 0, 0, -\frac{1}{4\,a\,b}, \frac{1}{2\,b}, 0, \frac{1}{4\,a\,b}, -\frac{1}{2\,b}, 0, -\frac{1}{4\,a\,b}, 0, 0\Big],$$
$$\Big[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\Big],$$
$$\Big[0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{1}{2\,a}, 1, 0, \frac{1}{2\,a}, 0, 0\Big],$$
$$\Big[-\frac{1}{4\,a\,b}, -\frac{1}{2\,b}, 0, \frac{1}{4\,a\,b}, 0, 0, -\frac{1}{4\,a\,b}, 0, 0, \frac{1}{4\,a\,b}, \frac{1}{2\,b}, 0\Big],$$
$$\Big[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\Big],$$
$$\Big[0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2\,a}, 0, 0, -\frac{1}{2\,a}, -1, 0\Big]\Big]$$

$$kbe := (kb + ke)$$

$$kbe := \left[\left[\frac{1}{2\,a\,b}, \frac{1}{2\,b}, \frac{1}{2\,a}, -\frac{1}{2\,a\,b}, 0, -\frac{1}{2\,a}, \frac{1}{2\,a\,b}, 0, 0, -\frac{1}{2\,a\,b}, -\frac{1}{2\,b}, 0\right],\right.$$

$$\left[\frac{1}{2\,b}, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{1}{2\,b}, 0, 0\right],$$

$$\left[\frac{1}{2\,a}, 1, 0, -\frac{1}{2\,a}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[-\frac{1}{2\,a\,b}, 0, -\frac{1}{2\,a}, \frac{1}{2\,a\,b}, -\frac{1}{2\,b}, \frac{1}{2\,a}, -\frac{1}{2\,a\,b}, \frac{1}{2\,b}, 0, \frac{1}{2\,a\,b}, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, -\frac{1}{2\,b}, 0, -1, \frac{1}{2\,b}, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[-\frac{1}{2\,a}, 0, 0, \frac{1}{2\,a}, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[\frac{1}{2\,a\,b}, 0, 0, -\frac{1}{2\,a\,b}, \frac{1}{2\,b}, 0, \frac{1}{2\,a\,b}, -\frac{1}{2\,b}, -\frac{1}{2\,a}, -\frac{1}{2\,a\,b}, 0, \frac{1}{2\,a}\right],$$

$$\left[0, 0, 0, \frac{1}{2\,b}, 0, 0, -\frac{1}{2\,b}, 0, 1, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{1}{2\,a}, 1, 0, \frac{1}{2\,a}, 0, 0\right],$$

$$\left[-\frac{1}{2\,a\,b}, -\frac{1}{2\,b}, 0, \frac{1}{2\,a\,b}, 0, 0, -\frac{1}{2\,a\,b}, 0, \frac{1}{2\,a}, \frac{1}{2\,a\,b}, \frac{1}{2\,b}, -\frac{1}{2\,a}\right],$$

$$\left[-\frac{1}{2\,b}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2\,b}, 0, -1\right],$$

$$\left.\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2\,a}, 0, 0, -\frac{1}{2\,a}, -1, 0\right]\right]$$

$$kbeij := (d \cdot \nu \cdot kbe)$$

$$kbeij := \left[\left[\frac{d\nu}{2ab}, \frac{d\nu}{2b}, \frac{d\nu}{2a}, -\frac{d\nu}{2ab}, 0, -\frac{d\nu}{2a}, \frac{d\nu}{2ab}, 0, 0, -\frac{d\nu}{2ab}, -\frac{d\nu}{2b}, 0\right],\right.$$

$$\left[\frac{d\nu}{2b}, 0, d\nu, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{d\nu}{2b}, 0, 0\right],$$

$$\left[\frac{d\nu}{2a}, d\nu, 0, -\frac{d\nu}{2a}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[-\frac{d\nu}{2ab}, 0, -\frac{d\nu}{2a}, \frac{d\nu}{2ab}, -\frac{d\nu}{2b}, \frac{d\nu}{2a}, -\frac{d\nu}{2ab}, \frac{d\nu}{2b}, 0, \frac{d\nu}{2ab}, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, -\frac{d\nu}{2b}, 0, -d\nu, \frac{d\nu}{2b}, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[-\frac{d\nu}{2a}, 0, 0, \frac{d\nu}{2a}, -d\nu, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[\frac{d\nu}{2ab}, 0, 0, -\frac{d\nu}{2ab}, \frac{d\nu}{2b}, 0, \frac{d\nu}{2ab}, -\frac{d\nu}{2b}, -\frac{d\nu}{2a}, -\frac{d\nu}{2ab}, 0, \frac{d\nu}{2a}\right],$$

$$\left[0, 0, 0, \frac{d\nu}{2b}, 0, 0, -\frac{d\nu}{2b}, 0, d\nu, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{d\nu}{2a}, d\nu, 0, \frac{d\nu}{2a}, 0, 0\right],$$

$$\left[-\frac{d\nu}{2ab}, -\frac{d\nu}{2b}, 0, \frac{d\nu}{2ab}, 0, 0, -\frac{d\nu}{2ab}, 0, \frac{d\nu}{2a}, \frac{d\nu}{2ab}, \frac{d\nu}{2b}, -\frac{d\nu}{2a}\right],$$

$$\left[-\frac{d\nu}{2b}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{d\nu}{2b}, 0, -d\nu\right],$$

$$\left.\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{d\nu}{2a}, 0, 0, -\frac{d\nu}{2a}, -d\nu, 0\right]\right]$$

$$kaij := (d \cdot ka)$$

$$kaij := \left[\left[\frac{d\,b}{a^3}, \frac{d\,b}{a^2}, 0, -\frac{d\,b}{a^3}, \frac{d\,b}{a^2}, 0, -\frac{d\,b}{2\,a^3}, \frac{d\,b}{2\,a^2}, 0, \frac{d\,b}{2\,a^3}, \frac{d\,b}{2\,a^2}, 0\right],\right.$$

$$\left[\frac{d\,b}{a^2}, \frac{4\,d\,b}{3\,a}, 0, -\frac{d\,b}{a^2}, \frac{2\,d\,b}{3\,a}, 0, -\frac{d\,b}{2\,a^2}, \frac{d\,b}{3\,a}, 0, \frac{d\,b}{2\,a^2}, \frac{2\,d\,b}{3\,a}, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[-\frac{d\,b}{a^3}, -\frac{d\,b}{a^2}, 0, \frac{d\,b}{a^3}, -\frac{d\,b}{a^2}, 0, \frac{d\,b}{2\,a^3}, -\frac{d\,b}{2\,a^2}, 0, -\frac{d\,b}{2\,a^3}, -\frac{d\,b}{2\,a^2}, 0\right],$$

$$\left[\frac{d\,b}{a^2}, \frac{2\,d\,b}{3\,a}, 0, -\frac{d\,b}{a^2}, \frac{4\,d\,b}{3\,a}, 0, -\frac{d\,b}{2\,a^2}, \frac{2\,d\,b}{3\,a}, 0, \frac{d\,b}{2\,a^2}, \frac{d\,b}{3\,a}, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[-\frac{d\,b}{2\,a^3}, -\frac{d\,b}{2\,a^2}, 0, \frac{d\,b}{2\,a^3}, -\frac{d\,b}{2\,a^2}, 0, \frac{d\,b}{a^3}, -\frac{d\,b}{a^2}, 0, -\frac{d\,b}{a^3}, -\frac{d\,b}{a^2}, 0\right],$$

$$\left[\frac{d\,b}{2\,a^2}, \frac{d\,b}{3\,a}, 0, -\frac{d\,b}{2\,a^2}, \frac{2\,d\,b}{3\,a}, 0, -\frac{d\,b}{a^2}, \frac{4\,d\,b}{3\,a}, 0, \frac{d\,b}{a^2}, \frac{2\,d\,b}{3\,a}, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[\frac{d\,b}{2\,a^3}, \frac{d\,b}{2\,a^2}, 0, -\frac{d\,b}{2\,a^3}, \frac{d\,b}{2\,a^2}, 0, -\frac{d\,b}{a^3}, \frac{d\,b}{a^2}, 0, \frac{d\,b}{a^3}, \frac{d\,b}{a^2}, 0\right],$$

$$\left[\frac{d\,b}{2\,a^2}, \frac{2\,d\,b}{3\,a}, 0, -\frac{d\,b}{2\,a^2}, \frac{d\,b}{3\,a}, 0, -\frac{d\,b}{a^2}, \frac{2\,d\,b}{3\,a}, 0, \frac{d\,b}{a^2}, \frac{4\,d\,b}{3\,a}, 0\right],$$

$$\left.\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right]\right]$$

$kdij := (d \cdot kd)$

$$kdij := \left[\left[\frac{d\,a}{b^3}, 0, \frac{d\,a}{b^2}, \frac{d\,a}{2\,b^3}, 0, \frac{d\,a}{2\,b^2}, -\frac{d\,a}{2\,b^3}, 0, \frac{d\,a}{2\,b^2}, -\frac{d\,a}{b^3}, 0, \frac{d\,a}{b^2}\right],\right.$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],$$

$$\left[\frac{d\,a}{b^2}, 0, \frac{4\,d\,a}{3\,b}, \frac{d\,a}{2\,b^2}, 0, \frac{2\,d\,a}{3\,b}, -\frac{d\,a}{2\,b^2}, 0, \frac{d\,a}{3\,b}, -\frac{d\,a}{b^2}, 0, \frac{2\,d\,a}{3\,b}\right],$$

$$\left[\frac{d\,a}{2\,b^3}, 0, \frac{d\,a}{2\,b^2}, \frac{d\,a}{b^3}, 0, \frac{d\,a}{b^2}, -\frac{d\,a}{b^3}, 0, \frac{d\,a}{b^2}, -\frac{d\,a}{2\,b^3}, 0, \frac{d\,a}{2\,b^2}\right],$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],$$

$$\left[\frac{d\,a}{2\,b^2}, 0, \frac{2\,d\,a}{3\,b}, \frac{d\,a}{b^2}, 0, \frac{4\,d\,a}{3\,b}, -\frac{d\,a}{b^2}, 0, \frac{2\,d\,a}{3\,b}, -\frac{d\,a}{2\,b^2}, 0, \frac{d\,a}{3\,b}\right],$$

$$\left[-\frac{d\,a}{2\,b^3}, 0, -\frac{d\,a}{2\,b^2}, -\frac{d\,a}{b^3}, 0, -\frac{d\,a}{b^2}, \frac{d\,a}{b^3}, 0, -\frac{d\,a}{b^2}, \frac{d\,a}{2\,b^3}, 0, -\frac{d\,a}{2\,b^2}\right],$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],$$

$$\left[\frac{d\,a}{2\,b^2}, 0, \frac{d\,a}{3\,b}, \frac{d\,a}{b^2}, 0, \frac{2\,d\,a}{3\,b}, -\frac{d\,a}{b^2}, 0, \frac{4\,d\,a}{3\,b}, -\frac{d\,a}{2\,b^2}, 0, \frac{2\,d\,a}{3\,b}\right],$$

$$\left[-\frac{d\,a}{b^3}, 0, -\frac{d\,a}{b^2}, -\frac{d\,a}{2\,b^3}, 0, -\frac{d\,a}{2\,b^2}, \frac{d\,a}{2\,b^3}, 0, -\frac{d\,a}{2\,b^2}, \frac{d\,a}{b^3}, 0, -\frac{d\,a}{b^2}\right],$$

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],$$

$$\left.\left[\frac{d\,a}{b^2}, 0, \frac{2\,d\,a}{3\,b}, \frac{d\,a}{2\,b^2}, 0, \frac{d\,a}{3\,b}, -\frac{d\,a}{2\,b^2}, 0, \frac{2\,d\,a}{3\,b}, -\frac{d\,a}{b^2}, 0, \frac{4\,d\,a}{3\,b}\right]\right]$$

$$kcij := (2\cdot(1-\nu)\cdot d\cdot kc)$$

$$kcij := \Big[\Big[\frac{7(1-\nu)d}{10ab}, \frac{(1-\nu)d}{10b}, \frac{(1-\nu)d}{10a}, -\frac{7(1-\nu)d}{10ab}, \frac{(1-\nu)d}{10b}, -\frac{(1-\nu)d}{10a}, \frac{7(1-\nu)d}{10ab}, -\frac{(1-\nu)d}{10b}, -\frac{(1-\nu)d}{10a}, -\frac{7(1-\nu)d}{10ab}, -\frac{(1-\nu)d}{10b}, \frac{(1-\nu)d}{10a}\Big],$$

$$\Big[\frac{(1-\nu)d}{10b}, \frac{4(1-\nu)da}{15b}, 0, -\frac{(1-\nu)d}{10b}, -\frac{(1-\nu)da}{15b}, 0, \frac{(1-\nu)d}{10b}, \frac{(1-\nu)da}{15b}, 0, -\frac{(1-\nu)d}{10b}, -\frac{4(1-\nu)da}{15b}, 0\Big],$$

$$\Big[\frac{(1-\nu)d}{10a}, 0, \frac{4(1-\nu)db}{15a}, -\frac{(1-\nu)d}{10a}, 0, -\frac{4(1-\nu)db}{15a}, \frac{(1-\nu)d}{10a}, 0, \frac{(1-\nu)db}{15a}, -\frac{(1-\nu)d}{10a}, 0, -\frac{(1-\nu)db}{15a}\Big],$$

$$\Big[-\frac{7(1-\nu)d}{10ab}, -\frac{(1-\nu)d}{10b}, -\frac{(1-\nu)d}{10a}, \frac{7(1-\nu)d}{10ab}, -\frac{(1-\nu)d}{10b}, \frac{(1-\nu)d}{10a}, -\frac{7(1-\nu)d}{10ab}, \frac{(1-\nu)d}{10b}, \frac{(1-\nu)d}{10a}, \frac{7(1-\nu)d}{10ab}, \frac{(1-\nu)d}{10b}, -\frac{(1-\nu)d}{10a}\Big],$$

$$\Big[\frac{(1-\nu)d}{10b}, -\frac{(1-\nu)da}{15b}, 0, -\frac{(1-\nu)d}{10b}, \frac{4(1-\nu)da}{15b}, 0, \frac{(1-\nu)d}{10b}, -\frac{4(1-\nu)da}{15b}, 0, -\frac{(1-\nu)d}{10b}, \frac{(1-\nu)da}{15b}, 0\Big],$$

$$\Big[-\frac{(1-\nu)d}{10a}, 0, -\frac{4(1-\nu)db}{15a}, \frac{(1-\nu)d}{10a}, 0, \frac{4(1-\nu)db}{15a}, -\frac{(1-\nu)d}{10a}, 0, -\frac{(1-\nu)db}{15a}, \frac{(1-\nu)d}{10a}, 0, \frac{(1-\nu)db}{15a}\Big],$$

$$\Big[\frac{7(1-\nu)d}{10ab}, \frac{(1-\nu)d}{10b}, \frac{(1-\nu)d}{10a}, -\frac{7(1-\nu)d}{10ab}, \frac{(1-\nu)d}{10b}, -\frac{(1-\nu)d}{10a}, \frac{7(1-\nu)d}{10ab}, -\frac{(1-\nu)d}{10b}, -\frac{(1-\nu)d}{10a}, -\frac{7(1-\nu)d}{10ab}, -\frac{(1-\nu)d}{10b}, \frac{(1-\nu)d}{10a}\Big],$$

$$\Big[-\frac{(1-\nu)d}{10b}, \frac{(1-\nu)da}{15b}, 0, \frac{(1-\nu)d}{10b}, -\frac{4(1-\nu)da}{15b}, 0, -\frac{(1-\nu)d}{10b}, \frac{4(1-\nu)da}{15b}, 0, \frac{(1-\nu)d}{10b}, -\frac{(1-\nu)da}{15b}, 0\Big],$$

$$\Big[-\frac{(1-\nu)d}{10a}, 0, \frac{(1-\nu)db}{15a}, \frac{(1-\nu)d}{10a}, 0, -\frac{(1-\nu)db}{15a}, -\frac{(1-\nu)d}{10a}, 0, \frac{4(1-\nu)db}{15a}, \frac{(1-\nu)d}{10a}, 0, -\frac{4(1-\nu)db}{15a}\Big],$$

$$\Big[-\frac{7(1-\nu)d}{10ab}, -\frac{(1-\nu)d}{10b}, -\frac{(1-\nu)d}{10a}, \frac{7(1-\nu)d}{10ab}, -\frac{(1-\nu)d}{10b}, \frac{(1-\nu)d}{10a}, -\frac{7(1-\nu)d}{10ab}, \frac{(1-\nu)d}{10b}, \frac{(1-\nu)d}{10a}, \frac{7(1-\nu)d}{10ab}, \frac{(1-\nu)d}{10b}, -\frac{(1-\nu)d}{10a}\Big],$$

$$\Big[-\frac{(1-\nu)d}{10b}, -\frac{4(1-\nu)da}{15b}, 0, \frac{(1-\nu)d}{10b}, \frac{(1-\nu)da}{15b}, 0, -\frac{(1-\nu)d}{10b}, -\frac{(1-\nu)da}{15b}, 0, \frac{(1-\nu)d}{10b}, \frac{4(1-\nu)da}{15b}, 0\Big],$$

$$\Big[\frac{(1-\nu)d}{10a}, 0, -\frac{(1-\nu)db}{15a}, -\frac{(1-\nu)d}{10a}, 0, \frac{(1-\nu)db}{15a}, \frac{(1-\nu)d}{10a}, 0, -\frac{4(1-\nu)db}{15a}, -\frac{(1-\nu)d}{10a}, 0, \frac{4(1-\nu)db}{15a}\Big]\Big]$$

$$kij := kaij + kbeij + kcij + kdij$$

$$kij := \Big[\Big[\frac{db}{a^3}+\frac{d\nu}{2ab}+\frac{7(1-\nu)d}{10ab}+\frac{da}{b^3},\ \frac{db}{a^2}+\frac{d\nu}{2b}+\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{d\nu}{2a}+\frac{(1-\nu)d}{10a}+\frac{da}{b^2},\ -\frac{db}{a^3}-\frac{d\nu}{2ab}-\frac{7(1-\nu)d}{10ab}+\frac{da}{2b^3},\ \frac{db}{a^2}+\frac{(1-\nu)d}{10b},\ -\frac{d\nu}{2a}-\frac{(1-\nu)d}{10a}+\frac{da}{2b^2},\ -\frac{db}{2a^3}+\frac{d\nu}{2ab}+\frac{7(1-\nu)d}{10ab}-\frac{da}{2b^3},\ \frac{db}{2a^2}-\frac{(1-\nu)d}{10b},\ -\frac{(1-\nu)d}{10a}+\frac{da}{2b^2},\ \frac{db}{2a^3}-\frac{d\nu}{2ab}-\frac{7(1-\nu)d}{10ab}-\frac{da}{b^3},\ \frac{db}{2a^2}-\frac{d\nu}{2b}-\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{(1-\nu)d}{10a}+\frac{da}{b^2}\Big],$$

$$\Big[\frac{db}{a^2}+\frac{d\nu}{2b}+\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{4db}{3a}+\frac{4(1-\nu)da}{15b},\ d\nu,\ -\frac{db}{a^2}-\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{2db}{3a}-\frac{(1-\nu)da}{15b},\ 0,\ -\frac{db}{2a^2}+\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{db}{3a}+\frac{(1-\nu)da}{15b},\ 0,\ \frac{db}{2a^2}-\frac{d\nu}{2b}-\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{2db}{3a}-\frac{4(1-\nu)da}{15b},\ 0\Big],$$

$$\Big[\frac{d\nu}{2a}+\frac{(1-\nu)d}{10a}+\frac{da}{b^2},\ d\nu,\ \frac{4(1-\nu)db}{15a}+\frac{4da}{3b},\ -\frac{d\nu}{2a}-\frac{(1-\nu)d}{10a}+\frac{da}{2b^2},\ 0,\ -\frac{4(1-\nu)db}{15a}+\frac{2da}{3b},\ \frac{(1-\nu)d}{10a}-\frac{da}{2b^2},\ 0,\ \frac{(1-\nu)db}{15a}+\frac{da}{3b},\ -\frac{(1-\nu)d}{10a}-\frac{da}{b^2},\ 0,\ -\frac{(1-\nu)db}{15a}+\frac{2da}{3b}\Big],$$

$$\Big[-\frac{db}{a^3}-\frac{d\nu}{2ab}-\frac{7(1-\nu)d}{10ab}+\frac{da}{2b^3},\ -\frac{db}{a^2}-\frac{(1-\nu)d}{10b},\ -\frac{d\nu}{2a}-\frac{(1-\nu)d}{10a}+\frac{da}{2b^2},\ \frac{db}{a^3}+\frac{d\nu}{2ab}+\frac{7(1-\nu)d}{10ab}+\frac{da}{b^3},\ -\frac{db}{a^2}-\frac{d\nu}{2b}-\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{d\nu}{2a}+\frac{(1-\nu)d}{10a}+\frac{da}{b^2},\ \frac{db}{2a^3}-\frac{d\nu}{2ab}-\frac{7(1-\nu)d}{10ab}-\frac{da}{b^3},\ -\frac{db}{2a^2}+\frac{d\nu}{2b}+\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{(1-\nu)d}{10a}+\frac{da}{b^2},\ -\frac{db}{2a^3}+\frac{d\nu}{2ab}+\frac{7(1-\nu)d}{10ab}-\frac{da}{2b^3},\ -\frac{db}{2a^2}+\frac{(1-\nu)d}{10b},\ -\frac{(1-\nu)d}{10a}+\frac{da}{2b^2}\Big],$$

$$\Big[\frac{db}{a^2}+\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{2db}{3a}-\frac{(1-\nu)da}{15b},\ 0,\ -\frac{db}{a^2}-\frac{d\nu}{2b}-\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{4db}{3a}+\frac{4(1-\nu)da}{15b},\ -d\nu,\ -\frac{db}{2a^2}+\frac{d\nu}{2b}+\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{2db}{3a}-\frac{4(1-\nu)da}{15b},\ 0,\ \frac{db}{2a^2}-\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{db}{3a}+\frac{(1-\nu)da}{15b},\ 0\Big],$$

$$\Big[-\frac{d\nu}{2a}-\frac{(1-\nu)d}{10a}+\frac{da}{2b^2},\ 0,\ -\frac{4(1-\nu)db}{15a}+\frac{2da}{3b},\ \frac{d\nu}{2a}+\frac{(1-\nu)d}{10a}+\frac{da}{b^2},\ -d\nu,\ \frac{4(1-\nu)db}{15a}+\frac{4da}{3b},\ -\frac{(1-\nu)d}{10a}-\frac{da}{b^2},\ 0,\ -\frac{(1-\nu)db}{15a}+\frac{2da}{3b},\ \frac{(1-\nu)d}{10a}-\frac{da}{2b^2},\ 0,\ \frac{(1-\nu)db}{15a}+\frac{da}{3b}\Big],$$

$$\Big[-\frac{db}{2a^3}+\frac{d\nu}{2ab}+\frac{7(1-\nu)d}{10ab}-\frac{da}{2b^3},\ -\frac{db}{2a^2}+\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{(1-\nu)d}{10a}-\frac{da}{2b^2},\ \frac{db}{2a^3}-\frac{d\nu}{2ab}-\frac{7(1-\nu)d}{10ab}-\frac{da}{b^3},\ -\frac{db}{2a^2}+\frac{d\nu}{2b}+\frac{(1-\nu)d}{10b},\ -\frac{(1-\nu)d}{10a}-\frac{da}{b^2},\ \frac{db}{a^3}+\frac{d\nu}{2ab}+\frac{7(1-\nu)d}{10ab}+\frac{da}{b^3},\ -\frac{db}{a^2}-\frac{d\nu}{2b}-\frac{(1-\nu)d}{10b},\ -\frac{d\nu}{2a}-\frac{(1-\nu)d}{10a}-\frac{da}{b^2},\ -\frac{db}{a^3}-\frac{d\nu}{2ab}-\frac{7(1-\nu)d}{10ab}+\frac{da}{2b^3},\ -\frac{db}{a^2}-\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{d\nu}{2a}+\frac{(1-\nu)d}{10a}-\frac{da}{2b^2}\Big],$$

$$\Big[\frac{db}{2a^2}-\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{db}{3a}+\frac{(1-\nu)da}{15b},\ 0,\ -\frac{db}{2a^2}+\frac{d\nu}{2b}+\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{2db}{3a}-\frac{4(1-\nu)da}{15b},\ 0,\ -\frac{db}{a^2}-\frac{d\nu}{2b}-\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{4db}{3a}+\frac{4(1-\nu)da}{15b},\ d\nu,\ \frac{db}{a^2}+\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{2db}{3a}-\frac{(1-\nu)da}{15b},\ 0\Big],$$

$$\Big[-\frac{(1-\nu)d}{10a}+\frac{da}{2b^2},\ 0,\ \frac{(1-\nu)db}{15a}+\frac{da}{3b},\ \frac{(1-\nu)d}{10a}+\frac{da}{b^2},\ 0,\ -\frac{(1-\nu)db}{15a}+\frac{2da}{3b},\ -\frac{d\nu}{2a}-\frac{(1-\nu)d}{10a}-\frac{da}{b^2},\ d\nu,\ \frac{4(1-\nu)db}{15a}+\frac{4da}{3b},\ \frac{d\nu}{2a}+\frac{(1-\nu)d}{10a}-\frac{da}{2b^2},\ 0,\ -\frac{4(1-\nu)db}{15a}+\frac{2da}{3b}\Big],$$

$$\Big[\frac{db}{2a^3}-\frac{d\nu}{2ab}-\frac{7(1-\nu)d}{10ab}-\frac{da}{b^3},\ \frac{db}{2a^2}-\frac{d\nu}{2b}-\frac{(1-\nu)d}{10b},\ -\frac{(1-\nu)d}{10a}-\frac{da}{b^2},\ -\frac{db}{2a^3}+\frac{d\nu}{2ab}+\frac{7(1-\nu)d}{10ab}-\frac{da}{2b^3},\ \frac{db}{2a^2}-\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{(1-\nu)d}{10a}-\frac{da}{2b^2},\ -\frac{db}{a^3}-\frac{d\nu}{2ab}-\frac{7(1-\nu)d}{10ab}+\frac{da}{2b^3},\ \frac{db}{a^2}+\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{d\nu}{2a}+\frac{(1-\nu)d}{10a}-\frac{da}{2b^2},\ \frac{db}{a^3}+\frac{d\nu}{2ab}+\frac{7(1-\nu)d}{10ab}+\frac{da}{b^3},\ \frac{db}{a^2}+\frac{d\nu}{2b}+\frac{(1-\nu)d}{10b},\ -\frac{d\nu}{2a}-\frac{(1-\nu)d}{10a}-\frac{da}{b^2}\Big],$$

$$\Big[\frac{db}{2a^2}-\frac{d\nu}{2b}-\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{2db}{3a}-\frac{4(1-\nu)da}{15b},\ 0,\ -\frac{db}{2a^2}+\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{db}{3a}+\frac{(1-\nu)da}{15b},\ 0,\ -\frac{db}{a^2}-\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{2db}{3a}-\frac{(1-\nu)da}{15b},\ 0,\ \frac{db}{a^2}+\frac{d\nu}{2b}+\frac{(1-\nu)d}{10b},\ \frac{4db}{3a}+\frac{4(1-\nu)da}{15b},\ -d\nu\Big],$$

$$\Big[\frac{(1-\nu)d}{10a}+\frac{da}{b^2},\ 0,\ -\frac{(1-\nu)db}{15a}+\frac{2da}{3b},\ -\frac{(1-\nu)d}{10a}+\frac{da}{2b^2},\ 0,\ \frac{(1-\nu)db}{15a}+\frac{da}{3b},\ \frac{d\nu}{2a}+\frac{(1-\nu)d}{10a}-\frac{da}{2b^2},\ 0,\ -\frac{4(1-\nu)db}{15a}+\frac{2da}{3b},\ -\frac{d\nu}{2a}-\frac{(1-\nu)d}{10a}-\frac{da}{b^2},\ -d\nu,\ \frac{4(1-\nu)db}{15a}+\frac{4da}{3b}\Big]\Big]$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΛΑΚΑΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Αρχικά βρίσκουμε τις απαιτούμενες παραγώγους από εξισώσεις στο πρόγραμμα maple 2020 και μετά αφού γίνει η μετατροπή γλώσσας σε matlab όπου την κάνει το ίδιο το πρόγραμμα όπως έγινε και με το τελικό μητρώο στιβαρότητας γίνεται η λύση στην matlab

5.1 Εύρεση των παραγώγων στο πρόγραμμα Maple

$$dddx\_psi1 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{8\, a^3\, b^3}\left((b-y)\,(a-x)\,\left(2\, a^2\, b^2 - a^2\, b\, y - a^2\, y^2 - b^2\, x\, a - b^2\, x^2\right)\right)\right); dddx\_psi1(x, y); \mathbf{factor}(\%);$$

$$dddy\_psi1 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{1}{8\, a^3\, b^3}\left((b-y)\,(a-x)\,\left(2\, a^2\, b^2 - a^2\, b\, y - a^2\, y^2 - b^2\, x\, a - b^2\, x^2\right)\right)\right); dddy\_psi1(x, y)\ ; \mathbf{factor}(\%);$$

```
interface(rtablesize = 12);
```

$$dddx\_psi1 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\, b^3}\left((b-y)\,(-x+a)\,\left(2\, a^2\, b^2 - a^2\, y\, b - a^2\, y^2 - b^2\, x\, a - b^2\, x^2\right)\right)\right)$$

$$\frac{3\,(b-y)}{4\,b\,a^3}$$

$$\frac{3\,(b-y)}{4\,b\,a^3}$$

$$dddy\_psi1 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b-y)\,(-x+a)\,\left(2\,a^2\,b^2-a^2\,y\,b - a^2\,y^2-b^2\,x\,a-b^2\,x^2\right)\right)\right)$$

$$\frac{3\,(a-x)}{4\,a\,b^3}$$

$$\frac{3\,(a-x)}{4\,a\,b^3}$$

$$[10, 10]$$

$$dddx\_psi2 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{(a+x)\,(-x+a)^2\,(b-y)}{8\,a^2\,b}\right);$$

$dddx\_psi2(x, y)$; **factor**(%);

$$dddy\_psi2 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{(a+x)\,(-x+a)^2\,(b-y)}{8\,a^2\,b}\right);$$

$dddy\_psi2(x, y)$; **factor**(%);

$$dddx\_psi2 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(a+x)\,(-x+a)^2\,(b-y)}{a^2\,b}\right)$$

$$\frac{3\,(b-y)}{4\,a^2\,b}$$

$$\frac{3\,(b-y)}{4\,a^2\,b}$$

$$dddy\_psi2 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(a+x)\,(-x+a)^2\,(b-y)}{a^2\,b}\right)$$

$$0$$

$$0$$

$$dddx\_psi3 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{(b+y)\,(-y+b)^2\,(a-x)}{8\,a\,b^2}\right);$$

$dddx\_psi3(x, y)$; **factor**(%);

$$dddy\_psi3 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{(b+y)\,(-y+b)^2\,(a-x)}{8\,a\,b^2}\right);$$

$dddy\_psi3(x, y)$; **factor**(%);

$$dddx\_psi3 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b+y)\,(b-y)^2\,(-x+a)}{a\,b^2}\right)$$

$$0$$

$$0$$

$$dddy\_psi3 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b+y)\,(b-y)^2\,(-x+a)}{a\,b^2}\right)$$

$$\frac{3\,(a-x)}{4\,a\,b^2}$$

$$\frac{3\,(a-x)}{4\,a\,b^2}$$

$$dddx\_psi4 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b-y)\,(a+x)\,\left(-a^2\,y\,b+2\,a^2\,b^2 - a^2\,y^2+b^2\,x\,a-b^2\,x^2\right)\right)\right); dddx\_psi4(x, y); \mathbf{factor}(\%);$$

$$dddy\_psi4 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b-y)\,(a+x)\,\left(-a^2\,y\,b+2\,a^2\,b^2 - a^2\,y^2+b^2\,x\,a-b^2\,x^2\right)\right)\right); dddy\_psi4(x, y); \mathbf{factor}(\%);$$

$$dddx\_psi4 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b-y)\,(a+x)\,\left(-a^2\,y\,b+2\,a^2\,b^2 - a^2\,y^2+b^2\,x\,a-b^2\,x^2\right)\right)\right)$$

$$-\frac{3\,(b-y)}{4\,b\,a^3}$$

$$-\frac{3\,(b-y)}{4\,b\,a^3}$$

$$dddy\_psi4 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b-y)\,(a+x)\,\left(-a^2\,y\,b+2\,a^2\,b^2 - a^2\,y^2+b^2\,x\,a-b^2\,x^2\right)\right)\right)$$

$$\frac{3\,(a+x)}{4\,a\,b^3}$$

$$\frac{3\,(a+x)}{4\,a\,b^3}$$

$$dddx\_psi5 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(a-x)\,(x+a)^2\,(b-y)}{a^2\,b}\right); dddx\_psi5(x, y); \mathbf{factor}(\%);$$

$$dddy\_psi5 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(a-x)\,(x+a)^2\,(b-y)}{a^2\,b}\right); dddy\_psi5(x, y); \mathbf{factor}(\%);$$

$dddx\_psi5 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(-x+a)\,(a+x)^2\,(b-y)}{a^2\,b}\right)$

$-\frac{3\,(b-y)}{4\,a^2\,b}$

$-\frac{3\,(b-y)}{4\,a^2\,b}$

$dddy\_psi5 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(-x+a)\,(a+x)^2\,(b-y)}{a^2\,b}\right)$

0

0

$dddx\_psi6 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b+y)\,(-y+b)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right);$

$dddx\_psi6(x,y);$ **factor**(%);

$dddy\_psi6 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b+y)\,(-y+b)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right);$

$dddy\_psi6(x,y)$; **factor**(%);

$dddx\_psi6 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b+y)\,(b-y)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right)$

0

0

$dddy\_psi6 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b+y)\,(b-y)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right)$

$\frac{3\,(a+x)}{4\,a\,b^2}$

$\frac{3\,(a+x)}{4\,a\,b^2}$

$dddx\_psi7 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b+y)\,(a+x)\,\left(a^2\,y\,b+2\,a^2\,b^2 - a^2\,y^2+b^2\,x\,a-b^2\,x^2\right)\right)\right);$ $dddx\_psi7(x,y);$ **factor**(%);

$dddy\_psi7 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b+y)\,(a+x)\,\left(a^2\,y\,b+2\,a^2\,b^2 - a^2\,y^2+b^2\,x\,a-b^2\,x^2\right)\right)\right);$ $dddy\_psi7(x,y)$; **factor**(%);

$$dddx\_psi7 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{1}{8} \frac{1}{a^3 b^3} \left((b+y)\,(a+x)\,\left(a^2 y b + 2 a^2 b^2 - a^2 y^2 + b^2 x a - b^2 x^2\right)\right)\right)$$

$$-\frac{3\,(b+y)}{4\,b\,a^3}$$

$$-\frac{3\,(b+y)}{4\,b\,a^3}$$

$$dddy\_psi7 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3} \left(\frac{1}{8} \frac{1}{a^3 b^3} \left((b+y)\,(a+x)\,\left(a^2 y b + 2 a^2 b^2 - a^2 y^2 + b^2 x a - b^2 x^2\right)\right)\right)$$

$$-\frac{3\,(a+x)}{4\,a\,b^3}$$

$$-\frac{3\,(a+x)}{4\,a\,b^3}$$

$$dddx\_psi8 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(-\frac{1}{8} \frac{(a-x)\,(x+a)^2\,(b+y)}{a^2 b} \right);$$

$dddx\_psi8(x, y)$; **factor**(%);

$$dddy\_psi8 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3} \left(-\frac{1}{8} \frac{(a-x)\,(x+a)^2\,(b+y)}{a^2 b} \right);$$

$dddy\_psi8(x, y)$; **factor**(%);

$$dddx\_psi8 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(-\frac{1}{8} \frac{(-x+a)\,(a+x)^2\,(b+y)}{a^2 b} \right)$$

$$\frac{3\,(b+y)}{4\,a^2\,b}$$

$$\frac{3\,(b+y)}{4\,a^2\,b}$$

$$dddy\_psi8 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3} \left(-\frac{1}{8} \frac{(-x+a)\,(a+x)^2\,(b+y)}{a^2 b} \right)$$

$$0$$

$$0$$

$$dddx\_psi9 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(b-y)\,(y+b)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right);$$

$dddx\_psi9(x, y);$ **factor**(%);

$$dddy\_psi9 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(b-y)\,(y+b)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right);$$

$dddy\_psi9(x, y)$; **factor**(%);

$$dddx\_psi9 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(b-y)\,(b+y)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right)$$

0

0

$$dddy\_psi9 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(b-y)\,(b+y)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right)$$

$$\frac{3\,(a+x)}{4\,a\,b^2}$$

$$\frac{3\,(a+x)}{4\,a\,b^2}$$

$$dddx\_psi10 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b+y)\,(a-x)\,\left(2\,a^2\,b^2+a^2\,y\,b - a^2\,y^2-b^2\,x\,a-b^2\,x^2\right)\right)\right);$$

$dddx\_psi10(x, y);$ **factor**(%);

$$dddy\_psi10 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b+y)\,(a-x)\,\left(2\,a^2\,b^2+a^2\,y\,b - a^2\,y^2-b^2\,x\,a-b^2\,x^2\right)\right)\right);$$

$dddy\_psi10(x, y)$; **factor**(%);

$$dddx\_psi10 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b+y)\,(-x+a)\,\left(2\,a^2\,b^2+a^2\,y\,b - a^2\,y^2-b^2\,x\,a-b^2\,x^2\right)\right)\right)$$

$$\frac{3\,(b+y)}{4\,b\,a^3}$$

$$\frac{3\,(b+y)}{4\,b\,a^3}$$

$$dddy\_psi10 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b+y)\,(-x+a)\,\left(2\,a^2\,b^2+a^2\,y\,b - a^2\,y^2-b^2\,x\,a-b^2\,x^2\right)\right)\right)$$

$$-\frac{3\,(a-x)}{4\,a\,b^3}$$

$$-\frac{3\,(a-x)}{4\,a\,b^3}$$

$$dddx\_psi11 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(a+x)\,(-x+a)^2\,(b+y)}{a^2\,b}\right);$$

$dddx\_psi11(x,y)$; **factor**(%);

$$dddy\_psi11 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(a+x)\,(-x+a)^2\,(b+y)}{a^2\,b}\right);$$

$dddy\_psi11(x,y)$; **factor**(%);

$$dddx\_psi11 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(a+x)\,(-x+a)^2\,(b+y)}{a^2\,b}\right)$$

$$\frac{3\,(b+y)}{4\,a^2\,b}$$

$$\frac{3\,(b+y)}{4\,a^2\,b}$$

$$dddy\_psi11 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(a+x)\,(-x+a)^2\,(b+y)}{a^2\,b}\right)$$

0

0

$$dddx\_psi12 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b-y)\,(y+b)^2\,(a-x)}{a\,b^2}\right);$$

$dddx\_psi12(x,y)$; **factor**(%);

$$dddy\_psi12 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b-y)\,(y+b)^2\,(a-x)}{a\,b^2}\right);$$

$dddy\_psi12(x,y)$; **factor**(%);

$$dddx\_psi12 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b-y)\,(b+y)^2\,(-x+a)}{a\,b^2}\right)$$

0

0

$$dddy\_psi12 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b-y)\,(b+y)^2\,(-x+a)}{a\,b^2}\right)$$

$$-\frac{3\,(a-x)}{4\,a\,b^2}$$

$$-\frac{3\,(a-x)}{4\,a\,b^2}$$

$dddx\_psi := Matrix(12, 1, [dddx\_psi1(x,y), dddx\_psi2(x,y), dddx\_psi3(x,y), dddx\_psi4(x,y), dddx\_psi5(x,y), dddx\_psi6(x,y), dddx\_psi7(x,y), dddx\_psi8(x,y), dddx\_psi9(x,y), dddx\_psi10(x,y), dddx\_psi11(x,y), dddx\_psi12(x,y)])$

$$dddx\_psi := \begin{bmatrix} \frac{3\,(b-y)}{4\,b\,a^3} \\ \frac{3\,(b-y)}{4\,a^2\,b} \\ 0 \\ -\frac{3\,(b-y)}{4\,b\,a^3} \\ -\frac{3\,(b-y)}{4\,a^2\,b} \\ 0 \\ -\frac{3\,(b+y)}{4\,b\,a^3} \\ \frac{3\,(b+y)}{4\,a^2\,b} \\ 0 \\ \frac{3\,(b+y)}{4\,b\,a^3} \\ \frac{3\,(b+y)}{4\,a^2\,b} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$dddy\_psi := Matrix(12, 1, [dddy\_psi1(x, y), dddy\_psi2(x, y), dddy\_psi3(x, y), dddy\_psi4(x, y), dddy\_psi5(x, y), dddy\_psi6(x, y), dddy\_psi7(x, y), dddy\_psi8(x, y), dddy\_psi9(x, y), dddy\_psi10(x, y), dddy\_psi11(x, y), dddy\_psi12(x, y)])$

$$dddy\_psi := \begin{bmatrix} \frac{3\,(a-x)}{4\,a\,b^3} \\ 0 \\ \frac{3\,(a-x)}{4\,a\,b^2} \\ \frac{3\,(a+x)}{4\,a\,b^3} \\ 0 \\ \frac{3\,(a+x)}{4\,a\,b^2} \\ -\frac{3\,(a+x)}{4\,a\,b^3} \\ 0 \\ \frac{3\,(a+x)}{4\,a\,b^2} \\ -\frac{3\,(a-x)}{4\,a\,b^3} \\ 0 \\ -\frac{3\,(a-x)}{4\,a\,b^2} \end{bmatrix}$$

$$dddxx\_psi1 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\left(\frac{1}{8\,a^3\,b^3}\left((b-y)\,(a-x)\,\left(2\,a^2\,b^2 - a^2\,b\,y - a^2\,y^2 - b^2\,x\,a - b^2\,x^2\right)\right)\right); dddxx\_psi1(x, y); \mathbf{factor}(\%);$$

$$dddyy\_psi1 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x}\left(\frac{1}{8\,a^3\,b^3}\left((b-y)\,(a-x)\,\left(2\,a^2\,b^2 - a^2\,b\,y - a^2\,y^2 - b^2\,x\,a - b^2\,x^2\right)\right)\right); dddyy\_psi1(x, y)\,; \mathbf{factor}(\%);$$

```
interface(rtablesize = 12);
```

$$dddxx\_psi1 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y\,\partial x^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b-y)\,(a-x)\,\left(2\,a^2\,b^2 - a^2\,b\,y - a^2\,y^2 - b^2\,x\,a - b^2\,x^2\right)\right)\right)$$

$$\frac{-a\,b^2 - 2\,b^2\,x}{4\,a^3\,b^3} + \frac{a-x}{4\,b\,a^3}$$

$$-\frac{3\,x}{4\,b\,a^3}$$

$$dddyy\_psi1 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x\, \partial y^2} \left(\frac{1}{8} \frac{1}{a^3 b^3} \left((b - y)\ (a - x) \left(2\, a^2\, b^2 - a^2\, b\, y - a^2\, y^2 - b^2\, x\, a - b^2\, x^2 \right) \right) \right)$$

$$\frac{-a^2\, b - 2\, a^2\, y}{4\, a^3\, b^3} + \frac{b - y}{4\, a\, b^3}$$

$$-\frac{3\, y}{4\, a\, b^3}$$

$$[10, 10]$$

$$dddxx\_psi2 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \left(\frac{(a + x)\ (-x + a)^2\ (b - y)}{8\, a^2\, b} \right);$$

dddxx_psi2(*x*, *y*); **factor(%);**

$$dddyy\_psi2 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} \left(\frac{(a + x)\ (-x + a)^2\ (b - y)}{8\, a^2\, b} \right);$$

dddyy_psi2(*x*, *y*) ; **factor(%);**

$$dddxx\_psi2 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y\, \partial x^2} \left(\frac{1}{8} \frac{(a + x)\ (a - x)^2\ (b - y)}{a^2\, b} \right)$$

$$\frac{a - x}{2\, a^2\, b} - \frac{a + x}{4\, a^2\, b}$$

$$\frac{a - 3\, x}{4\, a^2\, b}$$

$$dddyy\_psi2 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x\, \partial y^2} \left(\frac{1}{8} \frac{(a + x)\ (a - x)^2\ (b - y)}{a^2\, b} \right)$$

$$0$$

$$0$$

$$dddxx\_psi3 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \left(\frac{(b + y)\ (-y + b)^2\ (a - x)}{8\, a\, b^2} \right);$$

dddxx_psi3(*x*, *y*); **factor(%);**

$$dddyy\_psi3 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} \left(\frac{(b + y)\ (-y + b)^2\ (a - x)}{8\, a\, b^2} \right);$$

dddyy_psi3(*x*, *y*) ; **factor(%);**

$$dddxx\_psi3 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y\, \partial x^2} \left(\frac{1}{8} \frac{(b + y)\ (b - y)^2\ (a - x)}{a\, b^2} \right)$$

$$0$$

$$0$$

$$dddyy\_psi3 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x\, \partial y^2} \left(\frac{1}{8} \frac{(b + y)\ (b - y)^2\ (a - x)}{a\, b^2} \right)$$

$$\frac{b - y}{2\, a\, b^2} - \frac{b + y}{4\, a\, b^2}$$

$$\frac{b-3y}{4ab^2}$$

$$dddxx\_psi4 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\left(\frac{1}{8}\frac{1}{a^3 b^3}\left((b-y)(a+x)\left(-a^2 y b + 2 a^2 b^2 - a^2 y^2 + b^2 x a - b^2 x^2\right)\right)\right); dddxx\_psi4(x,y); \mathbf{factor}(\%);$$

$$dddyy\_psi4 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x}\left(\frac{1}{8}\frac{1}{a^3 b^3}\left((b-y)(a+x)\left(-a^2 y b + 2 a^2 b^2 - a^2 y^2 + b^2 x a - b^2 x^2\right)\right)\right); dddyy\_psi4(x,y); \mathbf{factor}(\%);$$

$$dddxx\_psi4 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y\, \partial x^2}\left(\frac{1}{8}\frac{1}{a^3 b^3}\left((b-y)(a+x)\left(-a^2 b y + 2 a^2 b^2 - a^2 y^2 + b^2 x a - b^2 x^2\right)\right)\right)$$

$$-\frac{a b^2 - 2 b^2 x}{4 a^3 b^3} + \frac{a+x}{4 b a^3}$$

$$\frac{3x}{4ba^3}$$

$$dddyy\_psi4 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x\, \partial y^2}\left(\frac{1}{8}\frac{1}{a^3 b^3}\left((b-y)(a+x)\left(-a^2 b y + 2 a^2 b^2 - a^2 y^2 + b^2 x a - b^2 x^2\right)\right)\right)$$

$$-\frac{-a^2 b - 2 a^2 y}{4 a^3 b^3} - \frac{b-y}{4ab^3}$$

$$\frac{3y}{4ab^3}$$

$$dddxx\_psi5 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\left(\frac{1}{8}\frac{(a-x)(x+a)^2(b-y)}{a^2 b}\right); dddxx\_psi5(x,y); \mathbf{factor}(\%);$$

$$dddyy\_psi5 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x}\left(\frac{1}{8}\frac{(a-x)(x+a)^2(b-y)}{a^2 b}\right); dddyy\_psi5(x,y); \mathbf{factor}(\%);$$

$$dddxx\_psi5 := (x,y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y\, \partial x^2}\left(\frac{1}{8}\frac{(a-x)(a+x)^2(b-y)}{a^2 b}\right)$$

$$\frac{a+x}{2a^2 b} - \frac{a-x}{4a^2 b}$$

$$\frac{a+3x}{4a^2 b}$$

$$dddyy\_psi5 := (x, y) \to \frac{\partial^3}{\partial x\, \partial y^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(a-x)\,(a+x)^2\,(b-y)}{a^2 b}\right)$$

$$0$$

$$0$$

$$dddxx\_psi6 := (x, y) \to \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b+y)\,(-y+b)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right);$$

$dddxx\_psi6(x, y)$; **factor**(%);

$$dddyy\_psi6 := (x, y) \to \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b+y)\,(-y+b)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right);$$

$dddyy\_psi6(x, y)$; **factor**(%);

$$dddxx\_psi6 := (x, y) \to \frac{\partial^3}{\partial y\, \partial x^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b+y)\,(b-y)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right)$$

$$0$$

$$0$$

$$dddyy\_psi6 := (x, y) \to \frac{\partial^3}{\partial x\, \partial y^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(b+y)\,(b-y)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right)$$

$$-\frac{b-y}{2\,a\,b^2} + \frac{b+y}{4\,a\,b^2}$$

$$-\frac{b-3y}{4\,a\,b^2}$$

$$dddxx\_psi7 := (x, y) \to \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3 b^3}\big((b+y)\,(a+x)\,(a^2 y\, b + 2\,a^2 b^2 - a^2 y^2 + b^2 x\, a - b^2 x^2)\big)\right)$$

; $dddxx\_psi7(x, y)$; **factor**(%);

$$dddyy\_psi7 := (x, y) \to \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3 b^3}\big((b+y)\,(a+x)\,(a^2 y\, b + 2\,a^2 b^2 - a^2 y^2 + b^2 x\, a - b^2 x^2)\big)\right)$$

; $dddyy\_psi7(x, y)$; **factor**(%);

$$dddxx\_psi7 := (x, y) \to \frac{\partial^3}{\partial y\, \partial x^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3 b^3}\big((b+y)\,(a+x)\,(a^2 b\, y + 2\,a^2 b^2 - a^2 y^2 + b^2 x\, a - b^2 x^2)\big)\right)$$

$$\frac{a\,b^2 - 2\,b^2 x}{4\,a^3 b^3} - \frac{a+x}{4\,b\,a^3}$$

$$-\frac{3\,x}{4\,b\,a^3}$$

$$dddyy\_psi7 := (x, y) \to \frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b+y)\,(a+x)\,\left(a^2\,b\,y+2\,a^2\,b^2 - a^2\,y^2+b^2\,x\,a-b^2\,x^2\right)\right)\right)$$

$$\frac{a^2\,b-2\,a^2\,y}{4\,a^3\,b^3}-\frac{b+y}{4\,a\,b^3}$$

$$-\frac{3\,y}{4\,a\,b^3}$$

$$dddxx\_psi8 := (x, y) \to \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(a-x)\,(x+a)^2\,(b+y)}{a^2\,b}\right);$$

$dddxx\_psi8(x, y);$ **`factor(%);`**

$$dddyy\_psi8 := (x, y) \to \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(a-x)\,(x+a)^2\,(b+y)}{a^2\,b}\right);$$

$dddyy\_psi8(x, y)$; **`factor(%);`**

$$dddxx\_psi8 := (x, y) \to \frac{\partial^3}{\partial y\,\partial x^2}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(a-x)\,(a+x)^2\,(b+y)}{a^2\,b}\right)$$

$$\frac{a+x}{2\,a^2\,b}-\frac{a-x}{4\,a^2\,b}$$

$$\frac{a+3\,x}{4\,a^2\,b}$$

$$dddyy\_psi8 := (x, y) \to \frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(a-x)\,(a+x)^2\,(b+y)}{a^2\,b}\right)$$

$$0$$

$$0$$

$$dddxx\_psi9 := (x, y) \to \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(b-y)\,(y+b)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right);$$

$dddxx\_psi9(x, y);$ **`factor(%);`**

$$dddyy\_psi9 := (x, y) \to \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(b-y)\,(y+b)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right);$$

$dddyy\_psi9(x, y)$; **`factor(%);`**

$$dddxx\_psi9 := (x, y) \to \frac{\partial^3}{\partial y\,\partial x^2}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(b-y)\,(b+y)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right)$$

$$0$$

$$0$$

$$dddyy\_psi9 := (x, y) \to \frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}\left(-\frac{1}{8}\,\frac{(b-y)\,(b+y)^2\,(a+x)}{a\,b^2}\right)$$

$$\frac{b+y}{2\,a\,b^2} - \frac{b-y}{4\,a\,b^2}$$

$$\frac{b+3\,y}{4\,a\,b^2}$$

$dddxx\_psi10 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b+y)\,(a-x)\,\left(2\,a^2\,b^2 + a^2\,y\,b - a^2\,y^2 - b^2\,x\,a - b^2\,x^2\right)\right)\right)$; $dddxx\_psi10(x, y)$; **factor**(%);

$dddyy\_psi10 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b+y)\,(a-x)\,\left(2\,a^2\,b^2 + a^2\,y\,b - a^2\,y^2 - b^2\,x\,a - b^2\,x^2\right)\right)\right)$; $dddyy\_psi10(x, y)$; **factor**(%);

$$dddxx\_psi10 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y\,\partial x^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b+y)\,(a-x)\,\left(2\,a^2\,b^2 + a^2\,b\,y - a^2\,y^2 - b^2\,x\,a - b^2\,x^2\right)\right)\right)$$

$$-\frac{-a\,b^2 - 2\,b^2\,x}{4\,a^3\,b^3} - \frac{a-x}{4\,b\,a^3}$$

$$\frac{3\,x}{4\,b\,a^3}$$

$$dddyy\_psi10 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{a^3\,b^3}\left((b+y)\,(a-x)\,\left(2\,a^2\,b^2 + a^2\,b\,y - a^2\,y^2 - b^2\,x\,a - b^2\,x^2\right)\right)\right)$$

$$-\frac{a^2\,b - 2\,a^2\,y}{4\,a^3\,b^3} + \frac{b+y}{4\,a\,b^3}$$

$$\frac{3\,y}{4\,a\,b^3}$$

$dddxx\_psi11 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(a+x)\,(-x+a)^2\,(b+y)}{a^2\,b}\right)$; $dddxx\_psi11(x, y)$; **factor**(%);

$dddyy\_psi11 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x}\left(\frac{1}{8}\,\frac{(a+x)\,(-x+a)^2\,(b+y)}{a^2\,b}\right)$; $dddyy\_psi11(x, y)$; **factor**(%);

$$dddxx\_psi11 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y\, \partial x^2}\left(\frac{1}{8}\, \frac{(a+x)\,(a-x)^2\,(b+y)}{a^2\, b}\right)$$

$$-\frac{a-x}{2\, a^2\, b} + \frac{a+x}{4\, a^2\, b}$$

$$-\frac{a-3\, x}{4\, a^2\, b}$$

$$dddyy\_psi11 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x\, \partial y^2}\left(\frac{1}{8}\, \frac{(a+x)\,(a-x)^2\,(b+y)}{a^2\, b}\right)$$

$$0$$

$$0$$

$$dddxx\_psi12 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\left(\frac{1}{8}\, \frac{(b-y)\,(y+b)^2\,(a-x)}{a\, b^2}\right);$$

$dddxx\_psi12(x, y)$; `factor(%);`

$$dddyy\_psi12 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x}\left(\frac{1}{8}\, \frac{(b-y)\,(y+b)^2\,(a-x)}{a\, b^2}\right);$$

$dddyy\_psi12(x, y)$; `factor(%);`

$$dddxx\_psi12 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y\, \partial x^2}\left(\frac{1}{8}\, \frac{(b-y)\,(b+y)^2\,(a-x)}{a\, b^2}\right)$$

$$0$$

$$0$$

$$dddyy\_psi12 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x\, \partial y^2}\left(\frac{1}{8}\, \frac{(b-y)\,(b+y)^2\,(a-x)}{a\, b^2}\right)$$

$$\frac{b+y}{2\, a\, b^2} - \frac{b-y}{4\, a\, b^2}$$

$$\frac{b+3\, y}{4\, a\, b^2}$$

$dddxx\_psi := Matrix(12, 1, [dddxx\_psi1(x, y), dddxx\_psi2(x, y), dddxx\_psi3(x, y), dddxx\_psi4(x, y), dddxx\_psi5(x, y), dddxx\_psi6(x, y), dddxx\_psi7(x, y), dddxx\_psi8(x, y), dddxx\_psi9(x, y), dddxx\_psi10(x, y), dddxx\_psi11(x, y), dddxx\_psi12(x, y)])$

$$dddxx\_psi := \begin{bmatrix} \frac{-a\,b^2 - 2\,b^2\,x}{4\,a^3\,b^3} + \frac{a-x}{4\,b\,a^3} \\ \frac{a-x}{2\,a^2\,b} - \frac{a+x}{4\,a^2\,b} \\ 0 \\ -\frac{a\,b^2 - 2\,b^2\,x}{4\,a^3\,b^3} + \frac{a+x}{4\,b\,a^3} \\ \frac{a+x}{2\,a^2\,b} - \frac{a-x}{4\,a^2\,b} \\ 0 \\ \frac{a\,b^2 - 2\,b^2\,x}{4\,a^3\,b^3} - \frac{a+x}{4\,b\,a^3} \\ \frac{a+x}{2\,a^2\,b} - \frac{a-x}{4\,a^2\,b} \\ 0 \\ -\frac{-a\,b^2 - 2\,b^2\,x}{4\,a^3\,b^3} - \frac{a-x}{4\,b\,a^3} \\ -\frac{a-x}{2\,a^2\,b} + \frac{a+x}{4\,a^2\,b} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$dddyy\_psi := Matrix(12, 1, [dddyy\_psi1(x, y), dddyy\_psi2(x, y),$
$dddyy\_psi3(x, y), dddyy\_psi4(x, y), dddyy\_psi5(x, y),$
$dddyy\_psi6(x, y), dddyy\_psi7(x, y), dddyy\_psi8(x, y),$
$dddyy\_psi9(x, y), dddyy\_psi10(x, y), dddyy\_psi11(x, y),$
$dddyy\_psi12(x, y)])$

$$
dddyy\_psi := \begin{bmatrix}
\frac{-a^2 b - 2a^2 y}{4a^3 b^3} + \frac{b-y}{4ab^3} \\
0 \\
\frac{b-y}{2ab^2} - \frac{b+y}{4ab^2} \\
-\frac{-a^2 b - 2a^2 y}{4a^3 b^3} - \frac{b-y}{4ab^3} \\
0 \\
-\frac{b-y}{2ab^2} + \frac{b+y}{4ab^2} \\
\frac{a^2 b - 2a^2 y}{4a^3 b^3} - \frac{b+y}{4ab^3} \\
0 \\
\frac{b+y}{2ab^2} - \frac{b-y}{4ab^2} \\
-\frac{a^2 b - 2a^2 y}{4a^3 b^3} + \frac{b+y}{4ab^3} \\
0 \\
\frac{b+y}{2ab^2} - \frac{b-y}{4ab^2}
\end{bmatrix}
$$

5.2 Εύρεση των τάσεων και των εντατικών μεγεθών

Ο κώδικας στο MATLAB. Αρχικά εισάγει τα δεδομένα που του δίνουμε από το excel (συντεταγμένες κόμβων, στηρίξεις ,ιδιότητες υλικών, τάσεις) που βρίσκει τις μετατοπίσεις και τα εντατικά μεγέθη (τάσεις ροπές και τέμνουσες) και τα τοποθετεί στο ίδιο excel στα δύο επόμενα φύλλα, κάνει και ένα 3D σχέδιο της πλάκας σε σχέση με την βύθιση της

Κόμβος	Συντεταγμένες κόμβου		
	X	Y	W
1	0	0	0
2	1,20	0	0
3	2,4	0	0
4	3,60	0	0
5	4,8	0	0
6	6,00	0	0
7	0	1	0
8	1,20	1	0
9	2,4	1	0
10	3,60	1	0
11	4,8	1	0
12	6,00	1	0
13	0	2,5	0
14	1,20	2,5	0
15	2,4	2,5	0
16	3,60	2,5	0
17	4,8	2,5	0
18	6,00	2,5	0
19	0	4,5	0
20	1,20	4,5	0
21	2,4	4,5	0
22	3,60	4,5	0
23	4,8	4,5	0
24	6,00	4,5	0

Συντεταγμένες κόμβων από το excel

Ιδιότητες	(σκυρόδεμα) Υλικό #1
E_1	2,00E+07
v_{12}	0,25
G_{12}	8,00E+06
w	24,00
h	0,30

Στοιχείο	Συνδεσιμότητα Κόμβων				Κωδικός Υλικού
	Κόμβος #1	Κόμβος #2	Κόμβος #3	Κόμβος #4	
1	1	2	8	7	1
2	2	3	9	8	1
3	3	4	10	9	1
4	4	5	11	10	1
5	5	6	12	11	1
6	7	8	14	13	1
7	8	9	15	14	1
8	9	10	16	15	1
9	10	11	17	16	1
10	11	12	18	17	1
11	13	14	20	19	1
12	14	15	21	20	1
13	15	16	22	21	1
14	16	17	23	22	1
15	17	18	24	23	1

Συνδεσιμότητα κόμβων και ιδιότητες υλικών από το excel

Στηρίξεις- Δεσμευμένοι Βαθμοί		
Κόμβος	**Διεύθυνση** (1:W/2:X/3:Y)	**Δεδομένη μετατόπιση**
1	1	0
1	2	0
1	3	0
2	1	0
2	2	0
2	3	0
3	1	0
3	2	0
3	3	0
4	1	0
4	2	0
4	3	0
5	1	0
5	2	0
5	3	0
6	1	0
6	2	0
6	3	0
12	1	0
12	2	0
12	3	0
18	1	0
18	2	0
18	3	0
24	1	0
24	2	0
24	3	0
23	1	0
23	2	0
23	3	0
22	1	0
22	2	0
22	3	0
21	1	0
21	2	0
21	3	0
20	1	0
20	2	0
20	3	0
19	1	0
19	2	0
19	3	0
13	1	0
13	2	0
13	3	0
7	1	0
7	2	0
7	3	0

Στηρίξεις δεσμεύσεις κόμβων από excel

Πίνακας Δεδομένων Συνοριακών Τάσεων				
Κόμβος Αρχής	**Κόμβος Πέρατος**	**Τάση tx** (kN/m^2)	**Τάση ty** (kN/m^2)	**Τάση tw** (kN/m^2)
1	2	0	0	-20
2	3	0	0	-20
3	4	0	0	-20
4	5	0	0	-20
5	6	0	0	-20
1	7	0	0	-20
6	12	0	0	-20
7	8	0	0	-20
8	9	0	0	-20
9	10	0	0	-20
10	11	0	0	-20
11	12	0	0	-20
12	18	0	0	-20
7	13	0	0	-20
13	14	0	0	-20
14	15	0	0	-20
15	16	0	0	-20
16	17	0	0	-20
17	18	0	0	-20
18	24	0	0	-20
13	19	0	0	-20
19	20	0	0	-20
20	21	0	0	-20
21	22	0	0	-20
22	23	0	0	-20
23	24	0	0	-20

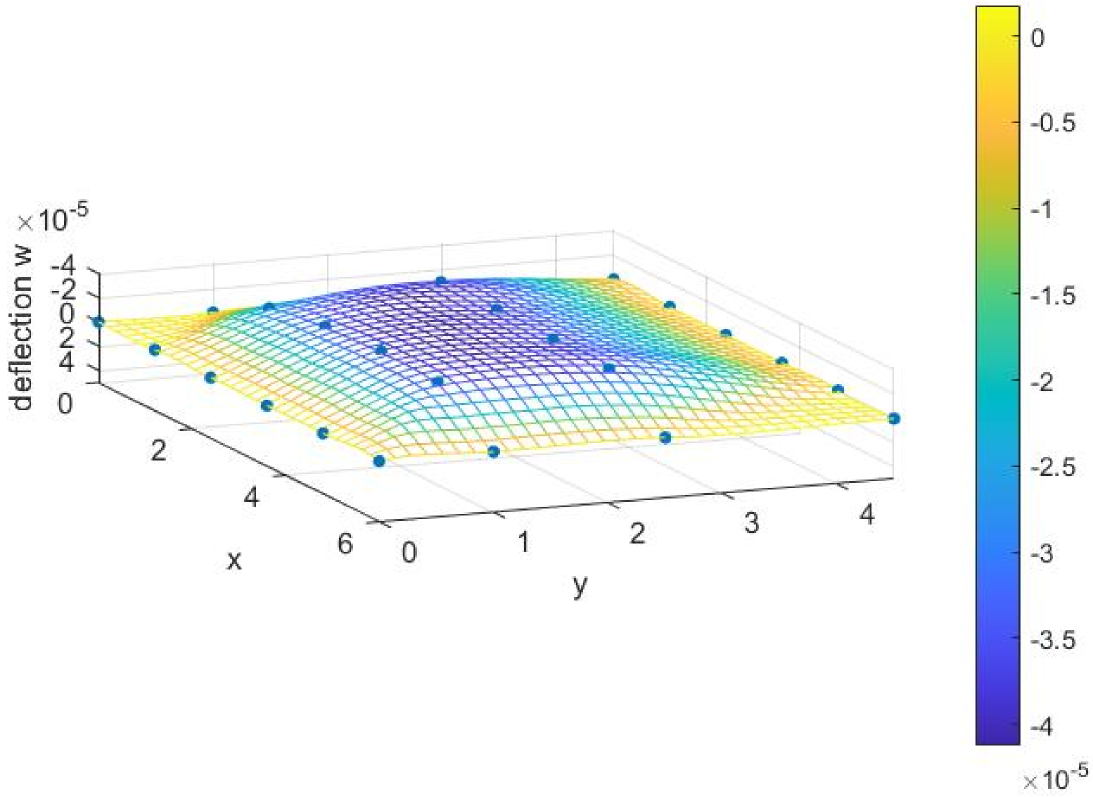
Συνοριακές τάσεις από excel

Μετακινήσεις Κόμβων					
α/α κόμβου	x	y	u	v	w
1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0
3	2	0	0	0	0
4	4	0	0	0	0
5	5	0	0	0	0
6	6	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0
8	1	1	3,36916E-06	-5,01345E-07	-2,65374E-05
9	2	1	4,82158E-06	-7,22904E-07	-3,42084E-05
10	4	1	2,42772E-06	-2,70356E-06	-3,67677E-05
11	5	1	1,18004E-05	-4,87405E-06	-3,42401E-05
12	6	1	0	0	0
13	0	3	0	0	0
14	1	3	1,56929E-06	-7,67371E-06	-3,63253E-05
15	2	3	3,61072E-06	-1,57782E-05	-3,63639E-05
16	4	3	2,98291E-06	-2,21752E-05	-3,49091E-05
17	5	3	1,12496E-05	-2,89058E-05	-3,32878E-05
18	6	3	0	0	0
19	0	5	0	0	0
20	1	5	0	0	0
21	2	5	0	0	0
22	4	5	0	0	0
23	5	5	0	0	0
24	6	5	0	0	0

Αποτελέσματα μετατοπίσεων

α/α στοιχείου	Xc	Yc	Uc	Vc	Wc	σx	σy	τxy	Mx	My	Myx	Mxy	Qx	Qy
1	0,6	0,5	8,42291E-07	-1,25336E-07	-6,63435E-06	-82,0545525	-91,5223855	-52,0730814	-1,53852286	-1,71604473	-0,976370277	0,976370277	8,28435386	10,8880079
2	1,8	0,5	2,04768E-06	-3,06062E-07	-1,51865E-05	-186,435032	-207,946767	-118,31454	-3,49565686	-3,89900188	-2,218397621	2,218397621	18,8227677	24,7384947
3	3,0	0,5	1,81232E-06	-8,56616E-07	-1,7744E-05	-232,798058	-259,659372	-147,737229	-4,36496358	-4,86861322	-2,770073041	2,770073041	23,50365	30,8905115
4	4,2	0,5	3,55704E-06	-1,8944E-06	-1,77519E-05	-223,105135	-248,848035	-141,585951	-4,18322128	-4,66590066	-2,65473658	2,65473658	22,5250377	29,6043352
5	5,4	0,5	2,95011E-06	-1,21851E-06	-8,56002E-06	-94,6875571	-105,613044	-60,0901805	-1,7753917	-1,98024458	-1,126690884	1,126690884	9,55980144	12,5643105
6	0,6	1,8	1,23461E-06	-2,04376E-06	-1,57157E-05	-211,517906	-185,078168	-118,978822	-3,96596074	-3,47021565	-2,230852919	2,230852919	20,9314595	14,9825184
7	1,8	1,8	3,34269E-06	-6,16903E-06	-3,33588E-05	-463,16961	-405,273409	-260,532905	-8,68443018	-7,59887641	-4,884991977	4,884991977	45,8344926	32,8078474
8	3,0	1,8	3,46073E-06	-1,0345E-05	-3,55623E-05	-543,315682	-475,401221	-305,615071	-10,187169	-8,9137729	-5,730282579	5,730282579	53,7656143	38,4848608
9	4,2	1,8	7,11516E-06	-1,46647E-05	-3,48012E-05	-542,08883	-474,327726	-304,924967	-10,1641656	-8,89364487	-5,717343129	5,717343129	53,6442071	38,3979588
10	5,4	1,8	5,76251E-06	-8,44497E-06	-1,6882E-05	-250,424852	-219,121745	-140,863979	-4,69546597	-4,10853272	-2,641199608	2,641199608	24,781626	17,738427
11	0,6	3,5	3,92322E-07	-1,91843E-06	-9,08134E-06	-130,117941	-96,1741301	-67,8876212	-2,43971139	-1,80326494	-1,272892898	1,272892898	12,728929	5,94016686
12	1,8	3,5	1,295E-06	-5,86297E-06	-1,81723E-05	-278,947578	-206,178645	-145,537867	-5,23026709	-3,86584959	-2,728835003	2,728835003	27,28835	12,7345633
13	3,0	3,5	1,64841E-06	-9,48835E-06	-1,78183E-05	-314,740785	-232,634493	-164,212583	-5,90138972	-4,36189675	-3,07898594	3,07898594	30,7898594	14,3686011
14	4,2	3,5	3,55813E-06	-1,27703E-05	-1,70492E-05	-322,139561	-238,103154	-168,072814	-6,04011676	-4,46443413	-3,151365268	3,151365268	31,5136527	14,7063713
15	5,4	3,5	2,8124E-06	-7,22646E-06	-8,32196E-06	-156,228413	-115,473175	-81,5104764	-2,92928275	-2,16512203	-1,528321433	1,528321433	15,2832143	7,13216669

Αποτελέσματα εντατικών μεγεθων



Εικόνα από MATLAB πλάκα με βυθίσεις

```
clear
%BHMA 1 - GEWMETRIA KAI DEDOMENA

eis = input('δώσε όνομα excel:','s');

[coord]=readmatrix(eis,'Range','coord');
%eisagwgi twn suntetagmenwn sto katholiko sistima
[elemMaterial]=readmatrix(eis,'Range','elementMat');
%eisagwgi pinaka me tin katigoria ylikou poy anikei to kathe
stoixeio
[materials]=readmatrix(eis,'Range','materials');
%eisagwgi twn pinakwn me tis idiotites twn  ylikwn
[connectivity]=readmatrix(eis,'Range','conn');
%Eisagwgi pinaka syndesimotitas komvwn

ad=size(connectivity);
bd=size(coord);
Nel=ad(1);                 %arithmos stoixeiwn
Nnel=ad(2);                %arithmos twn komvwn ana stoixeio
Ndof=bd(2);                %arithmos vathmwn eleutherias ana
komvo
Nnode=bd(1);               %sunolikos arithmos twn komvwn sto
sustima
```

```
total_dof=Nnode*Ndof;     %synolo vathmwn eleutherias toy
systimatos

clear ad bd

Qwall = zeros (total_dof, 1);     % arxikopoiisi tou pinaka
toy sistimatos
Kwall = zeros (total_dof, total_dof);  % arxikopoiisi tou
pinaka toy sistimatos

for i=1:Nel
    imater=elemMaterial(i);
    E1=materials(1,imater);
    nu12=materials(2,imater);
    G12=materials(3,imater);
    h=materials(5,imater);
    d =E1 *h^3/(12*(1-nu12));

end

%BHMA 2 - MHTRWA STIBAROTHTAS
a21=zeros(Nel,1);
a14=zeros(Nel,1);
a43=zeros(Nel,1);
a32=zeros(Nel,1);
b12=zeros(Nel,1);
b41=zeros(Nel,1);
b34=zeros(Nel,1);
b23=zeros(Nel,1);
Ae=zeros(Nel,1);
Ke=zeros(12,12);
Kem=zeros(12,12);
Qe=zeros(12,1);
Qem=zeros(12,1);
Neworder=[9;1;5;10;2;6;11;3;7;12;4;8];
ElemDOF=zeros(12,1);
for i=1:Nel
    imater=elemMaterial(i);
    helem=materials(5,imater);
    welem=materials(4,imater);
node1 =connectivity (i,1); %Syndesimotita komvou 1  gia kathe
stoixeio  (prwti stili tou connectivity)
node2 =connectivity (i,2); %Syndesimotita komvou 2  gia kathe
stoixeio  (deuteri stili tou connectivity)
node3 =connectivity (i,3); %Syndesimotita komvou 3  gia kathe
stoixeio  (triti stili tou connectivity)
node4 =connectivity (i,4); %Syndesimotita komvou 4  gia kathe
stoixeio  (tetarti stili tou connectivity)
x1(i) =coord(node1,1); y1(i)=coord(node1, 2); %sintetagmenes
kathe komvoy ana stoixeio
```

```
x2(i) =coord(node2,1); y2(i)=coord(node2, 2); %sintetagmenes
kathe komvoy ana stoixeio
x3(i) =coord(node3,1); y3(i)=coord(node3, 2); %sintetagmenes
kathe komvoy ana stoixeio
x4(i) =coord(node4,1); y4(i)=coord(node4, 2); %sintetagmenes
kathe komvoy ana stoixeio
a21(i)=x2(i)-x1(i); a14(i)=x1(i)-x4(i); a43(i)=x4(i)-x3(i);
a32(i)=x3(i)-x2(i); %diafores twn suntetagmenwn X
b12(i)=y1(i)-y2(i); b41(i)=y4(i)-y1(i); b34(i)=y3(i)-y4(i);
b23(i)=y2(i)-y3(i); %diafores twn suntetagmenwn Y
Ae(i)= a21(i)*b41(i); %Emvadon kathe stoixeioy


Ke=zeros(12,12);
b = b41(i)/2;
a = a21(i)/2;
nu= nu12;
d =E1 *h^3/(12*(1-nu));
Ke=[d * b / a ^ 3 + d * nu / a / b / 0.2e1 + 0.7e1 / 0.10e2 *
(0.1e1 - nu) * d / a / b + d / b ^ 3 * a d * b / a ^ 2 + d *
nu / b / 0.2e1 + (0.1e1 - nu) * d / b / 0.10e2 d * nu / a /
0.2e1 + (0.1e1 - nu) * d / a / 0.10e2 + d * a / b ^ 2 -d * b /
a ^ 3 - d * nu / a / b / 0.2e1 - 0.7e1 / 0.10e2 * (0.1e1 - nu)
* d / a / b + d / b ^ 3 * a / 0.2e1 d * b / a ^ 2 + (0.1e1 -
nu) * d / b / 0.10e2 -d * nu / a / 0.2e1 - (0.1e1 - nu) * d /
a / 0.10e2 + d * a / b ^ 2 / 0.2e1 -d * b / a ^ 3 / 0.2e1 + d
* nu / a / b / 0.2e1 + 0.7e1 / 0.10e2 * (0.1e1 - nu) * d / a /
b - d / b ^ 3 * a / 0.2e1 d * b / a ^ 2 / 0.2e1 - (0.1e1 - nu)
* d / b / 0.10e2 -(0.1e1 - nu) * d / a / 0.10e2 + d * a / b ^
2 / 0.2e1 d * b / a ^ 3 / 0.2e1 - d * nu / a / b / 0.2e1 -
0.7e1 / 0.10e2 * (0.1e1 - nu) * d / a / b - d / b ^ 3 * a d *
b / a ^ 2 / 0.2e1 - d * nu / b / 0.2e1 - (0.1e1 - nu) * d / b
/ 0.10e2 (0.1e1 - nu) * d / a / 0.10e2 + d * a / b ^ 2; d * b
/ a ^ 2 + d * nu / b / 0.2e1 + (0.1e1 - nu) * d / b / 0.10e2
0.4e1 / 0.3e1 * d * b / a + 0.4e1 / 0.15e2 * (0.1e1 - nu) * d
* a / b d * nu -d * b / a ^ 2 - (0.1e1 - nu) * d / b / 0.10e2
0.2e1 / 0.3e1 * d * b / a - (0.1e1 - nu) * d * a / b / 0.15e2
0 -d * b / a ^ 2 / 0.2e1 + (0.1e1 - nu) * d / b / 0.10e2 d * b
/ a / 0.3e1 + (0.1e1 - nu) * d * a / b / 0.15e2 0 d * b / a ^
2 / 0.2e1 - d * nu / b / 0.2e1 - (0.1e1 - nu) * d / b / 0.10e2
0.2e1 / 0.3e1 * d * b / a - 0.4e1 / 0.15e2 * (0.1e1 - nu) * d
* a / b 0; d * nu / a / 0.2e1 + (0.1e1 - nu) * d / a / 0.10e2
+ d * a / b ^ 2 d * nu 0.4e1 / 0.15e2 * (0.1e1 - nu) * d * b /
a + 0.4e1 / 0.3e1 * d * a / b -d * nu / a / 0.2e1 - (0.1e1 -
nu) * d / a / 0.10e2 + d * a / b ^ 2 / 0.2e1 0 -0.4e1 / 0.15e2
* (0.1e1 - nu) * d * b / a + 0.2e1 / 0.3e1 * d * a / b (0.1e1
- nu) * d / a / 0.10e2 - d * a / b ^ 2 / 0.2e1 0 (0.1e1 - nu)
* d * b / a / 0.15e2 + d * a / b / 0.3e1 -(0.1e1 - nu) * d / a
/ 0.10e2 - d * a / b ^ 2 0 -(0.1e1 - nu) * d * b / a / 0.15e2
+ 0.2e1 / 0.3e1 * d * a / b; -d * b / a ^ 3 - d * nu / a / b /
0.2e1 - 0.7e1 / 0.10e2 * (0.1e1 - nu) * d / a / b + d / b ^ 3
```

```
* a / 0.2e1 -d * b / a ^ 2 - (0.1e1 - nu) * d / b / 0.10e2 -d
* nu / a / 0.2e1 - (0.1e1 - nu) * d / a / 0.10e2 + d * a / b ^
2 / 0.2e1 d * b / a ^ 3 + d * nu / a / b / 0.2e1 + 0.7e1 /
0.10e2 * (0.1e1 - nu) * d / a / b + d / b ^ 3 * a -d * b / a ^
2 - d * nu / b / 0.2e1 - (0.1e1 - nu) * d / b / 0.10e2 d * nu
/ a / 0.2e1 + (0.1e1 - nu) * d / a / 0.10e2 + d * a / b ^ 2 d
* b / a ^ 3 / 0.2e1 - d * nu / a / b / 0.2e1 - 0.7e1 / 0.10e2
* (0.1e1 - nu) * d / a / b - d / b ^ 3 * a -d * b / a ^ 2 /
0.2e1 + d * nu / b / 0.2e1 + (0.1e1 - nu) * d / b / 0.10e2
(0.1e1 - nu) * d / a / 0.10e2 + d * a / b ^ 2 -d * b / a ^ 3 /
0.2e1 + d * nu / a / b / 0.2e1 + 0.7e1 / 0.10e2 * (0.1e1 - nu)
* d / a / b - d / b ^ 3 * a / 0.2e1 -d * b / a ^ 2 / 0.2e1 +
(0.1e1 - nu) * d / b / 0.10e2 -(0.1e1 - nu) * d / a / 0.10e2 +
d * a / b ^ 2 / 0.2e1; d * b / a ^ 2 + (0.1e1 - nu) * d / b /
0.10e2 0.2e1 / 0.3e1 * d * b / a - (0.1e1 - nu) * d * a / b /
0.15e2 0 -d * b / a ^ 2 - d * nu / b / 0.2e1 - (0.1e1 - nu) *
d / b / 0.10e2 0.4e1 / 0.3e1 * d * b / a + 0.4e1 / 0.15e2 *
(0.1e1 - nu) * d * a / b -d * nu -d * b / a ^ 2 / 0.2e1 + d *
nu / b / 0.2e1 + (0.1e1 - nu) * d / b / 0.10e2 0.2e1 / 0.3e1 *
d * b / a - 0.4e1 / 0.15e2 * (0.1e1 - nu) * d * a / b 0 d * b
/ a ^ 2 / 0.2e1 - (0.1e1 - nu) * d / b / 0.10e2 d * b / a /
0.3e1 + (0.1e1 - nu) * d * a / b / 0.15e2 0; -d * nu / a /
0.2e1 - (0.1e1 - nu) * d / a / 0.10e2 + d * a / b ^ 2 / 0.2e1
0 -0.4e1 / 0.15e2 * (0.1e1 - nu) * d * b / a + 0.2e1 / 0.3e1 *
d * a / b d * nu / a / 0.2e1 + (0.1e1 - nu) * d / a / 0.10e2 +
d * a / b ^ 2 -d * nu 0.4e1 / 0.15e2 * (0.1e1 - nu) * d * b /
a + 0.4e1 / 0.3e1 * d * a / b -(0.1e1 - nu) * d / a / 0.10e2 -
d * a / b ^ 2 0 -(0.1e1 - nu) * d * b / a / 0.15e2 + 0.2e1 /
0.3e1 * d * a / b (0.1e1 - nu) * d / a / 0.10e2 - d * a / b ^
2 / 0.2e1 0 (0.1e1 - nu) * d * b / a / 0.15e2 + d * a / b /
0.3e1; -d * b / a ^ 3 / 0.2e1 + d * nu / a / b / 0.2e1 + 0.7e1
/ 0.10e2 * (0.1e1 - nu) * d / a / b - d / b ^ 3 * a / 0.2e1 -d
* b / a ^ 2 / 0.2e1 + (0.1e1 - nu) * d / b / 0.10e2 (0.1e1 -
nu) * d / a / 0.10e2 - d * a / b ^ 2 / 0.2e1 d * b / a ^ 3 /
0.2e1 - d * nu / a / b / 0.2e1 - 0.7e1 / 0.10e2 * (0.1e1 - nu)
* d / a / b - d / b ^ 3 * a -d * b / a ^ 2 / 0.2e1 + d * nu /
b / 0.2e1 + (0.1e1 - nu) * d / b / 0.10e2 -(0.1e1 - nu) * d /
a / 0.10e2 - d * a / b ^ 2 d * b / a ^ 3 + d * nu / a / b /
0.2e1 + 0.7e1 / 0.10e2 * (0.1e1 - nu) * d / a / b + d / b ^ 3
* a -d * b / a ^ 2 - d * nu / b / 0.2e1 - (0.1e1 - nu) * d / b
/ 0.10e2 -d * nu / a / 0.2e1 - (0.1e1 - nu) * d / a / 0.10e2 -
d * a / b ^ 2 -d * b / a ^ 3 - d * nu / a / b / 0.2e1 - 0.7e1
/ 0.10e2 * (0.1e1 - nu) * d / a / b + d / b ^ 3 * a / 0.2e1 -d
* b / a ^ 2 - (0.1e1 - nu) * d / b / 0.10e2 d * nu / a / 0.2e1
+ (0.1e1 - nu) * d / a / 0.10e2 - d * a / b ^ 2 / 0.2e1; d * b
/ a ^ 2 / 0.2e1 - (0.1e1 - nu) * d / b / 0.10e2 d * b / a /
0.3e1 + (0.1e1 - nu) * d * a / b / 0.15e2 0 -d * b / a ^ 2 /
0.2e1 + d * nu / b / 0.2e1 + (0.1e1 - nu) * d / b / 0.10e2
0.2e1 / 0.3e1 * d * b / a - 0.4e1 / 0.15e2 * (0.1e1 - nu) * d
* a / b 0 -d * b / a ^ 2 - d * nu / b / 0.2e1 - (0.1e1 - nu) *
d / b / 0.10e2 0.4e1 / 0.3e1 * d * b / a + 0.4e1 / 0.15e2 *
```

```
(0.1e1 - nu) * d * a / b d * nu d * b / a ^ 2 + (0.1e1 - nu) *
d / b / 0.10e2 0.2e1 / 0.3e1 * d * b / a - (0.1e1 - nu) * d *
a / b / 0.15e2 0; -(0.1e1 - nu) * d / a / 0.10e2 + d * a / b ^
2 / 0.2e1 0 (0.1e1 - nu) * d * b / a / 0.15e2 + d * a / b /
0.3e1 (0.1e1 - nu) * d / a / 0.10e2 + d * a / b ^ 2 0 -(0.1e1
- nu) * d * b / a / 0.15e2 + 0.2e1 / 0.3e1 * d * a / b -d * nu
/ a / 0.2e1 - (0.1e1 - nu) * d / a / 0.10e2 - d * a / b ^ 2 d
* nu 0.4e1 / 0.15e2 * (0.1e1 - nu) * d * b / a + 0.4e1 / 0.3e1
* d * a / b d * nu / a / 0.2e1 + (0.1e1 - nu) * d / a / 0.10e2
- d * a / b ^ 2 / 0.2e1 0 -0.4e1 / 0.15e2 * (0.1e1 - nu) * d *
b / a + 0.2e1 / 0.3e1 * d * a / b; d * b / a ^ 3 / 0.2e1 - d *
nu / a / b / 0.2e1 - 0.7e1 / 0.10e2 * (0.1e1 - nu) * d / a / b
- d / b ^ 3 * a d * b / a ^ 2 / 0.2e1 - d * nu / b / 0.2e1 -
(0.1e1 - nu) * d / b / 0.10e2 -(0.1e1 - nu) * d / a / 0.10e2 -
d * a / b ^ 2 -d * b / a ^ 3 / 0.2e1 + d * nu / a / b / 0.2e1
+ 0.7e1 / 0.10e2 * (0.1e1 - nu) * d / a / b - d / b ^ 3 * a /
0.2e1 d * b / a ^ 2 / 0.2e1 - (0.1e1 - nu) * d / b / 0.10e2
(0.1e1 - nu) * d / a / 0.10e2 - d * a / b ^ 2 / 0.2e1 -d * b /
a ^ 3 - d * nu / a / b / 0.2e1 - 0.7e1 / 0.10e2 * (0.1e1 - nu)
* d / a / b + d / b ^ 3 * a / 0.2e1 d * b / a ^ 2 + (0.1e1 -
nu) * d / b / 0.10e2 d * nu / a / 0.2e1 + (0.1e1 - nu) * d / a
/ 0.10e2 - d * a / b ^ 2 / 0.2e1 d * b / a ^ 3 + d * nu / a /
b / 0.2e1 + 0.7e1 / 0.10e2 * (0.1e1 - nu) * d / a / b + d / b
^ 3 * a d * b / a ^ 2 + d * nu / b / 0.2e1 + (0.1e1 - nu) * d
/ b / 0.10e2 -d * nu / a / 0.2e1 - (0.1e1 - nu) * d / a /
0.10e2 - d * a / b ^ 2; d * b / a ^ 2 / 0.2e1 - d * nu / b /
0.2e1 - (0.1e1 - nu) * d / b / 0.10e2 0.2e1 / 0.3e1 * d * b /
a - 0.4e1 / 0.15e2 * (0.1e1 - nu) * d * a / b 0 -d * b / a ^ 2
/ 0.2e1 + (0.1e1 - nu) * d / b / 0.10e2 d * b / a / 0.3e1 +
(0.1e1 - nu) * d * a / b / 0.15e2 0 -d * b / a ^ 2 - (0.1e1 -
nu) * d / b / 0.10e2 0.2e1 / 0.3e1 * d * b / a - (0.1e1 - nu)
* d * a / b / 0.15e2 0 d * b / a ^ 2 + d * nu / b / 0.2e1 +
(0.1e1 - nu) * d / b / 0.10e2 0.4e1 / 0.3e1 * d * b / a +
0.4e1 / 0.15e2 * (0.1e1 - nu) * d * a / b -d * nu; (0.1e1 -
nu) * d / a / 0.10e2 + d * a / b ^ 2 0 -(0.1e1 - nu) * d * b /
a / 0.15e2 + 0.2e1 / 0.3e1 * d * a / b -(0.1e1 - nu) * d / a /
0.10e2 + d * a / b ^ 2 / 0.2e1 0 (0.1e1 - nu) * d * b / a /
0.15e2 + d * a / b / 0.3e1 d * nu / a / 0.2e1 + (0.1e1 - nu) *
d / a / 0.10e2 - d * a / b ^ 2 / 0.2e1 0 -0.4e1 / 0.15e2 *
(0.1e1 - nu) * d * b / a + 0.2e1 / 0.3e1 * d * a / b -d * nu /
a / 0.2e1 - (0.1e1 - nu) * d / a / 0.10e2 - d * a / b ^ 2 -d *
nu 0.4e1 / 0.15e2 * (0.1e1 - nu) * d * b / a + 0.4e1 / 0.3e1 *
d * a / b;];


 clear a b



for jj=1:11
```

```
    for ii=jj+1:12
        Ke(ii,jj)=Ke(jj,ii);
    end
end

Qe(1)=0; Qe(2)=0; Qe(3)=0; Qe(4)=0; Qe(5)=0; Qe(6)=0; Qe(7)=0;
Qe(8)=0;
Qe(9)=-Ae(i)*helem/4*welem; Qe(10)=-Ae(i)*helem/4*welem;
Qe(11)=-Ae(i)*helem/4*welem; Qe(12)=-Ae(i)*helem/4*welem;
%stin bythisi yparxei katanemimeno to idio varos

%Anadiataksi Mitrooy stivarotitas twn epipedwn trigwnikwn
stoixeiwn kai
%mitroou epikomvias fortisis

for ii=1:12
    Qem(ii)=Qe(Neworder(ii));
    for jj=1:12
      Kem(ii,jj)=Ke(Neworder(ii),Neworder(jj));
    end
end

%h morfosi tou olikou mitroou stivarotitas kai tou olikou
mitroou
%epikomviwn drasewn
   for inode=1:4
        RowNum = 3*connectivity(i,inode)-2;
        for ii=1:3
             RowElem = 3*(inode-1) + ii;
            ElemDOF(RowElem)=RowNum;
            Qwall(RowNum) = Qwall(RowNum) + Qem(RowElem);
           RowNum = RowNum + 1;

        end
   end
  Kwall(ElemDOF,ElemDOF)= Kwall(ElemDOF,ElemDOF)+ Kem;
end

clear Ke Kem Qe Qem Neworder ElemDOF

%BHMA 3 - EPIKOMBIES DYNAMEIS KAI STIRIKSEIS

[LOADS]=readmatrix(eis,'Range','forces');      %Eisagogi twn
epikombiwn fortiwn
[SUPPORTS]=readmatrix(eis,'Range','Sup_Dof');   %Eisagogi twn
stiriksewn

NLoads=size(LOADS,1);         %Arithmos fortisewn

%Ypologismos arithmou gnwstwn kai agnwstwn metatopisewn
NSup_Dof=size(SUPPORTS,1);     %Arithmos gnwstwn metatopisewn
```

```
NFree_Dof=total_dof-NSup_Dof;     %Aritmos agnwstwn
metatopisewn

%prosdiorismos stoixeiwn pou feroun ta fortia
Element_Loads=zeros(NLoads,1);
for i=1:NLoads
    for j=1:Nel
        icheck=0;
        for k=1:4

icheck=icheck+(connectivity(j,k)==LOADS(i,1))+(connectivity(j,
k)==LOADS(i,2));
        end
        if icheck==2;
           Element_Loads(i)=j;
           break;
        end
    end
end

for i=1:NLoads
    Dx=coord(LOADS(i,2),1)-coord(LOADS(i,1),1);
    Dy=coord(LOADS(i,2),2)-coord(LOADS(i,1),2);
    DL=sqrt(Dx^2+Dy^2);
    Dh=materials(5,elemMaterial(Element_Loads(i)));
    Pxforce=LOADS(i,3)*DL*Dh;
    for j=1:2
        ii=3*LOADS(i,j)-1;
        Qwall(ii)= Qwall(ii)+ Pxforce/2;
    end

     Pyforce=LOADS(i,4)*DL*Dh;
    for j=1:2
        ii=3*LOADS(i,j);
        Qwall(ii)= Qwall(ii)+ Pyforce/2;
    end
    Pwforce=LOADS(i,5)*DL*Dh;
    for j=1:2
        ii=3*LOADS(i,j)-2;
        Qwall(ii)= Qwall(ii)+ Pwforce/2;
    end
end

clear elemMaterial materials

%Stiriksi tou forea

Free_Dof=zeros(NFree_Dof,1); %Arxikopoisi tou pinaka twn
eleutherwn komvwn(vathmoi eleytherias agnwstwnn metatopisewn)
Sup_Dof=zeros(NSup_Dof,1); %Arxikopoisi tou pinaka twn
desmeumenwn komvwn(vathmoi eleytherias gnwstwnn metatopisewn)
```

```
Sup_Dof_ord=zeros(NSup_Dof,1); %pinakas twn desmeumenwn
vathmwn eleutherias se seira
Ds_ord=zeros(NSup_Dof,1); %Arxikopoisi tou pinaka gia gnwstes
epikomvies metatopiseis
Disp=zeros(total_dof,1); %telikos pinakas gia topothetisi twn
gnwstwn metatopisewn

%Gnwstes epikomvies metatopiseis - Desmeumenoi vathmoi
for i=1:NSup_Dof
    Sup_Dof(i)= Ndof*(SUPPORTS(i,1)-1)+SUPPORTS(i,2);
%Dimiourgia tou pinaka twn B.E. gia kathe stoixio
    Disp(Sup_Dof(i))=SUPPORTS(i,3);
%Topothetisi twn gnwstwn metatopisewn ston teliko pinaka
    icount=1;
    for j=1:NSup_Dof
        if Sup_Dof(i)>Sup_Dof(j)
            icount=icount+1;
        end
    end
    Sup_Dof_ord(icount)=Sup_Dof(i);
    Ds_ord(icount)=SUPPORTS(i,3);    %Gnwstes epikomvies
metatopiseis se seira
end

clear SUPPORTS LOADS

%Ypologismos vathmwn eleutherias stous eleutherous komvous

icount=0;
for i=1:total_dof
    for j=1:NSup_Dof;
        icheck=(i==Sup_Dof(j));
        if icheck==1;
            break;
        end
    end
    if icheck==0;
        icount=icount+1;
        Free_Dof(icount)=i;
    end
end

%BHMA 4 - MORFOSI twn Kff, Kfs, Ksf, Kss - EPILISI

%metatopiseis twn eleutherwn vathmwn tou forea
Df=inv(Kwall(Free_Dof,Free_Dof))*(Qwall(Free_Dof)-
Kwall(Free_Dof,Sup_Dof)*Ds_ord);


clear  Qwall Kwall
```

```
%topothetisi twn metatopisewn eleutherwn vathmwn sto sinoliko
pinaka Disp
for i=1:NFree_Dof
    Disp(Free_Dof(i))=Df(i);
end

clear Free_Dof Sup_Dof Sup_Dof_ord Ds_ord Df

%BHMA 5 - YPOLOGISMOS METATOPISEWN KAI TASEWN STO ESWTERIKO
TWN PEPERASMENWN STOIXEIWN

BEw=[connectivity]*3-2; %Bathmoi eleutherias ana komvo ston w
aksonna (di8isi)
BEx=[connectivity]*3-1; %Bathmoi eleutherias ana komvo ston x
aksonna
BEy=[connectivity]*3; %Bathmoi eleutherias ana komvo ston y
aksonna

Xc=zeros(Nel,1);
Yc=zeros(Nel,1);
uc=zeros(Nel,1);
vc=zeros(Nel,1);
wc=zeros(Nel,1);
sx=zeros(Nel,1);
sy=zeros(Nel,1);
txy=zeros(Nel,1);
Mx=zeros(Nel,1);
My=zeros(Nel,1);
Myx=zeros(Nel,1);
Mxy=zeros(Nel,1);
Qx=zeros(Nel,1);
Qy=zeros(Nel,1);

for i=1:Nel
    %BATHMOI ELEYTHERIAS
    BEx1(i)=BEx(i,1); BEx2(i)=BEx(i,2); BEx3(i)=BEx(i,3);
BEx4(i)=BEx(i,4); %Bathmoi eleutherias komvwn 1,2,3 kai 4 stin
dieuthinsi x
    BEy1(i)=BEy(i,1); BEy2(i)=BEy(i,2); BEy3(i)=BEy(i,3);
BEy4(i)=BEy(i,4); %Bathmoi eleutherias komvwn 1,2,3 kai 4 stin
dieuthinsi y
    BEw1(i)=BEw(i,1); BEw2(i)=BEw(i,2); BEw3(i)=BEw(i,3);
BEw4(i)=BEw(i,4); %Bathmoi eleutherias komvwn 1,2,3 kai 4 stin
dieuthinsi w


    %KENTRO BAROUS
    Xc(i)=(x1(i)+x2(i)+x3(i)+x4(i))/4;   %Kentro varous sti
dieuthinsi x
    Yc(i)=(y1(i)+y2(i)+y3(i)+y4(i))/4;   %Kentro varous sti
dieuthinsi y
```

```
    %METAKINISEIS K.B.
    uc(i)=(1/4)*(Disp(BEx1(i))
+Disp(BEx2(i))+Disp(BEx3(i))+Disp(BEx4(i)));    % Ypologismos
tis metakinisis tou kentrou varous kata x
    vc(i)=(1/4)*(Disp(BEy1(i))
+Disp(BEy2(i))+Disp(BEy3(i))+Disp(BEy4(i)));    % Ypologismos
tis metakinisis tou kentrou varous kata y
    wc(i)=(1/4)*(Disp(BEw1(i))
+Disp(BEw2(i))+Disp(BEw3(i))+Disp(BEw4(i)));    % Ypologismos
tis metakinisis tou kentrou varous kata w


    %TASEIS K.B.
    x=0;
    y=0;

    b = b41(i)/2;
    a = a21(i)/2;

    ddx =[-((b - y) * (-a * b ^ 2 - 2 * b ^ 2 * x) / a ^ 3 / b
^ 3) / 0.4e1 - ((b - y) * (a - x) / b / a ^ 3) / 0.4e1; -((a -
x) * (b - y) / a ^ 2 / b) / 0.2e1 + ((a + x) * (b - y) / a ^ 2
/ b) / 0.4e1; 0; ((b - y) * (a * b ^ 2 - 2 * b ^ 2 * x) / a ^
3 / b ^ 3) / 0.4e1 - ((b - y) * (a + x) / b / a ^ 3) / 0.4e1;
-((a + x) * (b - y) / a ^ 2 / b) / 0.2e1 + ((a - x) * (b - y)
/ a ^ 2 / b) / 0.4e1; 0; ((b + y) * (a * b ^ 2 - 2 * b ^ 2 *
x) / a ^ 3 / b ^ 3) / 0.4e1 - ((b + y) * (a + x) / b / a ^ 3)
/ 0.4e1; ((a + x) * (b + y) / a ^ 2 / b) / 0.2e1 - ((a - x) *
(b + y) / a ^ 2 / b) / 0.4e1; 0; -((b + y) * (-a * b ^ 2 - 2 *
b ^ 2 * x) / a ^ 3 / b ^ 3) / 0.4e1 - ((b + y) * (a - x) / b /
a ^ 3) / 0.4e1; -((a - x) * (b + y) / a ^ 2 / b) / 0.2e1 + ((a
+ x) * (b + y) / a ^ 2 / b) / 0.4e1; 0;];
    ddy =[-((a - x) * (-a ^ 2 * b - 2 * a ^ 2 * y) / a ^ 3 / b
^ 3) / 0.4e1 - ((b - y) * (a - x) / a / b ^ 3) / 0.4e1; 0; -
((b - y) * (a - x) / a / b ^ 2) / 0.2e1 + ((b + y) * (a - x) /
a / b ^ 2) / 0.4e1; -((a + x) * (-a ^ 2 * b - 2 * a ^ 2 * y) /
a ^ 3 / b ^ 3) / 0.4e1 - ((b - y) * (a + x) / a / b ^ 3) /
0.4e1; 0; -((b - y) * (a + x) / a / b ^ 2) / 0.2e1 + ((b + y)
* (a + x) / a / b ^ 2) / 0.4e1; ((a + x) * (a ^ 2 * b - 2 * a
^ 2 * y) / a ^ 3 / b ^ 3) / 0.4e1 - ((b + y) * (a + x) / a / b
^ 3) / 0.4e1; 0; ((b + y) * (a + x) / a / b ^ 2) / 0.2e1 - ((b
- y) * (a + x) / a / b ^ 2) / 0.4e1; ((a - x) * (a ^ 2 * b - 2
* a ^ 2 * y) / a ^ 3 / b ^ 3) / 0.4e1 - ((b + y) * (a - x) / a
/ b ^ 3) / 0.4e1; 0; -((b + y) * (a - x) / a / b ^ 2) / 0.2e1
+ ((b - y) * (a - x) / a / b ^ 2) / 0.4e1;];
    ddxy= [((2 * a ^ 2 * b ^ 2 - a ^ 2 * b * y - a ^ 2 * y ^ 2
- a * b ^ 2 * x - b ^ 2 * x ^ 2) / a ^ 3 / b ^ 3) / 0.8e1 -
((b - y) * (-a ^ 2 * b - 2 * a ^ 2 * y) / a ^ 3 / b ^ 3) /
0.8e1 - ((a - x) * (-a * b ^ 2 - 2 * b ^ 2 * x) / a ^ 3 / b ^
3) / 0.8e1; -((a - x) ^ 2 / a ^ 2 / b) / 0.8e1 + ((a + x) * (a
```

```
- x) / a ^ 2 / b) / 0.4e1; -((b - y) ^ 2 / a / b ^ 2) / 0.8e1
+ ((b + y) * (b - y) / a / b ^ 2) / 0.4e1; -((2 * a ^ 2 * b ^
2 - a ^ 2 * b * y - a ^ 2 * y ^ 2 + a * b ^ 2 * x - b ^ 2 * x
^ 2) / a ^ 3 / b ^ 3) / 0.8e1 + ((b - y) * (-a ^ 2 * b - 2 * a
^ 2 * y) / a ^ 3 / b ^ 3) / 0.8e1 - ((a + x) * (a * b ^ 2 - 2
* b ^ 2 * x) / a ^ 3 / b ^ 3) / 0.8e1; ((a + x) ^ 2 / a ^ 2 /
b) / 0.8e1 - ((a + x) * (a - x) / a ^ 2 / b) / 0.4e1; ((b - y)
^ 2 / a / b ^ 2) / 0.8e1 - ((b + y) * (b - y) / a / b ^ 2) /
0.4e1; ((2 * a ^ 2 * b ^ 2 + a ^ 2 * b * y - a ^ 2 * y ^ 2 + a
* b ^ 2 * x - b ^ 2 * x ^ 2) / a ^ 3 / b ^ 3) / 0.8e1 + ((b +
y) * (a ^ 2 * b - 2 * a ^ 2 * y) / a ^ 3 / b ^ 3) / 0.8e1 +
((a + x) * (a * b ^ 2 - 2 * b ^ 2 * x) / a ^ 3 / b ^ 3) /
0.8e1; ((a + x) ^ 2 / a ^ 2 / b) / 0.8e1 - ((a + x) * (a - x)
/ a ^ 2 / b) / 0.4e1; ((b + y) ^ 2 / a / b ^ 2) / 0.8e1 - ((b
+ y) * (b - y) / a / b ^ 2) / 0.4e1; -((2 * a ^ 2 * b ^ 2 + a
^ 2 * b * y - a ^ 2 * y ^ 2 - a * b ^ 2 * x - b ^ 2 * x ^ 2) /
a ^ 3 / b ^ 3) / 0.8e1 - ((b + y) * (a ^ 2 * b - 2 * a ^ 2 *
y) / a ^ 3 / b ^ 3) / 0.8e1 + ((a - x) * (-a * b ^ 2 - 2 * b ^
2 * x) / a ^ 3 / b ^ 3) / 0.8e1; ((a - x) ^ 2 / a ^ 2 / b) /
0.8e1 - ((a + x) * (a - x) / a ^ 2 / b) / 0.4e1; ((b + y) ^ 2
/ a / b ^ 2) / 0.8e1 - ((b + y) * (b - y) / a / b ^ 2) /
0.4e1;];

    dddx =[0.3e1 / 0.4e1 * (b - y) / b / a ^ 3; 0.3e1 / 0.4e1
* (b - y) / a ^ 2 / b; 0; -0.3e1 / 0.4e1 * (b - y) / b / a ^
3; -0.3e1 / 0.4e1 * (b - y) / a ^ 2 / b; 0; -0.3e1 / 0.4e1 *
(b + y) / b / a ^ 3; 0.3e1 / 0.4e1 * (b + y) / a ^ 2 / b; 0;
0.3e1 / 0.4e1 * (b + y) / b / a ^ 3; 0.3e1 / 0.4e1 * (b + y) /
a ^ 2 / b; 0;];
    dddy = [0.3e1 / 0.4e1 * (a - x) / a / b ^ 3; 0; 0.3e1 /
0.4e1 * (a - x) / a / b ^ 2; 0.3e1 / 0.4e1 * (a + x) / a / b ^
3; 0; 0.3e1 / 0.4e1 * (a + x) / a / b ^ 2; -0.3e1 / 0.4e1 * (a
+ x) / a / b ^ 3; 0; 0.3e1 / 0.4e1 * (a + x) / a / b ^ 2; -
0.3e1 / 0.4e1 * (a - x) / a / b ^ 3; 0; -0.3e1 / 0.4e1 * (a -
x) / a / b ^ 2;];
    dddxxy = [((-a * b ^ 2 - 2 * b ^ 2 * x) / a ^ 3 / b ^ 3) /
0.4e1 + ((a - x) / b / a ^ 3) / 0.4e1; ((a - x) / a ^ 2 / b) /
0.2e1 - ((a + x) / a ^ 2 / b) / 0.4e1; 0; -((a * b ^ 2 - 2 * b
^ 2 * x) / a ^ 3 / b ^ 3) / 0.4e1 + ((a + x) / b / a ^ 3) /
0.4e1; ((a + x) / a ^ 2 / b) / 0.2e1 - ((a - x) / a ^ 2 / b) /
0.4e1; 0; ((a * b ^ 2 - 2 * b ^ 2 * x) / a ^ 3 / b ^ 3) /
0.4e1 - ((a + x) / b / a ^ 3) / 0.4e1; ((a + x) / a ^ 2 / b) /
0.2e1 - ((a - x) / a ^ 2 / b) / 0.4e1; 0; -((-a * b ^ 2 - 2 *
b ^ 2 * x) / a ^ 3 / b ^ 3) / 0.4e1 - ((a - x) / b / a ^ 3) /
0.4e1; -((a - x) / a ^ 2 / b) / 0.2e1 + ((a + x) / a ^ 2 / b)
/ 0.4e1; 0;];
    dddyyx = [((-a ^ 2 * b - 2 * a ^ 2 * y) / a ^ 3 / b ^ 3) /
0.4e1 + ((b - y) / a / b ^ 3) / 0.4e1; 0; ((b - y) / a / b ^
2) / 0.2e1 - ((b + y) / a / b ^ 2) / 0.4e1; -((-a ^ 2 * b - 2
* a ^ 2 * y) / a ^ 3 / b ^ 3) / 0.4e1 - ((b - y) / a / b ^ 3)
/ 0.4e1; 0; -((b - y) / a / b ^ 2) / 0.2e1 + ((b + y) / a / b
```

```
^ 2) / 0.4e1; ((a ^ 2 * b - 2 * a ^ 2 * y) / a ^ 3 / b ^ 3) /
0.4e1 - ((b + y) / a / b ^ 3) / 0.4e1; 0; ((b + y) / a / b ^
2) / 0.2e1 - ((b - y) / a / b ^ 2) / 0.4e1; -((a ^ 2 * b - 2 *
a ^ 2 * y) / a ^ 3 / b ^ 3) / 0.4e1 + ((b + y) / a / b ^ 3) /
0.4e1; 0; ((b + y) / a / b ^ 2) / 0.2e1 - ((b - y) / a / b ^
2) / 0.4e1;];

    z=h/2;

    %Katastatikes eksiswseis tou ulikou - Ypologismoi
    sx(i)=(-z)*E1/(1-nu^2)*(Disp(BEx1(i))
+Disp(BEx2(i))+Disp(BEx3(i))+Disp(BEx4(i))+Disp(BEy1(i))
+Disp(BEy2(i))+Disp(BEy3(i))+Disp(BEy4(i))+Disp(BEw1(i))
+Disp(BEw2(i))+Disp(BEw3(i))+Disp(BEw4(i)))*(
sum(ddx)+nu*sum(ddy));
    sy(i)=(-z)*E1/(1-nu^2)*(Disp(BEx1(i))
+Disp(BEx2(i))+Disp(BEx3(i))+Disp(BEx4(i))+Disp(BEy1(i))
+Disp(BEy2(i))+Disp(BEy3(i))+Disp(BEy4(i))+Disp(BEw1(i))
+Disp(BEw2(i))+Disp(BEw3(i))+Disp(BEw4(i)))*(
nu*sum(ddx)+sum(ddy));
    txy(i)=-2*z*G12*(Disp(BEx1(i))
+Disp(BEx2(i))+Disp(BEx3(i))+Disp(BEx4(i))+Disp(BEy1(i))
+Disp(BEy2(i))+Disp(BEy3(i))+Disp(BEy4(i))+Disp(BEw1(i))
+Disp(BEw2(i))+Disp(BEw3(i))+Disp(BEw4(i)))*(sum(ddxy));

    Mx(i)=-d*(Disp(BEx1(i))
+Disp(BEx2(i))+Disp(BEx3(i))+Disp(BEx4(i))+Disp(BEy1(i))
+Disp(BEy2(i))+Disp(BEy3(i))+Disp(BEy4(i))+Disp(BEw1(i))
+Disp(BEw2(i))+Disp(BEw3(i))+Disp(BEw4(i)))*(
sum(ddx)+nu*sum(ddy));
    My(i)=-d*(Disp(BEx1(i))
+Disp(BEx2(i))+Disp(BEx3(i))+Disp(BEx4(i))+Disp(BEy1(i))
+Disp(BEy2(i))+Disp(BEy3(i))+Disp(BEy4(i))+Disp(BEw1(i))
+Disp(BEw2(i))+Disp(BEw3(i))+Disp(BEw4(i)))*(
nu*sum(ddx)+sum(ddy));
    Myx(i)=-d*(1-nu)*(Disp(BEx1(i))
+Disp(BEx2(i))+Disp(BEx3(i))+Disp(BEx4(i))+Disp(BEy1(i))
+Disp(BEy2(i))+Disp(BEy3(i))+Disp(BEy4(i))+Disp(BEw1(i))
+Disp(BEw2(i))+Disp(BEw3(i))+Disp(BEw4(i)))*(sum(ddxy));
    Mxy(i)=-Myx(i);
    Qx(i)=-d*(Disp(BEx1(i))
+Disp(BEx2(i))+Disp(BEx3(i))+Disp(BEx4(i))+Disp(BEy1(i))
+Disp(BEy2(i))+Disp(BEy3(i))+Disp(BEy4(i))+Disp(BEw1(i))
+Disp(BEw2(i))+Disp(BEw3(i))+Disp(BEw4(i)))*(sum(dddx)+sum(ddd
yyx));
    Qy(i)=-d*(Disp(BEx1(i))
+Disp(BEx2(i))+Disp(BEx3(i))+Disp(BEx4(i))+Disp(BEy1(i))
+Disp(BEy2(i))+Disp(BEy3(i))+Disp(BEy4(i))+Disp(BEw1(i))
+Disp(BEw2(i))+Disp(BEw3(i))+Disp(BEw4(i)))*(sum(dddy)+sum(ddd
xxy));
```

```
    clear a b

end

clear connectivity Ae a21 a13 a32 b12 b23 b31 BEx BEy BEx1
BEx2 BEx3 BEy1 BEy2 BEy3 x1 x2 x3 y1 y2 y3

%BHMA 6- EKSGOGI APOTEKESMATWN

Dispodd = Disp(1:3:end); %Diaxorismos twn  vathmwn eleutherias
tou [Disp]
Dispeven = Disp(2:3:end); %Diaxorismos twn  vathmwn
eleutherias tou [Disp]
Dispedd = Disp(3:3:end); %Diaxorismos twn  vathmwn eleutherias
tou [Disp]

clear   Disp

OutputData = eis;

%Topothetisi twn pinakwn sto antistoixo keli tou Excel_output
writematrix(coord,OutputData,'Sheet',2,'Range','E6')
writematrix(Dispodd,OutputData,'Sheet',2,'Range','I6')
writematrix(Dispeven,OutputData,'Sheet',2,'Range','G6')
writematrix(Dispedd,OutputData,'Sheet',2,'Range','H6')
writematrix(Xc,OutputData,'Sheet',3,'Range','D5')
writematrix(Yc,OutputData,'Sheet',3,'Range','E5')
writematrix(uc,OutputData,'Sheet',3,'Range','F5')
writematrix(vc,OutputData,'Sheet',3,'Range','G5')
writematrix(wc,OutputData,'Sheet',3,'Range','H5')
writematrix(sx,OutputData,'Sheet',3,'Range','I5')
writematrix(sy,OutputData,'Sheet',3,'Range','J5')
writematrix(txy,OutputData,'Sheet',3,'Range','K5')
writematrix(Mx,OutputData,'Sheet',3,'Range','L5')
writematrix(My,OutputData,'Sheet',3,'Range','M5')
writematrix(Myx,OutputData,'Sheet',3,'Range','N5')
writematrix(Mxy,OutputData,'Sheet',3,'Range','O5')
writematrix(Qx,OutputData,'Sheet',3,'Range','P5')
writematrix(Qy,OutputData,'Sheet',3,'Range','Q5')

% Plate Discretized into Triangular Plate Elements
for m=1:Nnode

x(m) =coord(m,1) ;
y(m) =coord(m,2) ;
end
z = Dispodd ;

xlin = linspace(min(x),max(x),33);
ylin = linspace(min(y),max(y),33);
[X,Y] = meshgrid(xlin,ylin);
```

```
Z = griddata(x,y,z,X,Y,'cubic');

mesh(X,Y,Z) %interpolated
% surf(X,Y,Z) %interpolated
axis tight; hold on
set(gca,'DataAspectRatio',[1 1 0.0001],...
        'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1],...
        'ZLim',[-0.00001 0.00005])
set(gca,'XDir','rev','YDir','rev','ZDir','rev')
plot3(x,y,z,'.','MarkerSize',15) %nonuniform
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('deflection w')
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Σαπουντζάκης, Ευαγ., «Θεωρία Πλακών», ΕΜΠ, Αθήνα, 2005.
2. Stephen Timoshenko, «The Theory of Plates and Shells», TATA McGraw- Hill, Stanford, 2017
3. J.N. Reddy, «Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells», Taylor & Francis Groyp, Texas, 2006
4. Τ. Κ. Μακάριος & Γ. Δ. Μανώλης, « Επιφανειακοί φορείς δίσκοι πλάκες και κελύφη», Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 2018
5. K. Chandrashekhara, «Theory of plates», Orient Blackswan, ,2000
6. ΓΚΟΤΣΗΣ Κ. ΠΑΣΧΑΛΗΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ, Απρίλιος 2013
7. Κόκκινος Τριαντ.- Φίλης, «Ανάλυση Τοιχοποιίας με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων», Αθήνα ,2019
8. Rudolph Szilard, «Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods», Wiley, New Jersey,2004
9. Maria Radwańska , Anna Stankiewicz , Adam Wosatko , Jerzy Pamin ,«Plate and Shell Structures: Selected Analytical and Finite Element Solutions», Wiley, Cracow, 2017
10. Reinhold Kienzler, Ingrid Ott, Holm Altenbach, «Theories of Plates and Shells», Springer Berlin, Heidelberg,2004

11. ΧΡΙΣΤΟΦΟΡΟΣ Γ. ΠΡΟΒΑΤΙΔΗΣ, «ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ», Τζιόλα, Αθήνα, 2015
12. Παπαδρακάκης Εμμανουήλ, «Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων», Παπασωτηρίου, Αθήνα, 2001
13. Daryl L. Logan, «Εισαγωγή στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων - 6η έκδοση», Κλειδάριθμος, 2021
14. Αβραμίδης, Ιωάννης Ε. , Αθανατοπούλου-Κυριακού, Ασημίνα , Μορφίδης, Κων/νος, «Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων», Σοφία, 2016