



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ**

**ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**“ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ  
ΟΜΟΓΕΝΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΕ ΥΛΙΚΑ ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΗΣ  
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟ ΤΩΝ  
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΟΥΣ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ”**

Νικόλαος Αγγελόπουλος

A.M. 04338

Επιβλέπων:

Δημήτριος Σάββας, Διδάσκων ΠΔ407/1980

ΑΘΗΝΑ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2023



**UNIVERSITY OF WEST ATTICA**  
**SCHOOL OF ENGINEERING**  
**DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING**

## **DIPLOMA THESIS**

**“COMPUTATIONAL HOMOGENIZATION OF  
ADDITIVE MANUFACTURING MATERIALS FOR  
THE DETERMINATION OF THEIR EFFECTIVE  
MECHANICAL PROPERTIES”**

Nikolaos Aggelopoulos

Registration Number: 04338

Supervisor:

Dimitrios Savvas

ATHENS

FEBRUARY 2023



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**“ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΟΜΟΓΕΝΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΕ ΥΛΙΚΑ  
ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟ ΤΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΥΣ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ”**

**Μέλη Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής συμπεριλαμβανομένου και του  
Επιβλέποντα**

Η διπλωματική εργασία εξετάστηκε επιτυχώς από την κάτωθι Εξεταστική Επιτροπή:

| <b>A/A</b> | <b>ΟΝΟΜΑΕΠΩΝΥΜΟ</b>   | <b>ΒΑΘΜΙΑΑ/ΙΔΙΟΤΗΤΑ/ΤΜΗΜΑ</b>   | <b>ΨΗΦΙΑΚΗΥΠΟΓΡΑΦΗ</b> |
|------------|-----------------------|---|------------------------|
| 1          | Γεώργιος Νικολαΐδης   | Καθηγητής/<br>Μέλος εξεταστικής επιτροπής/<br>Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών                           |                        |
| 2          | Κωνσταντίνος Στεργίου | Καθηγητής/<br>Μέλος εξεταστικής επιτροπής/<br>Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών                           |                        |
| 3          | Δημήτριος Σάββας      | Διδάσκων ΠΔ 407/1980/<br>Μέλος εξεταστικής επιτροπής<br>(Επιβλέπων)/<br>Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών |                        |

## ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο κάτωθι υπογεγραμμένος Νικόλαος Αγγελόπουλος του Κωνσταντίνου, με αριθμό μητρώου 04338 φοιτητής του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής της Σχολής Μηχανικών του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών, δηλώνω υπεύθυνα ότι:

«Είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, οι όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε ακριβώς είτε παραφρασμένες, αναφέρονται στο σύνολό τους, με πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία έχει συγγραφεί από μένα αποκλειστικά και αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου, όσο και του Ιδρύματος.

Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του πτυχίου μου».

Ο Δηλών



## Λίστα συντομογραφιών

|      |                                   |
|------|-----------------------------------|
| CAD  | Σχεδίαση με τη βοήθεια υπολογιστή |
| 3D   | Τρισδιάστατο                      |
| SLA  | Στερεολιθογραφία                  |
| RVE  | Αντιπροσωπευτικός όγκος υλικού    |
| FEM  | Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων    |
| FFF  | Κατασκευή συντηγμένου νήματος     |
| FDM  | Μοντελοποίηση λιωμένης εναπόθεση  |
| DLP  | Ψηφιακή επεξεργασία φωτός         |
| MSLA | Είδος στερεολιθογραφίας           |
| PDEs | Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις      |
| BEM  | Μέθοδος συνοριακών στοιχείων      |
| ABS  | Κοινό θερμοπλαστικό πολυμερές     |

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

|   |    |
|---|----|
| ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....   | 7  |
| ABSTRACT.....   | 8  |
| 1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....   | 10 |
| 2. ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ .....   | 11 |
| 2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΕΚΤΥΠΩΣΗ.....  | 11 |
| 2.2 ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ .....   | 12 |
| 2.2.1 FDM.....  | 12 |
| 2.2.2 SLA.....  | 13 |
| 3. ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΥΛΙΚΟΥ ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΤΙΚΕΣ ΤΗΣ ΜΕΣΟΔΟΜΗΣ ΕΚΤΥΠΩΜΕΝΟΥ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ ..... | 13 |
| 3.1 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΗΟΟΚΕ .....  | 14 |
| 3.2 ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΣΧΕΣΗ ΟΡΘΟΤΡΟΠΟΥ ΥΛΙΚΟΥ .....   | 16 |
| 4. ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ .....   | 18 |
| 4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ .....                                     | 18 |
| 4.2 ΒΑΣΙΚΑ ΒΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....                                     | 19 |
| 4.2 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ .....                                    | 21 |
| 4.2.1 ΕΞΑΕΔΡΙΚΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΚΤΩ ΚΟΜΒΩΝ .....   | 22 |
| 5. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΟΜΟΓΕΝΟΠΟΙΗΣΗΣ.....   | 25 |
| 5. 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....   | 25 |
| 5. 2 ΟΜΟΓΕΝΟΠΟΙΗΣΗ RVE ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΕΚΤΥΠΩΜΕΝΟΥ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ .....                           | 26 |
| 5. 2.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΕΝΕΡΓΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ .....                                | 28 |
| 6. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ .....  | 29 |
| 6.1 ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ .....                                   | 31 |
| 6.2 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΥΛΙΚΟΥ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ .....                                | 38 |
| 7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....  | 42 |
| ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....  | 44 |

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στον κλάδο της παγκόσμιας κατασκευαστικής κοινότητας, η μελέτη και η κατασκευή προϊόντων στηρίζεται στην ταχεία προτυποποίηση. Εξελικτικά, από αυτή την κατασκευαστική γνώση τέθηκαν τα θεμέλια για την ανάπτυξη των τεχνολογιών προσθετικής κατασκευής ή αλλιώς των τεχνολογιών τρισδιάστατης εκτύπωσης αντικειμένων με πολλαπλές εφαρμογές στη σύγχρονη βιομηχανία. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η εύρεση φαινομενολογικών καταστατικών νόμων υλικού που εκφράζουν τη μηχανική συμπεριφορά αντιπροσωπευτικών στοιχείων όγκου της μεσοδομής τρισδιάστατων εκτυπωμένων μηχανολογικών αντικειμένων, μέσω εφαρμογής της μεθόδου υπολογιστικής ομογενοποίησης και ανάλυσης με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων. Η συγκεκριμένη μεθοδολογία μπορεί να προβλέψει, ανάλογα με τη μεσοδομή του αντικειμένου που προκύπτει μεταβάλλοντας τις παραμέτρους εκτύπωσης, ανισοτροπικούς καταστατικούς νόμους υλικού. Συγκεκριμένα στην εργασία διερευνάται η επιρροή της αβεβαιότητας της γεωμετρίας εκτύπωσης καθώς και της αβεβαιότητας των ιδιοτήτων του υλικού εκτύπωσης στις ελαστικές παραμέτρους του καταστατικού τανυστή του τελικού ομογενοποιημένου υλικού. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται καταδεικνύουν την σημαντική επιρροή των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της ίνας εκτύπωσης που μελετήθηκαν, δηλαδή της διαμέτρου της οπής του ακροφυσίου της κεφαλής εκτύπωσης και του πάχους της στρώσης εκτύπωσης στις τελικές ιδιότητες του εκτυπωμένου αντικειμένου. Επίσης, αναδεικνύεται η μεγάλη επιρροή του συντελεστή επικάλυψης μεταξύ των διαδοχικών ιών η οποία καθορίζει την πυκνότητα εκτύπωσης. Ο λόγος που καθορίζει την σημαντική επιρροή της αβεβαιότητας της γεωμετρίας εκτύπωσης στις τελικές μηχανικές ιδιότητες του εκτυπωμένου αντικειμένου είναι η μεταβολή του πορώδους της μεσοδομής του (κατ' όγκο αναλογία των κενών) που επηρεάζεται από τις υπό εξέταση γεωμετρικές παραμέτρους εκτύπωσης. Όσον αφορά την επιρροή της αβεβαιότητας των ιδιοτήτων του υλικού εκτύπωσης εξάγεται το συμπέρασμα ότι η διακύμανση των ιδιοτήτων του τελικού υλικού ταυτίζεται με αυτή του υλικού που χρησιμοποιείται για την τρισδιάστατη εκτύπωση του αντικειμένου. Σημειώνεται ότι τα αποτελέσματα που εξάγονται από την παρούσα εργασία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση με Στοχαστικά Πεπερασμένα Στοιχεία ενεργειακά ισοδύναμων μοντέλων τρισδιάστατα εκτυπωμένων αντικειμένων η μεσοδομή των οποίων αντικαθίσταται από ένα φαινομενολογικό υλικό με ελαστικές παραμέτρους που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο της υπολογιστικής ομογενοποίησης. Το γεγονός αυτό καθιστά υπολογιστικά εφικτή την ανάλυση της μηχανικής συμπεριφοράς μεγάλης κλίμακας κατασκευών που έχουν προέλθει από μεθόδους προσθετικής κατασκευής.

## **ABSTRACT**

In the industry of the global manufacturing community, the design and manufacture of products relies on rapid prototyping. Evolutionarily, from this manufacturing knowledge the foundations were laid for the development of additive manufacturing technologies or otherwise 3D printing technologies with multiple applications in today industry. The goal of this thesis is to find phenomenological constitutive material laws expressing the mechanical behavior of representative volume elements of the mesostructure of 3d printable mechanical parts, using computational homogenization method and finite element analysis. By this procedure anisotropic constitutive laws can be defined based on the behavior of the mesostructure of printed parts. Specifically, in this study the effect of geometric and material uncertainty on the homogenized elastic properties is investigated. In case of geometric uncertainty different geometrical characteristics which affect the section shape of the extruded filaments were investigated including the diameter of the nozzle and the height of the layers. The presented numerical results show a significant influence of these geometrical characteristics on the effective material properties of the printable part. The effect of overlap factor between two subsequent printing lines (printer's density) is also investigated. It is deduced that the change of the porosity of the mesostructure (amount of volume fraction of voids present) is the main reason for the significant effect of the geometric uncertainty on the homogenized elastic properties of the printable part. Regarding the effect of material uncertainty it is deduced that the coefficient of variation of the homogenized elastic properties is as this of the properties of the material used for printing the object. The outcome of the present study can be utilized in the Stochastic Finite Element analysis of surrogate models of large scale 3d printed structures. The computed phenomenological constitutive laws can be assigned to homogeneous models which are used as substitutes to the mesostructure of the printable objects, leading thus to affordable computational analysis.





# 1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένας σημαντικός τομέας προόδου στην επιστήμη της μηχανικής των κατασκευών είναι η ραγδαία ανάπτυξη της τεχνολογίας τρισδιάστατης εκτύπωσης τις τελευταίες δύο δεκαετίες [1]. Η τρισδιάστατη εκτύπωση, γνωστή και ως προσθετική κατασκευή, είναι μια διαδικασία κατά την οποία ένα ψηφιακό αρχείο χρησιμοποιείται για τη δημιουργία ενός τρισδιάστατου στερεού αντικειμένου. Ένα ψηφιακό τρισδιάστατο μοντέλο χωρίζεται σε εκατοντάδες λεπτά στρώματα με τη βοήθεια ενός ειδικού λογισμικού. Κάθε στρώμα αντιστοιχεί στο ακριβές δισδιάστατο σχήμα ενός τμήματος του αντικειμένου. Για παράδειγμα, για την 3D εκτύπωση μιας πυραμίδας, το πρώτο στρώμα (στο κάτω μέρος) θα ήταν ένα τετράγωνο και το τελευταίο στρώμα (στο επάνω μέρος) θα ήταν μια μικροσκοπική κουκκίδα. Αυτή τη διαδικασία τρισδιάστατης εκτύπωσης θα πρέπει να διαβάσει ο τρισδιάστατος εκτυπωτής μέσω ειδικής γλώσσας προγραμματισμού (G-code) για να γνωρίζει ακριβώς πότε και πού να αποθέσει υλικό. Στη διαδικασία της τρισδιάστατης εκτύπωσης, διαδοχικά στρώματα υλικού τοποθετούνται από τον «3D εκτυπωτή» μέχρι να ολοκληρωθεί η δημιουργία αντικειμένων. Με την τρισδιάστατη εκτύπωση, οι χρήστες μπορούν να παράγουν περίπλοκα σχήματα με μικρότερη κατανάλωση υλικού σε σύγκριση με αυτό που απαιτούν οι παραδοσιακές μέθοδοι κατασκευής [2].

Ο ουσιαστικός στόχος της τρισδιάστατης εκτύπωσης αφορά την κατασκευή μερών με πολύ καλή ποιοτική απόδοση και χαμηλό κόστος παραγωγής. Το πρόβλημα όμως της τρισδιάστατης εκτύπωσης είναι ότι οι τελικές ιδιότητες των εκτυπωμένων εξαρτημάτων διαφέρουν από αυτές του υλικού όπου χρησιμοποιήθηκε για την δημιουργία τους. Στην τρισδιάστατη εκτύπωση η δημιουργία του αντικειμένου γίνεται με κατανομή υλικού στρώμα προς στρώμα, αλλά χρησιμοποιούνται διαφορετικοί μέθοδοι για να γίνει αυτό. Αυτό έχει σημαντικές επιπτώσεις στη σύνθεση των εξαρτημάτων που παράγονται από κάθε τύπο τεχνολογίας. Συνεπώς τα εκτυπωμένα μέρη είναι δυνατόν να παρουσιάζουν ανισότροπη μηχανική συμπεριφορά [3].

Στην εργασία δόθηκε έμφαση στην εφαρμογή υπολογιστικής ομογενοποίησης [4] σε υλικά προσθετικής κατασκευής. Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων (FEM) [5] σε αντιπροσωπευτικούς όγκους υλικού (RVE) [6] λαμβάνοντας τις μέσες ιδιότητες οι οποίες μεταφέρονται στον καταστατικό νόμο της μακροδομής και από εκεί προκύπτουν οι ενεργές μηχανικές ιδιότητες του σύνθετου υλικού.

## 2. ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ

### 2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΕΚΤΥΠΩΣΗ

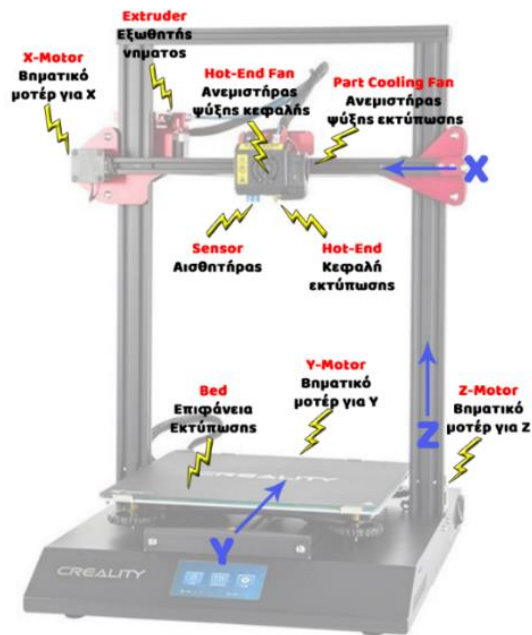
Η τρισδιάστατη εκτύπωση είναι μία διαδικασία κατασκευής τρισδιάστατων αντικειμένων με προσθήκη υλικού σε στρώσεις αντλώντας πληροφορίες από ένα ψηφιακό αρχείο. Η δημιουργία ενός τρισδιάστατου εκτυπωμένου αρχείου επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας προσθετική διαδικασία κατασκευής σε πολύ μικρά στρώματα. Σε μία εκτύπωση προσθετικής διαδικασίας το αντικείμενο δημιουργείται σε διαδοχικές στρώσεις εναπόθεσης υλικού έως ότου σχηματιστεί το τελικό αντικείμενο που θέλουμε να εκτυπώσουμε. Αλλιώς αυτή η διαδικασία παραγωγής που έχει αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως «Additive manufacturing», λόγω του γεγονότος ότι αντί να αφαιρείται υλικό για τη δημιουργία ενός εξαρτήματος, προστίθεται υλικό σε διαδοχικά μοτίβα για την δημιουργία του επιθυμητού σχήματος. Οι 3D Εκτυπωτές - 3D Printers χρησιμοποιούνται για την τρισδιάστατη εκτύπωση (3D printing) και την κατασκευή τριών διαστάσεων στερεών αντικειμένων, που θα προέλθουν από ένα ψηφιακό αρχείο

Κύριοι τομείς χρήσης:

- Προτυποποίηση
- Εξειδικευμένα εξαρτήματα – αεροδιαστημική, στρατιωτικά είδη , βιοϊατρική μηχανική, οδοντιατρική
- Χόμπι και οικιακή χρήση
- Μελλοντικές εφαρμογές- ιατρική (τεχνητά μέρη σώματος), κτίρια και αυτοκίνητα

Το 3D Printing χρησιμοποιεί λογισμικό που διαιρεί το τρισδιάστατο μοντέλο σε στρώματα (πάχος 0,01 mm ή λιγότερο στις περισσότερες περιπτώσεις). Στη συνέχεια, κάθε στρώμα εκτυπώνεται στην πλάκα κατασκευής από τον εκτυπωτή. Μόλις το μοτίβο εκτύπωσης ενός στρώματος ολοκληρωθεί , η πλάκα κατασκευής πάει πιο χαμηλά και η επόμενη στρώση προστίθεται πάνω από την προηγούμενη. Τα βασικά στοιχεία λειτουργίας ενός FDM εκτυπωτή παρουσιάζονται στην Εικόνα 2.1.1.

Στις συμβατικές τεχνικές παραγωγής ενός στοιχείου η διαδικασία περιλαμβάνει την αφαίρεση υλικού από ένα προσχηματισμένο μπλοκ υλικού. Διεργασίες όπως η τόννευση, η διάτρηση, το φρεζάρισμα κτλ. αποτελούν τις πιο κοινές συμβατικές κατεργασίες με αφαίρεση υλικού. Αυτοί οι τύποι διαδικασίας δημιουργούν πολλά προβλήματα αφού το υλικό που αποκόπτεται γενικά δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οτιδήποτε άλλο και απλώς αποστέλλεται ως σκραπ. Η τρισδιάστατη εκτύπωση εξαλείφει τέτοια προβλήματα αφού το υλικό τοποθετείται στη θέση που χρειάζεται μόνο.



Εικόνα 2.1.1 Τα βασικά στοιχεία λειτουργίας ενός FDM εκτυπωτή.

## 2.2 ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ

Οι 3D Εκτυπωτές - 3D Printers, χρησιμοποιούνται για την τρισδιάστατη εκτύπωση (3D printing) και την κατασκευή τριών διαστάσεων στερεών αντικειμένων, που θα προέλθουν από ένα ψηφιακό αρχείο. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι τρισδιάστατης εκτύπωσης αντικειμένων. Οι κορυφαίες τεχνολογίες τρισδιάστατης εκτύπωσης που είναι διαθέσιμες σήμερα είναι:

- FFF (κατασκευή συντηγμένου νήματος) ή FDM (μοντελοποίηση λιωμένης εναπόθεσης), που χρησιμοποιούν καρούλια νήματος [7].
- SLA (στερεολιθογραφία), μια τεχνολογία που στερεοποιεί μια φωτοευαίσθητη ρητίνη [8].

### 2.2.1 FDM

Ο εκτυπωτής FDM λειτουργεί με την εναπόθεση λιωμένου υλικού νήματος πάνω από μια πλατφόρμα κατασκευής στρώμα προς στρώμα μέχρι να βγει ένα ολοκληρωμένο εξάρτημα. Το FDM χρησιμοποιεί αρχεία ψηφιακής σχεδίασης που αποστέλλονται στο ίδιο το μηχάνημα και τα μεταφράζει σε φυσικές διαστάσεις. Τα υλικά που χρησιμοποιούνται στην εκτύπωση FDM περιλαμβάνουν πολυμερή όπως ABS, PLA, PETG και PEI, τα οποία η μηχανή τροφοδοτεί ως νήματα μέσω ενός θερμαινόμενου ακροφυσίου.

## 2.2.2 SLA

Η στερεολιθογραφία (SLA) είναι μια τεχνική τρισδιάστατης εκτύπωσης ρητίνης που χρησιμοποιεί λέιζερ ή μια πηγή φωτός για τη στερεοποίηση της φωτοευαίσθητης ρητίνης. Η διαδικασία στερεοποίησης είναι γνωστή ως σκλήρυνση και μπορεί να συμβεί με διάφορους τρόπους:

- Laser SLA: ένα λέιζερ σκληραίνει τη ρητίνη σημείο προς σημείο, ένα στρώμα μετά το άλλο.
- DLP (Digital Light Processing): μια συσκευή προβάλλει φως που ανακατευθύνεται με ακρίβεια προς τη ρητίνη χάρη σε ένα σύστημα καθρέφτη.
- MSLA (Masked Stereolithography): μια συσκευή που προβάλλει φως επιλεκτικά καλυμμένο από μια οθόνη LCD, ως στερεολιθογραφία LCD.

Οι τρισδιάστατοι εκτυπωτές ρητίνης είναι σε θέση να εκτυπώνουν λεπτότερα στρώματα από τους εκτυπωτές 3DFFF, προσφέροντας πολύ υψηλότερο επίπεδο λεπτομέρειας που αναζητούν, για παράδειγμα, οι κοσμηματοπώλες ή οι οδοντίατροι.

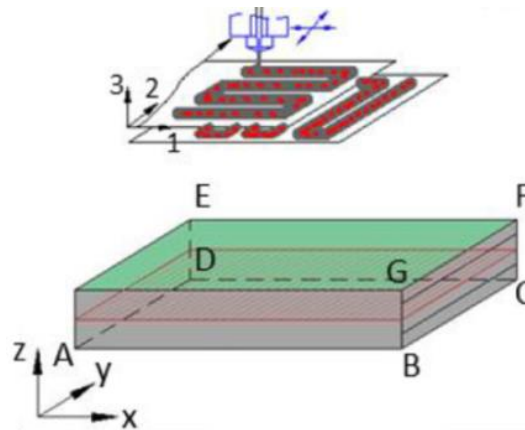
Αυτές οι τεχνολογίες τρισδιάστατης εκτύπωσης έχουν η καθεμία τα δικά της πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα και μπορούν να προσαρμοστούν σε διαφορετικές περιπτώσεις χρήσης και βιομηχανίες. Ανάλογα με το είδος της τεχνολογίας που χρησιμοποιείται κάθε φορά αλλάζουν και οι μηχανικές ιδιότητες του υλικού.

## 3. ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΥΛΙΚΟΥ ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΤΙΚΕΣ ΤΗΣ ΜΕΣΟΔΟΜΗΣ ΕΚΤΥΠΩΜΕΝΟΥ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ

Μεταξύ των πολλών πλεονεκτημάτων της, η μέθοδος προσθετικής κατασκευής προσφέρει σημαντική ελευθερία στο σχεδιασμό εκτύπωσης τρισδιάστατων εξαρτημάτων. Ωστόσο, η ανισοτροπική συμπεριφορά του εκτυπωμένου αντικειμένου που εμφανίζεται λόγω της μορφολογίας της μεσοδομής του παραμένει πρωταρχικό πρόβλημα. Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα διερευνηθεί η επιρροή διαφόρων παραμέτρων της εκτύπωσης στη συμπεριφορά του υλικού του εκτυπωμένου αντικειμένου η οποία θα προσομοιωθεί με κατάλληλες καταστατικές σχέσεις. Συγκεκριμένα θα διερευνηθεί η εξάρτηση των μηχανικών ιδιοτήτων του από τον προσανατολισμό της ίνας εκτύπωσης σε κάθε επίπεδο, από την ακολουθία στοίβαξης των στρωμάτων της κατασκευής και από την τυπική απόκλιση του μέτρου ελαστικότητας του υλικού που χρησιμοποιείται για την εκτύπωση.

Ένα αντικείμενο προς εκτύπωση μπορεί να προσανατολιστεί στην τράπεζα του εκτυπωτή προς οποιαδήποτε επιθυμητή κατεύθυνση και ανάλογα την επιλογή της διάταξης του

αντικειμένου καθορίζεται διαφορετικός κώδικας για την καθοδήγηση της κεφαλής εκτύπωσης. Στην παρούσα μελέτη ο προσανατολισμός των ινών διαφέρει ανά στρωματικό επίπεδο υλικού από οριζόντια σε κάθετη διάταξη με εναλλαγή . Οι ακολουθίες στοίβαξης υλικού που μελετώνται στην εργασία είναι 0/90/0 και 0/0/0 μοίρες. Στην Εικόνα 3.1 παρουσιάζεται ο τρόπος εναπόθεσης λιωμένου υλικού για δύο στρωματικά επίπεδα του εκτυπωμένου αντικειμένου για την περίπτωση 0/90 μοίρες.



**Εικόνα 3.1:** Τρόπος εναπόθεσης λιωμένου υλικού ανά στρωματικό επίπεδο - περίπτωση 0/90 μοίρες.

Ο χαρακτηρισμός της καταστατικής συμπεριφοράς του εκτυπωμένου αντικειμένου μπορεί να γίνει με βάση την κλασική θεωρία πολύστρωτου σύνθετου υλικού ή τη θεωρία της ομογενοποίησης. Η συμπεριφορά του υλικού κάθε στρώσης του εκτυπωμένου αντικειμένου είναι ορθοτροπική ωστόσο στην πράξη η στοχαστική επίδραση των παραμέτρων εκτύπωσης έχει ως αποτέλεσμα την ανισοτροπική φύση του εκτυπωμένου τμήματος. Μια τέτοια υλική συμπεριφορά οφείλεται κυρίως στον προσανατολισμό των ινών και την εναπόθεση στρωμάτων κατά την διάρκεια της εκτύπωσης. Η κατεύθυνση εκτύπωσης, το πάχος του στρώματος και ο προσανατολισμός του μοντέλου επηρεάζουν την τελική μηχανική συμπεριφορά των εκτυπωμένων αντικειμένων [9-12].

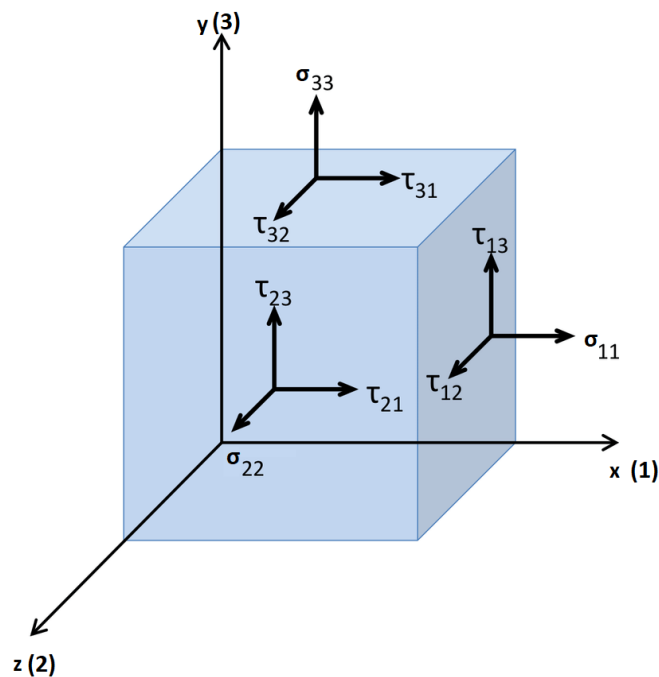
### 3.1 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΗΟΟΚΕ

Η θεωρία ελαστικότητας είναι κλάδος της μηχανικής και των μαθηματικών που αφορά στη μοντελοποίηση της συμπεριφοράς στερεού σώματος, υπό την επίδραση εξωτερικών δράσεων (δυνάμεων και ροπών, μετατοπίσεων, θερμοκρασιακών διαφορών) όταν αυτό θεωρηθεί ως συνεχές, ομογενές, ισότροπο και ελαστικό. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή για την επίλυση ενός φορέα θα πρέπει να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

- Συνθήκη ισορροπίας που εξασφαλίζει την ισορροπία μεταξύ των επιβαλλόμενων φορτίων και των αναπτυσσόμενων μεγεθών έντασης.

- Συνθήκη συμβιβαστού που εξασφαλίζει τη συμβατότητα των μετακινήσεων του φορέα σε ορισμένα σημεία λαμβάνοντας υπόψη τις επιβαλλόμενες συνοριακές συνθήκες.
- Συνθήκη υλικής συμπεριφοράς (ή καταστατικός νόμος υλικού) για την σύνδεση των τροπών με τις τάσεις σε ορισμένο σημείο του φορέα.

Ο νόμος του Hooke περιγράφει την ελαστική συμπεριφορά ενός υλικού σώματος, όταν αυτό παραμορφώνεται υπό την επίδραση ενός συστήματος εξωτερικών δυνάμεων. Η εντατική κατάσταση που επικρατεί σε ένα υλικό σημείο του παραμορφώσιμου σώματος μπορεί να εκφραστεί στο χώρο των τριών διαστάσεων με τις ακόλουθες εννέα συνιστώσες τάσεων  $\sigma_{ij}$  όπου  $i, j = 1, 2, 3$  (Εικόνα 3.1.1). Σύμφωνα με τη σύμβαση δεικτών, οι συνιστώσες  $\sigma_{ij}$  για  $i=j$  παριστάνουν τις ορθές τάσεις ενώ οι συνιστώσες  $\sigma_{ij}$  για  $i \neq j$  παριστάνουν τις διατμητικές τάσεις που συμβολίζονται συνήθως με  $\tau_{ij}$ . Ο πρώτος δείκτης αφορά την κατεύθυνση του κάθετου διανύσματος της επιφάνειας όπου δρα η τασική συνιστώσα, ενώ, ο δεύτερος δείκτης αφορά την κατεύθυνση του ίδιου του διανύσματος της τασικής συνιστώσας. Στην Εικόνα 3.1.1 απεικονίζεται η τρισδιάστατη εντατική κατάσταση στον στοιχειώδη κύβο που ορίζεται γύρω από ένα υλικό σημείο του παραμορφώσιμου σώματος.



**Εικόνα 3.1.1 :** Τρισδιάστατη εντατική κατάσταση που επικρατεί σε ένα υλικό σημείο ενός παραμορφώσιμου σώματος.

Ο γενικευμένος νόμος του Hooke μπορεί να γραφτεί σε μητρωϊκή μορφή ως:

$$\{\sigma_i\} = [C_{ij}] \{\varepsilon_j\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (1)$$

όπου  $\{\sigma_i\}$  είναι οι τάσεις στον τρισδιάστατο κύβο κατά  $x(1)$ ,  $y(2)$  και  $z(3)$  συντεταγμένες, όπως φαίνονται στην παραπάνω εικόνα,  $[C_{ij}]$  είναι το μητρώο ακαμψίας του υλικού και  $\{\varepsilon_j\}$  οι αντίστοιχες παραμορφώσεις. Επίσης, ο γενικευμένος νόμος του Hooke μπορεί να γραφεί υπό την ακόλουθη ανεστραμμένη μορφή:

$$\{\varepsilon_i\} = [S_{ij}]\{\sigma_j\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (2)$$

όπου με  $[S_{ij}] = [C_{ij}]^{-1}$  δηλώνεται το μητρώο ευκαμψίας του υλικού. Σημειώνεται ότι στην παραπάνω μητρωϊκή μορφή του γενικευμένου νόμου του Hooke ισχύει η εξής αντιστοιχία των δεικτών:

$$\begin{aligned} \{1\} &\rightarrow \{11\}, \quad \{2\} \rightarrow \{22\}, \quad \{3\} \rightarrow \{33\}, \\ \{4\} &\rightarrow \{23\}, \quad \{5\} \rightarrow \{13\}, \quad \{6\} \rightarrow \{12\} \end{aligned} \quad (3)$$

### 3.2 ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΣΧΕΣΗ ΟΡΘΟΤΡΟΠΟΥ ΥΛΙΚΟΥ

Η συμπεριφορά κάθε στρώματος ενός τρισδιάστατου εκτυπωμένου αντικειμένου είναι παρόμοια με αυτή ενός ορθοτροπικού υλικού. Η σχέση τάσης-παραμόρφωσης (καταστατική σχέση) για ένα ορθότροπο υλικό μπορεί να γραφτεί σε μητρωϊκή μορφή όπως φαίνεται στην εξίσωση (4). Το μητρώο  $[C_{ij}]$  των ελαστικών σταθερών του υλικού είναι διαστάσεων  $6 \times 6$  με 36 δηλαδή συνολικά στοιχεία ενώ τα διανύσματα των τάσεων  $\{\sigma_i\}$  και των παραμορφώσεων  $\{\varepsilon_j\}$  έχουν 6 στοιχεία. Αποδεικνύεται μέσω της απαίτησης θετικής ενέργειας παραμόρφωσης ότι τα μητρώα ακαμψίας  $[C_{ij}]$  και ευκαμψίας  $[S_{ij}]$  είναι συμμετρικά ενώ ισχύει ότι  $[S_{ij}] = [C_{ij}]^{-1}$ . Λόγω της συμμετρίας των μητρώων ακαμψίας και ευκαμψίας οι ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές ενός πλήρους ανισοτροπικού υλικού είναι 21. Για την περίπτωση ορθότροπου υλικού οι ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές μειώνονται από 21 σε 9 και οι σχέσεις τάσεων-τροπών δίνεται ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (4)$$



Αντίστοιχα η σχέση τροπών-τάσεων για ένα ορθότροπο υλικό δίνεται ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Στην περίπτωση αυτή οι σχέσεις των 9 στοιχείων του μητρώου ευκαμψίας με τις ελαστικές σταθερές του υλικού δίνονται ως εξής:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}, S_{12} = \frac{\nu_{12}}{E_2}, S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_3}, S_{22} = \frac{1}{E_2}, S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_3} \\ S_{33} &= \frac{1}{E_3}, S_{44} = \frac{1}{G_{23}}, S_{55} = \frac{1}{G_{13}}, S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (6)$$

όπου οι ελαστικές σταθερές που απαιτούνται για την περιγραφή ενός ορθότροπου υλικού είναι το μέτρο ελαστικότητας (συντελεστής Young) κατά μήκος των αξόνων  $x(1)$ ,  $y(2)$  και  $z(3)$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ , οι συντελεστές διάτμησης  $G_{12}$ ,  $G_{13}$ ,  $G_{23}$  και οι λόγοι του Poisson  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{13}$  και  $\nu_{23}$ . Σημειώνεται ότι στην περίπτωση ενός εγκάρσιως ισότροπου υλικού οι ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές μειώνονται περαιτέρω σε 5 ενώ ισχύει  $E_1=E_2, \nu_{13}=\nu_{23}$  και  $G_{13}=G_{23}$ .

Η καταστατική σχέση του υλικού ενός δισδιάστατου ελάσματος στο επίπεδο  $xy$  (12) με πολύ μικρό πάχος κατά την εγκάρσια διεύθυνση  $z(3)$  αντιστοιχεί στην περίπτωση επίπεδης έντασης και μπορεί να ληφθεί από την εξίσωση (7) όπου  $\sigma_{33}=0$ ,  $\tau_{23}=0$ ,  $\tau_{13}=0$ . Η περίπτωση επίπεδης έντασης σε μητρωϊκή μορφή γράφεται ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ & S_{22} & 0 \\ sym & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

ή αν αντιστρέψουμε την εξίσωση (7) ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ & C_{22} & 0 \\ sym & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

ή όπου  $C_{ij}$  είναι τα στοιχεία του πίνακα μειωμένης ακαμψίας που σχετίζονται με τα στοιχεία του πίνακα μειωμένης ευκαμψίας  $S_{ij}$  και τις ελαστικές σταθερές του υλικού με βάση τους εξής τύπους:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}^2}, & C_{12} &= \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}^2}, \\ C_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}^2}, & C_{66} &= \frac{1}{S_{66}} = G_{12} \end{aligned} \quad (9)$$

Σημειώνεται ότι στην περίπτωση επίπεδης έντασης τέσσερις ανεξάρτητες σταθερές  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$  και  $G_{12}$  χρειάζονται για τον χαρακτηρισμό της μηχανικής συμπεριφοράς ορθότροπων υλικών. Αυτές οι άγνωστες ελαστικές σταθερές μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας είτε πειραματικά δεδομένα από δοκιμές εφελκυσμού και διάτμησης είτε υπολογιστικές μεθόδους. Στην παρούσα εργασία οι ελαστικές σταθερές προσδιορίζονται μέσω ανάλυσης μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων και εφαρμογή της μεθόδου υπολογιστικής ομογενοποίησης σε αντιπροσωπευτικούς όγκους της μεσοδομής εκτυπωμένων αντικειμένων. Η υπολογιστική μέθοδος προτιμάται έναντι της πειραματικής, στο πλαίσιο της παραμετρικής διερεύνησης που διεξάγεται στην παρούσα εργασία, καθώς ο χαρακτηρισμός της συμπεριφοράς του υλικού σε ένα μεγάλο πλήθος δοκιμών θα ήταν ασύμφορος εάν επιχειρούνταν με πειραματικό τρόπο.

## 4. ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

### 4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρείται μία εισαγωγή στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΣ) και στη χρήση της στην ανάλυση και το σχεδιασμό των κατασκευών. Η μέθοδος αυτή αποτελεί ένα ισχυρό υπολογιστικό εργαλείο στην ανάλυση της μηχανικής συμπεριφοράς των κατασκευών και βρίσκει μεγάλο αριθμό εφαρμογών. Στο πεδίο της ανάλυσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί όχι μόνο στο (συμβατικό) ελαστικό πεδίο (θεωρία μικρών μετατοπίσεων) αλλά και για μη-γραμμικά προβλήματα, λυγισμό, δυναμική συμπεριφορά κ.ά.

Βασική αρχή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι η διακριτοποίηση ενός γεωμετρικά σύνθετου φορέα σε μικρότερες μονάδες που ονομάζονται πεπερασμένα στοιχεία. Ανάλογα με την χωρική διάσταση του φορέα (μονοδιάστατος, δισδιάστατος ή τρισδιάστατος) χρησιμοποιούνται ιδεατές γραμμές, επιφάνειες ή όγκοι για την υποδιαίρεση του σε πεπερασμένα στοιχεία. Ανάλογα την πυκνότητα της διακριτοποίησης καθορίζεται και η ακρίβεια της ανάλυσης.

Μετά τη διακριτοποίηση ακολουθεί η κατάστρωση και η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας του φορέα που μαζί με τις καταστατικές και κινηματικές εξισώσεις περιγράφουν πλήρως την κινηματική και την εντατική κατάσταση ενός φορέα υπό την επίδραση φορτίσεων και μετακινήσεων. Σημειώνεται ότι σε ορισμένες περιπτώσεις η αριθμητική επίλυση προτιμάται έναντι της αναλυτικής η οποία λόγω πολυπλοκότητας του προβλήματος μπορεί να είναι ανέφικτη. Ως προς την ακρίβεια των λύσεων οι αριθμητικές μέθοδοι εισάγουν πάντα ένα ποσοστό σφάλματος, υπό προϋποθέσεις όμως μπορεί να οδηγήσουν σε πολύ υψηλή ακρίβεια λύσεων.

Η σύνδεση των στοιχείων μεταξύ τους γίνεται σε διακριτά σημεία που ονομάζονται κόμβοι. Σε κάθε κόμβο κάθε στοιχείου αντιστοιχεί ένας αριθμός κομβικών παραμέτρων. Κάποιες από τις κομβικές παραμέτρους είναι η δυνατότητα μετατόπισής και στροφής τους οι οποίες καλούνται βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου.

Οι κόμβοι κάθε στοιχείου μπορούν είτε να μετακινηθούν είτε και να στραφούν υπό την επίδραση φορτίων στον διακριτοποιημένο φορέα. Οι δυνατότητες αυτές κίνησης των κόμβων ονομάζονται βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου. Το σύνολο των βαθμών ελευθερίας των κόμβων αποτελούν τους βαθμούς ελευθερίας του φορέα. Τα πεπερασμένα στοιχεία μεταξύ τους ανάλογα αν πρόκειται για 1-d, 2-d ή 3-d στοιχεία έχουν κοινό έναν κόμβο ή μια κοινή πλευρά ή μια κοινή επιφάνεια όπου θα πρέπει να ισχύουν οι συνθήκες συνέχειας των μετακινήσεων ή στροφών, πρέπει να ικανοποιείται δηλαδή ο έλεγχος συρραφής των στοιχείων.

Το μητρώο δυσκαμψίας γραμμικών φορέων υπολογίζεται με τη μέθοδο του μοναδιαίου φορτίου η οποία προϋποθέτει την εφαρμογή της αρχής των δυνατών συμπληρωματικών έργων για την εύρεση της σχέσης φορτίου και μετακίνησης κατά τη διεύθυνση ενός βαθμού ελευθερίας. Στην περίπτωση επιφανειακών φορέων είναι αναγκαίο να οριστούν κατάλληλες συναρτήσεις παρεμβολής μέσω των οποίων υπολογίζεται το πεδίο των μετατοπίσεων καθώς και οι παραμορφώσεις, οι τάσεις και τα φορτία διατομής του στοιχείου.

## **4.2 ΒΑΣΙΚΑ ΒΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ**

Σύμφωνα με τις αρχές της Κλασικής Στατικής η επίλυση οποιουδήποτε φορέα θα πρέπει να ικανοποιεί τις εξής τρεις βασικές συνθήκες:



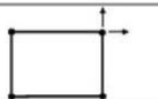
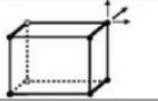
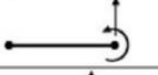
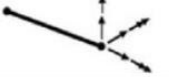


- Συνθήκες ισορροπίας των μεγεθών έντασης (εξωτερικών και εσωτερικών) που εξασφαλίζουν την ισορροπία μεταξύ των επιβαλλόμενων φορτίων και των αναπτυσσόμενων μεγεθών έντασης.
- Συνθήκες συμβιβαστού (ή γεωμετρικές συνθήκες) που εξασφαλίζουν τη συμβατότητα των μετακινήσεων διαφόρων σημείων του φορέα λαμβάνοντας υπόψη τις συνοριακές συνθήκες.

- Συνθήκες υλικής συμπεριφοράς (ή καταστατικοί νόμοι υλικού) που συνδέουν τις παραμορφώσεις με τις εντάσεις.

Τα βήματα που ακολουθούνται κατά την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων συνοψίζονται ως εξής:

**ΒΗΜΑ 1 :** Διακριτοποίηση του φορέα με επιλογή κατάλληλων πεπερασμένων στοιχείων.

Ανάλογα με τη φύση του προβλήματος και την επιδιωκόμενη ακρίβεια της λύσης επιλέγονται το είδος και το πλήθος των πεπερασμένων στοιχείων για την διακριτοποίηση του φορέα (προσομοίωση). Στην Εικόνα 4.2.1 απεικονίζονται πεπερασμένα στοιχεία διαφορετικού είδους (1-2-3-d) και οι αντίστοιχοι βαθμοί ελευθερίας τους.

| Element type                         | Degree of freedom (connection quantities)                                    | Illustration  |
|--------------------------------------|--|---|
| Bar element                          | One degree of freedom at each node: displacement                             |     |
| Torsion bar element                  | One degree of freedom at each node: rotation                                 |     |
| Membrane element                     | Two degrees of freedom at each node: displacements                           |    |
| Three-dimensional solid element      | Three degrees of freedom at each node: displacements                         |   |
| Two-dimensional beam bending element | Two degrees of freedom at each node: one displacement and one rotation       |  |
| Three-dimensional beam element       | Six degrees of freedom at each node: three displacements and three rotations |   |
| Flat plate element                   | Three degrees of freedom at each node: one displacement and two rotations    |   |
| Shell element                        | Five degrees of freedom at each node: three displacements and two rotations  |   |

**Εικόνα 4.2.1:** Απεικόνιση βαθμών ελευθερίας πεπερασμένων στοιχείων διάφορων ειδών (1-2-3-d).

**ΒΗΜΑ 2 :** Επιλογή κατάλληλων συναρτήσεων παρεμβολής.

Οι συναρτήσεις παρεμβολής ή συναρτήσεις σχήματος ενός στοιχείου μπορεί να είναι πολυώνυμα συνήθως 1<sup>ου</sup>, 2<sup>ου</sup> και 3<sup>ου</sup> βαθμού ή και ανώτερης τάξης ανάλογα την ακρίβεια της επιδιωκόμενης λύσης και τη φύση του προβλήματος δηλαδή την τάξη της διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει το πρόβλημα. Για ένα στοιχείο με  $n$  κόμβους η συνάρτηση προσέγγισης μιας άγνωστης ποσότητας  $\varphi$  σε ένα τυχαίο σημείο εσωτερικά του στοιχείου δίνεται ως εξής:

$$\varphi = N_1\varphi_1 + N_2\varphi_2 + \dots + N_n\varphi_n \quad (10)$$

όπου  $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$  είναι γνωστές ποσότητες στους κόμβους του στοιχείου ενώ  $N_1, N_2 \dots N_n$  είναι οι συναρτήσεις παρεμβολής του στοιχείου.

**ΒΗΜΑ 3 :** Εξαγωγή μητρώου στιβαρότητας και διανύσματος φόρτισης για κάθε στοιχείο.

Στο βήμα αυτό υπολογίζεται το μητρώο στιβαρότητας  $[k^e]$  και το διάνυσμα φόρτισης  $\{F^e\}$  για κάθε πεπερασμένο στοιχείο  $e$ . Η μόρφωση των παραπάνω μητρώων και διανυσμάτων μπορεί να γίνει με χρήση ενεργειακών συνθηκών ή με τη μέθοδο των σταθμικών υπολοίπων ή και με άμεσες μεθόδους (direct approach). Στο βιβλίο [5] περιγράφονται με λεπτομέρεια όλες οι παραπάνω μέθοδοι.

**ΒΗΜΑ 4 :** Σύνθεση του μητρώου στιβαρότητας για τον ολικό φορέα.

Η εξίσωση της ισορροπίας με ενσωμάτωση των συνοριακών συνθηκών του προβλήματος καταλήγει σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων της μορφής:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{ndof} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1,ndof} \\ & K_{22} & \dots & K_{2,ndof} \\ & & \ddots & \vdots \\ sym & & & K_{ndof,ndof} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{ndof} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

όπου  $ndof$  το πλήθος των βαθμών ελευθερίας του προβλήματος. Σημειώνεται ότι το μητρώο στιβαρότητας  $[k^e]$  κάθε στοιχείου που υπολογίστηκε στο προηγούμενο βήμα καθώς και το διάνυσμα φόρτισης  $\{F^e\}$  συμμετέχουν στην μόρφωση του ολικού μητρώου στιβαρότητας  $[K]$  και του ολικού διανύσματος φόρτισης  $\{F\}$  του φορέα.

**ΒΗΜΑ 5 :** Επίλυση και ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

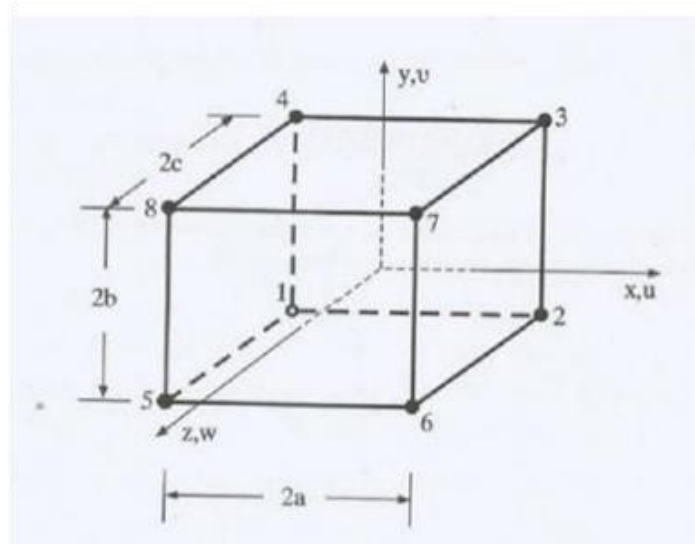
Ακολουθεί η επίλυση του αλγεβρικού συστήματος της εξίσωσης (11) και ο προσδιορισμός των άγνωστων βαθμών ελευθερίας  $\{d\}$  που αφορά τις μετατοπίσεις ή και τις στροφές των κόμβων των στοιχείων. Με δεδομένο το διάνυσμα  $\{d\}$  υπολογίζονται οι εσωτερικές κατανομές των τάσεων και των παραμορφώσεων των στοιχείων βάσει των οποίων ο μηχανικός προχωρεί στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων τις ανάλυσης λαμβάνοντας υπόψιν του και τις δεδομένες παραδοχές του προβλήματος που αφορούν την λειτουργικότητα και την αντοχή των κατασκευών.

## 4.2 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκαν πεπερασμένα στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας που περιγράφονται στην συνέχεια.

## 4.2.1 ΕΞΑΕΔΡΙΚΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΚΤΩ ΚΟΜΒΩΝ

Η γενίκευση του ορθογωνικού στοιχείου επίπεδης έντασης ή παραμόρφωσης τεσσάρων κόμβων στις τρεις διαστάσεις εκφράζεται μέσω του εξαεδρικού ορθογωνικού στοιχείου οκτώ κόμβων όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.2.1.1.



Εικόνα 4.2.1.1: Εξαεδρικό ορθογωνικό στοιχείο οκτώ κόμβων.

Οι συναρτήσεις σχήματος του εξαεδρικού στοιχείου δίνονται από ένα πολυώνυμο της μορφής:

$$\varphi(x,y,z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 yz + \alpha_7 zx + \alpha_8 xyz \quad (12)$$

όπου  $\varphi = u, v, w$ . Ακολουθώντας τη διαδικασία υπολογισμού των συναρτήσεων σχήματος προκύπτει η επόμενη σχέση η οποία ορίζει το πεδίο των μετατοπίσεων μέσω των συναρτήσεων σχήματος  $N_i$  ( $i=1 \div 8$ ):

$$\varphi = N_1 \varphi_1 + N_2 \varphi_2 + \dots + N_8 \varphi_8 \quad (13)$$

Προκειμένου να αποφευχθεί η αντιστροφή του μητρώου  $[A]$  που συνδέει τις επικόμβιες μετατοπίσεις με τις γενικευμένες συντεταγμένες κατά τη διαδικασία υπολογισμού των συναρτήσεων σχήματος  $N_i$ , χρησιμοποιούνται τα πολυώνυμα παρεμβολής Lagrange. Έτσι συνδυάζοντας τα γραμμικά πολυώνυμα παρεμβολής μεταξύ των σημείων  $\alpha$  και  $\beta$ :

$$L_{(x)} = \frac{(x_\beta - x)}{(x_\beta - x_\alpha)} \quad (14)$$

προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned}
N_1(x,y,z) &= L_a(x)L_a(y)L_a(z) \\
N_2(x,y,z) &= L_\beta(x)L_a(y)L_a(z) \\
N_3(x,y,z) &= L_\beta(x)L_\beta(y)L_a(z) \\
N_4(x,y,z) &= L_a(x)L_\beta(y)L_a(z) \\
N_5(x,y,z) &= L_a(x)L_a(y)L_\beta(z) \\
N_6(x,y,z) &= L_\beta(x)L_a(y)L_\beta(z) \\
N_7(x,y,z) &= L_\beta(x)L_\beta(y)L_\beta(z) \\
N_8(x,y,z) &= L_a(x)L_\beta(y)L_\beta(z)
\end{aligned} \tag{15}$$

ή διαφορετικά:

$$N_i = \frac{(a \pm x)(b \pm y)(c \pm z)}{8abc}, i = 1 \div 8 \tag{16}$$

Τα πρόσημα της παραπάνω σχέσης ακολουθούν τα πρόσημα των συντεταγμένων των κόμβων. Το πεδίο των μετατοπίσεων εκφράζεται από τη σχέση:

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & N_8 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & N_8 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_2 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_8 \end{bmatrix} \{\mathbf{d}\} \tag{17}$$

Όπου  $\{\mathbf{d}\} = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ \dots \ u_8 \ v_8 \ w_8]^T$  το διάνυσμα των μετατοπίσεων των κόμβων του στοιχείου

**Μητρώο Παραμορφώσεως:**

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_{2,x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & N_{8,x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_{1,y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_{2,y} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & N_{8,y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_{1,z} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_{2,z} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_{8,z} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \mathbf{0} & N_{2,y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & N_{8,y} & N_{8,x} & \mathbf{0} \\ N_{1,z} & \mathbf{0} & N_{1,x} & N_{2,z} & \mathbf{0} & N_{2,x} & \dots & N_{8,z} & \mathbf{0} & N_{8,x} \\ \mathbf{0} & N_{1,z} & N_{1,y} & \mathbf{0} & N_{2,z} & N_{2,y} & \dots & \mathbf{0} & N_{8,z} & N_{8,y} \end{bmatrix} \{\mathbf{d}\} \tag{18}$$

ή

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \underset{(6 \times 1)}{[\mathbf{B}]} \underset{(6 \times 24)}{\{\mathbf{d}\}} \underset{(24 \times 1)}{\tag{19}}$$

Τα στοιχεία του μητρώου παραμορφώσεως δίνονται από τις σχέσεις:

$$N_{i,x}(x,y,z) = \pm(b \pm y)(c \pm z) \tag{20}$$

$$N_{i,y}(x,y,z)=\pm(a\pm x)(c\pm z)$$

$$N_{i,z}(x,y,z)=\pm(a\pm x)(b\pm y)$$

### Μητρώο Στιβαρότητας:

Το μητρώο στιβαρότητας του εξαεδρικού στοιχείου οκτώ κόμβων υπολογίζεται από την γενική έκφραση:

$$[k]_{(24 \times 24)} = \int_{-c}^c \int_{-b}^b \int_{-a}^a [B]^T [C] [B] dx dy dz \quad (21)$$

όπου  $[C]$  το  $6 \times 6$  καταστατικό μητρώο του υλικού που ανατίθεται στο πεπερασμένο στοιχείο.

### Μητρώο Τάσεων:

Το μητρώο των τάσεων δίνεται από τη σχέση:

$$[S]_{(6 \times 24)} = [C]_{(6 \times 6)} [B]_{(6 \times 24)} \quad (22)$$

Ενώ το διάνυσμα των τάσεων  $\{\sigma\}$  που υπολογίζεται συνήθως στα σημεία ολοκλήρωσης του στοιχείου δίνεται από τη σχέση:

$$\{\sigma\}_{(6 \times 1)} = [S]_{(6 \times 24)} \{d\}_{(24 \times 1)} \quad (23)$$

Η παραπάνω σχέση με αντικατάσταση του μητρώου τάσεων  $[S]$  καταλήγει στην παρακάτω καταστατική σχέση που συνδέει το διάνυσμα των τάσεων  $\{\sigma\}$  με το διάνυσμα των τροπών  $\{\varepsilon\}$  ως εξής:

$$\{\sigma\}_{(6 \times 1)} = [C]_{(6 \times 6)} [B]_{(6 \times 24)} \{d\}_{(24 \times 1)} = [C]_{(6 \times 6)} \{\varepsilon\}_{(6 \times 1)} \quad (24)$$



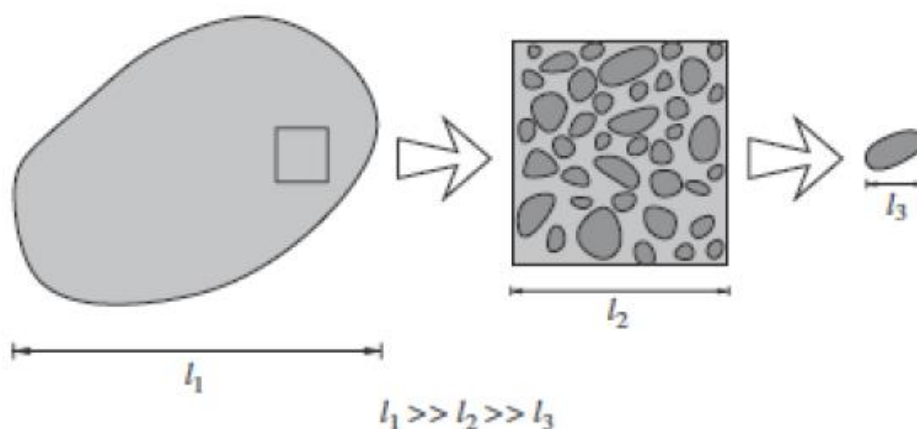
# 5. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΟΜΟΓΕΝΟΠΟΙΗΣΗΣ

## 5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η υπολογιστική ομογενοποίηση είναι ένα πολυεπιστημονικό πεδίο που συνδυάζει τις αρχές της μηχανικής, της αριθμητικής ανάλυσης και των υπολογιστικών μεθόδων για τη μελέτη της συμπεριφοράς ετερογενών υλικών σε διαφορετικές κλίμακες. Ο στόχος της υπολογιστικής ομογενοποίησης είναι η ανάπτυξη αποτελεσματικών και ακριβών αριθμητικών μεθόδων για την πρόβλεψη της μακροσκοπικής απόκρισης ενός υλικού με βάση τις μικροδομικές ιδιότητες των συστατικών του.

Μία από τις βασικές προκλήσεις στην υπολογιστική ομογενοποίηση είναι να ληφθούν υπόψη οι πολύπλοκες αλληλεπιδράσεις μεταξύ της μικροδομής και της μακροσκοπικής συμπεριφοράς ενός υλικού. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό για υλικά που υπάρχει ανομοιομορφία στην μικροδομή τους, όπως σύνθετα υλικά, κράματα και πορώδη υλικά. Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι παραδοσιακές αναλυτικές μέθοδοι ενδέχεται να μην είναι σε θέση να παρέχουν ακριβείς προβλέψεις της συμπεριφοράς του υλικού και επομένως απαιτείται η εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων.

Σε ένα σύνθετο υλικό μπορούμε να διακρίνουμε διαφορετικές χωρικές κλίμακες εξέτασης όπως η μάκρο, η μέσο και η μικρο κλίμακα όπως αυτές σημειώνονται στην Εικόνα 5.1.1.



**Εικόνα 5.1.1:** Διαφορετικές κλίμακες εξέτασης ενός σύνθετου υλικού: μάκρο ( $l_1$ ), μέσο ( $l_2$ ), μικρο ( $l_3$ ) – κλίμακα.

- **Μάκρο-κλίμακα:** Αναφέρεται στην μακροσκοπική εξέταση της συνολικής συμπεριφοράς ενός σύνθετου υλικού θεωρώντας το ως ένα ομογενές μέσο. Οι μακροσκοπικές ιδιότητες που μελετώνται μπορεί να περιλαμβάνουν θερμικές, ηλεκτρικές και μηχανικές ιδιότητες υπό διάφορες συνθήκες φόρτισης.

- Μέσο-κλίμακα: Αναφέρεται στην εξέταση της συμπεριφοράς ενός αντιπροσωπευτικού στοιχείου όγκου υλικού (RVE) το οποίο μελετάται ως ένα σύνθετο υλικό που αποτελείται από τη μήτρα ως το συνδετικό υλικό και από τις ενισχύσεις όπως ίνες, σωματίδια κ.α. Η συμπεριφορά του αντιπροσωπευτικού στοιχείου όγκου υλικού σε αυτήν την κλίμακα εξετασής εξαρτάται από την γεωμετρία του σύνθετου που έχει να κάνει με την κατανομή των ενισχύσεων εντός της μήτρας και τον προσανατολισμό τους, την διεπιφάνειά τους, τη φύση της αλληλεπίδρασής τους με τη μήτρα κ.α.
- Μίκρο-κλίμακα: Αναφέρεται στην εξέταση της συμπεριφοράς των ενισχύσεων που χρησιμοποιούνται για την βελτίωση των ιδιοτήτων του σύνθετου υλικού σε επίπεδο μικροδομής καθώς και της συμπεριφοράς της διεπαφής μεταξύ των ενισχύσεων και μήτρας. Παρέχει πληροφορίες σχετικά με τη σύνθεση και τη δομή του σύνθετου υλικού σε μικροσκοπικό επίπεδο.

Η σύνδεση των ιδιοτήτων των σύνθετων υλικών στην μάκρο-κλίμακα με φαινόμενα και διεργασίες που επιτελούνται στις κατώτερες κλίμακες μπορεί να επιτευχθεί μέσω μεθόδων υπολογιστικής ομογενοποίησης. Στο πλαίσιο αυτό υπάρχουν πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν, καθεμία με τα δικά της πλεονεκτήματα και περιορισμούς. Μια δημοφιλής προσέγγιση είναι η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (FEM) όπως προαναφέρθηκε, η οποία χρησιμοποιείται ευρέως στη μηχανική και τη φυσική για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η FEM είναι κατάλληλη για την επίλυση προβλημάτων που αφορούν πολύπλοκες γεωμετρίες και οριακές συνθήκες και μπορεί εύκολα να προσαρμοστεί ώστε να λαμβάνει υπόψη της την μικροδομή ενός υλικού.

Μια νέα και αναδυόμενη προσέγγιση στην υπολογιστική ομογενοποίηση είναι οι προσεγγίσεις που βασίζονται στη Μηχανική Μάθηση. Τα μοντέλα μηχανικής μάθησης μπορούν να εκπαιδευτούν ώστε να προβλέπουν την μακροσκοπική συμπεριφορά ενός υλικού με βάση τις μικροδομικές του ιδιότητες. Αυτά τα μοντέλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη βελτιστοποίηση των ιδιοτήτων του υλικού, για την πρόβλεψη της συμπεριφοράς νέων υλικών και για το σχεδιασμό νέων υλικών με συγκεκριμένες ιδιότητες.

## **5. 2 ΟΜΟΓΕΝΟΠΟΙΗΣΗ RVE ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΕΚΤΥΠΩΜΕΝΟΥ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ**

Η διαδικασία της ομοιογενοποίησης πραγματοποιείται σε ένα στατιστικώς αντιπροσωπευτικό δείγμα υλικού, το οποίο αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου (RVE) [14]. Αυτό είναι ένα μικρό, αντιπροσωπευτικό τμήμα του υλικού που μπορεί να απομονωθεί και να μελετηθεί λεπτομερώς όπως προαναφέρθηκε στο κεφάλαιο της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Αυτό γίνεται μέσω της διαδικασίας ομογενοποίησης, όπου το σύνθετο υλικό θεωρείται ότι είναι ισοδύναμο με ένα ενιαίο, ομογενές υλικό με τις δικές του μηχανικές ιδιότητες. Ο καταστατικός νόμος για αυτό το ισοδύναμο υλικό μπορεί να προσδιοριστεί αριθμητικά με βάση τη σχέση του μέσου όρου των πεδίων της τάσης και της

παραμόρφωσης εντός του RVE. Με άλλα λόγια, η συμπεριφορά του σύνθετου υλικού μπορεί να προβλεφθεί με βάση τα πεδία τάσης και παραμόρφωσης σε ένα μικρό, αντιπροσωπευτικό τμήμα του υλικού. Οι μέσες τάσεις και παραμορφώσεις υπολογίζονται από την ολοκλήρωση των αντίστοιχων πεδίων που αναπτύσσονται εντός του RVE όπως φαίνεται στην παρακάτω εξίσωση. Οι συντεταγμένες  $x, y, z$  αναφέρονται στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων του RVE. Συγκεκριμένα, αν τα ακριβή πεδία στην μικρο-κλίμακα  $\sigma_{ij}$  και  $\varepsilon_{ij}$  είναι γνωστά κάτω από το εφαρμοζόμενο φορτίο τότε οι μέσες τιμές τους στο RVE υπολογίζονται ως εξής:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(x, y, z) dV, \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(x, y, z) dV \quad (25)$$

Όπου  $V$  είναι ο όγκος του αντιπροσωπευτικού στοιχείου όγκου. Η ενέργεια παραμόρφωσης  $U^*$  του RVE εκφράζεται με βάση το τασικό και παραμορφωσιακό πεδίο στην μικρο-κλίμακα ως εξής:

$$U^* = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (26)$$

Αντίστοιχα η ενέργεια παραμόρφωσης για το ομογενοποιημένο υλικό του RVE στην μακρο-κλίμακα υπολογίζεται με βάση τις μέσες τιμές του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου ως εξής:

$$U = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} V \quad (27)$$

Σύμφωνα με τη θεωρία ομογενοποίησης των Hill-Mandel [14] ο στόχος είναι να διασφαλιστεί ότι η ποσότητα της ενέργειας παραμόρφωσης που αποθηκεύεται τόσο στο αρχικό λεπτομερές της μικροδομής μοντέλο όσο και στο ισοδύναμο ομογενές μοντέλο είναι ίση. Επομένως μέσω της ομογενοποίησης προσδιορίζεται ένα ισοδύναμο ομογενές μέσο που έχει ισοδύναμη μηχανική συμπεριφορά με το αρχικό ετερογενές μέσο. Αυτό σημαίνει ότι  $U^*=U$  και επομένως ισχύει ότι:

$$U^* = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} V \quad (28)$$

Οι μέσες τάσεις και παραμορφώσεις παίζουν το ρόλο των ενεργών τάσεων και παραμορφώσεων που αναπτύσσονται σε ένα σημείο ολοκλήρωσης του ομογενούς μέσου στη μακρο-κλίμακα, ενώ σε κάθε σημείο ολοκλήρωσης αντιστοιχεί ένα RVE. Οι σχέσεις μεταξύ των  $\sigma_{ij}$  και  $\varepsilon_{ij}$  καθορίζουν τον ενεργό καταστατικό νόμο που στο πλαίσιο της ελαστικότητας εκφράζεται με τον γενικευμένο νόμο του Hooke ως εξής:

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl} \quad (29)$$

ή

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = S_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl} \quad (30)$$

Στους παραπάνω τύπους τα  $C_{ijkl}$  και  $S_{ijkl}$  είναι τα ενεργά μητρώα δυσκαμψίας και ευκαμψίας αντίστοιχα για το ομογενοποιημένο σύνθετο ύλικο. Επομένως για να προσδιορισθούν οι ομογενοποιημένες ιδιότητες του ετερογενούς υλικού είναι απαραίτητο να υπολογισθούν οι μέσες τάσεις και παραμορφώσεις από την ολοκλήρωση των πεδίων τους μέσα σε όλο το αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου της μικροδομής του υλικού οπότε προκύπτουν οι σταθερές των μητρώων δυσκαμψίας και ευκαμψίας.

## 5. 2.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΕΝΕΡΓΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ

Οι Miehe και Koch πρότειναν στην εργασία τους [4] μια διαδικασία για τον προσδιορισμό των ενεργών παραμέτρων του καταστατικού μητρώου δυσκαμψίας που αντιστοιχεί στη συμπεριφορά της μικροδομής ενός αντιπροσωπευτικού όγκου υλικού όταν αυτό υφίσταται μικρές παραμορφώσεις. Οι ενεργές αυτές παράμετροι προσδιορίζονται με τη χρήση ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων με βάση τις κομβικές δυνάμεις αντιδράσεων και τα υπομητρώα δυσκαμψίας που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας των κόμβων που βρίσκονται στο σύνορο του υπό εξέταση μοντέλου RVE. Συγκεκριμένα ο αλγόριθμος απαιτεί την επιβολή στους συνοριακούς κόμβους ενός δισδιάστατου RVE ενός προδιαγεγραμμένου διανύσματος παραμορφώσεων  $\bar{\varepsilon} = [\bar{\varepsilon}_{11} \quad \bar{\varepsilon}_{22} \quad \bar{\varepsilon}_{12}]^T$  μέσω της επιβολής στους συνοριακούς κόμβους γνωστών μετατοπίσεων  $u_b$  ως εξής:

$$u_b = D_b^T \bar{\varepsilon} \quad (31)$$

όπου  $D_b$  είναι ένα γεωμετρικό μητρώο που εξαρτάται από τις συντεταγμένες  $(x, y)$  των συνοριακών κόμβων  $b$  και το οποίο προσδιορίζεται ως εξής:

$$D_b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ y & x & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

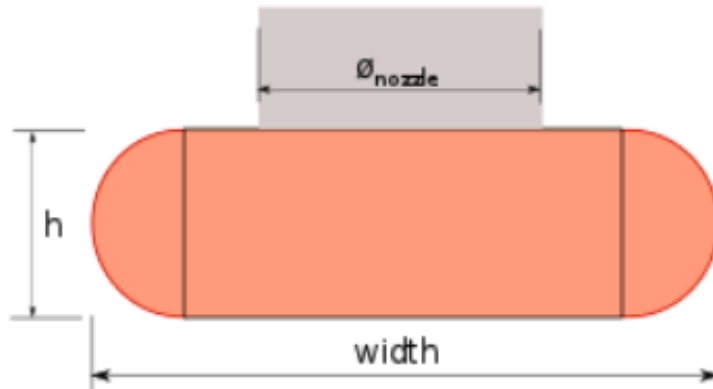
Στην συνέχεια υπολογίζονται οι ενεργές παράμετροι του μητρώου δυσκαμψίας από τον τύπο:

$$C = \frac{1}{V_{RVE}} D \tilde{K}_{bb} D^T \quad (33)$$

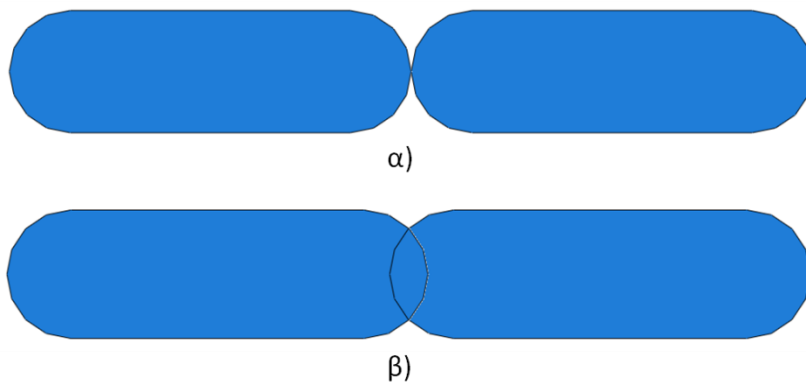
όπου  $\tilde{K}_{bb} = K_{bb} - K_{bi} K_{ii}^{-1} K_{ib}$  το συμπυκνωμένο μητρώο δυσκαμψίας του μοντέλου της μικροδομής που αφορά τους βαθμούς ελευθερίας των συνοριακών κόμβων ενώ το μητρώο  $D = [D_1 \quad D_1 \quad \dots \quad D_M]$  περιέχει τα γεωμετρικά μητρώα  $D_b$  των  $M$  συνολικά συνοριακών κόμβων. Η διαδικασία αυτή που περιγράφηκε παραπάνω για δισδιάστατα μοντέλα μπορεί να επεκταθεί εύκολα και σε τρισδιάστατα μοντέλα τα οποία χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία [15].

## 6. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία διενεργείται μια παραμετρική διερεύνηση της επιρροής των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της διατομής της ίνας εκτύπωσης (Εικ. 6.1) στις τελικές ομογενείς ιδιότητες του αντιπροσωπευτικού στοιχείου όγκου (RVE) του εκτυπωμένου αντικειμένου. Συγκεκριμένα τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά που μελετώνται είναι η διάμετρος του ακροφυσίου κεφαλής του εκτυπωτή ( $\varnothing$  nozzle,  $d_n$ ) και το ύψος της στρώσης ( $h$ ) που καθορίζει την ανάλυση της εκτύπωσης. Στον Πίνακα 1 αναγράφεται το εύρος τιμών των παραμέτρων που διερευνήθηκαν. Επιπλέον διερευνήθηκε η επιρροή του συντελεστή επικάλυψης  $f$  μεταξύ δύο διαδοχικών ινών εκτύπωσης (Εικ. 6.2) στις ιδιότητες του RVE (Πίνακας 1). Στην Εικόνα 6.3 απεικονίζεται η διαδικασία τρισδιάστατης εκτύπωσης ενός αντικειμένου με τη μέθοδο FDM και η προκύπτουσα μικροδομή του. Ο προσανατολισμός των ινών ανά στρώση  $\theta$  καθορίζουν και τον τύπο του πολύστρωτου σύνθετου υλικού του εκτυπώσιμου αντικειμένου. Στην εικόνα το εκτυπώσιμο πολύστρωτο είναι τύπου 0/90/0 ενώ στο πλαίσιο της εργασίας μελετήθηκε και η περίπτωση πολύστρωτου τύπου 0/0/0. Ο όρος σύνθετο υλικό χρησιμοποιείται εδώ με την εξής έννοια: το αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου RVE του υλικού, όπως φαίνεται στην Εικόνα 6.3, αποτελείται από μήτρα αποτελούμενη από το υλικό εκτύπωσης που χρησιμοποιεί ο εκτυπωτής και από κενά που δημιουργούνται λόγω της διαδικασίας εκτύπωσης και τα οποία καθορίζουν το πορώδες του RVE της μικροδομής. Το υλικό εκτύπωσης που χρησιμοποιεί ο εκτυπωτής είναι το ακρυλονιτρίλιο βουταδιένιο στυρένιο γνωστό ως ABS το οποίο είναι ένα θερμοπλαστικό πολυμερές αρκετά διαδεδομένο στη βιομηχανία. Το υλικό αυτό μπορεί να λιώσει και να ψυχθεί πολλές φορές χωρίς σημαντική υποβάθμιση των ιδιοτήτων του καθιστώντας το έτσι ιδανικό για την χρήση του ως υλικό εκτύπωσης. Το μέτρο ελαστικότητας του ABS είναι 2230 MPa ενώ ο λόγος Poisson 0.34. Στην συνέχεια της εργασίας μελετάται εκτός από την επίδραση της αβεβαιότητας της γεωμετρίας εκτύπωσης (Κεφ. 6.1) και η επίδραση της αβεβαιότητας των ελαστικών ιδιοτήτων του ABS στις τελικές ιδιότητες του RVE του εκτυπώσιμου αντικειμένου (Κεφ. 6.2). Ο υπολογισμός των ομογενών ελαστικών ιδιοτήτων των RVE γίνεται μέσω της υπολογιστικής μεθόδου ομογενοποίησης που περιγράφηκε στο Κεφ. 5 και της χρήση της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων που περιγράφηκε στο Κεφ. 3. Στην Εικόνα 6.4 απεικονίζονται τα διακριτοποιημένα RVEs του εκτυπώσιμου σύνθετου υλικού με χρήση εξαεδρικών πεπερασμένων στοιχείων για τις δύο περιπτώσεις πολύστρωτου που μελετώνται 0/0/0 και 0/90/0.



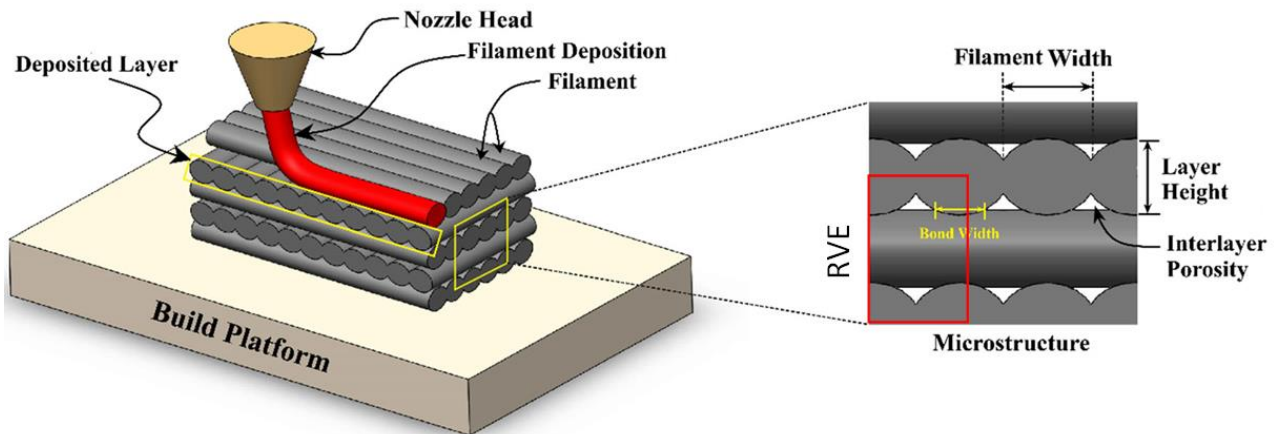
Εικόνα 6.1: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά διατομής ίνας εκτύπωσης



Εικόνα 6.2: Συντελεστής επικάλυψης  $f$  διαδοχικών ινών εκτύπωσης α)  $f=0.0$ , β)  $f=0.3$

Πίνακας 1: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά που διερευνήθηκαν – εύρος τιμών

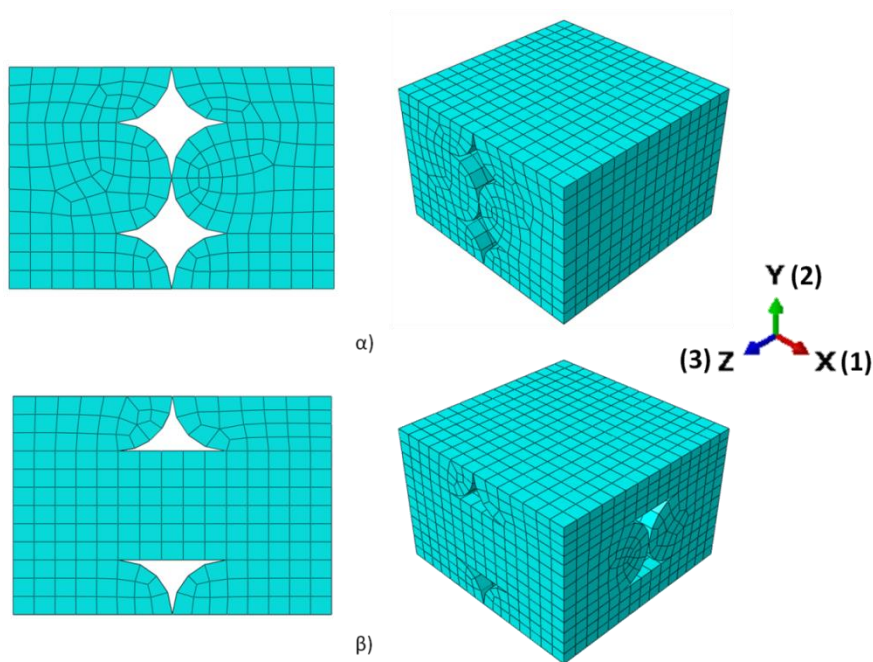
| α/α | Παράμετροι  | Εύρος τιμών                       |
|-----|---|-----------------------------------|
| 1   | Διάμετρος ακροφυσίου κεφαλής εκτυπωτή ( $d_n$ )                 | <b>0.3-0.7 mm</b> με βήμα 0.1 mm  |
| 2   | Ύψος ή πάχος στρώσης ( $h$ )                                    | <b>0.1-0.3 mm</b> με βήμα 0.05 mm |
| 3   | Συντελεστής επικάλυψης ινών ( $f$ )                             | <b>0 -0.4</b> με βήμα 0.1         |
| 4   | Προσανατολισμός ινών ανά στρώση $\theta$<br>(τύπος πολύστρωτου) | 0\0\0, 0\90\0                     |



Εικόνα 6.3: Απεικόνιση της διαδικασίας τρισδιάστατης εκτύπωσης με τη μέθοδο FDM – Χαρακτηριστικά της μικροδομής του εκτυπώσιμου αντικειμένου – Αντιπροσωπευτικό Στοιχείο Όγκου (RVE) σύνθετου υλικού που αποτελείται από μήτρα και κενά που καθορίζουν το πορώδες της μικροδομής.

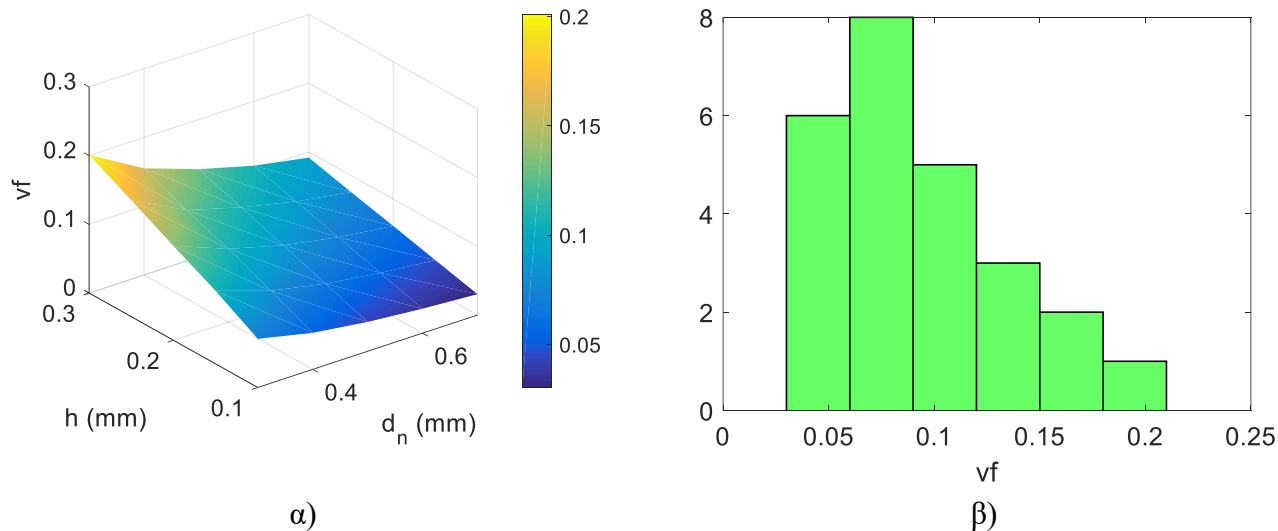
## 6.1 ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η επίδραση της αβεβαιότητας της γεωμετρίας της ίνας εκτύπωσης στις ομογενείς ιδιότητες του RVE της μικροδομής του τρισδιάστατου εκτυπώσιμου αντικειμένου. Οι γεωμετρικοί παράμετροι που μελετήθηκαν αρχικά είναι η διάμετρος της οπής του ακροφυσίου της κεφαλής εκτύπωσης  $d_n$  και το ύψος της στρώσης  $h$  όπως απεικονίζονται στην Εικόνα 6.1. Το εύρος τιμών των παραμέτρων επιρροής αναγράφεται στον Πίνακα 1 όπου με βάση το βήμα μεταβολής τους καταλήγουμε σε 25 διαφορετικές περιπτώσεις RVEs. Το πλάτος της διατομής της ίνας ελήφθη κατά 10% μεγαλύτερο από τη διάμετρο της οπής του ακροφυσίου της κεφαλής εκτύπωσης. Αρχικά ο συντελεστής επικάλυψης  $f$  ελήφθη ίσος με μηδέν, δηλαδή μελετήθηκε η περίπτωση που οι διαδοχικές ίνες εφάπτονται χωρίς να έχουν επικάλυψη όπως φαίνεται στην Εικόνα 6.2 (a). Η διακριτοποίηση των RVEs έγινε με στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας εξαεδρικού σχήματος (Εικόνα 6.4) ενώ λήφθηκε μέριμνα ώστε το μέγεθος των στοιχείων να είναι κατά μέσο όρο το ίδιο σε όλα τα μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων. Ο αριθμός των στοιχείων κυμαίνεται από 2000 έως 19000 περίπου ενώ οι βαθμοί ελευθερίας (dofs) κυμαίνονται αντίστοιχα από 10000 έως 67000 περίπου.



**Εικόνα 6.4: Διακριτοποίηση RVE με εξαεδρικά πεπερασμένα στοιχεία α) 0/0/0, β) 0/90/0**

Στην Εικόνα 6.5 παρουσιάζεται η επιρροή των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της διατομής της ίνας του υλικού εκτύπωσης στην κατ' όγκο αναλογία των κενών που καθορίζει το πορώδες των RVEs. Τα αποτελέσματα αυτά αφορούν το πολύστρωτο τύπου 0/0/0 ενώ παρόμοια εικόνα εμφανίζεται και στο πολύστρωτο τύπου 0/90/0.



**Εικόνα 6.5: Επιρροή των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της διατομής της ίνας του υλικού εκτύπωσης στην κατ' όγκο αναλογία των κενών (πορώδες) του RVE 0/0/0.**

Η επιφάνεια των κενών στην περίπτωση ενός RVE που οι διαδοχικές ίνες εκτύπωσης εφάπτονται (Εικόνα 6.6) υπολογίζεται από τον τύπο:



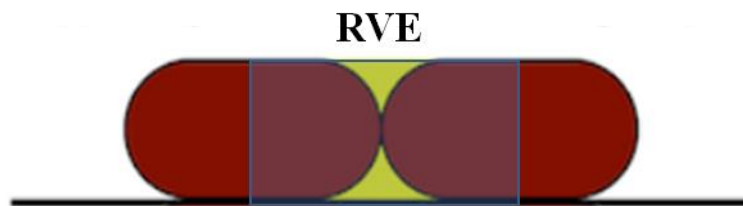
$$A_{void} = h^2 - \pi \left( \frac{h}{2} \right)^2 \quad (34)$$

Η επιφάνεια της διατομής μιας ίνας υπολογίζεται από τον τύπο:

$$A_{filament} = (width - h) \cdot h + \pi \left( \frac{h}{2} \right)^2 \quad (35)$$

Επομένως η κατ' όγκο αναλογία των κενών στο RVE μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο:

$$vf = \frac{A_{voids}}{A_{filament} + A_{voids}} \quad (36)$$

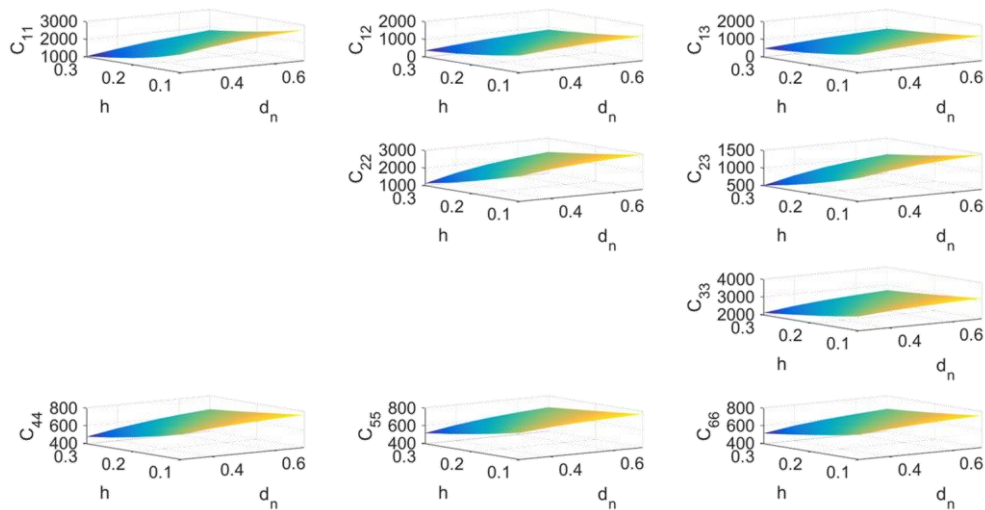


**Εικόνα 6.6:** Απεικόνιση επιφάνειας κενών (κίτρινο χρώμα) στο RVE στην περίπτωση που οι διαδοχικές ίνες εκτύπωσης εφάπτονται ( $f=0$ ).

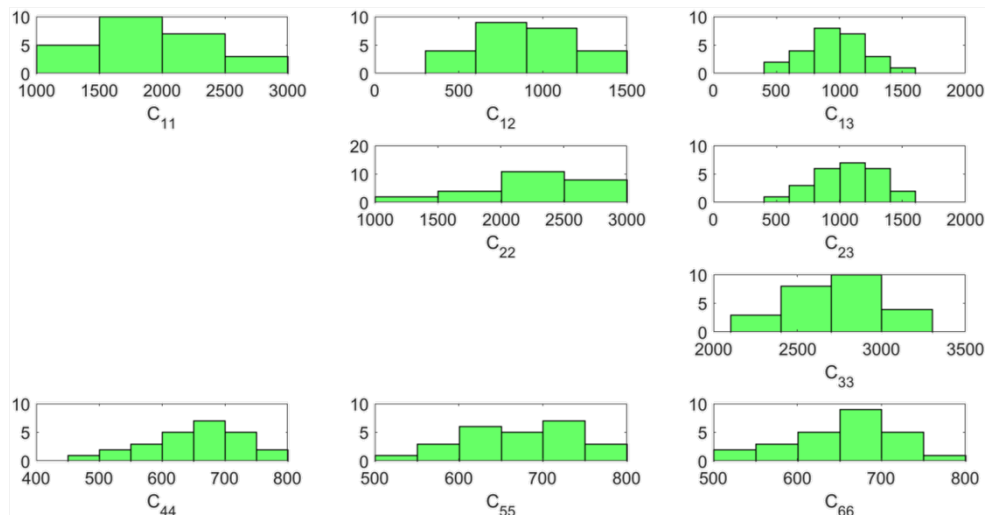
Όπως φαίνεται από την Εικόνα 6.5 η κατ' όγκο αναλογία των κενών στα RVEs κυμαίνεται από 3% έως 20%. Η αύξηση της διαμέτρου της οπής του ακροφυσίου κεφαλής εκτύπωσης  $d_n$  προκαλεί μείωση του πορώδους της μικροδομής των RVEs ενώ αντίθετα η αύξηση του ύψους της στρώσης  $h$  προκαλεί αύξηση του πορώδους. Στην Εικόνα 6.5 (β) απεικονίζεται το ιστογράμμα των τιμών της κατ' όγκου αναλογίας των κενών για το σύνολο του δείγματος που αποτελείται από τα 25 διαφορετικά RVEs. Το γεγονός της μεταβολής του πορώδους της μικροδομής με βάση την αλλαγή των γεωμετρικών παραμέτρων εκτύπωσης έχει άμεση επίπτωση στις ελαστικές τιμές του καταστατικού τανυστή του σύνθετου υλικού οι οποίες υπολογίζονται με εφαρμογή της υπολογιστικής μεθόδου ομογενοποίησης.

Στις Εικόνες 6.7 και 6.9 παρουσιάζεται η μεταβολή των τιμών  $C_{ij}$ , με  $i, j = 1-6$  που αντιστοιχούν στις ελαστικές τιμές του καταστατικού τανυστή του σύνθετου υλικού σε σχέση με τη μεταβολή των γεωμετρικών παραμέτρων της διατομής της ίνας εκτύπωσης ( $d_n$  και  $h$ ) για πολύστρωτο τύπου 0/0/0 και 0/90/0 αντίστοιχα. Οι τιμές όλων των  $C_{ij}$  αυξάνονται με την αύξηση της διαμέτρου  $d_n$  της οπής του ακροφυσίου της κεφαλής εκτύπωσης και μειώνονται με την αύξηση του ύψους  $h$  της στρώσης εκτύπωσης. Η συμπεριφορά αυτή συνδέεται άμεσα με την αντίστοιχη μείωση και αύξηση της κατ' όγκου αναλογίας των κενών εντός των RVEs. Στην Εικόνα 6.8 (περίπτωση 0/0/0) και 6.10 (περίπτωση 0/90/0) παρουσιάζονται τα ιστογράμματα των  $C_{ij}$  που δείχνουν την κατανομή των τιμών του δείγματος των συνολικά 25 διαφορετικών στην γεωμετρία RVEs. Στον Πίνακα 2 αναγράφονται η μέση τιμή (mean) και ο συντελεστής μεταβλητότητας (COV) των τιμών της κατ' όγκου αναλογίας των κενών και

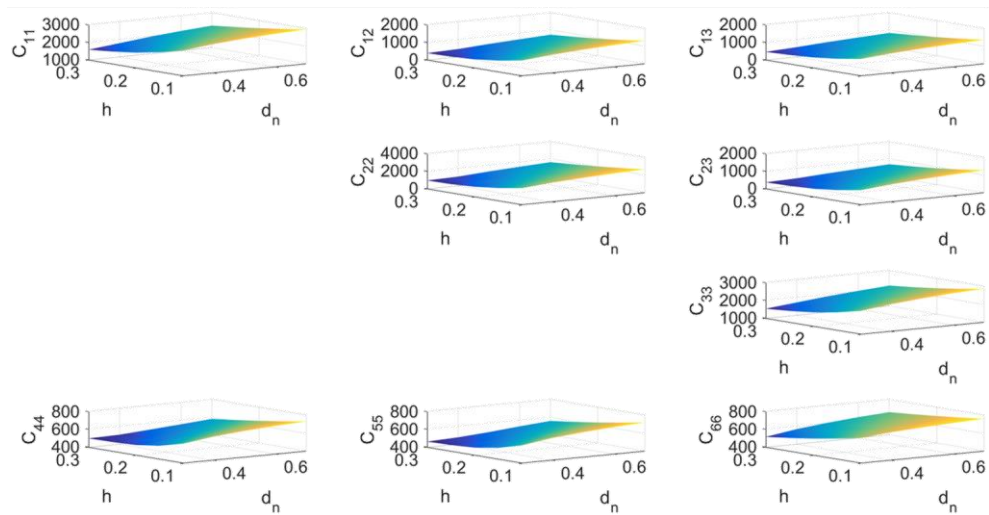
των ελαστικών τιμών  $C_{ij}$  που υπολογίζονται από το σύνολο των RVE για την περίπτωση 0/0/0 και 0/90/0, αντίστοιχα. Από τις τιμές είναι εμφανής η ανισοτροπία του ελαστικού καταστατικού τανυστή καθώς και το μεγάλο εύρος διακύμανσης των τιμών του  $\nu_f$  (47%) και των  $C_{ij}$  (9% έως 33% περίπου). Συνεπώς καταδεικνύεται η σημαντική επιρροή της αβεβαιότητας της γεωμετρίας εκτύπωσης στις ελαστικές ιδιότητες του εκτυπωμένου αντικειμένου.



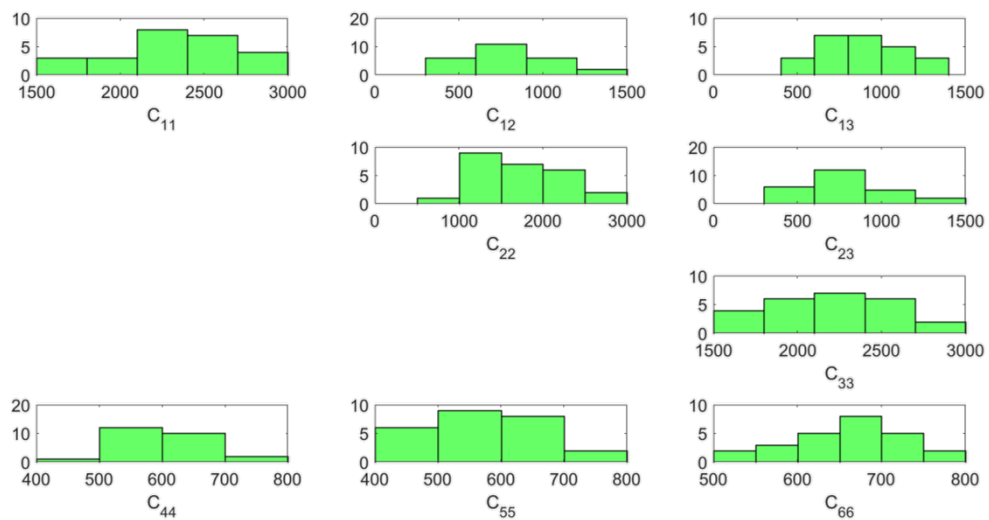
**Εικόνα 6.7:** Επιρροή των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της διατομής της ίνας του υλικού εκτύπωσης στις ελαστικές σταθερές του καταστατικού τανυστή του RVE 0/0/0.



**Εικόνα 6.8:** Στατιστική ανάλυση της επιρροής των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της διατομής της ίνας του υλικού εκτύπωσης στις ελαστικές σταθερές του καταστατικού τανυστή του RVE 0/0/0.



Εικόνα 6.9: Επιρροή των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της διατομής της ίνας του υλικού εκτύπωσης στις ελαστικές σταθερές του καταστατικού τανυστή του RVE 0/90/0.

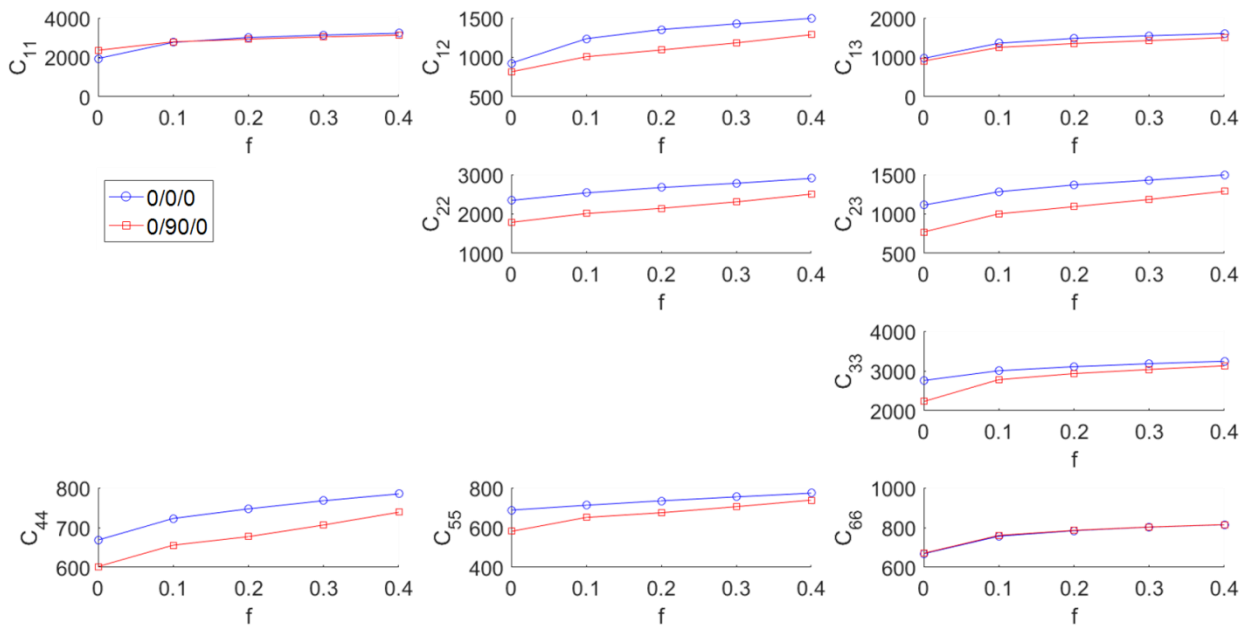


Εικόνα 6.10: Στατιστική ανάλυση της επιρροής των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της διατομής της ίνας του υλικού εκτύπωσης στις ελαστικές σταθερές του καταστατικού τανυστή του RVE 0/90/0.

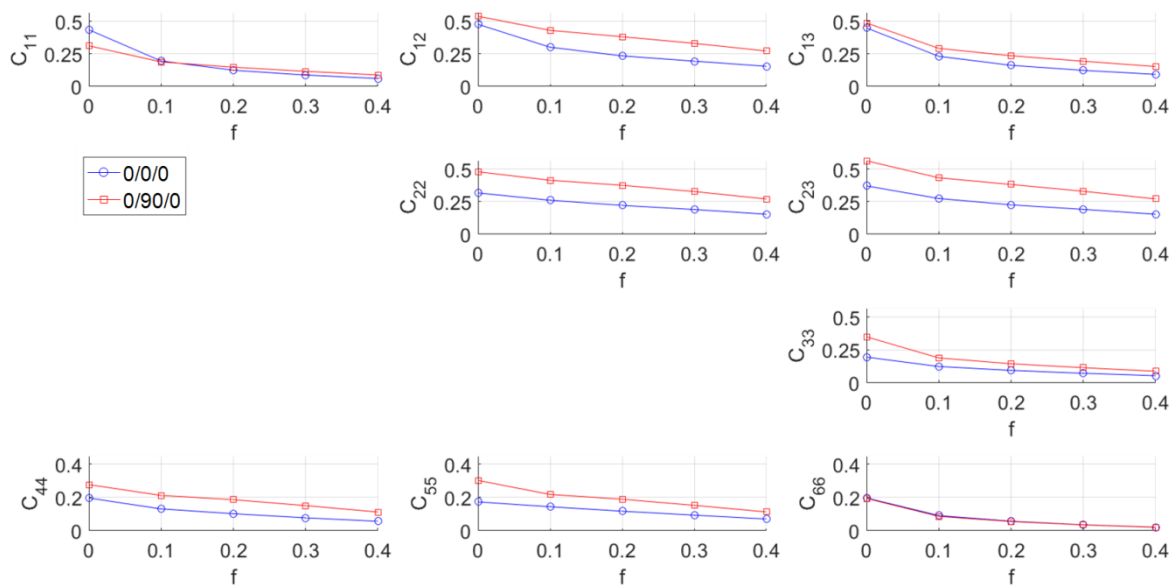
**Πίνακας 2: Στατιστικές παράμετροι κατ' όγκου αναλογίας κενών  $\nu_f$  και ελαστικών παραμέτρων  $C_{ij}$**

| Παράμετρος | 0/0/0      |         | 0/90/0     |         |
|------------|------------|---------|------------|---------|
|            | mean [%]   | COV [%] | mean [%]   | COV [%] |
| $\nu_f$    | 9.17       | 47.21   | 9.14       | 47.25   |
|            | mean [MPa] | COV [%] | mean [MPa] | COV [%] |
| $C_{11}$   | 1898.4     | 23.84   | 2308.0     | 16.10   |
| $C_{12}$   | 893.9      | 30.12   | 800.9      | 32.50   |
| $C_{13}$   | 949.4      | 25.85   | 891.1      | 27.89   |
| $C_{22}$   | 2238.2     | 21.27   | 1739.0     | 28.09   |
| $C_{23}$   | 1064.9     | 23.75   | 764.4      | 33.43   |
| $C_{33}$   | 2710.3     | 9.78    | 2202.8     | 16.45   |
| $C_{44}$   | 649.7      | 11.74   | 597.8      | 11.83   |
| $C_{55}$   | 672.5      | 9.90    | 575.6      | 13.33   |
| $C_{66}$   | 655.9      | 9.48    | 658.2      | 9.67    |

Στην συνέχεια μελετήθηκε η επίδραση του συντελεστή επικάλυψης  $f$  των διαδοχικών ινών, όπως αυτός εξηγείται στην Εικόνα 6.2, στις τιμές των ελαστικών παραμέτρων  $C_{ij}$  ενός συγκεκριμένου RVE με γεωμετρικά χαρακτηριστικά διατομής ίνας  $h = 0.15 \text{ mm}$  και  $d_n = 0.4 \text{ mm}$  για την περίπτωση 0/0/0 και 0/90/0, αντίστοιχα. Στην Εικόνα 6.11 παρουσιάζεται η μεταβολή των τιμών  $C_{ij}$  σε σχέση με τον συντελεστή επικάλυψης  $f$  ο οποίος κυμαίνεται από μηδέν (χωρίς επικάλυψη ινών) έως και 40% επικάλυψη. Όλες οι τιμές των ελαστικών παραμέτρων και στις δύο περιπτώσεις πολύστρωτου που εξετάζονται αυξάνονται με αύξηση του βαθμού επικάλυψης. Η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στην μείωση της κατ' όγκου αναλογίας των κενών εντός του RVE με την αύξηση του συντελεστή επικάλυψης. Θεωρητικά, καθώς ο συντελεστής επικάλυψης τείνει στο 100% το πορώδες της μικροδομής μηδενίζεται και επομένως το RVE αποτελείται εξ' ολοκλήρου από το υλικό εκτύπωσης ABS το οποίο είναι ομογενές και ισότροπο. Στην εξίσωση (37) αναγράφονται οι τιμές σε MPa των παραμέτρων του ελαστικού ομογενούς και ισότροπου καταστατικού ταυστή  $[C_{ij}]$  που αντιστοιχεί στην περίπτωση RVE με  $f=1$  (RVE εξολοκλήρου από ABS χωρίς κενά). Στην Εικόνα 6.12 εικονίζεται η απόκλιση των τιμών  $C_{ij}$  από τις τιμές που αναγράφονται στην εξίσωση (37) (περίπτωση  $f=1$ ) με βάση τη μεταβολή του  $f$ . Το ποσοστό μείωσης των ελαστικών παραμέτρων όπως φαίνεται από τα διαγράμματα ξεπερνά το 50% για την περίπτωση  $f=0$  (μέγιστο πορώδες της μικροδομής) γεγονός που καταδεικνύει τη σημαντική επιρροή της γεωμετρίας εκτύπωσης στις τελικές μηχανικές ιδιότητες.



**Εικόνα 6.11:** Επιρροή του συντελεστή επικάλυψης  $f$  στις ελαστικές σταθερές του καταστατικού τανυστή ενός RVE 0/0/0 και 0/90/0 με χαρακτηριστικά διατομής ίνας  $h = 0.15 \text{ mm}$  και  $d_n=0.4 \text{ mm}$ .



**Εικόνα 6.12:** Ποσοστό μείωσης των ελαστικών σταθερών του καταστατικού τανυστή ενός RVE 0/0/0 και 0/90/0 με χαρακτηριστικά διατομής ίνας  $h = 0.15 \text{ mm}$  και  $d_n=0.4 \text{ mm}$  με βάση τη μεταβολή του συντελεστή επικάλυψης  $f$ .

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ sym & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3432.4 & 1768.2 & 1768.2 & 0 & 0 & 0 \\ & 3432.4 & 1768.2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 3432.4 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 832.1 & 0 & 0 \\ & sym & & & 832.1 & 0 \\ & & & & & 832.1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

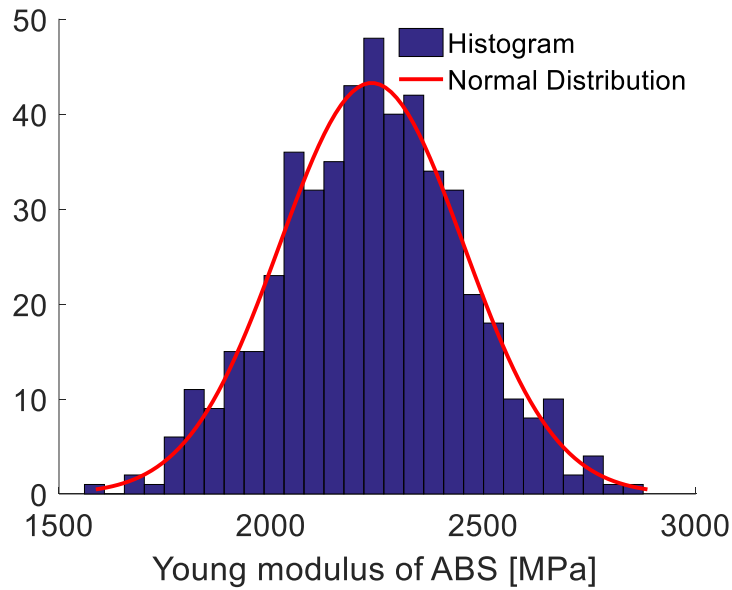
## 6.2 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΥΛΙΚΟΥ ΕΚΤΥΠΩΣΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η επίδραση της αβεβαιότητας των ελαστικών ιδιοτήτων του υλικού εκτύπωσης στις ομογενείς ιδιότητες του RVE της μικροδομής του τρισδιάστατου εκτυπώσιμου αντικειμένου. Το υλικό εκτύπωσης που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία είναι το ABS το οποίο έχει μέσο μέτρο ελαστικότητας ίσο με 2230 MPa και λόγο Poisson 0.34. Στην συνέχεια μελετάται η επιρροή της διακύμανσης του μέτρου ελαστικότητας του ABS στις τιμές των ελαστικών παραμέτρων  $C_{ij}$  του ομογενούς καταστατικού τανυστή ενός RVE με χαρακτηριστικά διατομής ίνας  $h=0.15$  mm και  $dn=0.4$  mm και συντελεστή επικάλυψης  $f=0.4$ . Για το σκοπό αυτό γίνεται η υπόθεση ότι ο συντελεστής διακύμανσης (COV) του μέτρου ελαστικότητας του ABS είναι 10% ενώ ο λόγος Poisson θεωρείται σταθερός 0.34. Η κατανομή του μέτρου ελαστικότητας θεωρείται κανονική τύπου Gauss με μέση τιμή  $\mu=2230$  MPa και τυπική απόκλιση  $\sigma=223$  MPa. Το πλήθος τιμών που επιλέγεται είναι  $N=500$  και το οποίο αντιστοιχεί στο πλήθος των Monte Carlo προσομοιώσεων που θα διεξαχθούν για την αποτίμηση της επιρροής της αβεβαιότητας υλικού στις ομογενείς ιδιότητες του RVE. Στην Εικόνα 6.13 απεικονίζεται το ιστόγραμμα των  $N$  τυχαία επιλεχθέντων τιμών του μέτρου ελαστικότητας  $E$  του ABS οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή (Gauss). Τα στατιστικά χαρακτηριστικά των τιμών του  $E$  υπολογίζονται από τους παρακάτω τύπους για την μέση τιμή  $\mu$ , την τυπική απόκλιση  $\sigma$  και τον συντελεστή διακύμανσης COV ως εξής:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E_k \quad (38)$$

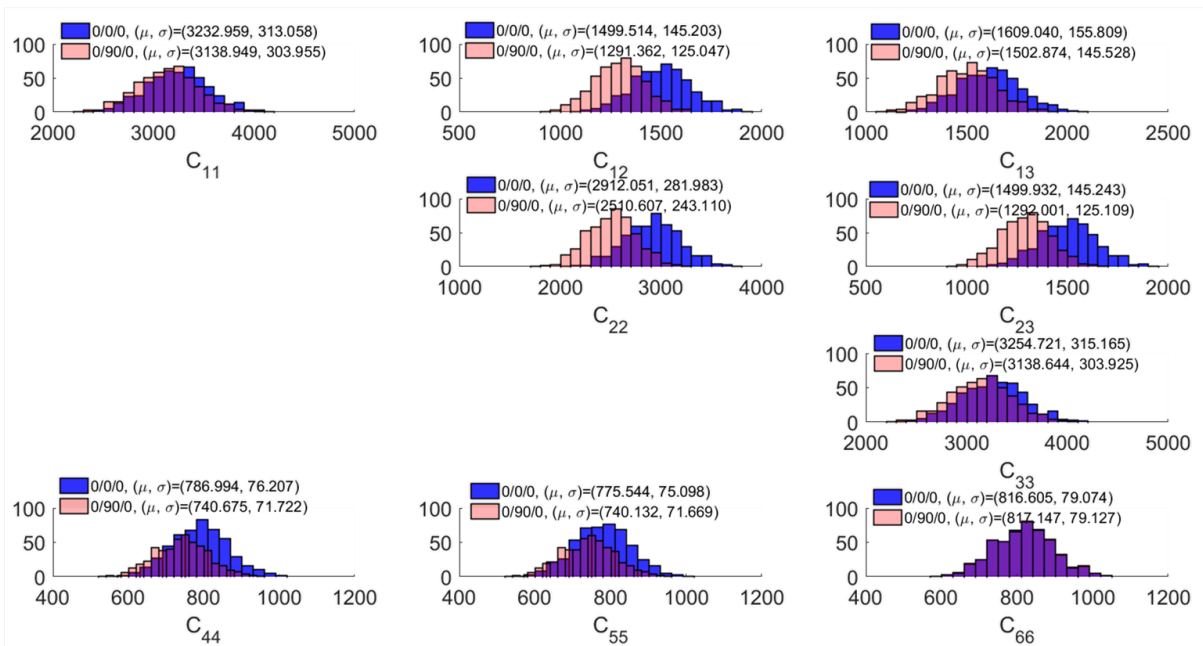
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N |E_k - \mu|^2} \quad (39)$$

$$COV = \frac{\sigma}{\mu} \quad (40)$$

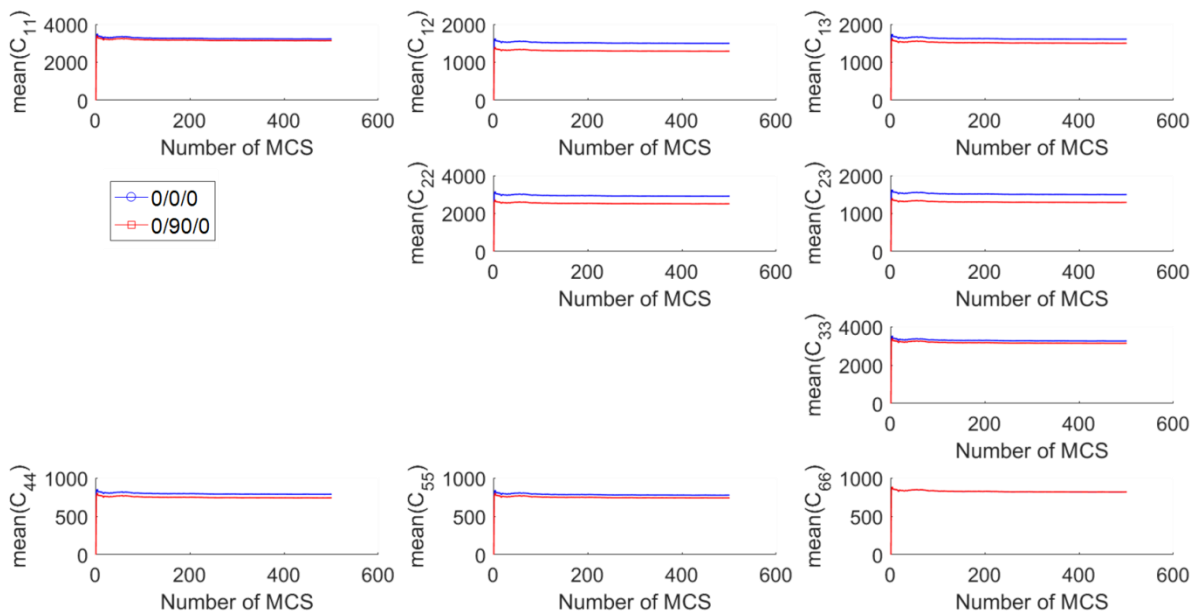


**Εικόνα 6.13: Ιστόγραμμα τιμών μέτρου ελαστικότητας ABS και προσέγγιση τους με κανονική κατανομή.**

Στην Εικόνα 6.14 παρουσιάζονται τα ιστογράμματα των τιμών  $C_{ij}$  που προέκυψαν από την ανάλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και εφαρμογή της υπολογιστικής διαδικασίας ομογενοποίησης των  $N=500$  RVEs, τα οποία έχουν όλα την ίδια γεωμετρία, διαφέρουν όμως ως προς τις τιμές του μέτρου ελαστικότητας του υλικού εκτύπωσης που ακολουθεί την κανονική κατανομή (Εικόνα 6.13). Όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα, οι ελαστικές παράμετροι  $C_{ij}$ , που αποτελούν την έξοδο του στοχαστικού συστήματος, ακολουθούν επίσης κανονική κατανομή με συντελεστή διακύμανσης COV περίπου 10% όπως ακριβώς και το μέτρο ελαστικότητας  $E$  του υλικού εκτύπωσης που αποτελεί την είσοδο του στοχαστικού συστήματος. Στις Εικόνες 6.15 και 6.16 απεικονίζεται αντίστοιχα η σύγκλιση της μέσης τιμής και του συντελεστή διακύμανσης των τιμών  $C_{ij}$  σε σχέση με τον αριθμό των προσομοιώσεων Monte Carlo που πραγματοποιήθηκαν. Από τα διαγράμματα αυτά αποδεικνύεται ότι έχει επιτευχθεί σύγκλιση των στατιστικών χαρακτηριστικών των τιμών  $C_{ij}$  και για τις δύο περιπτώσεις πολύστρωτου 0/0/0 και 0/90/0 που εξετάστηκαν. Επίσης η μορφή σύγκλισης των COV των τιμών  $C_{ij}$  είναι ακριβώς ίδια για την περίπτωση 0/0/0 και 0/90/0 αφού και στις δύο περιπτώσεις η στοχαστική είσοδος στα μοντέλα είναι ίδια, δηλαδή το ίδιο διάνυσμα που περιέχει τις στοχαστικές τιμές του μέτρου ελαστικότητας του υλικού εκτύπωσης ανατίθεται και στους δύο τύπους των RVEs κατά την προσομοίωση Monte Carlo.

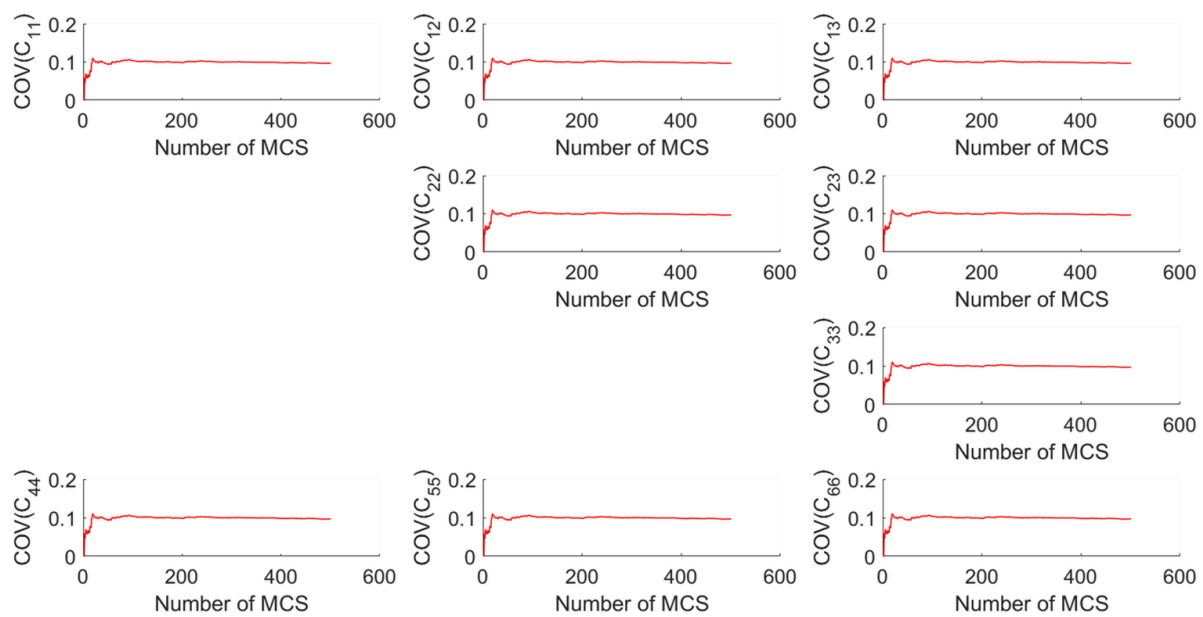


Εικόνα 6.14: Ιστογράμματα τιμών ελαστικών παραμέτρων  $C_{ij}$  για την περίπτωση 0/0/0 και 0/90/0.



Εικόνα 6.15: Στατιστική σύγκλιση της μέσης τιμής των  $C_{ij}$  σε σχέση με τον αριθμό των Monte Carlo προσομοιώσεων για την περίπτωση 0/0/0 και 0/90/0.





**Εικόνα 6.16: Στατιστική σύγκλιση του συντελεστή διακύμανσης COV των  $C_{ij}$  σε σχέση με τον αριθμό των MonteCarlo προσομοιώσεων για την περίπτωση 0/0/0 και 0/90/0.**

## 7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας εφαρμόστηκε η μέθοδος της υπολογιστικής ομογενοποίησης σε αντιπροσωπευτικά στοιχεία όγκου αντικειμένων που έχουν προέλθει από μεθόδους προσθετικής κατασκευής. Συγκεκριμένα υπολογίστηκαν αριθμητικά, με εφαρμογή της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων, οι μηχανικές ιδιότητες αντικειμένων που κατασκευάζονται με τη μέθοδο τρισδιάστατης εκτύπωσης με εναπόθεση λιωμένου υλικού (FDM). Μελετήθηκε η επιρροή της αβεβαιότητας της γεωμετρίας εκτύπωσης καθώς και της αβεβαιότητας των ιδιοτήτων του υλικού εκτύπωσης στις ελαστικές παραμέτρους του καταστατικού τανυστή, οι οποίες εξάγονται με εφαρμογή της διαδικασίας της υπολογιστικής ομογενοποίησης σε αντιπροσωπευτικούς όγκους της μέσοδομής του εκτυπωμένου αντικειμένου.

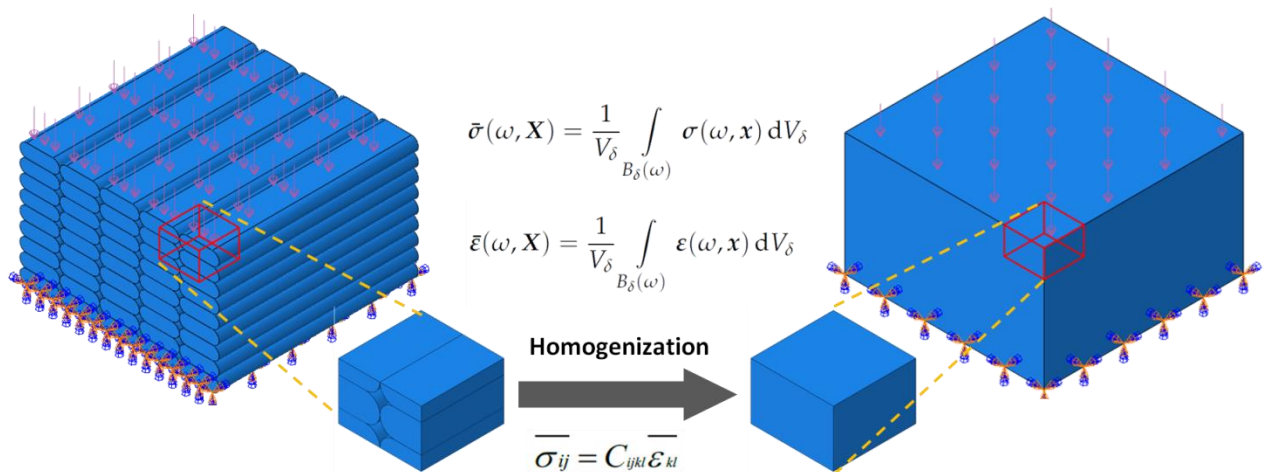
Από τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στο Κεφ. 6 καταδεικνύεται η σημαντική επιρροή της αβεβαιότητας της γεωμετρίας εκτύπωσης στις ομογενείς ελαστικές παραμέτρους του εκτυπωμένου αντικειμένου. Συγκεκριμένα μεταβάλλοντας τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διατομής της ίνας εκτύπωσης, δηλαδή τη διάμετρο του ακροφυσίου κεφαλής εκτύπωσης  $d_h$  και το πάχος του στρώματος εκτύπωσης  $h$ , επηρεάζεται η μεσοδομή του εκτυπωμένου αντικειμένου, η οποία εμφανίζει κενά, το μέγεθος των οποίων εξαρτάται από τις προαναφερθείσες γεωμετρικές παραμέτρους. Όπως είναι λογικό, όσο μεγαλύτερη είναι η κατ' όγκο αναλογία των κενών στο αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου της μεσοδομής του αντικειμένου, τόσο μειώνονται οι τιμές των ελαστικών παραμέτρων του ομογενοποιημένου υλικού. Η παραμετρική διερεύνηση μοντέλων RVEs διαφορετικής γεωμετρίας (μεταβολή των τιμών  $d_h$  και  $h$  σύμφωνα με τον Πίνακα 1), κατέδειξε ότι το εύρος διακύμανσης των τιμών των ελαστικών παραμέτρων  $C_{ij}$  κυμαίνεται από 9% έως 33%, γεγονός που οφείλεται στη μεγάλη διακύμανση του πορώδους (κατ' όγκο αναλογίας κενών) της μεσοδομής των μοντέλων η οποία ανέρχεται στο 47%. Το ομογενοποιημένο καταστατικό μητρώο  $[C_{ij}]$  στο οποίο καταλήγουμε προσομοιάζει με αυτό ενός ορθότροπου υλικού και για τις δύο περιπτώσεις πολύστρωτων που μελετήθηκαν, 0/0/0 και 0/90/0.

Στην εργασία μελετήθηκε επίσης η επιρροή του συντελεστή επικάλυψης  $f$  μεταξύ των διαδοχικών ινών εκτύπωσης στις ελαστικές παραμέτρους του ομογενοποιημένου υλικού. Το συμπέρασμα που εξάγεται από την συγκεκριμένη διερεύνηση είναι ότι όσο αυξάνεται ο συντελεστής επικάλυψης  $f$  οι τιμές των ελαστικών παραμέτρων  $C_{ij}$  τείνουν σε αυτές του υλικού εκτύπωσης, το οποίο είναι ομογενές και ισότροπο. Το γεγονός αυτό αποδίδεται στην μείωση της κατ' όγκο αναλογίας των κενών της μεσοδομής των εκτυπωμένων RVEs με την αύξηση του συντελεστή επικάλυψης των ινών. Θεωρητικά για τιμή  $f \rightarrow 1$  η μεσοδομή των RVEs δεν εμφανίζει καθόλου κενά και συνεπώς το εκτυπωμένο αντικείμενο είναι ομογενές και ισότροπο.

Τέλος το συμπέρασμα που εξάγεται ως προς την επιρροή της αβεβαιότητας των ιδιοτήτων του υλικού εκτύπωσης (στοχαστική είσοδος) στις ελαστικές παραμέτρους του καταστατικού

τανυστή (στοχαστική έξοδος) είναι ότι ο συντελεστής διακύμανσης των τιμών των στοχαστικών παραμέτρων εισόδου και εξόδου είναι ίδιος.

Η διαδικασία υπολογιστικής ομογενοποίησης για την αντικατάσταση της μεσοδομής αντικειμένου τρισδιάστατης εκτύπωσης με ισοδύναμο μοντέλο από ομογενές υλικό αποτυπώνεται σχηματικά στην Εικόνα 7.1. Σημειώνεται ότι το ομογενοποιημένο υλικό που υπολογίζεται στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας μπορεί να ανατεθεί στην συνέχεια σε ένα ομογενές μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων το οποίο είναι ενεργειακά ισοδύναμο με το πλήρες μοντέλο του εκτυπώσιμου αντικειμένου, το οποίο αποτελείται από υλικό εκτύπωσης και κενά. Δηλαδή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αντικαταστήσει την μεσοδομή του εκτυπώσιμου αντικειμένου, γεγονός σημαντικό καθώς μειώνει σημαντικά τις απαιτήσεις υπολογιστικής δύναμης για την ανάλυση της μηχανικής συμπεριφοράς εκτυπώσιμων αντικειμένων μεγάλης κλίμακας.



**Εικόνα 7.1:** Απεικόνιση της διαδικασίας υπολογιστικής ομογενοποίησης για την αντικατάσταση της μεσοδομής αντικειμένου τρισδιάστατης εκτύπωσης με ισοδύναμο μοντέλο από ομογενές υλικό.

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Shahrubudin, Nurhalida, Te Chuan Lee, and R. J. P. M. Ramlan. "An overview on 3D printing technology: Technological, materials, and applications." *Procedia Manufacturing* 35 (2019): 1286-1296.
- [2] Kamran, Medhavi, and Abhishek Saxena. "A comprehensive study on 3D printing technology." *MIT Int J Mech Eng* 6.2 (2016): 63-69.
- [3] Somireddy, M., and A. Czekanski. "Anisotropic material behavior of 3D printed composite structures—Material extrusion additive manufacturing." *Materials & Design* 195 (2020): 108953.
- [4] Miehe, Christian, and Andreas Koch. "Computational micro-to-macro transitions of discretized microstructures undergoing small strains." *Archive of Applied Mechanics* 72 (2002): 300-317.
- [5] Παπαδρακάκης, Μ. "Ανάλυση φορέων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων." Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα 2 (2001).
- [6] Savvas, Dimitrios, George Stefanou, and Manolis Papadrakakis. "Determination of RVE size for random composites with local volume fraction variation." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 305 (2016): 340-358.
- [7] Dudek, P. F. D. M. "FDM 3D printing technology in manufacturing composite elements." *Archives of metallurgy and materials* 58.4 (2013): 1415-1418.
- [8] Manapat, Jill Z., et al. "3D printing of polymer nanocomposites via stereolithography." *Macromolecular Materials and Engineering* 302.9 (2017): 1600553.
- [9] Lorenzo-Bañuelos, M., A. Díaz, and I. I. Cuesta. "Influence of raster orientation on the determination of fracture properties of polypropylene thin components produced by additive manufacturing." *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 107 (2020): 102536.
- [10] Melenka, Garrett W., et al. "Evaluation and prediction of the tensile properties of continuous fiber-reinforced 3D printed structures." *Composite Structures* 153 (2016): 866-875.
- [11] Yao, Tianyun, et al. "Tensile failure strength and separation angle of FDM 3D printing PLA material: Experimental and theoretical analyses." *Composites Part B: Engineering* 188 (2020): 107894.

[12] Kiendl, Josef, and Chao Gao. "Controlling toughness and strength of FDM 3D-printed PLA components through the raster layup." *Composites PartB: Engineering* 180 (2020): 107562.

[13] Ανανιάδου, Χριστίνα. Προσδιορισμός ενεργών μηχανικών ιδιοτήτων τρισδιάστατων μικροδομών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Diss. Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2018.

[14] Hill, Rodney. "Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles." *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11.5 (1963): 357-372.

[15] Stefanou, George, Dimitrios Savvas, and Panagiotis Metsis. "Random Material Property Fields of 3D Concrete Microstructures Based on CT Image Reconstruction." *Materials* 14.6 (2021): 1423.