Ψηφιακός
Μετασχηματισμός
και Εκπαιδευτική Πράξη

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δημιουργία νοημάτων για την έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολή, από μαθητές Γυμνασίου που αντιμετωπίζουν μαθηματικές προκλήσεις με τη χρήση ενός ψηφιακού εργαλείου πολλαπλών αναπαραστάσεων και δυναμικού χειρισμού.

Αχιλλέας Γ. Καραδήμας
Α.Μ.: 21008

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ **Χρόνης Κυνηγός,** Καθηγητής

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:
Κυπαρισσία Παπανικολάου, Καθηγήτρια
Αικατερίνη Κασιμάτη, Καθηγήτρια

Ιούλιος 2023

Ψηφιακός
Μετασχηματισμός
και Εκπαιδευτική Πράξη

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

Δημιουργία νοημάτων για την έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολή, από μαθητές Γυμνασίου που αντιμετωπίζουν μαθηματικές προκλήσεις με τη χρήση ενός ψηφιακού εργαλείου πολλαπλών αναπαραστάσεων και δυναμικού χειρισμού.

Η διπλωματική εργασία εξετάστηκε επιτυχώς από την κάτωθι Εξεταστική Επιτροπή:

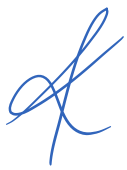
Α/α	ΟΝΟΜΑ ΕΠΩΝΥΜΟ	ΒΑΘΜΙΔΑ/ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΨΗΦΙΑΚΗ ΥΠΟΓΡΑΦΗ
	Χρόνης Κυνηγός	**Καθηγητής**	POLYCHRONIS KYNIGOS 12/07/2023 10:13
	Κυπαρισσία Παπανικολάου	**Καθηγήτρια**	Kyparissia Papanikolaou Digitally signed by Kyparissia Papanikolaou Date: 2023.07.11 20:01:52 +03'00'
	Αικατερίνη Κασιμάτη	**Καθηγήτρια**	AIKATERINI KASIMATI Digitally signed by AIKATERINI KASIMATI Date: 2023.07.07 13:57:13 +03'00'

ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο κάτωθι υπογεγραμμένος Αχιλλέας Καραδήμας του Γεωργίου, με αριθμό μητρώου 21008 φοιτητής του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών Ψηφιακός Μετασχηματισμός και Εκπαιδευτική Πράξη του Τμήματος Μηχανικών Πληροφορικής και Υπολογιστών της Σχολής Μηχανικών του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής, δηλώνω ότι:
«Είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της, είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, οι όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε ακριβώς είτε παραφρασμένες, αναφέρονται στο σύνολό τους, με πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία έχει συγγραφεί από μένα αποκλειστικά και αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου, όσο και του Ιδρύματος.
Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του πτυχίου μου».

Επιθυμώ την απαγόρευση πρόσβασης στο πλήρες κείμενο της εργασίας μου μέχρι ……………………… και έπειτα από αίτηση μου στη Βιβλιοθήκη και έγκριση του επιβλέποντα καθηγητή.

Ο Δηλών
Αχιλλέας Καραδήμας



*** Ονοματεπώνυμο /Ιδιότητα**

Ψηφιακή Υπογραφή Επιβλέποντα
(Υπογραφή)

**** Εάν κάποιος επιθυμεί απαγόρευση πρόσβασης στην εργασία για χρονικό διάστημα 6-12 μηνών (embargo), θα πρέπει να υπογράψει ψηφιακά ο/η επιβλέπων/ουσα καθηγητής/τρια, για να γνωστοποιεί ότι είναι ενημερωμένος/η και συναινεί. Οι λόγοι χρονικού αποκλεισμού πρόσβασης περιγράφονται αναλυτικά στις πολιτικές του Ι.Α. (σελ. 6):***
https://www.uniwa.gr/wp-content/uploads/2021/01/%CE%A0%CE%BF%CE%BB%CE%B9%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%B5%CC%81%CF%82_%CE%99%CE%B4%CF%81%CF%85%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%BF%CF%85%CC%81_%CE%91%CF%80%CE%BF%CE%B8%CE%B5%CF%84%CE%B7%CF%81%CE%B9%CC%81%CE%BF%CF%85_final.pdf

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η συνάρτηση κατέχει κεντρικό ρόλο στα Μαθηματικά, αποτελεί κρίσιμο σημείο μετάβασης από την Άλγεβρα στην Ανάλυση αλλά είναι πηγή σημαντικών δυσκολιών για αρκετούς μαθητές. Η προτεινόμενη διπλωματική εργασία έχει ως στόχο να διερευνήσει πως γίνεται η κατασκευή νοημάτων γύρω από την έννοια της συνάρτησης και πως αυτά εξελίσσονται από μαθητές Γυμνασίου που έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με αυτήν. Η παρούσα έρευνα αναμένεται να μελετήσει πως μέσα από ένα πλαίσιο ενεργής εμπλοκής των μαθητών σε διερεύνηση και πειραματισμό με το ψηφιακό εργαλείο GeoGebra και ταυτόχρονα την ένταξή τους σε ένα κοινωνικό πλαίσιο συνεργασίας οι ίδιοι νοηματοδοτούν την έννοια της συνάρτησης και εξετάζεται αν τη συνδέουν με εκείνη της συμμεταβολής. Η μεθοδολογία που θα ακολουθηθεί είναι της Έρευνας Σχεδιασμού και θα οργανωθεί μια διδακτική παρέμβαση για την οποία θα αναπτυχθούν διερευνητικές δραστηριότητες στο περιβάλλον του GeoGebra ως εργαλεία έρευνας.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Διδακτική των Μαθηματικών με την αξιοποίηση ψηφιακών τεχνολογιών

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Συναρτήσεις, συμμεταβολή, GeoGebra, Constructionism, πολλαπλές αναπαραστάσεις

ABSTRACT

The concept of function occupies a central role in Mathematics, it is a crucial point of transition from Algebra to Analysis, but it is a source of major difficulties for many students. The proposed thesis aims to investigate how meanings are constructed about the concept of function and how they evolve by middle school students who first come into contact with it. More specifically, it is studied how they make sense of the concept of function and it is examined whether they connect it with that of co-variation, working in a context of active involvement in exploration and experimentation with the digital tool GeoGebra and at the same time their integration in a social context of cooperation. The methodology followed is that of Design Research and a teaching intervention was organized for the purpose of which exploratory activities were developed in the GeoGebra environment as research tools.

SUBJECT AREA: Teaching Mathematics through the exploitation of digital technologies

KEYWORDS: Functions, co-variation, GeoGebra, Constructionism, multiple representations

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον καθηγητή κ. Χρόνη Κυνηγό, καθώς και όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος για τις πολύτιμες γνώσεις και συμβουλές που μου προσέφεραν κατά τη διάρκεια της φοίτησής μου. Επίσης ευχαριστώ τον Δρ. Δημήτρη Διαμαντίδη για τη συνεργασία μας κατά την εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης και όλους όσους με στήριξαν στην προσπάθεια να ολοκληρώσω τις σπουδές μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο ολοκλήρωσης του κύκλου σπουδών μου στο Π.Μ.Σ. «Ψηφιακός Μετασχηματισμός και Εκπαιδευτική Πράξη» κατά τη διάρκεια του εαρινού εξαμήνου του 2023 και πραγματοποιήθηκε παράλληλα με την αντίστοιχη εκπαιδευτική έρευνα που εφαρμόστηκε σε σχολείο της Αθήνας.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Σκεπτικό της έρευνας

Η έννοια της συνάρτησης κατέχει σημαντικό ρόλο στην επιστήμη των Μαθηματικών (Dreyfus & Eisenberg, 1984), εμπλέκεται σε πολλούς τομείς της (Carlson, 1998; Kleiner, 1989) και είναι θεμελιώδης στην μάθηση και την διδασκαλία των σχολικών Μαθηματικών (Eisenberg, 1992; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Lagrange & Psycharis, 2014) έχοντας παράλληλα αναγνωριστεί απο νωρίς η χρησιμότητά της στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Cooney & Wilson, 2012). Επιπλέον αποτελεί σημείο μετάβασης από την Άλγεβρα στην Ανάλυση (Breidenbach et al., 1992), λειτουργώντας ως συνδετική έννοια στα Μαθηματικά (Carlson, 1998) χωρίς όμως αυτό να γίνεται πράξη και στα σχολικά εγχειρίδια (Cooney & Wilson, 2012) καθώς μελετάται αποσπασματικά με αποτέλεσμα να μην γίνεται κατανόηση σε βάθος της συγκεκριμένης έννοιας (Sierpinska, 1992). Ειδικότερα οι δυσκολίες νοηματοδότησης που παρουσιάζονται, φαίνεται πως οφείλονται στο ότι οι μαθητές εισάγονται στη συνάρτηση στις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου μέσω του θεωρητικού ορισμού των ανώτερων Μαθηματικών. Ο ορισμός αυτός αναφέρεται στην αντιστοιχία μεταξύ στοιχείων δυο συνόλων, χωρίς όμως να βοηθάει κατάλληλα τους μαθητές ώστε να αντιληφθούν τι είναι και πως χρησιμοποιείται μια συνάρτηση όταν έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με αυτή τη σημαντική έννοια (Confrey & Smith, 1994; Eisenberg, 1991; Thompson & Carlson, 2017).

Παράλληλα ζούμε στην εποχή της 4ης Βιομηχανικής Επανάστασης, η οποία διέπεται από την αλματώδη ανάπτυξη της ψηφιακής τεχνολογίας και αποτελεί σημαντική στιγμή για την πνευματική ιστορία λόγω της εισχώρησης της στις περισσότερες πτυχές της ζωής μας (Kaput, Noss & Hoyles, 2002). Στον τομέα της εκπαίδευσης η υπολογιστική τεχνολογία μπορεί να συμβάλλει σημαντικά στο πως σκέφτεται και μαθαίνει ο άνθρωπος (Papert, 1993), να μας προσφέρει πολλές νέες δυνατότητες (Κυνηγός, 2011) καθώς και να διαμορφώσει την μάθηση αλλά και το πώς αυτή συμβαίνει (Laurillard, 2012). Τα ψηφιακά εργαλεία προσφέρουν δυναμικές προσεγγίσεις σε σημαντικές έννοιες της Άλγεβρας και της Ανάλυσης σε αντίθεση με τις παραδοσιακές στατικές μεθόδους. Είναι μέσα προβολής δυνατών οπτικών ερεθισμάτων που υποστηρίζουν την παραγωγή μαθηματικών νοημάτων συμβάλλοντας ταυτόχρονα στην κατανόηση του τυπικού μαθηματικού φορμαλισμού (Ferrara et al., 2006). Το εργαλείο GeoGebra που ενσωματώνει λειτουργικότητες όπως ο δυναμικός χειρισμός, οι πολλαπλές αλληλοσυνδεόμενες αναπαραστάσεις και η διαδραστικότητα, θα μπορούσε υπό προϋποθέσεις να βελτιώσει, να εμπλουτίσει και να μετασχηματίσει την μάθηση γύρω από τις συναρτήσεις σε συνδυασμό με την προσέγγισή της μέσω της συμμεταβολής και της αξιοποίησης διερευνητικών δραστηριοτήτων που θα εμπλέκουν ενεργά τους μαθητές.

1.2 Σκοπός της έρευνας

Η ερευνητική περιοχή της εργασίας είναι η Διδακτική των Μαθηματικών με την αξιοποίηση ψηφιακών τεχνολογιών που στοχεύουν στην πρόσθετη παιδαγωγική αξία. Σκοπός της έρευνας είναι να μελετηθεί πως γίνεται η δόμηση νοημάτων για τη συνάρτηση ως συμμεταβολή καθώς και πως αυτά εξελίσσονται όταν οι μαθητές εμπλέκονται ενεργά σε διερεύνηση και πειραματισμό, εντός ενός κοινωνικού πλαισίου συνεργασίας, συζήτησης και επιχειρηματολογίας μέσω του ψηφιακού εργαλείου GeoGebra. Αναζητούνται οι πιθανές αλλαγές που θα συμβούν αν δημιουργήσουμε διαφορετικές συνθήκες από ότι εκείνες του παραδοσιακού μοντέλου, όπου οι μαθητές δεν αντιμετωπίζουν τις συναρτήσεις ως κάτι αποκομμένο, στατικό και φανταστικό αλλά ως κάτι με το οποίο μπορούν να διαδράσουν, να μαστορέψουν και να εκφραστούν με όχημα την συμμεταβολή.

1.3 Ερευνητικά ερωτήματα

Η έρευνα επικεντρώνεται στα εξής δύο ερευνητικά ερωτήματα:

Α) Πως οι μαθητές της Β' Γυμνασίου δομούν και αναπτύσσουν νοήματα για τη συνάρτηση όταν την προσεγγίζουν μέσω της συμμεταβολής;

Β) Πως συμβάλλουν οι λειτουργικότητες του ψηφιακού εργαλείου GeoGebra και το μαθησιακό περιβάλλον στη δόμηση των νοημάτων αυτών;

1.4 Οργάνωση των κεφαλαίων

Στο κεφάλαιο 1 γίνεται μια συνοπτική εισαγωγή στην προβληματική της έρευνας και τα ερευνητικά ερωτήματα.

Στο κεφάλαιο 2 περιγράφεται το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο βασίστηκε η παρούσα έρευνα.

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται και αναλύονται οι λόγοι επιλογής της ερευνητικής μεθόδου, οι μέθοδοι συλλογής και ανάλυσης των δεδομένων, το ψηφιακό εργαλείο που επιλέχθηκε, καθώς και άλλα λειτουργικά θέματα σχετικά με την έρευνα που πραγματοποιήθηκε.

Στο κεφάλαιο 4 αναλύονται οι δραστηριότητες με τις οποίες ενεπλάκησαν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της παρέμβασης καθώς και τα ευρήματα σχετικά με την αντίδραση των μαθητών σε αυτές.

Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της έρευνας μετά την ανάλυση των δεδομένων τα οποία συλλέχθηκαν.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

2.1 Ιστορικά στοιχεία για την έννοια της συνάρτησης

Σε όλες τις εκφάνσεις της Άλγεβρας η ιδέα της γενίκευσης και η μετάβαση από τους αριθμητικούς υπολογισμούς στην δημιουργία σχέσεων μεταξύ μεταβλητών ποσοτήτων κατέχει σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης (Panorkou, Maloney & Confrey, 2014). Η έννοια της συνάρτησης περιγράφεται με αρκετούς διαφορετικούς τρόπους στα εγχειρίδια Μαθηματικών όπως για παράδειγμα ως μια σχέση μεταξύ μεταβλητών, ένας αλγεβρικός τύπος, μια αντιστοιχία μεταξύ στοιχείων δυο συνόλων, ένας κανόνας, ένας πίνακας τιμών, μια διαδικασία, ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών, μια γραφική παράσταση, μια απεικόνιση ή ένας μετασχηματισμός (Kleiner, 1993). Όλες αυτές οι διαφορετικές προσεγγίσεις φανερώνουν ότι η συνάρτηση πέρασε από διάφορα στάδια εξέλιξης κατά τη διάρκεια της ιστορίας των Μαθηματικών με τις πιο έντονες αλλαγές να συμβαίνουν τα τελευταία 300 περίπου χρόνια και να προέρχονται από τον τομέα του Λογισμού-Ανάλυσης (Kleiner, 1989). Τα στάδια αυτά με την σειρά χωρίζονται στις περιόδους των αναλογιών, των εξισώσεων και σε δυο περιόδους των συναρτήσεων.

Περίοδος των αναλογιών

Οι πρώτες προσεγγίσεις της συνάρτησης φαίνεται να συμβαίνουν πολύ πριν από τον 18^{ο} αι. καθώς από τα αρχαία χρόνια (2000 π.Χ.) υπήρχαν ενδείξεις έμμεσης χρήσης της έννοιας, χωρίς όμως εκείνη να είναι ξεκάθαρη λόγω εμποδίων που υπήρχαν, όπως η έλλειψη ενός αλγεβρικού συμβολικού συστήματος και της γνώσης του συνεχούς των πραγματικών αριθμών (Kleiner, 1989). Η συνάρτηση ως σχέση εξάρτησης μεταξύ ποσοτήτων εμφανίζεται αρκετά συχνά στα αρχαία μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Ελλήνων. Οι Βαβυλώνιοι κατασκεύαζαν πίνακες υπολογισμών για τον αντίστροφο, το τετράγωνο, τον κύβο και τις ρίζες των βασικών αριθμών, ενώ οι αρχαίοι Έλληνες εξέφραζαν μέσω των αναλογιών και της γεωμετρίας σχέσεις μεταξύ μεγεθών και φυσικούς νόμους. Επίσης είχαν βρει τρόπους ώστε να συμβολίζουν γεωμετρικά αντικείμενα όπως καμπύλες και κωνικές τομές, αλλά επίσης κατέγραψαν σημαντική πρόοδο στους τριγωνομετρικούς υπολογισμούς (Kleiner, 1993).

Περίοδος των εξισώσεων

Την περίοδο από τον 13^{ο} έως 14^{ο} αιώνα μ.Χ. οι επιστήμονες επικεντρώθηκαν στην μελέτη των φυσικών φαινομένων με τη βοήθεια των Μαθηματικών και ξεκίνησαν να τα αναπαριστούν με γραφικές παραστάσεις. Στην επόμενη χρονική περίοδο μέχρι τον 17^{ο} αιώνα συνέβησαν σημαντικές πρόοδοι από επιστήμονες όπως οι Descartes, Viète, Bombelli, Kepler και Fermat οι οποίοι συνέβαλαν καθοριστικά στην αρχική ανάδυση της έννοιας της συνάρτησης. Έγινε επέκταση των αριθμών στους πραγματικούς και τους μιγαδικούς, επινοήθηκε η συμβολική Άλγεβρα, συνδυάστηκε η Άλγεβρα με την Γεωμετρία δημιουργώντας την Αναλυτική Γεωμετρία και οι κινήσεις αποτέλεσαν τα πιο βασικά προβλήματα στην Φυσική, τα οποία εκφραζόταν πλέον μέσω μαθηματικών σχέσεων (Kleiner, 1989). Έτσι οι σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων δεν προσεγγιζόταν πλέον στατικά όπως παλαιότερα, υπήρχε η δυνατότητα να εκφραστούν οι ποσότητες με μεταβλητές, οι σχέσεις μεταξύ μεταβλητών αλλά και οποιαδήποτε καμπύλη με τη χρήση εξισώσεων, όμως δεν υπήρχε ακόμη η έννοια της εξαρτημένης και της ανεξάρτητης μεταβλητής. Οι μαθηματικοί αντιλαμβανόταν την μεταβολή στην μεταβλητή x ότι συμβαίνει με βάση τους περιορισμούς που θέτει η μεταβολή της μεταβλητής y με την οποία σχετίζεται και ότι οι μεταβλητές μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο (Boyer, 1946, Thompson & Carlson 2017)

Πρώτη περίοδος των συναρτήσεων

Η περίοδος αυτή τοποθετείται στα τέλη του 17ου και στον 18ο αιώνα όπου έδρασαν μαθηματικοί όπως οι Newton, Leibniz, Bernoulli, Euler και Fourier οι οποίοι συνέβαλαν στην εξέλιξη και τον ορισμό της συνάρτησης. Η συνάρτηση αυτή τη χρονική περίοδο εκφράζεται μέσα από ένα αλγεβρικό τύπο ή ένα γράφημα μεταξύ των τιμών δύο μεγεθών, έτσι ώστε οι τιμές του ενός να καθορίζουν τις τιμές του άλλου και οι τιμές των μεταβλητών να μεταβάλλονται με συνέχεια. Ο συμβολισμός συναρτήσεων εμφανίστηκε κατά τη διάρκεια της τρίτης εποχής. Αρχικά οι Newton και Leibniz ασχολήθηκαν με τον Λογισμό επικεντρώνοντας όμως τις προσπάθειές τους στην ανάπτυξη μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων με εξισώσεις, τα οποία αφορούσαν καμπύλες και ανήκαν περισσότερο στην Γεωμετρία και την Κινηματική οπότε και οι μεταβλητές είχαν τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά (Kleiner, 1989, 1993). Πρώτος ο Leibniz χρησιμοποίησε τη λέξη συνάρτηση για να χαρακτηρίσει όμως ένα γεωμετρικό αντικείμενο που σχετίζεται με μια καμπύλη, όπως η εφαπτομένη της. Ο Newton από την μεριά του συνέβαλε σημαντικά στην ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης με τη χρήση των δυναμοσειρών. Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου δόθηκε μεγάλη σημασία στο ρόλο των συμβόλων και στην μεταξύ τους σχέση στις μαθηματικές σχέσεις, οι οποίες όμως απαιτούσαν έναν ορισμό ο οποίος θα συνδέει ποσότητες που εξαρτώνται από άλλες ποσότητες. Αυτό ώθησε τον Bernoulli να διατυπώσει για πρώτη φορά το 1718 έναν ορισμό για την έννοια της συνάρτησης: <<*Συνάρτηση μιας μεταβλητής είναι μια ποσότητα που συντίθεται με οποιονδήποτε τρόπο από αυτή τη μεταβλητή και από σταθερές*>> (Katz, 2009)

Σταδιακά στις αρχές του 18ου αιώνα αρχίζει να διαχωρίζεται ο Λογισμός από την γεωμετρική προσέγγισή του και από την χρήση των μεταβλητών σε γεωμετρικά αντικείμενα, αντικαθιστώντας εκείνες με την έννοια της συνάρτησης ως αλγεβρικό τύπο (Kleiner, 1989, 1993). Ο Euler στα μέσα του 18ου αιώνα είχε μεγάλη επιρροή στη διαμόρφωση της έννοιας της συνάρτησης μέσα από τα πολύ σημαντικά βιβλία που εξέδωσε όπως το ΄Introductio in analysin infinitorum΄ το 1748 και στο οποίο έδωσε ένα νέο ορισμό για εκείνη: << *Συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας είναι μια αναλυτική έκφραση που συντίθεται καθ' οποιονδήποτε τρόπο από τη μεταβλητή ποσότητα και αριθμούς ή σταθερές ποσότητες* >> (Katz, 2009). Επίσης κατηγοριοποίησε τις συναρτήσεις σε αλγεβρικές ή υπερβατικές, μιας μεταβλητής ή πολλών μεταβλητών, ρητές ή άρρητες, χρησιμοποίησε ως ένα από τα βασικά εργαλεία του τις δυναμοσειρές για να εκφράσει τις συναρτήσεις με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι εφικτή η ολοκλήρωση και η παραγώγιση ενώ γενικότερα η προσέγγισή του στην μελέτη της συνάρτησης ήταν καθαρά αλγεβρική καθώς δεν χρησιμοποίησε καθόλου σχήματα. Ο Euler με το έργο του επίσης ανέδειξε τη σημασία των συναρτήσεων αφού ο Λογισμός πλέον αποτελούσε τη θεωρία που πλαισίωνε τις συναρτήσεις (Kleiner, 1989).

Ως έννοια η συνάρτηση συνέχισε να εξελίσσεται και μέσα από τα προβλήματα που καλούνταν να επιλύσουν οι επιστήμονες αναδυόταν διάφορες πτυχές χρήσης της έννοιας οι οποίες αρκετές φορές τους δίχασε όπως το πρόβλημα της δονούμενης χορδής. Με την προσπάθεια επίλυσή του ασχολήθηκαν οι Euler, D'Alembert και Daniel

Bernoulli από το 1744 περίπου και παρ' ότι δεν κατάφεραν τελικά να βρουν μια γενική λύση είχε σημαντική επιρροή στην εξέλιξη της συνάρτησης αφού εκείνη πλέον επεκτάθηκε και περιλάμβανε συναρτήσεις που οριζόταν με δυο ή περισσότερους κλάδους αλλά και συναρτήσεις που δινόταν με ένα γράφημα χωρίς αναλυτικό τύπο (Kleiner, 1989). Ο Euler μετά από αυτή τη διαμάχη το 1755 αναπροσάρμοσε τον ορισμό που είχε δώσει παλιότερα στη συνάρτηση διατυπώνοντας ένα νέο ορισμό : << *Όταν κάποιες ποσότητες εξαρτώνται από άλλες κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι μεν να μεταβάλλονται όταν οι δε μεταβάλλονται, τότε οι μεν ονομάζονται συναρτήσεις των δε, πρόκειται για μια πολύ πλατιά έννοια που περιλαμβάνει όλους τους τρόπους με τους οποίους μια ποσότητα μπορεί να προσδιοριστεί από άλλες*>> (Katz, 2009).

Μια άλλη σημαντική μορφή που συνέβαλε σημαντικά στην εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης ήταν ο Fourier μέσα από το έργο του ΄Analytic Theory of Heat΄ το 1822 και το θεώρημα για τις σειρές Fourier που διατύπωσε και κατά το οποίο κάθε συνάρτηση μπορεί να γραφεί με την μορφή αυτών των σειρών (Kleiner, 1989). Ο Fourier έδωσε ένα πιο γενικό και πιο μοντέρνο ορισμό στη συνάρτηση: << *Εν γένει η συνάρτηση f(x) αναπαριστά μια διαδοχή τιμών ή τεταγμένων καθεμία από τις οποίες είναι τυχούσα. Όταν η τετμημένη x παίρνει άπειρες τιμές, υπάρχει ίσο πλήθος τεταγμένων f(x). Όλες έχουν αριθμητικές τιμές, ή θετικές ή αρνητικές ή μηδέν. Δεν υποθέτουμε ότι οι τιμές αυτές υπόκεινται σε ένα κοινό νόμο, έπονται η μία της άλλης καθ' οποιονδήποτε τρόπο και η καθεμία από αυτές δίνεται σαν να ήταν μοναδική ποσότητα*>> (Katz, 2009).

Δεύτερη περίοδος των συναρτήσεων

Σταδιακά μέσα από την μελέτη της έννοιας της συνάρτησης στον Λογισμό τον $17^{ο}$ και τον $18^{ο}$ αιώνα άρχισε να αναδύεται ένα νέο πεδίο, η Ανάλυση που μελετήθηκε τον $19^{ο}$ αιώνα από μαθηματικούς όπως οι Gauss, Cauchy, Abel ή Dirichlet και στην οποία η συνάρτηση κατέχει κεντρικό ρόλο. Η τέταρτη και τελευταία περίοδος των συναρτήσεων ξεκινάει από την εποχή αυτή, εκτείνεται μέχρι σήμερα και βασίζεται στην θεώρηση του Dirichlet για ένα νόμο αντιστοιχίας όπου οι τιμές της μιας μεταβλητής καθορίζονται με μοναδικό τρόπο από τις τιμές της άλλης μεταβλητής (Thompson & Carlson 2017). Ο Dirichlet έζησε για ένα χρονικό διάστημα στη Γαλλία (1822-1825) όπου συνάντησε τον Fourier, ο οποίος επηρέασε καθοριστικά την αντίληψή του για τα Μαθηματικά (Katz, 2009). Προσπάθησε να αναλύσει το έργο του Fourier και να αποδείξει με έναν πιο αυστηρά μαθηματικό τρόπο το θεώρημα των σειρών Fourier καθώς με τον τρόπο που είχε αρχικά διατυπωθεί και θεμελιωθεί δεν ίσχυε για όλες τις συναρτήσεις. Για να γίνει αυτό απαιτούνταν έννοιες όπως της συνέχειας, της σύγκλισης και του ορισμένου ολοκληρώματος τις οποίες παρείχε ο Cauchy, αλλά και ένας νέος ορισμός της έννοιας της συνάρτησης τον οποίο διατύπωσε ο Dirichlet (Kleiner, 1989). Ο ορισμός της αντιστοιχίας του Dirichlet λέει τα εξής: << *Το y είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής x που ορίζεται σε ένα διάστημα α<x<b, αν σε κάθε τιμή της μεταβλητής x στο διάστημα αυτό αντιστοιχεί μια ορισμένη τιμή της μεταβλητής y. Επίσης, είναι αδιάφορο με ποιον τρόπο εγκαθιδρύεται αυτή η αντιστοιχία*>> (Katz, 2009). Η συνεισφορά του νέου ορισμού ήταν ότι ένας κανόνας αντιστοιχίας μπορεί να είναι τυχαίος, ότι οι συναρτήσεις μπορούν να είναι ασυνεχείς και το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης μπορεί να είναι ένα διάστημα και όχι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί (Kleiner, 1989). Ο ορισμός της συνάρτησης που ακολουθείται σήμερα βασίζεται σε εκείνον του Dirichlet, εμπλουτίζεται με έννοιες όπως των καρτεσιανών γινομένων και διατεταγμένων ζευγών, όμως δεν περιλαμβάνει πλέον εκείνες της μεταβολής και της συμμεταβολής ποσοτήτων οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν στις προηγούμενες περιόδους της συνάρτησης και συνέβαλαν σημαντικά στην εξέλιξή της στη σημερινή μορφή (Thompson & Carlson 2017).

2.2 Η συνάρτηση μέσα από την έρευνα της Διδακτικής των Μαθηματικών

Σύμφωνα με τους Vinner και Dreyfus (1989) οι συλλογισμοί των μαθητών όταν έρχονται σε επαφή με διάφορες πτυχές της συνάρτησης, αποτελούν την εννοιολογική εικόνα της (concept image), ενώ ο θεωρητικός ορισμός και οι κανόνες που αντιστοιχούν σε αυτή αποτελούν τον εννοιολογικό ορισμό της (concept definition). Η εκμάθηση των συναρτήσεων ερμηνεύεται ως η συνύφανση του θεωρητικού ορισμού της με την δημιουργία δυναμικά αναπτυσσόμενων εννοιολογικών εικόνων εντός του βιωματικού κόσμου του μαθητή (Confrey, 1991). Η εννοιολογική εικόνα που δημιουργείται όμως επηρεάζει περισσότερο τη διανοητική ανάπτυξη του ατόμου από ό,τι ο αντίστοιχος ορισμός (Vinner & Dreyfus, 1989). Έτσι σε περίπτωση όπου οι εικόνες οι οποίες δημιουργήθηκαν είναι αντιφατικές σε σχέση με τον εννοιολογικό ορισμό της συνάρτησης όπως διδάχθηκε, αποτελούν εννοιολογικές εικόνες που δεν έχουν σχηματιστεί ορθά. Πτυχές οι οποίες συμβάλλουν στο να έχουν οι μαθητές άρτια σχηματισμένες εννοιολογικές εικόνες είναι η προσέγγιση της συνάρτησης ως: α) διαδικασία και αντικείμενο, β) συμμεταβολή, γ) αντιστοιχία (Thompson, 1994).

2.2.1 Η συνάρτηση ως διαδικασία και ως αντικείμενο

Η συνάρτηση έχει μελετηθεί από αρκετούς επιστήμονες της εκπαίδευσης στον παρελθόν με στόχο να αναλυθούν οι διάφορες πτυχές μέσα από τις οποίες νοηματοδοτείται η συγκεκριμένη έννοια καθώς και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόησή της. Πολλοί ερευνητές όπως η Sfard (1991) και η Kieran (1992) επικεντρώθηκαν στην μελέτη των δυο βασικών απόψεων που υιοθετούν οι μαθητές όταν εμπλέκονται με την έννοια της συνάρτησης και οι οποίες είναι α) η συνάρτηση ως διαδικασία και β) η συνάρτηση ως αντικείμενο. Επιπλέον διερευνήθηκε και η δυναμική μετάβαση των μαθητών από την έννοια της συνάρτησης ως διαδικασία στη συνάρτηση ως αντικείμενο και αναδείχθηκε η σημασία της καλλιέργειας αυτής της ικανότητας (Sfard, 1991).

Κάποιοι άλλοι ερευνητές της εκπαίδευσης προσπάθησαν να κατηγοριοποιήσουν τη νοηματοδότηση γύρω από τη συνάρτηση βάσει του τρόπου με τον οποίο την αντιλαμβάνονται οι ίδιοι οι μαθητές επεκτείνοντας το προηγούμενο μοντέλο (Carlson, 1998). Οι Breidenbach et al. (1992) επηρεαζόμενοι από την μελέτη των Piaget et al. (1977) και του Dubinsky (1991) και θεωρώντας τη συνάρτηση ως διαδικασία, διέκριναν τις παρακάτω κατηγορίες:

1) <u>προ-συνάρτηση (prefunction)</u>: ο εκπαιδευόμενος δεν αντιλαμβάνεται κατάλληλα την έννοια της συνάρτησης και αυτό δεν τον βοηθάει στις δραστηριότητες που την περιέχουν.

2) ενέργεια (action): Περιλαμβάνει επαναλαμβανόμενο χειρισμό αντικειμένων σε στάδια, όπως η αντικατάσταση τιμών ή μεταβλητών σε αλγεβρικές παραστάσεις και διακρίνεται από στατικότητα. Οι μαθητές σκέφτονται τη συνάρτηση ως μια παράσταση η οποία παράγει το αποτελέσματα υπολογισμών.

3) διαδικασία (process): Ο μαθητής επικεντρώνεται σε υπολογιστικές διαδικασίες και πράξεις κάνοντας δυναμικούς μετασχηματισμούς αντικειμένων συνεχώς συνδέοντας με μοναδικό τρόπο το αρχικό με το νέο αντικείμενο μέσα από μια συνειδητή ενιαία διαδικασία.

4) αντικείμενο (object): Όταν ο μαθητής κατανοήσει σε βάθος τη διαδικασία τότε αυτή ανεξαρτητοποιείται, οδηγώντας σε γενίκευση των σχέσεων εξάρτησης μεταξύ ζευγών τιμών των δύο ποσοτήτων x και y, αποτελώντας πλέον τη νοηματοδότηση ενός αντικειμένου.

Οι ίδιοι ερευνητές συνέστησαν, τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών που αφορούν την συνάρτηση να διαμορφωθούν ώστε να ευνοούν την μετάβαση των μαθητών από τη νοηματοδότηση της ως ενέργεια σε εκείνη της διαδικασίας (Breidenbach et al., 1992). Επιπλέον διατύπωσαν τη σημαντική άποψη, ότι η νοηματοδότηση της συνάρτησης από τους μαθητές είναι η πιθανή μετακίνηση από την ενέργεια και τη διαδικασία προς το αντικείμενο εστιάζοντας παράλληλα περισσότερο στη δομή, στην ενσωμάτωση ιδιοτήτων και τον επαναπροσδιορισμό των μαθηματικών αντικειμένων.

2.2.2 Από τη διαδικασία-αντικείμενο στη συμμεταβολή

Ο βασικός ορισμός της συνάρτησης που έχει επικρατήσει από την δεκαετία του 1930 μέχρι και σήμερα τονίζει την αντιστοίχιση μεταξύ των στοιχείων δυο συνόλων χωρίς να δίνει την απαιτούμενη σημασία στην έννοια της μεταβολής (Thompson, 1994). Η καθιέρωση του συγκεκριμένου ορισμού έγινε γιατί με τη χρήση του, οι επιστήμονες των ανώτερων μαθηματικών ήταν ικανοί να επιλύσουν σημαντικά προβλήματα τα οποία περιλάμβαναν την έννοια του ορίου και παρουσίαζαν τη συνάρτηση ως μια οριακή διαδικασία (Kleiner, 1989). Σταδιακά ο ορισμός αυτός πέρασε από τα ανώτερα στα σχολικά μαθηματικά στα περισσότερα εκπαιδευτικά συστήματα (Cooney & Wilson, 2012). Για παράδειγμα ο ορισμός που συναντούν για πρώτη φορά οι μαθητές στο σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β’ Γυμνασίου στη χώρα μας, ορίζει ως συνάρτηση ότι είναι η μαθηματική σχέση η οποία συνδέει δυο μεταβλητές x και y, ώστε κάθε τιμή της μεταβλητής x να αντιστοιχίζεται σε μια μόνο τιμή της μεταβλητής y (Βλάμος κ.α, 2022). Όπως γίνεται αντιληπτό ο ορισμός αυτός ταυτίζεται με τον αντίστοιχο των διατεταγμένων ζευγών από τα ανώτερα μαθηματικά, όμως σύμφωνα με τον Lagrange (2014) δεν προβάλλει επαρκώς την ιδέα της εξάρτησης των ποσοτήτων, η οποία είναι πολύ σημαντική στην μελέτη των συναρτήσεων. Επιπλέον, σύμφωνα με τους Thompson και Carlson (2017) το μεγαλύτερο μέρος των ερευνών επικεντρώθηκε στην μελέτη των αντιλήψεων των μαθητών για τη συνάρτηση μέσω της αντιστοιχίας και δεν εξέτασαν πως οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση ως μια σχέση μεταξύ ποσοτήτων που οι τιμές τους μεταβάλλονται ταυτόχρονα. Η μελέτη της συνάρτησης μέσω των ποσοτήτων δεν έχει λάβει δηλαδή την απαραίτητη σημασία που θα έπρεπε στα σχολικά μαθηματικά παρά τη σημασία που έχει ως πλαίσιο μέσα από το οποίο οι μαθητές μπορούν να προσεγγίσουν τις συναρτήσεις (Lagrange, 2014).

Φαίνεται όμως ότι έχει επικριθεί από τους ερευνητές της εκπαίδευσης καθώς σύμφωνα με αυτούς δεν βοηθάει αρκετά στη νοηματοδότηση και τη χρήση της συνάρτησης τους μαθητές που έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με την έννοια αυτή (Confrey & Smith, 1994; Eisenberg, 1991; Thompson, 1994; Thompson & Carlson, 2017). Το ρεύμα αυτών των ερευνητών προσπάθησαν βασιζόμενοι στην προσέγγιση της συνάρτησης ως διαδικασία ή αντικείμενο να σχηματίσουν μια νέα πιο ισορροπημένη οπτική γύρω από την συνάρτηση μέσω μιας διαφορετικής πτυχής, της συμμεταβολής (co-variation) (Carlson, 1998; Confrey & Smith, 1994, 1995; Saldana & Thompson, 1998; Thompson, 1994). Ως προσέγγιση της συνάρτησης με τη συμμεταβολή οι παραπάνω ερευνητές εννοούν την παρατήρηση και τη νοηματοδότηση του τρόπου με τον οποίο μεταβάλλοντας τις τιμές μιας ποσότητας, μεταβάλλονται οι τιμές μιας άλλης καθώς και τον συντονισμό των τιμών αυτών των μεταβολών (Καφετζόπουλος & Ψυχάρης, 2015; Panorkou et al., 2014). Η έρευνα έχει δείξει ότι οι μαθητές νοηματοδοτούν πιο αποτελεσματικά τις ταυτόχρονες μεταβολές των ποσών x και y βασιζόμενοι στις πρότερες εμπειρίες τους, παρά τον μετασχηματισμό της μεταβλητής χ σε εκείνη της y καθώς και ότι η δημιουργία μιας συνάρτησης μέσα από το συντονισμό δυο συμμεταβαλλόμενων ποσών προκύπτει αυθόρμητα και έχει ισχυρότερες βάσεις (Confrey, 1991). Σύμφωνα με τους Confrey & Smith (1994, 1995) η αρχική προσέγγιση της συνάρτησης με τη συμμεταβολή παίζει σημαντικό ρόλο στην μετέπειτα ανάπτυξη του συλλογισμού της με τον κανόνα της αντιστοιχίας. Πολύ σημαντικό όμως στοιχείο για την ανάπτυξη του συλλογισμού των μαθητών για τη συνάρτηση ως συμμεταβολή είναι η ικανότητα μετάβασης από τον ποσοτικό στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης, δηλαδή από την αριθμητική περιγραφή των σχέσεων μεταξύ των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων στην περιγραφή μέσω της χρήσης του τυπικού μαθηματικού φορμαλισμού (Thompson, 2011).

Η εξέλιξη της προσέγγισης της συνάρτησης από διαδικασία ή αντικείμενο στην συμμεταβολή γίνεται εμφανής από τον Thompson (1994) ο οποίος αναλύει και εμπλουτίζει τη συγκεκριμένη θεώρηση με τη συμμεταβολή. Πιο συγκεκριμένα περιγράφει την αντίληψη της συνάρτησης ως:

1) <u>Ενέργεια</u>: Ο μαθητής σκέφτεται τη συνάρτηση ως μια υπολογιστική διαδικασία η οποία πρέπει να εφαρμοστεί για κάποιους αριθμούς για να αποκτήσει νόημα η παράσταση αυτή.

2) <u>Διαδικασία</u>: Η συνάρτηση προσεγγίζεται από τον μαθητή ως μια παράσταση η οποία εκφράζει από μόνη της το αποτέλεσμα που θα είχε αν γινόταν οι υπολογισμοί με αριθμούς στη θέση των μεταβλητών. Αυτή η οπτική τον ωθεί να νοηματοδοτήσει ότι οι μεταβλητές λαμβάνουν τιμές διατρέχοντας ένα συνεχές διάστημα στον άξονα των πραγματικών αριθμών ενώ παράλληλα φαντάζεται τη συνάρτηση να παράγει τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τους αριθμούς αυτούς. Έτσι, σκέφτεται τη συνάρτηση μέσα από τη συσχέτιση των αντίστοιχων τιμών που λαμβάνουν οι μεταβλητές ποσότητες, δηλαδή μέσω της συμμεταβολής τους.

3) <u>Αντικείμενο</u>: Όταν ο μαθητής σχηματίσει μια ισχυρή αναπαραστατική εικόνα της συνάρτησης μέσω του συλλογισμού της ως διαδικασία, τότε μπορεί να μεταβεί στην φορμαλιστική προσέγγισή της, δηλαδή να την σκέφτεται ως αντικείμενο, αφού παράλληλα αναπτύξει βαθύτερο αναστοχασμό σχετικά με την συνάρτηση ως τη διαδικασία της αντιστοιχίας των στοιχείων από ένα σύνολο τιμών σε ένα άλλο σύνολο.

Έτσι παρά το ότι η αρχική θεώρηση της συνάρτησης ως διαδικασία-αντικείμενο ακολουθείται μέχρι και σήμερα, το ενδιαφέρον τα τελευταία χρόνια έχει μετατοπιστεί στην μελέτη της συνάρτησης ως συμμεταβολή επειδή οι έρευνες έδειξαν ότι οι μαθητές είναι πιθανό δημιουργώντας εικόνες της συμμεταβολής ποσοτήτων, να νοηματοδοτήσουν μέσα από αυτές πιο αποδοτικά την έννοια της συνάρτησης (Carlson et al. ,2002; Confrey & Smith, 1994; Lagrange 2010, 2014; Oehrtman et al. 2008; Thompson, 2011; Thompson & Carlson 2017). Ειδικότερα ο Thompson (1994) εξέφρασε την άποψη ότι για να ξεπεραστεί η δυσκολία που προκύπτει από την προσέγγιση της συνάρτησης μέσω του ορισμού της αντιστοιχίας, θα μπορούσαν να γίνουν αλλαγές στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών, ώστε μέχρι και την δευτεροβάθμια εκπαίδευση να δίνεται έμφαση στη συνάρτηση ως συμμεταβολή και στη συνέχεια να αξιοποιείται η συνάρτηση ως αντιστοιχία για την εισαγωγή σε ανώτερες μαθηματικές έννοιες που το απαιτούν. Έτσι θα μπορούσε να γίνει και η απαραίτητη σύνδεση με την προγενέστερη επικρατούσα θεώρηση ως διαδικασία ή αντικείμενο για την εξέλιξη της σκέψης στις συναρτήσεις.

Οι περισσότερες έρευνες που προσεγγίζουν την συνάρτηση από την οπτική της συμμεταβολής δεν προσφέρουν όμως κάποιο αντίστοιχο ορισμό της, εκτός από τους Thompson και Carlson (2017) οι οποίοι προτείνουν το εξής:

<< Συνάρτηση είναι όταν δυο ποσότητες μεταβάλλονται ταυτόχρονα μέσω μιας σταθερής σχέσης μεταξύ των τιμών τους και έχουν την ιδιότητα ότι κάθε τιμή της μιας ποσότητας καθορίζει απόλυτα την τιμή της άλλης.>>

Σύμφωνα με τα όσα υποστηρίζουν οι συγκεκριμένοι ερευνητές η συμμεταβολή ορίζει τη συνάρτηση μέσω των μεταβλητών οι οποίες μοιάζουν με ολισθητές, όπως εκείνοι ορίζονται από τον Drijvers (2002), που μετατοπίζονται μόνοι τους στο μυαλό των μαθητών. Οι μεταβλητές ποσότητες αυτές λαμβάνουν τιμές για κάθε στιγμή σε ένα συνεχές χρονικό διάστημα στη σκέψη τους και συντονίζονται δημιουργώντας ζεύγη τιμών των δυο ποσοτήτων για κάθε χρονική στιγμή (Thompson & Carlson, 2017). Η εύρεση και ο συντονισμός των μεταβολών για τις ποσότητες που συμμεταβάλλονται σύμφωνα τους Carlson, Smith και Persson (2003) αποτελεί πολύ σημαντικό στοιχείο για την κατανόηση της συνάρτησης αλλά ακόμη και για άλλες θεμελιώδεις έννοιες της Ανάλυσης. Η προσέγγιση της συνάρτησης ως συμμεταβολή βοηθάει στη σκέψη του μαθητή να εδραιωθεί η σχέση εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών ποσοτήτων, μέσα από την παρατήρηση της σταθερής σχέσης μεταξύ των αντίστοιχων τιμών τους. Επιπλέον, η συμμεταβολή ως σταθερή σχέση, συμβάλλει στο να αποκτήσει η γραφική παράσταση της συνάρτησης μεγαλύτερο νόημα μέσα από την αναδυόμενη σκέψη (emergent shape thinking) αποτελώντας μια εικόνα της πορείας του ίχνους των συμμεταβαλόμενων ποσοτήτων (Moore, Paoletti, & Musgrave, 2013). Ειδικότερα, η δημιουργία πολλαπλασιαστικών αντικειμένων σε συνδυασμό με την συμμεταβολή προσφέρουν πυκνότερη νοηματοδότηση της συνάρτησης (Thompson & Carlson, 2017). Ο ποσοτικός τρόπος σκέψης στον οποίο βασίζεται η προσέγγιση της συνάρτησης ως συμμεταβολή, σύμφωνα με τους Moore και Carlson (2012) διευκολύνει τη δημιουργία αλγεβρικών σχέσεων που χρησιμεύουν στην μοντελοποίηση καταστάσεων και προβλημάτων. Οι συναρτησιακές σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων που δημιουργούν οι μαθητές μέσα από τον συλλογισμό με τη συμμεταβολή προκύπτουν από τη σύνδεση των τιμών που λαμβάνουν οι ποσότητες καθώς μεταβάλλονται και σύμφωνα με τους περιορισμούς που θέτουν οι ποσοτικές σχέσεις που σχημάτισαν νοητά οι μαθητές (Moore & Carlson, 2012; Thompson & Carlson, 2017). Σκέφτονται δηλαδή πως μεταβάλλονται οι τιμές της μιας ποσότητας και μετά με βάση τη σχέση που φαντάστηκαν ότι συνδέει τις δυο ποσότητες αναζητούν ποιες θα είναι οι αντίστοιχες τιμές της δεύτερης.

2.2.3 Θεωρητική θεμελίωση και ανάλυση της συμμεταβολής

Ο συλλογισμός με βάση τη συμμεταβολή παρότι πρακτικά υπήρχε αρκετά πιο πριν, δεν είχε θεωρητική υπόσταση ως έννοια κάτι το οποίο έγινε για πρώτη φορά στα μέσα του ’90 περίπου από επιστήμονες όπως ο Thompson, η Confrey ο Smith και η Carlson.

Οι Confrey και Smith (1994, 1995) επηρεαζόμενοι από την έρευνά τους σχετικά με τον ρυθμό μεταβολής και τις εκθετικές συναρτήσεις επικεντρώθηκαν στη θεώρηση της συμμεταβολής μέσα από τον συγχρονισμό ή συντονισμό των μεταβολών στις τιμές δυο μεταβλητών. Η προσέγγιση έτσι της συνάρτησης μέσω της συμμεταβολής διαφοροποιούνταν από τον ορισμό της που αναφέρεται στην αντιστοιχία μεταξύ δυο στοιχείων συνόλων. Για παράδειγμα στους πίνακες τιμών αν κάποιος σκέφτεται με τη συμμεταβολή τότε αντιμετωπίζει τη συνάρτηση ως συντονισμό της μεταβολής των τιμών στις στήλες καθώς μετακινείται πάνω ή κάτω στον πίνακα (Confrey & Smith, 1994) αλλά και τις τιμές της κάθε στήλης ως ακολουθίες οι οποίες κατασκευάζονται από κοινού (Confrey & Smith, 1995). Οι μαθητές που δημιουργούν μια συναρτησιακή σχέση σκεπτόμενοι με τη συμμεταβολή είναι ικανοί να αναπτύξουν και τον κανόνα αντιστοιχίας γιατί παρατηρούν για σταθερές σχέσεις στις γειτονικές στήλες του πίνακα τιμών (Confrey & Smith, 1994). Σύμφωνα με τους Thompson και Carlson (2017) όμως η θεώρηση της συμμεταβολής των Confrey και Smith δεν λάμβανε υπόψη τι σκέφτονται οι μαθητές για τις τιμές ενδιάμεσα από εκείνες των κελιών του πίνακα.

Ο Thompson θεώρησε διαφορετικά την έννοια της συμμεταβολής, καθώς ερεύνησε πως οι μαθητές σκέφτονται καταστάσεις αποτελούμενες από ποσότητες, τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων των οποίων οι τιμές μεταβάλλονται και τον ρυθμό μεταβολής τους (Thompson, 1994). Η έννοια της ποσότητας (quantity) δεν ταυτίζεται όμως με εκείνη του αριθμού, αλλά με την έννοια του μεγέθους (magnitude), δηλαδή του χαρακτηριστικού ενός αντικειμένου το οποίο μπορεί να μετρηθεί με τους αριθμούς (Thompson, 1994, 2011; Thompson & Carlson, 2017). Έτσι η συμμεταβολή είναι η νοηματοδότηση αρχικά των τιμών των δυο ποσοτήτων ως μεταβαλλόμενων και στη συνέχεια των αντίστοιχων ποσοτήτων ως ταυτόχρονα μεταβαλλόμενων (Thompson & Carlson, 2017). Επίσης το αλγεβρικό σύμβολο που αντιπροσωπεύει μια ποσότητα μπορεί να έχει το ρόλο μιας σταθεράς, μιας παραμέτρου ή μιας μεταβλητής ανάλογα με το πως ο μαθητής φαντάζεται την μεταβολή της ποσότητας. Σύμφωνα με τον Thompson (1994,2011) στα πλαίσια της μεταβολής η σκέψη των μαθητών διακρίνεται στον ποσοτικό, τον αριθμητικό και τον αλγεβρικό συλλογισμό. Ο ποσοτικός (quantitative reasoning) αναφέρεται στην νοηματοδότηση μιας κατάστασης μέσα από ποσότητες και των μεταξύ τους σχέσεων και παίζει σημαντικό ρόλο στις γενικεύσεις των μαθητών και με τη σειρά τους αυτές είναι σημαντικές για τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης τους. Ο αριθμητικός έχει να κάνει με τον υπολογισμό αυτών των ποσοτήτων και ο αλγεβρικός σχετίζεται με τους αντίστοιχους υπολογισμούς όταν δεν υπάρχουν τιμές για τις ποσότητες (Thompson, 2011). Σύμφωνα με την θεωρία του ποσοτικού συλλογισμού ένας μαθητής σκέφτεται με την συμμεταβολή όταν θεωρεί ότι οι τιμές δυο δοσμένων ποσοτήτων μεταβάλλονται ταυτόχρονα και συνδυάζει στη σκέψη του αυτές τις δυο μεταβολές καθώς συμβαίνουν και για όλες τις ενδιάμεσες τιμές (Thompson & Carlson, 2017). Αυτή η θεώρηση της συμμεταβολής σύμφωνα με τους Saldana και Thompson (1998) συμπληρώνει την θεώρηση των Confrey και Smith (1994) προσθέτοντας ότι ο μαθητής όταν σκέφτεται με τη συμμεταβολή έχει στο μυαλό του μια διαρκή-συνεχή εικόνα των τιμών των δυο ποσοτήτων ενώνοντας αυτές σε ένα πολλαπλασιαστικό αντικείμενο (multiplicative object), στο οποίο για κάθε τιμή της μιας ποσότητας θα υπάρχει μια αντίστοιχη τιμή και για την άλλη ποσότητα. Για να δημιουργηθεί ένα πολλαπλασιαστικό αντικείμενο θα πρέπει ο μαθητής να ενοποιήσει στη σκέψη του τις ιδιότητες των δυο ποσοτήτων και να δημιουργήσει ένα νέο νοητικό αντικείμενο (Thompson & Carlson, 2017). Τη σημασία της δημιουργίας πολλαπλασιαστικού αντικειμένου από τους μαθητές επιβεβαιώνουν και άλλες έρευνες όπως των Stalvey και Vidakovic (2015) όπου χρειάστηκε για να γίνει νοηματοδότηση της συμμεταβολής, να κατασκευαστεί ένα τέτοιο αντικείμενο για δυο ποσότητες. Η μη αντιμετώπιση των σημείων της γραφικής παράστασης ως πολλαπλασιαστικών αντικειμένων είναι πηγή δυσκολιών για αρκετούς μαθητές όταν μελετούν την συμμεταβολή, ενώ όταν συνδυάζουν κατάλληλα τη συμμεταβολή με εκείνα προσφέρεται πυκνότερη νοηματοδότηση της συνάρτησης (Thompson & Carlson, 2017). Η συμμεταβολή σύμφωνα με τους Saldana και Thompson (1998) είναι πιθανόν να εξελίσσεται σε τρία στάδια στην σκέψη των μαθητών, αρχικά γίνεται συντονισμός των τιμών των ποσοτήτων, στη συνέχεια θεωρούν ότι οι τιμές αυτές μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο και τέλος παρατηρούν την ταυτόχρονη μεταβολή των τιμών των δυο ποσοτήτων για κάποιο χρονικό διάστημα νοηματοδοτώντας μέσα από τη συμμεταβολή και την αντιστοιχία.

Από την μεριά της η Carlson ερευνώντας την νοηματοδότηση της συνάρτησης από φοιτητές μέσα από την κατασκευή γραφικών παραστάσεων για δυναμικά ρεαλιστικά φαινόμενα (Carlson, 1998) συνέβαλε και αυτή στην θεωρητική πλαισίωση της έννοιας της συμμεταβολής με διαφορετικό τρόπο από τους προηγούμενους ερευνητές. Στην έρευνά της παρατήρησε ότι αρκετοί μαθητές δεν μπόρεσαν να σχεδιάσουν κατάλληλα τις ζητούμενες γραφικές παραστάσεις και κάποιοι δεν κατάφεραν να βρουν τις συναρτησιακές σχέσεις που συνδέει τα ποσά του υπό μελέτη φαινομένου λόγω της στατικής προσέγγισής του. Για να εξηγήσει τους διάφορους τρόπους σκέψης των φοιτητών με τη συμμεταβολή η ερευνήτρια βασιζόμενη στις προηγούμενες θεωρήσεις των Thompson, Confrey και Smith κατασκεύασε ένα πλαίσιο επιπέδων νοηματοδότησής της, αναπτύσσοντας περαιτέρω τα εξελικτικά στάδια των Saldana και Thompson (1998) και εντάσσοντας παράλληλα και τον ρυθμό μεταβολής στην μελέτη της συμμεταβολής. Τα στάδια του νέου πλαισίου (Carlson et al. , 2002) ήταν:

1) <u>Εξάρτηση</u>: Αναγνώριση ότι οι αλλαγές στην μια μεταβλητή επιφέρουν αλλαγές και στην άλλη.

2) <u>Κατεύθυνση αλλαγής</u>: Διάκριση της κατεύθυνσης της μεταβολής των τιμών (αύξηση ή μείωση) της μιας μεταβλητής σε σχέση με την άλλη.

3) <u>Ποιοτική συσχέτιση</u>: Συσχέτιση του πόσο αλλάζει η μια μεταβλητή σε σχέση με την άλλη.

4) <u>Μέσος ρυθμός μεταβολής</u>: Αναγνώριση του μέσου ρυθμού μεταβολής αυξάνοντας την ανεξάρτητη μεταβλητή ομοιόμορφα.

5) <u>Στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής</u>: Μελέτη του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής αυξάνοντας με συνέχεια την ανεξάρτητη μεταβλητή.

Ο Castillo-Garsow μέσα από την έρευνά του (2012) προσπάθησε να συνεισφέρει στον θεωρητικό ορισμό της συμμεταβολής μελετώντας πιο συγκεκριμένα την έννοια της μεταβολής, τον μηχανισμό της συμμεταβολής και πως λειτουργεί η σκέψη των μαθητών όταν νοηματοδοτούν μέσω αυτών. Διέκρινε ότι οι μαθητές σκέφτονται την μεταβολή μιας ποσότητας είτε διακριτά είτε συνεχώς και όταν σκέφτονται με το συνεχή τρόπο μπορεί να γίνεται είτε χωρίζοντας σε μεγάλα κομμάτια τα οποία θα πρέπει να ολοκληρωθούν για να συμβεί η μεταβολή, είτε σκεπτόμενοι ότι η αλλαγή γίνεται προοδευτικά, συνεχώς σαν να συμβαίνει τη στιγμή που μελετάται. Η σκέψη μιας αλλαγής σε κομμάτια (chunky reasoning) δυσκολεύει όμως την νοηματοδότηση καταστάσεων οι οποίες μεταβάλλονται συνεχώς, καθώς απαιτεί περισσότερη προσπάθεια και χρόνο, ενώ ταυτόχρονα ο μαθητής δεν αποκτά πιο γρήγορα καλή άποψη για την αντίστοιχη γραφική παράσταση (Castillo-Garsow, 2012; Thompson & Carlson, 2017). Αντιθέτως, η ομαλή σκέψη (smooth reasoning) δίνει μια καλύτερη άποψη της μεταβολής και παρέχει πλουσιότερα νοήματα, απαιτώντας όμως πολλούς υπολογισμούς αφού υπάρχουν συνεχώς αλλαγές, οι οποίοι θα μπορούσαν να γίνονται μέσω του Η/Υ δίνοντας μια συνεχή αίσθηση (Castillo-Garsow, 2012; Thompson & Carlson, 2017). Μέσα από τη συγκεκριμένη μελέτη ο ερευνητής συμπέρανε ότι αφού αρκετοί μαθητές δυσκολεύονται λόγω της διακριτής σκέψης, θα είχε αξία να καλλιεργηθούν οι δεξιότητες της ομαλής-συνεχής σκέψης (smooth continuous reasoning) με τη βοήθεια των ψηφιακών τεχνολογιών οι οποίες προσφέρουν την αίσθηση της συνεχούς αλλαγής μέσω διαδραστικών κινούμενων αναπαραστάσεων, οι οποίες μπορούν να υποστηρίξουν πλούσιες μαθηματικές συζητήσεις και μπορούν να οδηγήσουν σε αφαιρέσεις(Castillo-Garsow, 2012).

Οι Thompson και Carlson (2017) διατύπωσαν αργότερα ένα νέο θεωρητικό πλαίσιο για τα επίπεδα τη συλλογιστικής με τη συμμεταβολή το οποίο συνδύασε όλες τις σημαντικότερες μέχρι τότε θεωρήσεις και βασίστηκε στην ποσοτική συλλογιστική και τα πολλαπλασιαστικά αντικείμενα του Thompson, τον συντονισμό των αλλαγών στις τιμές των ποσοτήτων των Confrey και Carlson και τον τρόπο με τον οποίο ένας μαθητής αντιλαμβάνεται ότι μια ποσότητα μεταβάλλεται του Castillo-Garsow. Το πλαίσιο αυτό θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή του τρόπου σκέψης των μαθητών από έναν ερευνητή ή για να χαρακτηριστεί το επίπεδο συλλογισμού με τη συμμεταβολή ενός μαθητή (Thompson & Carlson, 2017). Παρακάτω αναφέρονται τα επίπεδα που διαμόρφωσαν οι συγκεκριμένοι ερευνητές από το πιο χαμηλό στο πιο υψηλό:

Επίπεδο	Συμπεριφορά μαθητή
Απουσία συντονισμού ποσοτήτων	Δεν συσχετίζει καθόλου τις μεταβολές των ποσοτήτων.
Προετοιμασία συντονισμού ποσοτήτων	Αρχίζει να συσχετίζει τις μεταβολές στις τιμές των δυο ποσοτήτων αλλά όχι ταυτόχρονα και δεν δημιουργεί πολλαπλασιαστικά αντικείμενα.
Αόριστος συντονισμός ποσοτήτων	Αντιλαμβάνεται μια γενική εικόνα της μεταβολής μεταξύ των ποσοτήτων και όχι για όλες τις τιμές τους. Συνδέει αμυδρά τις αλλαγές αλλά όχι πολλαπλασιαστικά.
Ρητός συντονισμός ποσοτήτων	Συντονίζει τις τιμές δυο μεταβλητών και δημιουργεί διακριτά ζευγάρια (x,y) χωρίς να εξετάζει τις ενδιάμεσες τιμές.
Κατατμημένη συνεχής συμμεταβολή	Αντιλαμβάνεται τις μεταβολές σε όλες τις τιμές ότι γίνονται ταυτόχρονα και νοηματοδοτεί την συμμεταβολή σε τμήματα χωρίς να φαντάζεται τις μεταβλητές να περνούν απο τις τιμές αυτές.
Ομαλά συνεχής συμμεταβολή	Αντιλαμβάνεται τις μεταβολές σε όλες τις τιμές ότι γίνονται ταυτόχρονα και θεωρεί ότι οι ποσότητες μεταβάλλονται συνεχώς και ομαλά περνώντας από όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

Οι Ellis, Elly, Singleton και Tasova (2020) πρότειναν μια νέα μορφή παραγωγικής σκέψης για την μεταβολή και την συμμεταβολή την οποία ονόμασαν κλιμακούμενη συνεχή σκέψη (scaling continuous reasoning) και η οποία μπορεί να υποστηρίξει τον αλγεβρικό συλλογισμό. Βασίστηκε στον όρο της κλίμακας και της μεγέθυνσης θεωρώντας ότι η γραμμή των πραγματικών αριθμών είναι κάτι το οποίο μπορούμε να μεγεθύνουμε άπειρα και μια μεταβλητή παίρνει όλες τις τιμές της. Επίσης θεώρησαν ότι όσο και να την μεγεθύνουμε δεν γίνεται ποτέ διακριτή, αλλά και ταυτόχρονα μπορούμε να αναπροσαρμόζουμε την κλίμακα για οποιαδήποτε μεταβολή της μιας μεταβλητής συντονίζοντας παράλληλα στην νέα κλίμακα και τις τιμές της δεύτερης μεταβλητής. Η έρευνα των Ellis et al. (2020) επικεντρώθηκε στην μελέτη του τρόπου σκέψης των μαθητών σχετικά με τον ρυθμό μεταβολής συνεχών συναρτήσεων και βασίστηκε στο πλαίσιο των Thompson και Carlson (2017) και Castillo-Garsow (2012) που αφορούσε τη συλλογιστική μέσω της συμμεταβολής.

Η κλιμακωτή συνεχής σκέψη σύμφωνα με τους ερευνητές (Ellis et al., 2020) διαφέρει από τον ομαλό συνεχή συλλογισμό αλλά μοιάζει με τον κατατμημένο συλλογισμό όπως ορίστηκε από τον Castillo-Garsow. Δεν εμπλέκει τις παραμέτρους του χρόνου και της κίνησης όπως στην θεώρηση των Thompson και Carlson, ενώ παράλληλα οι μαθητές αντιμετωπίζουν την αλλαγή σαν να έχει ήδη συμβεί όπως στον κατατμημένο συλλογισμό. Διαφέρει όμως και σε κάποια σημεία με αυτό το είδος συλλογισμού, όπως ότι η βασική ιδέα είναι η μεγέθυνση του συνεχούς διαστήματος και όχι η κίνηση στο διάστημα και η επιλογή ενός τμήματος. Επίσης ενώ ο μαθητής στον κατατμημένο συλλογισμό δεν αντιλαμβάνεται την μεταβολή εντός ενός τμήματος, στην κλιμακωτή συνεχή σκέψη θεωρεί την ύπαρξη αντιστοιχίας μεταξύ των τιμών των δύο τμημάτων σε κάθε κλίμακα κάθε κομματιού, άρα το διάστημα κάθε μεταβλητής αυξάνεται ταυτόχρονα ως αντιστοιχία μεταξύ των προσαυξήσεων των x και y. Η αλλαγή κλίμακας μέσω της αναπροσαρμογής της μεγέθυνσης επιτρέπει την γενίκευση ενός χαρακτηριστικού της συμμεταβολής σε όλες τις κλίμακες, σε αντίθεση με την ύπαρξή του σε ένα τμήμα. Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι κάθε μεταβολή σε μια ποσότητα ακόμη και αν είναι πολύ μικρή αντιστοιχεί σε μια μεταβολή και σε μια άλλη συμμεταβαλόμενη ποσότητα. Κάνοντας ζουμ ή μεγέθυνση οι ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των μεταβολών στην πεπερασμένη κλίμακα περνούν και στην απειροελάχιστη κλίμακα (Ely, 2011). Η κατατμημένη συνεχής συμμεταβολή επιτρέπει στον μαθητή να χωρίσει σε μικρά τμήματα ξανά τις αρχικές μεταβολές και να γίνουν οι αντίστοιχες γενικεύσεις για κάθε τμήμα ξεχωριστά, ενώ η κλιμακωτή συνεχής συμμεταβολή μπορεί να το υλοποιήσει σε απειροελάχιστα μικρά τμήματα μέσω της μεγέθυνσης υποστηρίζοντας τη νοηματοδότηση σημαντικών μαθηματικών εννοιών όπως ο ρυθμός μεταβολής (Ellis et al., 2020).

2.2.4 Γνωστικές δυσκολίες των μαθητών σχετικά με τη συνάρτηση

Η έννοια της συνάρτησης κατέχει κεντρική θέση στη διδακτική των Μαθηματικών (Gagatsis & Shiakalli, 2004) και η πρώτη επαφή γίνεται μέσω της Άλγεβρας, τομέα με αρκετές δυσκολίες στην κατανόηση. Στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών η Άλγεβρα παρουσιάζεται ως συνέχεια της Αριθμητικής προκαλώντας σύγχυση καθώς τα αλγεβρικά δομήματα περιέχουν γενικευμένους αριθμούς οι οποίοι συνδέονται με αφαιρετικό και δυσνόητο τρόπο για τους μαθητές και απαιτούν τη χρήση ενός νέου τρόπου αναπαράστασης (Κυνηγός, 2011; Gagatsis & Shiakalli, 2004). Οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα Μαθηματικά ως αποκομμένα από τις πρακτικές εφαρμογές τους και αρκετές φορές υπάρχει χάσμα μεταξύ της χρήσης του αλγεβρικού τυπικού φορμαλισμού και της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών, δίνοντας έτσι στην

Άλγεβρα περισσότερο έναν ρόλο τελικής λύσης παρά ενός τρόπου σκέψης ή μαθηματικού εργαλείου (Noss, Healy & Hoyles, 1997). Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί συνήθως δίνουν πολύ μεγάλο βάρος στη χρήση αλγεβρικών μεθόδων και τον χειρισμό συμβόλων του τυπικού αλγεβρικού φορμαλισμού, χωρίς όμως να δίνουν την απαιτούμενη σημασία στις υπόλοιπες σημαντικές αναπαραστατικές μορφές όπως οι γραφικές παραστάσεις ή οι πίνακες τιμών της συνάρτησης (Confrey, 1991).

Οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της συνάρτησης στις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου μέσω του θεωρητικού ορισμού των ανώτερων Μαθηματικών που αναφέρεται στην αντιστοιχία μεταξύ στοιχείων δυο συνόλων, χωρίς όμως αυτός ο ορισμός να τους βοηθάει τα μέγιστα ώστε να αντιληφθούν τι είναι και πως χρησιμοποιείται μια συνάρτηση (Thompson & Carlson, 2017; Confrey & Smith, 1994). Στη συνέχεια την μελετούν αποσπασματικά, ενώ μεγαλύτερη σημασία δίνεται στις δυο τελευταίες τάξεις του Λυκείου και έτσι όταν οι μαθητές τελειώνουν το σχολείο αντιμετωπίζουν τις συναρτήσεις περισσότερο στα πλαίσια του χειρισμού αλγεβρικών συμβόλων παρά ως σχέσεις που αναπαριστούν δυναμικές καταστάσεις (Stephens et al., 2017). Μάλιστα, σύμφωνα με τον Vinner (1993) ενώ οι περισσότεροι μαθητές μπορούν να διατυπώσουν τον ορισμό της συνάρτησης, λίγοι μόνο από αυτούς μπορούν να αναγνωρίσουν ποιες σχέσεις αποτελούν συνάρτηση και ποιές όχι. Άρα φαίνεται πως η συγκεκριμένη έννοια δεν μελετάται με συνέχεια οπότε δεν γίνεται κατανόηση της σε βάθος (Sierpinska, 1992) αλλά και γενικότερα το να εμπλέξει με αυτήν ο εκπαιδευτικός τους μαθητές είναι ένα απαιτητικό εγχείρημα (Oehrtman et al. 2008).

Η συνάρτηση μέσα από την έρευνα φαίνεται ότι αποτελεί μια αφηρημένη και πολύπλοκη γενικότερα έννοια για αρκετούς μαθητές στο πλαίσιο των σχολικών Μαθηματικών καθώς η μεταβλητή, ο ρυθμός μεταβολής και οι συναρτησιακές σχέσεις, εμπεριέχουν αφαιρετικότητα που δυσκολεύει τους μαθητές να κατανοήσουν συλλογισμούς που σχετίζονται με γενικευμένα αντικείμενα (Κυνηγός,2011). Η συνήθης αντιμετώπιση της μεταβλητής ως αγνώστου και όχι ως μεταβλητής ποσότητας δεν οδηγεί στην δόμηση πλούσιων νοημάτων για τις συναρτήσεις και έτσι δεν μπορούν να αντιληφθούν την χρησιμότητα του τύπου και της γραφικής παράστασης ως μέσα περιγραφής της σταθερής σχέσης των μεταβλητών (Thompson & Carlson, 2017). Αρκετοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι μαθητές δεν νοηματοδοτούν πλήρως την έννοια της μεταβλητής, γιατί τα Μαθηματικά της τυπικής εκπαίδευσης δίνουν μεγαλύτερη έμφαση σε στατικές μεταβλητές με αποτέλεσμα να μην αντιλαμβάνονται ότι τα αντίστοιχα σύμβολα αντιπροσωπεύουν μεταβλητές ποσότητες ούτε ότι οι παραστάσεις που τις συνδέουν αποτελούν σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων αυτών (Freudenthal, 1982; White & Mitchelmore, 1996). Επιπλέον, η προσέγγιση της μεταβλητής ως μιας ποσότητας που οι τιμές της αλλάζουν φαίνεται πως περιορίζεται όσο οι μαθητές προχωρούν σε μεγαλύτερες τάξεις (Trigueros & Ursini, 1999). Συχνά στα σχολικά μαθηματικά σύμφωνα με την έρευνα των Noss et al. (1997) οι εκπαιδευόμενοι επικεντρώνονται στις αριθμητικές τιμές μιας ποσότητας και στην αναγνώριση μοτίβων σε αυτές, χωρίς όμως να δίνεται η απαραίτητη σημασία στη βαθύτερη διερεύνηση της σχέσης που τις συνδέει μεταξύ τους αλλά και της συναρτησιακής σχέσης που μπορεί να έχει με μια άλλη ποσότητα. Τα ευρήματα των συγκεκριμένων επιστημόνων δείχνουν ότι οι μαθητές μπορεί να αναγνωρίζουν κάποια συγκεκριμένα παραδείγματα αριθμητικών μοτίβων, αλλά δυσκολεύονται στο να εκφράσουν αλγεβρικές και συναρτησιακές σχέσεις σχετικά με αυτά καθώς και να επιχειρηματολογήσουν με κατάλληλο μαθηματικό τρόπο τις ενέργειές τους που συνδέονται με τον αλγεβρικό φορμαλισμό. Έτσι δυσκολεύονται να συνδέσουν στον πίνακα τη σχέση που έχουν οι τιμές ανά στήλη (recurrence) με τη σχέση που έχουν ανά γραμμή (functional) και δίνεται μεγαλύτερο βάρος στην δεύτερη (Noss et al.,1997).

Αρκετές φορές συγχέεται η έννοια της συνάρτησης με εκείνη της εξίσωσης, επειδή η συνήθης προσέγγιση είναι οι μαθητές να χωρίζουν σε γνωστούς και αγνώστους, αλλά επίσης δυσκολεύονται στο να ξεχωρίσουν ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή καθώς και τι αντιπροσωπεύει το σύμβολο f(x) (Sierpinska, 1992; Carlson, 1998). Δυσκολίες παρουσιάζονται με τη νοηματοδότηση της ανεξάρτητης μεταβλητής καθώς σύμφωνα με ερευνητές οι μαθητές δεν έχουν σχηματίζει τις κατάλληλες νοητικές εικόνες για τη συνάρτηση και όταν συναντούν μια, αντιμετωπίζουν τα δυο μέλη αποκομμένα τους, χωρίς να κάνουν την απαραίτητη σύνδεση μεταξύ τους αλλά και ούτε μεταξύ των μεταβλητών (Lagrange & Psycharis, 2014; Thompson & Carlson, 2017). Σύμφωνα με τη Sfard (1991) οι μαθητές αρκετές φορές δεν κατανοούν σε βάθος την συνάρτηση επειδή δεν συνδέουν κατάλληλα τις αναπαραστατικές μορφές της με την έννοια της, όπως για παράδειγμα μπορεί να αντιλαμβάνονται τον τύπο της συνάρτησης ως απλά μια αντιστοιχία εισόδου-εξόδου. Δηλαδή αναπτύσσουν δεξιότητες χειρισμού των αλγεβρικών συμβόλων αλλά δεν νοηματοδοτούν πλήρως την δομή και την λειτουργία της εκάστοτε συναρτησιακής σχέσης. Δίνεται δηλαδή υπερβολική έμφαση στην αλγεβρική θεώρηση της συνάρτησης σε βάρος των υπόλοιπων ερμηνειών της, οι οποίες δεν χρησιμοποιούνται όσο θα έπρεπε (Lagrange, 2014). Επιπλέον, η έρευνα έχει δείξει ότι κάποιοι μαθητές αντιμετωπίζουν εμπόδια στην κατανόηση της συνάρτησης που οφείλονται στην ελλιπή νοηματοδότηση της γλώσσας, του τρόπου συμβολισμού και της σχέσης εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών (Carlson, 1998).

Η συμμεταβολή είναι θεμελιώδης τρόπος σκέψης για την μαθηματική ανάπτυξη, όμως δεν αξιοποιείται στην έννοια της συνάρτησης από τα σχολικά Μαθηματικά και για αυτό προκαλούνται δυσκολίες στην κατανόησή της (Thompson & Carlson, 2017). Αρκετές φορές οι μαθητές δεν καταλαβαίνουν ότι ένα μέγεθος μπορεί να εκφραστεί σε συνάρτηση ενός άλλου, δυσκολεύονται να ερμηνεύσουν τον ρυθμό μεταβολής ή πως επηρεάζει η αλλαγή της τιμής μιας μεταβλητής την άλλη (Thompson & Carlson, 2017).

Η έννοια της συνάρτησης συνδέεται με πολλούς τρόπους αναπαράστασης οι οποίοι προσφέρουν διαφορετικές πληροφορίες ο καθένας και αλληλοσυμπληρώνονται και συνδυάζονται ώστε να την περιγράψουν πλήρως (Gagatsis & Shiakalli, 2004). Ένα από τα σημαντικά προβλήματα ωστόσο είναι η στατικότητα των παραδοσιακών μέσων αναπαράστασης (χαρτί-μολύβι / κιμωλία-πίνακας / λεκτική αναπαράσταση-συμβολισμοί), καθώς ο μαθητής δεν μπορεί να διαδράσει και να πειραματιστεί και επιπλέον τα μέσα αυτά απαιτούν αφαιρετικές δεξιότητες για την αναπαράσταση των αλγεβρικών εννοιών (Kaput, 1999; Κυνηγός,2011). Άρα προκύπτει δυσκολία στη νοηματοδότηση των πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης της συνάρτησης, στη μεταξύ τους σύνδεση καθώς και στην μετάβαση από την μια στην άλλη (Elia et al., 2008; Sierpinska, 1992), επειδή σύμφωνα με έρευνες υπάρχουν δυσκολίες στον συντονισμό των αντιλήψεων απο τους μαθητές σε διαφορετικά περιβάλλοντα (Bloch, 2003) και στην αντιμετώπιση των αναπαραστάσεων μιας έννοιας με διαφορετικές μεθόδους (Duval, 2006). Έτσι οι μαθητές συνήθως αναγνωρίζουν τη συνάρτηση σε μια μόνο αναπαράστασή της (Zachariades et al., 2023) όμως η βαθύτερη κατανόηση της συνάρτησης απαιτεί την ικανότητα αναπαράστασής της με διαφορετικούς τρόπους (λεκτικά, αλγεβρικά, γραφικά, με πίνακα τιμών), την ορθή ερμηνεία των πληροφοριών τους και την ευελιξία μετακίνησης από την μια μορφή στην άλλη. Τέλος σύμφωνα με ερευνητές εμπόδια στη νοηματοδότηση της συνάρτησης προκύπτουν συνήθως και από την διακριτή μελέτη των στιγμιότυπων της, μέσω διακεκριμένων σημείων τα οποία ενώνονται χωρίς να μελετώνται όμως τι συμβαίνει στα ενδιάμεσα (Thompson & Carlson, 2017).

Σύμφωνα με τον Kaput (1992) αρκετοί μαθητές δεν ερμηνεύουν σωστά τις γραφικές παραστάσεις επειδή ταυτίζουν το σχήμα τους με τη συμπεριφορά των καταστάσεων ή των φαινομένων που αναπαριστούν και όχι με την σχέση μεταξύ των μεταβλητών.Οι μαθητές δεν έχουν ευχέρεια στην αναπαράσταση πραγματικών προβλημάτων μέσω της αλγεβρικής ή της γραφικής μορφής της συνάρτησης (Carlson, 1998).

2.3 Μαθηματικά και παραδοσιακό μοντέλο εκπαίδευσης

Στο παραδοσιακό μοντέλο εκπαίδευσης τα Μαθηματικά συνήθως προβάλλονται ως ένα επεκτεινόμενο δίκτυο αδιάψευστων αληθειών (Lakatos, 1976) αποκρύπτοντας έτσι ένα σημαντικό μέρος της προέλευσης και του πλούτου των εννοιών (Confrey et al., 1991). Ο κύριος στόχος είναι η αποστήθιση ορισμών, θεωρημάτων και μεθοδολογιών που θα είναι χρήσιμες για τις εξετάσεις. Οι μαθητές όμως δυσκολεύονται να κατανοήσουν πολλές μαθηματικές έννοιες γιατί δεν αντιλαμβάνονται την πρακτική τους χρησιμότητα λόγω του ότι τα Μαθηματικά δεν αποτελούν μέρος του πραγματικού και του κοινωνικού τους κόσμου (Kaput, 1999) και συναντούν εμπόδια στην κατανόηση του τυπικού μαθηματικού φορμαλισμού λόγω των στατικών παραδοσιακών μέσων (Ferrara et al., 2006) τα οποία δεν ενθαρρύνουν όσο θα έπρεπε την δημιουργία μαθηματικών νοημάτων από τους ίδιους τους μαθητές (Noss et al., 1997). Αυτό συμβαίνει γιατί η ανάπτυξη των αλγεβρικών μορφών αναπαράστασης έγινε με αδρανή μέσα, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η δυνατότητα εκμάθησης τους από όλους και οι μαθηματικές μέθοδοι βασίστηκαν στο συμβολισμό που ανέπτυξαν οι επιστήμονες αποτελώντας παράλληλα συστατικό ακαδημαϊκής επιτυχίας για τους μαθητές αλλά και εμπόδιο για εκείνους (Kaput et al., 2002).

Οι σημαντικές αλλαγές και ευκαιρίες που προσφέρουν οι ψηφιακές τεχνολογίες σύμφωνα με ερευνητές δεν έχουν αξιοποιηθεί στον αναμενόμενο βαθμό στην εκπαίδευση και ειδικότερα στα Μαθηματικά (Kaput et al., 2002). Επιπλέον τα εκπαιδευτικά συστήματα δεν μπορούν να ακολουθήσουν τον ρυθμό εξέλιξης της τεχνολογίας και της κοινωνίας καθώς είναι προσκολλημένα στο παραδοσιακό μοντέλο του περασμένου αιώνα (Κυνηγός, 2011). Οι μαθητές μας όμως είναι η λεγόμενη <<ψηφιακή γενιά>> και έχουν διαφορετικό τρόπο σκέψης και μάθησης με αποτέλεσμα οι μέθοδοι που εφαρμόζονται να είναι ξεπερασμένες και αδιάφορες για εκείνους (Prensky, 2001). Συνέπεια όλων αυτών είναι ο χώρος της εκπαίδευσης να δέχεται έντονες πιέσεις για αλλαγές (Laurillard, 2012), επειδή οι νέες τεχνολογίες επηρεάζουν τι θα πρέπει να γνωρίζουν οι άνθρωποι καθώς και πως μπορούν να εκφράσουν τη γνώση αυτή (Kaput et al., 2002).

Υπάρχει όμως μια σημαντική διέξοδος αντιμετώπισης μέσα από την ενσωμάτωση στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, δράσεων που θα δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να εμπλακούν ενεργά σε διερευνητικές δραστηριότητες με προσωπικό ενδιαφέρον οι οποίες έχουν σχεδιαστεί με κατάλληλα ψηφιακά εργαλεία (Κυνηγός, 2011). Έτσι η γνώση που εκφράζεται στατικά με τα παραδοσιακά μέσα αναμένεται να γίνει πιο προσιτή (learnable) σε περισσότερους, μέσα από τις νέες αναπαραστατικές υποδομές και τα συστήματα μάθησης που διαμορφώνονται γύρω από αυτά (Kaput et al., 2002). Σκοπός σήμερα είναι ο εκπαιδευτικός να μπει στο νέο ρόλο του σχεδιαστή δραστηριοτήτων οι οποίες προωθούν τον πειραματισμό, την διατύπωση υποθέσεων, τη συνεργασία, την κατασκευή και τη διασκευή στα πλαίσια της θεωρίας του Constructionism. Οι μαθητές θα πρέπει να αποκτήσουν ένα πιο ενεργό και δημιουργικό ρόλο και να αναπτύξουν δεξιότητες του 21ου αιώνα όπως κριτική σκέψη, συνεργασία, επικοινωνία, και δημιουργικότητα, κατασκευάζοντας μαθηματικές ιδέες καθώς εμπλέκονται σε μια ενδιαφέρουσα διαδικασία με νόημα για τους ίδιους.

2.4 Ψηφιακές τεχνολογίες και Διδακτική των Μαθηματικών

2.4.1 Η ανάγκη για μετασχηματισμό στην μαθηματική εκπαίδευση

Τα μαθηματικά νοήματα προκύπτουν μέσα από τη σύνδεση παλαιών και νέων γνώσεων σε ένα ενιαίο σύστημα καθώς και από εξωτερικούς παράγοντες όπως το περιβάλλον στο οποίο ενσωματώνονται (Noss et al., 1997). Η διδακτική των Μαθηματικών ασχολείται με τη διδασκαλία και την μάθηση των μαθηματικών αναπαραστατικών συστημάτων όπως η Αριθμητική, η Άλγεβρα και η Ανάλυση, ως μηχανισμών που θα πρέπει να κατανοηθεί ο τρόπος λειτουργίας τους (Kaput et al., 2002) και γενικότερα επικεντρώνεται στο πως οι μαθητές δημιουργούν και εξελίσσουν την μαθηματική τους σκέψη, δρώντας στο κοινωνικό περιβάλλον της σχολικής τάξης. Στόχος της είναι η ανάπτυξη εκπαιδευτικών μεθόδων, οι οποίες καλλιεργούν τον μαθηματικό τρόπο σκέψης και έκφρασης στους εκπαιδευόμενους ως μέρος του πολιτισμού μας (Κυνηγός, 2011).

Είναι σημαντικό όμως στη Διδακτική των Μαθηματικών να λάβουμε υπόψη τα θεωρητικά μοντέλα μάθησης που υποστηρίζουν την ενσωμάτωση της τεχνολογίας, επειδή η εξέλιξη της επηρεάζει ιδιαίτερα την εκπαίδευση (Prensky, 2001) και της παρέχει σημαντικές προοπτικές όταν οι εκπαιδευτικοί επιμορφώνονται στη χρήση ψηφιακών εργαλείων ώστε να αξιοποιηθούν με σκοπό την παιδαγωγική καινοτομία (Laurillard, 2012). Όπως προτείνουν οι Kaput et al. (2002) η κατανόηση των Μαθηματικών καλό θα είναι να συμβαίνει μέσα από την κατασκευή και την ερμηνεία μαθηματικών δομημάτων τα οποία οι μαθητές εξερευνούν με τις τεχνολογίες μέσα στα πλαίσια ανάλυσης του τρόπου λειτουργίας τους. Όταν οι εκπαιδευτικές ψηφιακές τεχνολογίες αξιοποιούνται κατάλληλα, τότε οι μαθηματικές έννοιες προσεγγίζονται με μεθόδους οι οποίες προσφέρουν περισσότερες ευκαιρίες για ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης (Sacristán et al., 2009), είναι πιο εκφραστικές, πιο προσιτές και παρέχουν πλουσιότερη νοηματοδότηση για τους ίδιους τους μαθητές (Noss et al., 1997).

Η κυρίαρχη θεωρία μάθησης που εντάσσει αποτελεσματικά την ψηφιακή τεχνολογία στην Διδακτική Μαθηματικών είναι εκείνη του Constructionism από τον Papert (1972,1993) η οποία επικεντρώνεται στα νοήματα που μπορεί να δομήσει ένα παιδί μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένα ψηφιακά περιβάλλοντα, στον τρόπο που τα νοήματα αυτά εξελίσσονται καθώς και στο πως μπορεί να βελτιωθεί η μάθηση μέσα από την αύξηση του κινήτρου των μαθητών και την παροχή ανατροφοδότησης χωρίς την επικριτική έννοια του λάθους. Υποστηρίζει ότι η πνευματική ανάπτυξη πρέπει να βασίζεται στις εμπειρίες του μαθητή και μελετά πως η σκέψη αυτή αναπτύσσεται καθώς εκείνος <<κάνει>> Μαθηματικά. Σε αντίθεση με τον Piaget ο Papert δεν επικεντρώθηκε ιδιαίτερα στη γνωστική ωρίμανση του μαθητή και στο τι δεν είναι ικανός να κάνει στα αντίστοιχα στάδια της γνωστικής του εξέλιξης, αλλά στο τι μπορεί να κάνει ο μαθητής επιπλέον υποστήριξε και ότι τα παιδιά μπορούν να συλλογιστούν σε υψηλότερο επίπεδο από ότι πιστεύεται αν χρησιμοποιηθούν κατάλληλα υπολογιστικά περιβάλλοντα που θα προσφέρουν πλούσιες εμπειρίες νοηματοδότησης μαθηματικών ιδεών. Μέσω της κατάλληλης τεχνολογίας οι μαθητές μπορούν να εκφράσουν πολλές μαθηματικές έννοιες, να διερευνήσουν, να πειραματιστούν, να δημιουργήσουν, να αναπτύξουν επιχειρήματα, να μαστορέψουν, να συνεργαστούν και να δράσουν εντός κοινωνικών ομάδων μάθησης (Κυνηγός, 2011). Ο μαθητής δηλαδή μέσα σε ένα τέτοιου είδους μαθησιακό περιβάλλον εμπλέκεται ενεργά, χρησιμοποιώντας τα Μαθηματικά για να κάνει κάτι, ενώ εκείνα αποκτούν νόημα για τον ίδιο και αποτελούν μια πηγή δύναμης (Papert, 1993, 1972).

2.4.2 Τα εργαλεία για την υποστήριξη της Διδακτικής των Μαθηματικών και η δυναμική τους

Τα τελευταία χρόνια έχουν κάνει την εμφάνισή τους εκπαιδευτικά εργαλεία που επιδιώκουν ένα βιωματικό τύπο μάθησης και προωθούν τη διερεύνηση, τον πειραματισμό και την ενίσχυση της επικοινωνίας μέσω της συνεργασίας (Κυνηγός, 2011).

Τα σημαντικότερα εργαλεία απο αυτά χωρίζονται στις εξής κατηγορίες:

- Συμβολικής έκφρασης (ή προγραμματισμού όπως το MaLT)
- Δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων (όπως το Cabri ή το GeoGebra)
- Χειρισμού αλγεβρικών ψηφιακών συστημάτων- CAS (όπως το Function probe ή το GeoGebra)
- Διαχείρισης δεδομένων-ταξινόμησης (όπως το Ταξινομούμε και το Sorbet)
- Προσομοίωσης μοντέλων και καταστάσεων (όπως το Modelus ,το PhET ή το GeoGebra)

Η τεχνολογία υπό προϋποθέσεις μπορεί να αλλάξει το πως διδάσκονται τα Μαθηματικά, τι μπορούν να μάθουν και να κάνουν οι μαθητές καθώς προσφέρουν νέες δυνατότητες, ώστε να δομήσουν και να εξερευνήσουν οι ίδιοι την μαθηματική γνώση (Sacristán et al., 2009). Η εξέλιξη των υπολογιστικών μέσων παρέχει τη δυνατότητα να αναπτυχθούν νέα ισχυρότερα αναπαραστατικά συστήματα στα Μαθηματικά τα οποία έχουν τη δυνατότητα να εξωτερικεύσουν πτυχές της γνώσης, να καλλιεργήσουν δεξιότητες που δεν είναι προσιτές από όλους αλλά και να διευρύνουν τις δυνατότητες νοηματοδότησης του ατόμου (Kaput et al., 2002). Τα νέα ψηφιακά εργαλεία έχουν διαμεσολαβητικό ρόλο στην μάθηση καθώς ο εκπαιδευόμενος αλληλεπιδρά με εκείνα κατά τη διάρκειά της (Vygotsky, 1981), μέσα από την εξερεύνηση και τον πειραματισμό με τέτοιου είδους περιβάλλοντα μπορεί να καλλιεργήσει ανώτερη συλλογιστική στα Μαθηματικά (Drier, 2000), να εκφραστεί γύρω από αυτά αλλά και να αναπτύξει σημαντικές μαθηματικές ιδέες (Hoyles, 1993).

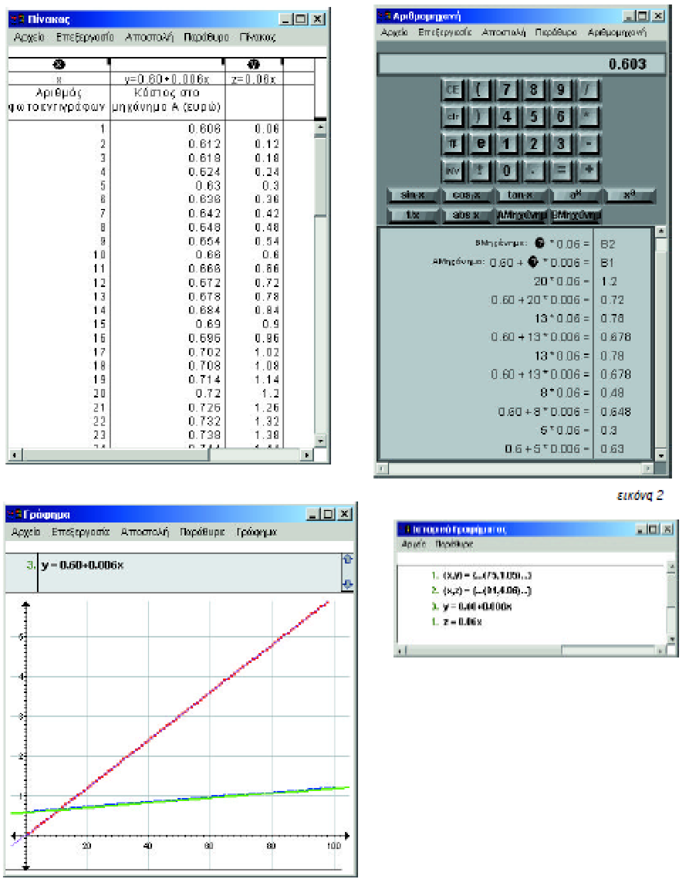
Μέσα στα κατάλληλα σχεδιασμένα ψηφιακά μαθησιακά περιβάλλοντα, τα οποία οι Noss και Hoyles ονομάζουν μικρόκοσμους και τα οποία ενισχύουν την μελέτη της μαθησιακής συμπεριφοράς και της δόμησης νοημάτων, οι μαθητές είναι ικανοί να οδηγηθούν σε αφαιρέσεις (Noss & Hoyles, 1996; Noss et al., 1997) και να συγχρονίσουν τις πρόχειρες και αυθόρμητες ιδέες τους με τις τυπικές μαθηματικές θεωρίες (Sacristán et al., 2009). Ως αφαίρεση στα υπολογιστικά περιβάλλοντα οι Noss et al. (1997) δηλαδή ορίζουν τη διαδικασία δόμησης νέων νοημάτων πάνω στα παλαιότερα μέσα από δραστηριότητες που δίνουν έμφαση στη σύνδεση της γνώσης με τα οπτικά ερεθίσματα του εργαλείου και την επέκταση και ανακατασκευή των προϋπαρχουσών εννοιών. Μέσα από τον αναστοχασμό που προκύπτει από την εμπλοκή του χρήστη με τις λειτουργικότητές τους, τα ψηφιακά εργαλεία ωθούν σε μια τέτοια διαδικασία επειδή προσφέρουν τους κατάλληλους πόρους οι οποίοι επιτρέπουν τις αφαιρέσεις. Άρα σε ένα τέτοιο περιβάλλον αφαίρεσης μια μαθηματική ιδέα μπορεί να γίνει πιο άμεσα ορατή στον μαθητή και στη συνέχεια εκείνος να αρχίσει να δομεί άλλες ιδέες βασιζόμενος στο περιβάλλον του εργαλείου, κάνοντας εγκαθιδρυμένες αφαιρέσεις (Noss & Hoyles, 1996). Οι ίδιοι ερευνητές τονίζουν ότι οι τρόποι με τους οποίους οι μαθητές δομούν μαθηματικές ιδέες εξαρτώνται άμεσα από το περιβάλλον στο οποίο αυτό συμβαίνει καθώς και από τους πόρους που διατίθενται για την έκφραση των μαθηματικών ιδεών.

Οι ψηφιακές τεχνολογίες προσφέρουν εργαλεία και λειτουργικότητες μέσα από τις οποίες η δραστηριότητα και η εξερεύνηση των μαθητών συνδέεται με τον τυπικό φορμαλισμό και η εκφραστική τους ικανότητα αυξάνεται μέσα από το λεξιλόγιο που αναπτύσσουν κατά την χρήση του εργαλείου με αποτέλεσμα να επικοινωνούν μαθηματικές ιδέες που χωρίς αυτό δεν θα μπορούσαν (Sacristán et al., 2009). Επιπλέον μπορούν να τον διευκολύνουν να κατανοήσει ένα δύσκολο αναπαραστατικό σύστημα όπως ο τυπικός μαθηματικός φορμαλισμός μέσω των καινοτόμων λειτουργικοτήτων που διαθέτουν (Ferrara et al., 2006). Οι δυνατότητες της διαδραστικότητας και του δυναμικού χειρισμού πολλαπλών αλληλοσυνδεμένων αναπαραστάσεων αναβαθμίζουν την προσφορά της διδακτικής στην μαθησιακή διαδικασία και ωθούν σε διερεύνηση και πειραματισμό (Κυνηγός, 2011, Kafetzopoulos & Psycharis, 2022) χωρίς να υπάρχει η έννοια του λάθους, αλλά της δοκιμής και της βελτίωσης (Ferrara et al., 2006). Λογισμικά με τα χαρακτηριστικά που προαναφέρθηκαν εμπλέκουν ενεργά τους μαθητές (Hoyles & Noss, 2003), παρέχοντας ευκαιρίες για μάθηση με νόημα για τους μαθητές στα Μαθηματικά (Sacristán et al., 2009), επιτρέπουν να αναδυθούν οι πολλαπλές πτυχές μιας έννοιας (Κυνηγός,2011) και επίσης μπορούν να συμβάλλουν ώστε να ξεπεραστούν οι γνωστικές δυσκολίες μέσω της δυνατότητας μετασχηματισμού του τρόπου που οι μαθηματικές έννοιες χρησιμοποιούνται από τους εκπαιδευόμενους (Ferrara et al., 2006). Τα νέα μέσα μάθησης που ενσωματώνουν οι ψηφιακές τεχνολογίες βοηθούν στην καλλιέργεια ικανοτήτων και της διαισθητικής/αυθόρμητης σκέψης αυξάνοντας έτσι δυναμικά την συλλογιστική και την νοηματοδότηση γύρω από μαθηματικές έννοιες (Sacristán et al., 2009). Είναι σημαντικό όμως να μην εγκαταλείψουμε αλλά να εμπλουτίσουμε τις παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας με διερευνητικές δραστηριότητες που σχεδιάζονται με εκπαιδευτικά εργαλεία ώστε να δημιουργηθούν πολλαπλά περιβάλλοντα μάθησης (Ferrara et al., 2006). Επίσης είναι απαραίτητο οι εκπαιδευτικοί να είναι κατάλληλα καταρτισμένοι, τα ψηφιακά εργαλεία να ενσωματώνουν πρόσθετη παιδαγωγική αξία και να προσφέρουν βαθιά πρόσβαση στον χρήστη (Κυνηγός, 2011). Τέλος σύμφωνα με την Confrey (1991) είναι απαραίτητο οι παιδαγωγικοί στόχοι να καθοδηγούν τις καινοτομίες στην τεχνολογία που σχετίζεται με την εκπαίδευση και να καθορίζουν εάν ένα εργαλείο είναι κατάλληλο να εισαχθεί στην εκπαιδευτική διαδικασία, η τεχνολογία δηλαδή πρέπει να εισάγεται ως εργαλείο και όχι ως αυτοσκοπός. Όπως συμπληρώνει η ίδια ερευνήτρια ένα κατάλληλα σχεδιασμένο καινοτόμο ψηφιακό εργαλείο μπορεί να μετασχηματίσει και να αναζωογονήσει τη διδασκαλία και την μάθηση των σχολικών Μαθηματικών.

2.5 Έρευνα για την προσέγγιση της συνάρτησης μέσω ψηφιακών εργαλείων

Ερευνητές της εκπαίδευσης όπως οι Kaput, Hoyles, Noss και Lagrange ασχολήθηκαν με την αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών στην Άλγεβρα, αναζήτησαν νέες μεθόδους οι οποίες θα καταστήσουν πιο προσιτά τα Μαθηματικά και προσπάθησαν να δημιουργήσουν μέσω των ψηφιακών εργαλείων τις κατάλληλες αναπαραστατικές υποδομές ώστε να τις υποστηρίξουν (Lagrange, 2014). Σύμφωνα με αυτούς θα πρέπει να εκδημοκρατιστούν και να καταστούν πιο κατανοητές οι πολύπλοκες μαθηματικές ιδέες στους μαθητές καθώς και ότι οι δυσκολίες που υπάρχουν στην νοηματοδότηση των εννοιών οφείλονται και στον τρόπο αναπαράστασής τους (Hoyles, Lagrange & Noss, 2006). Οι αλγεβρικές αναπαραστάσεις με χαρτί-μολύβι απαιτούν από τους μαθητές μεγαλύτερη προσοχή στον χειρισμό των αλγεβρικών συμβόλων, έτσι όμως οι έννοιες είναι προσιτές πιο πολύ σε εκείνους που είναι ήδη εξοικειωμένοι με τον τυπικό αλγεβρικό φορμαλισμό. Οι ψηφιακές τεχνολογίες σε αντίθεση μπορούν σε μεγάλο βαθμό να αλλάξουν και να μετασχηματίσουν την εκπαιδευτική διαδικασία και την παιδαγωγική (Noss & Hoyles, 2008), ενισχύοντας παράλληλα την μαθησιακή ικανότητα (Hoyles et al., 2006). Οι νέες αναπαραστατικές υποδομές και οι πολλαπλές αναπαραστάσεις που προσφέρουν παίζουν σημαντικό ρόλο και βελτιώνουν την μαθησιακή δραστηριότητα σε σχέση με τις παραδοσιακές μεθόδους προσφέροντας νέες ευκαιρίες νοηματοδότησης στους μαθητές που δυσκολεύονται με αυτές (Noss & Hoyles, 1996).

Ειδικότερα τα νοήματα που δομούνται γύρω από τη συνάρτηση ποικίλουν ανάλογα με την αναπαράσταση που χρησιμοποιεί ο μαθητής και η μετάβαση μεταξύ των αναπαραστάσεων της ευνοεί τον συνδυαστικό συλλογισμό αυτών των νοημάτων καθώς και των ιδεών που την περιβάλλουν (Confrey, 1991). Ένα από τα πρώτα και σημαντικά ψηφιακά εκπαιδευτικά εργαλεία που αναπτύχθηκαν για την μελέτη των συναρτήσεων είναι το Function Probe από την ερευνήτρια Jere Confrey και τους συνεργάτες της στα τέλη της δεκαετίας του 1980 και στις αρχές του 1990. Το συγκεκριμένο λογισμικό αποτελεί ένα διερευνητικό εργαλείο πολλαπλών αναπαραστάσεων το οποίο συνδυάζει τις γραφικές παραστάσεις, τους πίνακες, τον αλγεβρικό συμβολισμό και μια μηχανή υπολογισμού, δίνοντας παράλληλα την ευκαιρία στους μαθητές να μελετήσουν βαθύτερα και να εκφραστούν για την έννοια της συνάρτησης (Confrey, 1991). Απευθύνεται κυρίως στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, μπορεί να αξιοποιηθεί σε διάφορους τομείς των Μαθηματικών και σχεδιάστηκε με στόχο να ενθαρρύνει τους μαθητές να αναπτύξουν προηγμένη μαθηματική σκέψη μέσα από την εξερεύνηση και την μοντελοποίηση ρεαλιστικών προβλημάτων βασισμένα σε οικείες καταστάσεις για εκείνους, χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις και τις πολλαπλές αναπαραστάσεις τους (Confrey & Maloney, 1996).



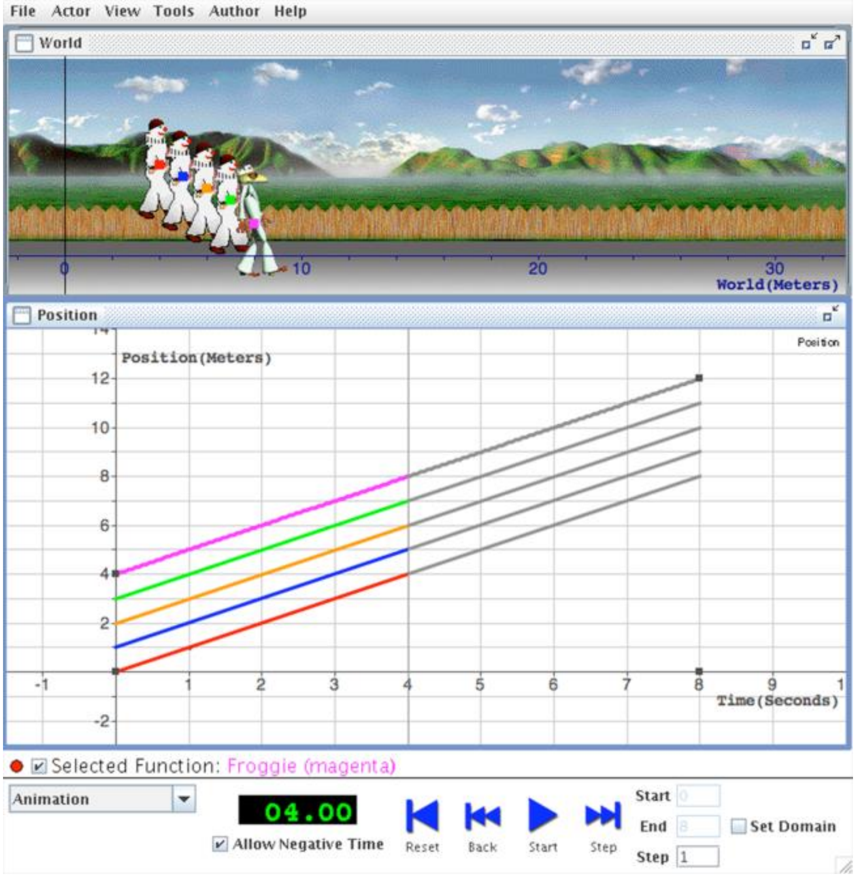
Εικόνα 1 Το λογισμικό Function Probe

Σύμφωνα με την Confrey (1991) τα σχολικά Μαθηματικά επικεντρώνονται στην θεωρία και τον αλγεβρικό χειρισμό επειδή διδάσκονται συνήθως αποκομμένα από τις πρακτικές τους εφαρμογές, όμως μέσα από το Function Probe προσπάθησε να δημιουργήσει ένα εργαλείο που να προσεγγίζει διαφορετικά την μάθηση και να εισάγει σε νέες μαθηματικές ιδέες μέσα από πραγματικά παραδείγματα και την ενεργή κατασκευή των μαθηματικών νοημάτων από τους μαθητές. Ο σχεδιασμός του επιπλέον βασίστηκε σε αρχές όπως η δομική προσέγγιση της μάθησης, η ισότιμη χρήση όλων των αναπαραστάσεων της συνάρτησης, η ενίσχυση της ενεργής εμπλοκής και της έκφρασης των μαθητών αλλά και η καλλιέργεια της συνεργασίας μεταξύ τους (Confrey & Maloney, 1996). Το περιβάλλον του Function Probe διαθέτει τρείς διαφορετικές λειτουργικότητες, το γράφημα, τον πίνακα και την αριθμομηχανή που παρουσιάζονται σε ξεχωριστά παράθυρα, όμως αποτελούν αλληλεξαρτώμενα εργαλεία καθώς συνδέονται και επικοινωνούν μεταξύ τους, δίνοντας τη δυνατότητα στον χρήστη να στέλνει δεδομένα από το ένα στο άλλο και να συντονίζει τις δράσεις του στις συναρτήσεις μέσω των πολλαπλών αναπαραστάσεων (Confrey, 1991).

Μέσα από την έρευνα της Confrey προέκυψαν ενδείξεις ότι η χρήση εργαλείων με τα χαρακτηριστικά του Function Probe σε συνδυασμό με την κατάλληλη διαχείριση από τον εκπαιδευτικό καθώς και την απαιτούμενη επιμόρφωσή του, προσφέρουν την ευκαιρία στους μαθητές να συνδέσουν τις πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης, να νοηματοδοτήσουν τις μεταξύ τους σχέσεις και να μελετήσουν ταυτόχρονα τους μετασχηματισμούς που συμβαίνουν σε όλες τους καθώς μεταβάλλουν τις παραμέτρους σε μια από αυτές. Έτσι είναι ικανοί να δομήσουν ισχυρά νοήματα γύρω από τη συνάρτηση, μέσα από την πλούσια ανατροφοδότηση, η οποία ωθεί σε πιο αποτελεσματικό αναστοχασμό, καθώς και τον συντονισμό των αναπαραστάσεων. Μέσα από την εμπλοκή με ένα ρεαλιστικό πρόβλημα με νόημα, τον εμπλουτισμό του με μαθηματικές αρχές και το συλλογισμό γύρω από τις αναπαραστάσεις που δημιουργούνται οι μαθητές αναπτύσσουν μαθηματικές ιδέες με προσωπικό νόημα. Υπάρχουν ενδείξεις ότι οι εκπαιδευόμενοι προτιμούν να χρησιμοποιούν τον πίνακα ως πρώτη αναπαράσταση της συνάρτησης και την γραφική παράσταση ως δεύτερη, έχοντας την ικανότητα να συνδέουν τις αριθμητικές τιμές που προκύπτουν με το γράφημα, νοηματοδοτώντας έτσι την κλίση και τον ρυθμό μεταβολής. Επίσης μέσα από την εύκολη και γρήγορη σχεδίαση των γραφικών παραστάσεων μέσω του λογισμικού ωθούνται οι μαθητές να εξετάσουν πιο αποτελεσματικά τα ποιοτικά τους χαρακτηριστικά. Η διερεύνηση πραγματικών προβλημάτων μέσω του εργαλείου και τα αποτελέσματα που προκύπτουν, βοηθούν τους μαθητές όταν επιλύουν αντίστοιχα προβλήματα εντός της παραδοσιακής τάξης καθώς αφομοιώνουν πιο αποτελεσματικά τις μεθόδους επίλυσης που χρησιμοποίησαν στο ψηφιακό περιβάλλον.

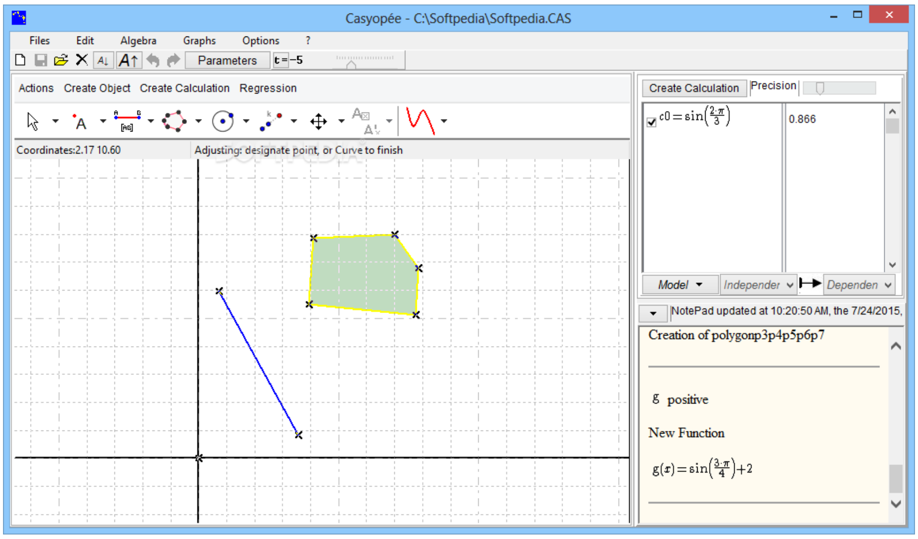
Το λογισμικό SimCalc MathWorlds αποτελεί ένα επιπλέον σημαντικό ψηφιακό εργαλείο το οποίο δημιουργήθηκε από τον ερευνητή James Kaput και μέσα από αυτό μαθητές χωρίς εμπειρία στην Άλγεβρα και τον χειρισμό των αντίστοιχων συμβόλων μπορούν να εισαχθούν σε μια νέα προσέγγιση της, εξερευνώντας φαινόμενα κίνησης και συναρτήσεων με τη βοήθεια καινοτόμων λειτουργικοτήτων όπως ο προσομοιωτής φαινομένων και οι γραφικές παραστάσεις (Roschelle et al., 2000). Συνήθως αυτό το κομμάτι των Μαθηματικών στην παραδοσιακή εκπαίδευση απευθύνεται σε όσους βρίσκονται σε υψηλότερο γνωστικό επίπεδο ή στις μεγαλύτερες τάξεις μη δίνοντας την ευκαιρία και στους υπόλοιπους να γνωρίσουν σημαντικές ιδέες όπως ο ρυθμός μεταβολής, η συσσώρευση και το όριο. Ο δημιουργός του θεωρεί ότι ενισχύοντας την ανάπτυξη τέτοιων νοημάτων είναι σημαντικό καθώς οι μαθητές εμπλέκονται ενεργά με τη νοηματοδότηση διαδικασιών που σχετίζονται με την μεταβολή ποσοτήτων (Roschelle & Kaput,1996). Επίσης ο ίδιος υποστήριζε ότι ο συλλογισμός με βάση τη συνάρτηση είναι σημαντικός για τα σχολικά Μαθηματικά και η αντίστοιχη έννοια θεμελιώδης για την μαθηματική ανάπτυξή τους και έτσι διερεύνησε το ρόλο της τεχνολογίας στη νοηματοδότηση των συναρτήσεων.

Το συγκεκριμένο εργαλείο διαθέτει ένα παιγνιώδες περιβάλλον κινουμένων σχεδίων όπου χαρακτήρες αλλάζουν θέση σύμφωνα με κάποια γραφήματα. Ο χρήστης μπορεί να μεταβάλλει αυτά τα γραφήματα με το ποντίκι και ταυτόχρονα να παρατηρήσει τις αλλαγές που συμβαίνουν στις αλληλοσυνδεόμενες αναπαραστάσεις νοηματοδοτώντας έτσι τις μαθηματικές σχέσεις που κρύβονται πίσω από το φαινόμενο που μελετάται και τις αλλαγές που παρατηρεί (Roschelle & Kaput,1996). Η δυναμική προβολή γραφημάτων για χαρακτηριστικά όπως η θέση ή η ταχύτητα των κινούμενων χαρακτήρων δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να νοηματοδοτήσουν τις σχέσεις που συνδέουν τις μεταβλητές και τους εισάγει στην έννοια της συνάρτησης μέσω της μελέτης φυσικών φαινομένων χωρίς τη χρήση τυπικού φορμαλισμού (Sacristán et al., 2009). Το λογισμικό είναι εύχρηστο και έχει σχεδιαστεί ώστε να παρέχει εύκολη δημιουργία δραστηριοτήτων καθώς και επαναχρησιμοποίηση, διαμοιρασμό και διασκευή εκείνων που έχουν ήδη δημιουργηθεί.



Εικόνα 2 Το λογισμικό SimCalc

Σύμφωνα με τον Lagrange (2014) η κατηγορία των CAS (Computer Algebra System) εργαλείων είναι ικανά να βοηθήσουν τους μαθητές να ξεπεράσουν τις παραπάνω δυσκολίες και ο ίδιος δημιούργησε το εργαλείο Casyopee το οποίο επικεντρώνεται στην μελέτη των συναρτήσεων μέσω της συμμεταβολής, τη μοντελοποίηση δυναμικών καθημερινών καταστάσεων και τη σύνδεση των υπό μελέτη ποσοτήτων με τις συναρτήσεις. Στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση η έννοια της συνάρτησης είναι σημαντική για αρκετές δραστηριότητες και εκφράζεται με δυο είδη συμβολισμού, τον αλγεβρικό και τις γραφικές παραστάσεις, όμως στη σχολική τάξη συνήθως επικρατεί ο αλγεβρικός και η απομνημόνευση κανόνων έναντι της ερμηνείας και της κατανόησής των μαθηματικών εκφράσεων και των μετασχηματισμών τους. Ένα εργαλείο όπως το Casyopee διευκολύνει τους μαθητές να νοηματοδοτήσουν πιο αποδοτικά την έννοια της συνάρτησης μέσα από τη συμμεταβολή και τη χρήση πολλαπλών συνδεδεμένων αναπαραστάσεων (Lagrange, 2014).



Εικόνα 3 Το λογισμικό Casyopee

Οι Kafetzopoulos & Psycharis (2015, 2022) βασιζόμενοι στις προσεγγίσεις των Thompson, Carlson και Lagrange ερεύνησαν ποιοτικά σε μαθητές Λυκείου τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως σχέσης συμμεταβολής δυο ποσοτήτων στο πλαίσια της μοντελοποίησης δυναμικών καταστάσεων, των μαθησιακών τροχιών (learning trajectories) και της χρήσης του ψηφιακού εργαλείου Casyopee. Έδειξαν ότι μέσα από τις μαθησιακές τροχιές που προσφέρει το εργαλείο οι μαθητές νοηματοδοτούν την συνάρτηση και τον ρυθμό μεταβολής ως συμμεταβολή περνώντας από τον ποσοτικό και τον συμμεταβλητό, στον συναρτησιακό τρόπο σκέψης όπως χαρακτηρίστηκε από τους Thompson & Carlson (2017). Η χρήση του εργαλείου και των διαφορετικών μοντέλων που ενσωματώνουν την ψηφιακή τεχνολογία παίζει καθοριστικό ρόλο στη δράση των μαθητών (Kafetzopoulos & Psycharis, 2022) και η ιδέα των περιοχών εργασίας (working spaces) η οποία υποστηρίζει ότι η μετάβαση μεταξύ working spaces κάνει τις δραστηριότητες πιο παραγωγικές (Lagrange, 2022). Η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής από τους μαθητές χωρίζεται σε τέσσερα επίπεδα από τους συγκεκριμένους ερευνητές (Kafetzopoulos & Psycharis, 2022):

<u>Επίπεδο 1</u>: Διαισθητική παρατήρηση της ύπαρξης της συμμεταβολής χωρίς ποσοτική αναφορά και αντιμετώπιση των αλλαγών ανεξάρτητα σε κάθε ποσότητα.

<u>Επίπεδο 2</u>: Αναγνώριση της αλληλεξάρτησης των ποσοτήτων και της κατεύθυνσης της μεταβολής τους μέσω του δυναμικού χειρισμού και τη μετακίνηση σημείων.

<u>Επίπεδο 3</u>: Διαχωρισμός της ανεξάρτητης από την εξαρτημένη μεταβλητή, νοηματοδότηση της συμμεταβολής με βάση τον τυπικό αλγεβρικό φορμαλισμό και μετάβαση από τους αριθμούς στις μεταβλητές μέσα από την εξερεύνηση των τιμών των συμμεταβαλλόμενων ποσών στον πίνακα και τη γραφική παράσταση του εργαλείου.

<u>Επίπεδο 4</u>: Νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής συνδέοντας τις διαφορετικές πολλαπλές αναπαραστάσεις του εργαλείου (αλγεβρικός τύπος, πίνακας τιμών, γραφική παράσταση) και δουλεύοντας κυρίως με αλγεβρικούς όρους και μεταβλητές έχοντας πληρέστερη εικόνα για τα συμμεταβαλλόμενα ποσά. Επιπλέον είναι ικανοί να αναγνωρίσουν το ποσό της μεταβολής και νοηματοδοτούν το ρυθμό μεταβολής.

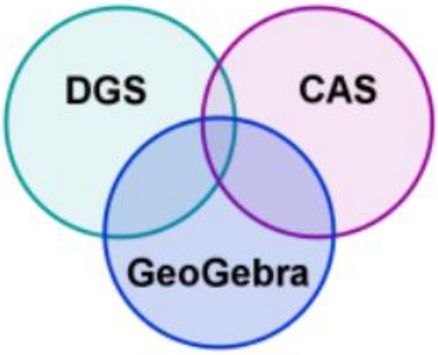
Σύμφωνα με τους ίδιους ερευνητές οι διαθέσιμες αναπαραστάσεις παίζουν σημαντικό ρόλο στην μετάβαση μεταξύ των επιπέδων ένα έως τρία καθώς και στην δραστηριότητα των μαθητών. Επιπλέον διευκολύνουν την περαιτέρω νοηματοδότηση των συναρτησιακών σχέσεων μεταξύ των ποσοτήτων και γενικότερα τα εργαλεία που αξιοποιούνται για τις συναρτήσεις προσφέρουν πλουσιότερη νοηματοδότηση απ' ότι τα παραδοσιακά μέσα.

2.6 Το ψηφιακό εργαλείο GeoGebra και η πρόσθετη παιδαγωγική αξία του

2.6.1 Βασικά χαρακτηριστικά του εργαλείου GeoGebra

Το GeoGebra αποτελεί ένα δημοφιλές δωρεάν και ανοικτό εκπαιδευτικό λογισμικό για τη διδασκαλία και την μάθηση των Μαθηματικών το οποίο δημιουργήθηκε από τον Markus Hohenwarter για τη διπλωματική του εργασία στο Πανεπιστήμιο του Σάλτσμπουργκ το 2001. Είναι ένα Δυναμικό Λογισμικό Μαθηματικών (Dynamic Mathematics Software - DMS) το οποίο συνδυάζει λειτουργικότητες και χαρακτηριστικά της Δυναμικής Γεωμετρίας (Dynamic Geometry Software - DGS), των Υπολογιστικών Συστημάτων Άλγεβρας (Computer Algebra Systems - CAS) αλλά και της Ανάλυσης σε ένα συνδεδεμένο και εύχρηστο περιβάλλον που χρησιμοποιείται από πολλούς μαθητές και εκπαιδευτικούς όλων των επιπέδων (Hohenwarter et al., 2008).

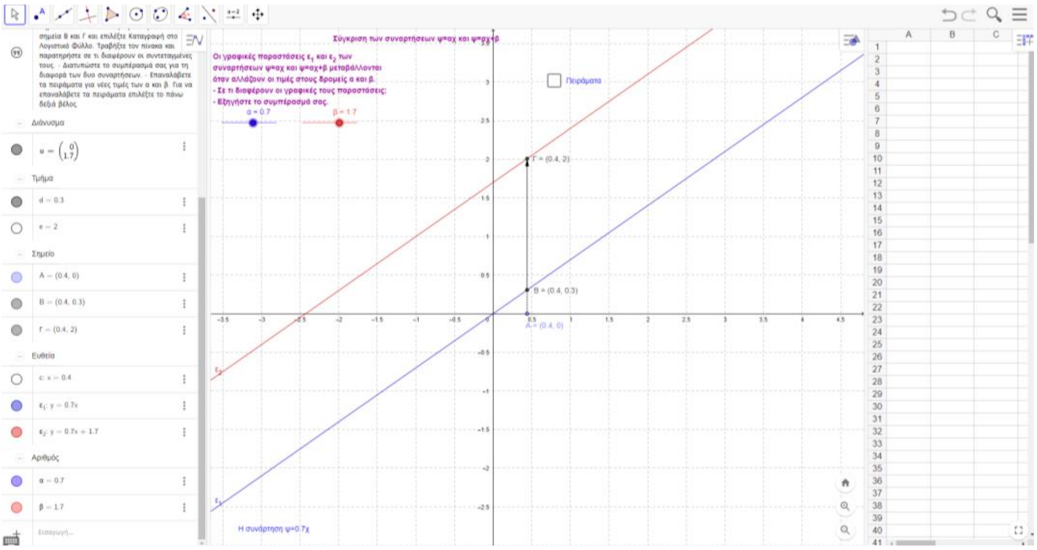
Ο Hohenwarter βασίστηκε στην παρατήρησή του ότι τα λογισμικά που υπήρχαν μέχρι τότε προσέφεραν τις λειτουργικότητες της Δυναμικής Γεωμετρίας (σημεία, διανύσματα, πολύγωνα, κωνικές τομές) και των Υπολογιστικών Συστημάτων Άλγεβρας (συντεταγμένες σημείων, εξισώσεις και συναρτήσεις που ορίζονται αλγεβρικά και αλλάζουν δυναμικά), αλλά αυτά αποτελούσαν ξεχωριστά προγράμματα. Οπότε πρότεινε μια αμφίδρομη διασύνδεσή τους με μια στενότερη σχέση μεταξύ των δυνατοτήτων απεικόνισης του CAS και της δυναμικής προσαρμοστικότητας του DGS ως πιο αποτελεσματική για τους χρήστες, υλοποιώντας έτσι το GeoGebra (Hohenwarter & Fuchs, 2004). Εκεί μπορεί κάποιος να μεταβάλλει ταυτόχρονα τόσο την αλγεβρική όσο και τη γραφική αναπαράσταση ενός μαθηματικού αντικειμένου άμεσα, ενεργοποιώντας έτσι την αμφίδρομη διασύνδεση των αντίστοιχων αναπαραστάσεών του. Με αυτόν τον τρόπο οι δύο αυτές λειτουργικότητες είναι διαθέσιμες συνεχώς στο χρήστη παράλληλα και κάθε αντικείμενο στο παράθυρο άλγεβρας αντιστοιχεί σε ένα αντικείμενο στο παράθυρο γεωμετρίας και αντίστροφα (Hohenwarter & Jones, 2007). Προσφέρεται δηλαδή η δυνατότητα παλινδρόμησης μεταξύ των δυο παραθύρων το οποίο σημαίνει ότι για παράδειγμα ο χρήστης μπορεί να διερευνήσει τις παραμέτρους της εξίσωσης μιας ευθείας σύροντάς την με το ποντίκι και παρατηρώντας την αλλαγή της εξίσωσης της, ή μπορεί να αλλάξει την εξίσωση της ευθείας και να παρατηρήσει τον τρόπο με τον οποίο αλλάζουν τα αντικείμενα στο παράθυρο της γεωμετρίας. Άρα το GeoGebra λειτουργεί ως η τομή της Δυναμικής Γεωμετρίας και των Υπολογιστικών Συστημάτων Άλγεβρας για αυτό χαρακτηρίστηκε ως ένα Δυναμικό Λογισμικό Μαθηματικών (Dynamic Mathematics Software - DMS) για την Γεωμετρία, την Άλγεβρα αλλά και την Ανάλυση.



Εικόνα 4 Το GeoGebra ως τομή των δυο μορφών αναπαράστασης

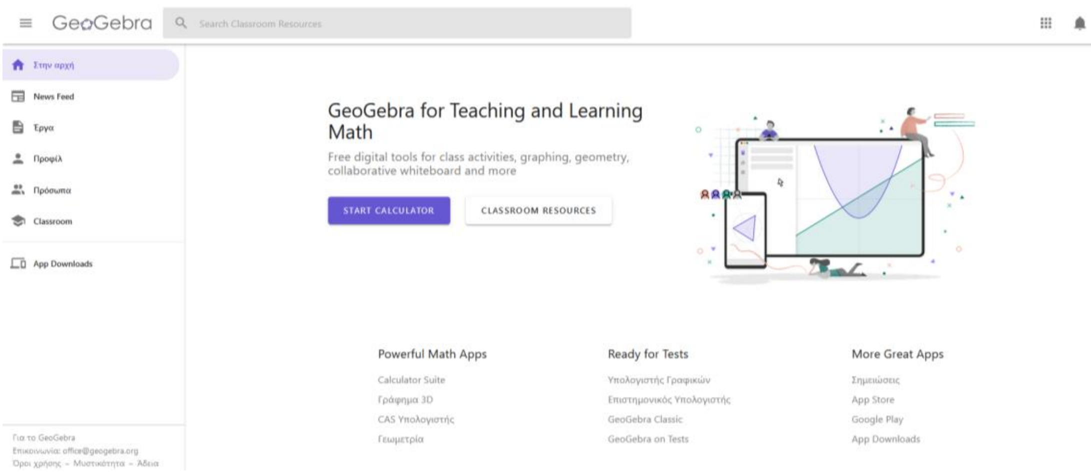
Για να έχουν πρόσβαση και να κατανοήσουν οι μαθητές τα μαθηματικά δομήματα και τις αντίστοιχες έννοιες θα πρέπει να ενσωματώσουν στο συλλογισμό τους τα διάφορα αναπαραστατικά συστήματά τους (Duval, 2006). Το σκεπτικό δημιουργίας του συγκεκριμένου ψηφιακού εργαλείου είναι να παρέχει όλες τις αναπαραστάσεις κάθε μαθηματικού αντικειμένου μέσα από τις λειτουργικότητες του και την ίδια στιγμή αυτές να είναι αλληλοσυνδεδεμένες μεταξύ τους, δηλαδή αν μεταβάλλει ο χρήστης ένα αντικείμενο σε ένα από τα παράθυρα του εργαλείου, η αναπαράστασή του στα υπόλοιπα παράθυρα να ενημερώνεται αυτόματα.

Το GeoGebra είναι διαδραστικό και ευέλικτο εκπαιδευτικό εργαλείο που ωφελεί την δευτεροβάθμια εκπαίδευση καθώς μπορεί να αξιοποιηθεί σύμφωνα με ερευνητές (Hohenwarter & Fuchs, 2004; Zengin et al., 2012) για να οπτικοποιηθούν με πιο πλούσιο τρόπο οι μαθηματικές έννοιες χάρη στις πολλαπλές αναπαραστάσεις που προσφέρει οι οποίες συνδέονται δυναμικά μεταξύ τους. Επιπλέον δίνει την δυνατότητα στους μαθητές να μάθουν να κατασκευάζουν διάφορα γεωμετρικά ή άλλα μαθηματικά αντικείμενα και να αλληλεπιδρούν με αυτά, να διερευνούν, να μοντελοποιούν, να πειραματίζονται και να συζητούν μεταξύ τους σχετικά με νέες έννοιες. Τέλος μπορεί να δώσει κίνητρα στους εκπαιδευτικούς να δημιουργήσουν νέο διαδραστικό εκπαιδευτικό υλικό με γνώμονα τις ανάγκες των μαθητών και ενεργή εμπλοκή τους.



Εικόνα 5 Παράδειγμα εφαρμογής του GeoGebra από το Ψηφιακό Σχολείο

Το συγκεκριμένο λογισμικό σχεδιάστηκε με βάση τις ανάγκες των μαθητών στα Μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Hohenwarter & Fuchs, 2004) είναι ανεξάρτητο από την πλατφόρμα καθώς είναι γραμμένο στη γλώσσα προγραμματισμού Java και χρησιμοποιείται άμεσα και δωρεάν, μετεφρασμένο σε πολλές γλώσσες, από οποιαδήποτε συσκευή μεταβαίνοντας στον δικτυακό τόπο https://www.geogebra.org/ ή εγκαθιστώντας τοπικά την αντίστοιχη εφαρμογή. Τα δομήματα που δημιουργεί ο χρήστης στο GeoGebra μπορούν να αποθηκευτούν στο προφίλ του χρήστη, να διαμοιραστούν δημόσια με άλλους, να εξαχθούν σε διάφορα είδη αρχείων καθώς και να αποθηκευτούν ως ιστοσελίδα σε html και να επαναχρησιμοποιηθούν ως δυναμικά φύλλα εργασίας από τους μαθητές (Hohenwarter & Jones, 2007). Λόγω του μη εμπορικού χαρακτήρα του, δεν υπάρχει ο περιορισμός της χρήσης του μόνο σε σχολεία, άρα είναι διαθέσιμο σε όλους τους μαθητές και εκπαιδευτικούς όπου και αν βρίσκονται, καθώς επίσης ωθεί αρκετούς από αυτούς να δημιουργήσουν και να διαμοιραστούν το διαδραστικό υλικό τους στο διαδίκτυο καθώς και να συμμετάσχουν στην κοινότητα των εκπαιδευτικών και γενικότερα των χρηστών και να ανταλλάξουν απόψεις και δομήματα (Hohenwarter et al., 2008).



Εικόνα 6 Η διαδικτυακή πλατφόρμα του GeoGebra

2.6.2 Πρόσθετη παιδαγωγική αξία του GeoGebra γενικά για τα Μαθηματικά

Η πρόσθετη παιδαγωγική αξία στα Μαθηματικά αναφέρεται στα επιπλέον οφέλη που θα μπορούσαν να παρέχονται στην μαθησιακή διαδικασία μέσα από την χρήση καινοτόμων μεθόδων διδασκαλίας πέρα από το βασικό πρόγραμμα σπουδών. Τα κατάλληλα όμως σχεδιασμένα ψηφιακά εργαλεία μπορούν να λειτουργήσουν ως μέσα έκφρασης για τους μαθητές και να αναβαθμίσουν την μαθησιακή διαδικασία (Noss et al.,1997). Η πρόσθετη παιδαγωγική αξία της ψηφιακής τεχνολογίας συγκεκριμένα προκύπτει σύμφωνα με τον Κυνηγό (2011) στο ότι εκείνη παρέχει εργαλεία πολλών αναπαραστάσεων μέσα από τα οποία ο μαθητής μπορεί να εκφραστεί, να επιχειρηματολογήσει, να συνεργαστεί, να εξερευνήσει και να δημιουργήσει γύρω από μαθηματικές έννοιες. Η μαθηματική εκπαίδευση δηλαδή μπορεί να μετασχηματιστεί σε κάτι πέρα από την απλή μετάδοση επιστημονικών αληθειών και διαδικασιών εάν δοθεί η απαραίτητη σημασία στην ενεργή εμπλοκή των μαθητών σε μαθηματικές εμπειρίες με προσωπικό νόημα, οι οποίες προάγουν τη βαθύτερη κατανόηση, την κριτική σκέψη, τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων και τις συνδέσεις με εφαρμογές στον πραγματικό κόσμο. Η ενσωμάτωση σε αυτήν ψηφιακών εργαλείων με λειτουργικότητες όπως οι υπολογιστές γραφικών παραστάσεων, η Δυναμική Γεωμετρία ή η προσομοίωση, φαίνεται πως μπορεί να ενισχύσει την προσθετική παιδαγωγική αξία στα Μαθηματικά. Τέτοιου είδους εργαλεία παρέχουν δυναμικές δυνατότητες οπτικοποίησης, εξερεύνησης και υπολογισμού που βοηθούν τους μαθητές να αναπτύξουν νοηματοδοτήσουν βαθύτερα τις μαθηματικές έννοιες.

Με βάση πολλές έρευνες οι οποίες έχουν γίνει στον χώρο της εκπαίδευσης για την πρόσθετη παιδαγωγική αξία που μπορεί να έχει κάποιο ψηφιακό εργαλείο σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά και τις λειτουργικότητες που παρέχει, το GeoGebra με τις δυνατότητες που προσφέρει αν αξιοποιηθεί στοχεύοντας σε αυτήν, τότε αναμένεται να ενισχύσει την μαθησιακή διαδικασία εξής:

- Σύμφωνα με τους Kaput, Noss και Hoyles (2002) η πρόσβαση στις μαθηματικές ιδέες συνδέεται άμεσα με τις αναπαραστατικές μεθόδους μέσα από τις οποίες εκφράζονται και τα ψηφιακά εργαλεία τα οποία τις προσφέρουν με καινοτόμο τρόπο, συμβάλλουν στην μάθηση μαθηματικών εννοιών οι οποίες είτε δυσκολεύουν είτε είναι πιο προχωρημένες για τους μαθητές. Ειδικότερα η χρήση πολλών αναπαραστάσεων στο ίδιο περιβάλλον προσφέρει περισσότερες ευκαιρίες νοηματοδότησης, ο φορμαλισμός συνδέεται πιο κατανοητά με τις γραφικές παραστάσεις και ο μαθητής τις συνδυάζει πιο ομαλά με τις έννοιες που αναπαριστούν (Κυνηγός,2011). Οι πληροφορίες που προσφέρονται όταν συνδυάζονται είναι περισσότερες και πιο ξεκάθαρες εκφράζοντας πολλά χαρακτηριστικά (Ainsworth et al., 1998) και συμβάλλοντας στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών μέσω της οπτικοποίησης (Borba & Villarreal, 2005).

Επιπλέον ο συνδυασμός των λειτουργικοτήτων της δυναμικής γεωμετρίας με το αλγεβρικό υπολογιστικό σύστημα και το υπολογιστικό φύλλο προσφέρει νέες δυνατότητες για πειραματισμό στους μαθητές με την ταυτόχρονη αλληλεπίδραση σε Άλγεβρα και Γεωμετρία και ωθεί στην σύνδεση των διαφορετικών αναπαραστάσεων του μαθηματικού αντικειμένου (Lagrange & Psycharis, 2014), καθώς οι αναπαραστάσεις είναι δυναμικά συνδεδεμένες μεταξύ τους (Borba & Confrey, 1996). Έτσι μια αλλαγή στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του μαθηματικού αντικειμένου, έχει ως άμεσο αποτέλεσμα τις αλλαγές στον αλγεβρικό τύπο και τις τιμές του υπολογιστικού φύλλου. Αυτό συμβαίνει γιατί καθώς γίνονται χειρισμοί στην μια αναπαράσταση ταυτόχρονα μεταφέρονται και στην άλλη και μικραίνουν το αντίστοιχο πεδίο χειρισμού της (Ainsworth et al., 1998).

• Η διαδραστικότητα και ο δυναμικός χειρισμός που ενσωματώνουν τα ψηφιακά εργαλεία είναι σημαντικές λειτουργικότητες της τεχνολογίας, προσφέρουν πολλές δυνατότητες και επιτρέπουν στον μαθητή να επικεντρωθεί περισσότερο στην κατασκευή νοημάτων παρά στον χειρισμό των αλγεβρικών συμβόλων (Ferrara et al., 2006).

• Όπως τόνισε ο Papert (1972,1993) η άμεση και χωρίς επικριτικό χαρακτήρα ανατροφοδότηση των ψηφιακών εργαλείων είναι σημαντικός παράγοντας στην βελτίωση της μάθησης και την αύξηση του κινήτρου των μαθητών. Σε συνδυασμό με την διαδραστική εμπλοκή τους και τον χειρισμό των μαθηματικών δομημάτων, την παρατήρηση των αποτελεσμάτων και την αντίδραση στην ανατροφοδότηση, ενισχύεται η διερεύνηση των μαθηματικών εννοιών (Noss et al., 1997). Η συνεχής δημιουργική ανατροφοδότηση του εργαλείου μέσω της οθόνης προωθεί τον αναστοχασμό και καλλιεργεί την μαθηματική σκέψη, ελεύθερη πλέον από τον φόβο του λάθους και της κριτικής. Έτσι ενθαρρύνεται η εξερεύνηση, ο πειραματισμός και η αποκλίνουσα σκέψη, αυξάνεται η δημιουργικότητα και ενισχύεται η συνεργασία μεταξύ των μαθητών (Sacristán et al., 2009). Επιπλέον, ενισχύεται η ροή της συζήτησης λόγω των γρήγορων αποτελεσμάτων και της εύκολης σύγκρισής τους, ωθώντας έτσι σε περαιτέρω νοηματοδότηση τους μαθητές καθώς μελετούν τις αποκλίσεις των αποτελεσμάτων από τις υποθέσεις που είχαν κάνει αρχικά και συλλογίζονται τις γνωστικές συγκρούσεις με τις πρότερες γνώσεις τους, οι οποίες δεν είναι επικριτικές μέσω του εργαλείου (Sacristán et al., 2009). Όπως επίσης υποστηρίζουν οι Noss et al. (1997) η ανατροφοδότηση που παρέχουν τα εργαλεία μέσα από τις λειτουργικότητές τους, δίνει την ευκαιρία για εμπλοκή των εκπαιδευομένων με ένα νέο επεκτεινόμενο δίκτυο ιδεών, μέσω των οποίων τα μαθηματικά αντικείμενα αποκτούν νόημα και οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν να δομήσουν νέες μαθηματικές έννοιες καθώς οι πρότερες αντιλήψεις τους μεταβάλλονται κατά τον πειραματισμό με τους πόρους του εργαλείου.

• Τα κατάλληλα σχεδιασμένα ψηφιακά περιβάλλοντα ωφελούν τη διερευνητική μάθηση η οποία προσεγγίζει τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες με έναν πιο ενδιαφέρον τρόπο για τους μαθητές οι οποίοι αποκτούν πιο ενεργό ρόλο μέσα απο την εξερεύνηση και τον πειραματισμό, αυξάνοντας παράλληλα το κίνητρο για την εμπλοκή τους στην μαθησιακή διαδικασία (Sacristán et al., 2009). Σύμφωνα με τους ίδιους ερευνητές οι ψηφιακές τεχνολογίες διευκολύνουν τις διερευνητικές δραστηριότητες επειδή αποτελούν ένα είδος σκαλωσιάς (scaffolding) όπως αυτή ορίστηκε από τους Wood, Bruner και Ross (1976), δηλαδή ως μια οντότητα που ρυθμίζει τα στοιχεία της δραστηριότητας που δυσκολεύουν τον μαθητή δίνοντάς του την ευκαιρία να επικεντρωθεί στα χαρακτηριστικά που είναι κοντά στις δυνατότητες του με σκοπό την επιτυχή ολοκλήρωση της δραστηριότητας και την απόκτηση των απαραίτητων δεξιοτήτων πιο σύντομα. Έτσι οι μαθητές δουλεύουν αυτόνομα, κατασκευάζοντας τις μαθηματικές έννοιες κοντά στο δικό τους επίπεδο και αναπτύσσοντας παράλληλα ένα προσωπικό και δημιουργικό τρόπο σκέψης (Sacristán et al., 2009).

Τα περιβάλλοντα μάθησης που αξιοποιούν διερευνητικά τη χρήση του υπολογιστή παρέχουν την ευκαιρία συζήτησης και ανάλυσης των μαθηματικών εννοιών επειδή οι μαθητές πειραματίζονται και με το δοσμένο δόμημα, συζητούν για αυτό και μελετούν τη σχέση μεταξύ της οπτικής και της αναλυτικής αναπαράστασης, παλινδρομώντας μεταξύ των πολλαπλών διαθέσιμων αναπαραστάσεων και ανακαλύπτοντας διαισθητικά στην αρχή ιδέες από το σχήμα. Στη συνέχεια εμπλουτίζουν την ανάλυσή τους με αριθμητικές τιμές επιβεβαιώνοντας ή απορρίπτοντας τις αρχικές υποθέσεις της οπτικής προσέγγισης και ωθούνται στη νοηματοδότηση μαθηματικών εννοιών μέσα απο τις νοητικές συγκρούσεις μεταξύ των πρότερων αντιλήψεων τους και των νέων αναδυόμενων συμπερασμάτων (Sacristán et al., 2009). Επιπλέον οι μαθητές δημιουργούν ένα λεξιλόγιο επικοινωνίας μη αλγεβρικό για την περιγραφή, τη συζήτηση και τον συλλογισμό των μαθηματικών εννοιών.

• Η χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας είναι ικανή να ενισχύσει τις δυναμικές της τάξης επειδή ευνοεί την ομαδοσυνεργατική προσέγγιση και την ενεργή εμπλοκή των μαθητών μέσω αυτής (Sacristán et al., 2009). Η συνεργατική μάθηση συγκεκριμένα προκύπτει μέσα από τη συνεχή προσπάθεια διαμοιρασμού της προσωπικής αντίληψης από κάθε μαθητή για τις μαθηματικές ιδέες και είναι σημαντική στη νοηματοδότηση της διαδικασίας επίλυσης προβλημάτων καθώς και στην ανάπτυξη διαφορετικών προσεγγίσεων σε αυτή (Confrey, 1991). Επιπλέον, όταν ο υπολογιστής λειτουργεί ως εργαλείο και όχι ως δάσκαλος, μπορεί να αναπτύξει βελτιωμένη επικοινωνία στο πλαίσιο της ομαδικής εργασίας, ωθώντας σε εξερεύνηση μέσα από ένα κοινό πλαίσιο δράσεων και αναπαραστάσεων που είναι κατανοητό σε όλα τα μέλη της ομάδας (Confrey, 1991). Έτσι οι εκπαιδευόμενοι μαθαίνουν να εργάζονται, να επικοινωνούν και να εκφράζουν μαθηματικές τους ιδέες με τρόπους που τους μετασχηματίζει σε παραγωγικά μέλη της κοινωνίας.

• Οι Noss et al. (1997) υποστηρίζουν ότι ο υπολογιστής έχει τη δυνατότητα να ενσωματώνει την οπτική προσέγγιση κάθ' όλη τη διάρκεια της δραστηριότητας των μαθητών και να εξωτερικεύει τις εικόνες των μαθηματικών αντικειμένων, καθιστώντας τα χειραγωγήσιμα ταυτόχρονα. Επιπλέον τα ψηφιακά εργαλεία αποτελούν μέσα έκφρασης και δόμησης μαθηματικών εννοιών από μαθητές οι οποίοι δεν έχουν εξοικειωθεί με τον τυπικό μαθηματικό φορμαλισμό, προσφέροντας έτσι νέες δυνατότητες στους μαθητές οι οποίες παλαιότερα ήταν διαθέσιμες κυρίως στους πιο έμπειρους με τα Μαθηματικά.

• Η χρήση των ψηφιακών εργαλείων αποτελεί ένα ενδιάμεσο συμβολικό σύστημα μεταξύ του άτυπου και του τυπικού και βοηθάει τους μαθητές να κάνουν αποδοτικές μεταβάσεις από την Αριθμητική στη χρήση του αλγεβρικού συμβολισμού και οι οποίες στην παραδοσιακή εκπαίδευση δεν γίνονται όπως θα έπρεπε (Sacristán et al., 2009).

• Τα ψηφιακά εργαλεία δεν επικεντρώνονται στην εκτέλεση πολλών και χρονοβόρων υπολογισμών από τους μαθητές, αλλά εστιάζουν στον συλλογισμό των βαθύτερων μαθηματικών νοημάτων (Deaney et al., 2003) διευκολύνοντας την πραγματοποίηση κρίσιμων μεταβάσεων προς τον μαθηματικό τρόπο σκέψης, όπως για παράδειγμα από το ειδικό στο γενικό και από το διαισθητικό στο τυπικό (Sacristán et al., 2009).

• Η εμπλοκή και η αλληλεπίδραση των μαθητών με τις μαθηματικές ιδέες που περιέχονται σε ένα μικρόκοσμο είναι σημαντικές γιατί όταν πειραματίζονται με ένα ψηφιακό μαθηματικό δόμημα, νοηματοδοτούν και ακολουθούν τις μαθηματικές ιδέες και τους κανόνες που το διέπουν γεφυρώνοντας έτσι την απόσταση μεταξύ δράσης και έκφρασης που υπάρχει στην παραδοσιακή εκπαίδευση καθώς οι ιδέες αυτές εξωτερικεύονται και από το εργαλείο και δεν βρίσκονται μόνο στην σκέψη τους (Noss et al., 1997). Επιπλέον αφού το ψηφιακό δόμημα με το οποίο γίνεται ο πειραματισμός αποτελείται από μαθηματικές έννοιες, οι μαθητές τις χρησιμοποιούν συνεχώς άρα νοηματοδοτούν πυκνότερα με αυτές (Κυνηγός,2015).

• Ο ρόλος του εκπαιδευτικού θα εξελιχθεί από μέσο μεταφοράς της έγκυρης θεωρητικής γνώσης και υλοποιητή του αναλυτικού προγράμματος σπουδών, σε σχεδιαστή και συντονιστή καινοτόμων εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων (Laurillard, 2012) με στόχο οι μαθητές να ανακαλύψουν έννοιες αλλά και αναπτύξουν απαραίτητες δεξιότητες του ψηφιακού γραμματισμού. Έτσι οι ψηφιακές τεχνολογίες μπορούν μέσα απο κατάλληλες εφαρμογές να μετασχηματίσουν το περιεχόμενο των σχολικών Μαθηματικών, τον τρόπο δόμησης της αντίστοιχης γνώσης αλλά και το πως συμβαίνει η μάθηση εντός του κοινωνικού πλαισίου της τάξης (Sacristán et al., 2009).

Απαιτείται όμως μια διαφορετική προσέγγιση από τον εκπαιδευτικό όταν εντάσσει τις ψηφιακές τεχνολογίες στην διδακτική του. Θα πρέπει να συμμετέχει ενεργά και να παρεμβαίνει όταν είναι απαραίτητο, ώστε να προωθεί την μάθηση και όχι απλά να διευκολύνει ή να επιδεικνύει τις δραστηριότητες (Sacristán et al., 2009). Αυτό έχει σημασία γιατί σύμφωνα με τον Clements (2002) οι μαθηματικές ιδέες που έχουν ενσωματωθεί σε ένα ψηφιακό περιβάλλον μπορεί να μην είναι αρκετά εμφανείς στους χρήστες και να είναι απαραίτητη η παρέμβαση του εκπαιδευτικού για να τις κάνει πιο ξεκάθαρες αλλά και για να τους ωθήσει να επαληθεύσουν τα αποτελέσματα που προκύπτουν.

Μέσα όμως από την εμπλοκή του με κατάλληλα ψηφιακά εργαλεία ένας εκπαιδευτικός είναι ικανός να καλλιεργήσει ακόμη βαθύτερα τις ικανότητές στο γνωστικό του αντικείμενο καθώς προσεγγίζει το υλικό διδασκαλίας του με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, πιο σύγχρονα και πιο διερευνητικά (Confrey, 1991). Τέλος μέσω των νέων τεχνολογιών η πρακτική παιδαγωγική γνώση και οι διδακτικές μέθοδοι που εφαρμόζονται στην τάξη από τους εκπαιδευτικούς μπορούν πλέον να κοινοποιηθούν, να επαναχρησιμοποιηθούν και να διασκευαστούν ώστε να διαμοιραστεί η διδακτική εμπειρία και ο σχεδιαστής εκπαιδευτικός να αναπτύξει την προσωπική του παιδαγωγική θεωρία (Laurillard, 2012).

• Τα ψηφιακά περιβάλλοντα προσφέρουν περισσότερες ευκαιρίες σε εκπαιδευτικούς και ερευνητές ώστε να προσεγγίσουν τον τρόπο σκέψης και νοηματοδότησης των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές (Noss et al.,1997).

2.6.3 Πρόσθετη παιδαγωγική αξία του GeoGebra ειδικά για την έννοια της συνάρτησης

Ως προς την πρόσθετη παιδαγωγική αξία που μπορεί να έχει ένα ψηφιακό εργαλείο με τις δυνατότητες του GeoGebra εάν αξιοποιηθεί στα πλαίσια της διδασκαλίας για την έννοια της συνάρτησης, αναμένεται να εμπλουτίσει την εκπαιδευτική διαδικασία ως εξής:

• Στο περιβάλλον του GeoGebra δίνεται η δυνατότητα στον χρήστη να χρησιμοποιεί ταυτόχρονα διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης όπως ο πίνακας τιμών ή το υπολογιστικό φύλλο, η γραφική παράσταση στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ή σε τρείς διαστάσεις, ο αλγεβρικός τύπος της αλλά και γραφήματα προσομοίωσης φαινομένων όπως τα dynagraphs. Σύμφωνα με την Confrey (1991) είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να παρέχει στους μαθητές ένα περιβάλλον μάθησης που ενσωματώνει πολλές διαφορετικές αναπαραστάσεις μέσω των οποίων μπορούν να εκφραστούν και να επικοινωνηθούν οι μαθηματικές ιδέες καθώς και οι διάφορες μορφές τους. Η δόμηση των μαθηματικών νοημάτων, σύμφωνα με την ίδια ερευνήτρια, προκύπτει μέσα από τον συνδυασμό των ενεργειών του μαθητή με τις αναπαραστάσεις αυτές και επίσης μέσα από τη σύγκλιση ή τη σύγκρουση των αντίστοιχων συμπερασμάτων που προκύπτουν από την κάθε μια, επιτυγχάνεται ακόμη βαθύτερη νοηματοδότηση και ενισχύεται η ανατροφοδότηση και ο αναστοχασμός (Confrey, 1991).

Ειδικότερα για τη συνάρτηση κάθε αναπαράσταση εκφράζει αποτελεσματικά ορισμένες πτυχές της και προσφέρει στους μαθητές μια διαφορετική προσέγγιση στην μελέτη των ποσοτήτων και της σχέσης που τις συνδέει (Panorkou et al., 2014), οπότε ο συνδυασμός πολλών διαφορετικών αναπαραστάσεων της, ωφελεί περισσότερο την νοηματοδότηση και προσεγγίζει πιο αποδοτικά την συγκεκριμένη έννοια (Goldenberg, 1988). Μπορεί επιπλέον να ωθήσει σε σύγκλιση μεταξύ των συμπερασμάτων που προέκυψαν από τις διαφορετικές αναπαραστάσεις, στην μελέτη των διαφορετικών χαρακτηριστικών τους καθώς και στο πως η μεταβολή στην μια επηρεάζει την άλλη. Προσφέρει αυξημένη ανατροφοδότηση και αναστοχασμό και είναι δυνατή η συνδυαστική προσέγγιση των διαφορετικών μαθηματικών κλάδων, με αποτέλεσμα την βαθύτερη νοηματοδότηση της έννοιας της συνάρτησης (Confrey, 1991). Είναι δηλαδή πιο αποτελεσματικό οι μαθητές να σκέφτονται τις συναρτήσεις ως ένα δίκτυο πολλών αναπαραστάσεων με ισχυρές συνδέσεις μεταξύ τους (Lagrange & Psycharis, 2014). Επειδή έτσι η έκφραση της συγκεκριμένης έννοιας γίνεται με πολλούς τρόπους, οι μαθητές απαγκιστρώνονται από συγκεκριμένες αναπαραστάσεις και την μηχανική χρήση μαθηματικών τύπων και μελετούν βαθύτερα τα νοήματα που αναπαριστούν αυτές (Κυνηγός, 2011).

<< Τα Μαθηματικά θα γίνουν πιο κατανοητά μέσα από την χρήση αναπαραστάσεων και την κατασκευή μοντέλων, τα οποία συνδέονται με τις μαθηματικές έννοιες>> (Κυνηγος,2015).

• Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό των ψηφιακών εργαλείων όπως το GeoGebra είναι ότι ωθούν σε σύνδεση μεταξύ των διαφόρων τρόπων αναπαράστασης αλλά και συλλογισμού της συνάρτησης, αφού οι διάφοροι τρόποι έκφρασης της έννοιας αυτής χρησιμοποιούνται παράλληλα και έτσι μπορούν οι μαθητές να τους παρατηρήσουν και να τους συγκρίνουν, ώστε να καταλήξουν σε αφαιρέσεις για την έννοιά της (Kafetzopoulos & Psycharis, 2022; Ferrara et al., 2006). Επιπλέον, οι αναπαραστάσεις αυτές αποτελούν αλληλεξαρτώμενα εργαλεία, δηλαδή οι αλλαγές στην μια προκαλούν ταυτόχρονα αλλαγές και στην άλλη και επίσης δίνουν τη δυνατότητα να συνδεθεί ο αλγεβρικός φορμαλισμός άμεσα με τη γραφική παράσταση καθώς μέσα από τον χειρισμό του μαθηματικού δομήματος ο μαθητής το επηρεάζει οπτικά αλλά και συμβολικά ζωντανεύοντας έτσι τα αδρανή αλγεβρικά σύμβολα (Noss et al., 1997). Ο μαθητής μέσα από την πλούσια οπτική απεικόνιση που παρέχεται μπορεί να ελέγξει τις υποθέσεις του σχετικά με το μαθηματικό δόμημα και τις ιδιότητες του (Sacristán et al., 2009). Συνεπώς με τη χρήση του εργαλείου GeoGebra ικανοποιείται η σημαντική προϋπόθεση που έθεσαν οι Noss et al. (1997) για τα εργαλεία που παρέχουν οπτική υποστήριξη στους μαθητές, καθώς θεωρούν πως το εργαλείο είναι πολύ σημαντικό να συνδέει τις διαφορετικές μεθόδους συλλογισμού μιας μαθηματικής έννοιας.

• Το λογισμικό GeoGebra προσφέρει δυναμικό χειρισμό στις διάφορες αναπαραστάσεις όπως η επιλογή και το σύρσιμο σημείων της, η ένταξη των ολισθητών οι οποίοι επηρεάζουν παραμέτρους όπως η κλίση ή μετατοπίζουν ολόκληρη την παράσταση, προκαλώντας αλλοίωση του σχήματος, όμως οι ιδιότητες του αρχικού διατηρούνται. Το δυναμικό σύρσιμο των μαθηματικών αντικειμένων με τις επακόλουθες αλλαγές και οι ολισθητές προσφέρουν τη δυνατότητα να ζωντανέψουν την γραφική παράσταση και να δημιουργήσουν κινούμενες εικόνες μεταβάλλοντας με συνέχεια τις παραμέτρους της συνάρτησης (Lagrange, 2014). Επιπλέον ο δυναμικός χειρισμός αποτελεί μια σημαντική αναπαραστατική λειτουργικότητα των ψηφιακών εργαλείων (Sacristán et al., 2009) και τα κινούμενα σημεία στην γραφική παράσταση μιας συνάρτησης διευκολύνουν την μελέτη της με έναν συνεχή τρόπο ο οποίος θα προσφέρει πιο αποδοτική νοηματοδότηση της έννοιας (Thompson & Carlson, 2017). Έτσι σύμφωνα με τον Κυνηγό (2011) οι μαθητές ωθούνται ώστε να συνδέουν το σχήμα με τις ιδιότητες και τον μαθηματικό ορισμό ενώ άλλοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι ο δυναμικός χειρισμός συμπληρώνει και ενισχύει τις πολλαπλές αναπαραστάσεις που προσφέρουν τα ψηφιακά εργαλεία στις συναρτήσεις (Kieran & Yerushalmy, 2006).

Οι δυναμικές αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων του GeoGebra δίνουν τη δυνατότητα στον μαθητή να αναγνωρίσει τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών και να οπτικοποιήσει διαδικασίες σχετικά με τη συμμεταβολή και τη συνάρτηση με έναν συνεχή τρόπο. Άρα έτσι μπορούν να παρατηρήσουν ολόκληρη τη διαδικασία ενός φαινομένου και όχι μόνο κάποια διακριτά, στατικά στιγμιότυπα της όπως γίνεται με τις παραδοσιακές μεθόδους, αλλά και μέσα από τις εξερευνητικές μετακινήσεις στο σχήμα ωθούνται στο να εντοπίσουν μαθηματικές ιδιότητες χωρίς απαραίτητα τη χρήση του τυπικού φορμαλισμού (Sacristán et al., 2009).

Άλλη μια σημαντική πτυχή που αναβαθμίζει την μελέτη της συνάρτησης είναι ο συνδυασμός του δυναμικού χειρισμού των γραφικών παραστάσεων μέσω της Δυναμικής Γεωμετρίας και η αλγεβρική προσέγγιση στο καρτεσιανό επίπεδο μέσω του υπολογιστικού αλγεβρικού συστήματος (CAS). Αυτός ο συνδυασμός λειτουργικοτήτων εμπλουτίζει την απεικόνιση των μαθηματικών αντικειμένων ωθώντας σε διαφορετικές προσεγγίσεις ως προς τις υποθέσεις και τις επαληθεύσεις τους, την αναζήτηση σχέσεων με περισσότερους τρόπους και έχει ως αποτέλεσμα διαφορετικές μετατοπίσεις (για παράδειγμα από αλγεβρική σε γραφική και αντίστροφα) και προσφέρει βελτιωμένη οπτική, αλγεβρική, γεωμετρική και γραφική προσέγγιση (Sacristán et al., 2009).

• Το υπολογιστικό φύλλο που ενσωματώνει το εργαλείο είναι ικανό να αναπαραστήσει με διακριτή μορφή πολλές μαθηματικές καταστάσεις και βοηθά στην αναγνώριση μοτίβων στις τιμές των υπό μελέτη ποσοτήτων. Τα δυναμικά εργαλεία όπως κινούμενα σημεία και ολισθητές αλλά και το CAS δίνουν τη δυνατότητα στον μαθητή να διερευνήσει χαρακτηριστικά με συνεχή συμπεριφορά που αναπαρίστανται με γραφικές παραστάσεις. Πιο συγκεκριμένα, αναμένεται να έχει θετικά αποτελέσματα στην μελέτη της συνάρτησης αφού σύμφωνα με τους Sacristán al. (2009) είναι ισχυρό στην απεικόνιση των δεδομένων και οι μαθητές παρατηρούν αλγεβρικούς κανόνες σε αυτά. Παρέχει συνεχή ανατροφοδότηση κατά τον πειραματισμό, οι μαθηματικές έννοιες παρουσιάζονται δυναμικά μέσα από τις αλλαγές των τιμών στα ποσά που μελετώνται, καθώς και καλλιεργεί τις μεταγνωστικές δεξιότητες μέσα από την παρατήρηση και την ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Επιπλέον είναι μέρος των πολλαπλών αναπαραστάσεων με τις οποίες ο μαθητής δουλεύει παράλληλα και διευκολύνει τη διερεύνηση καθώς αποφεύγονται οι χρονοβόροι υπολογισμοί και ο αλγεβρικός φορμαλισμός παρουσιάζεται με νόημα. Οι ίδιοι ερευνητές αναφέρουν ότι το υπολογιστικό φύλλο βοηθά στην μαθηματικοποίηση, επειδή κατά τη διάρκεια της διερεύνησης αναπτύσσονται μαθηματικές διαδικασίες μέσα από την αναγνώριση, τη διατύπωση και την εφαρμογή αναδυόμενων μοτίβων στα αποτελέσματα.

• Γενικότερα όταν χρησιμοποιούνται τα διερευνητικά ψηφιακά εργαλεία για αρκετό χρονικό διάστημα φαίνεται πως μετασχηματίζουν ποιοτικά τα Μαθηματικά που σχετίζονται με την μεταβολή ποσοτήτων (Kaput et al., 2002). Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές μπορούν μέσω της εμπλοκής τους με τα ψηφιακά εργαλεία να μεταβούν από την ποσοτική συλλογιστική και εκείνη με τη συμμεταβολή στην συλλογιστική με τη συνάρτηση. Επιπλέον μπορούν να δομήσουν και να νοηματοδοτήσουν την έννοια του ρυθμού μεταβολής μέσω της σύγκρισης των τιμών της συνάρτησης παρατηρώντας τον πίνακα τιμών ή το υπολογιστικό φύλλο που προσφέρεται στις λειτουργικότητες τέτοιου είδους εργαλείων (Kafetzopoulos & Psycharis, 2022).

• Οι μέθοδοι αναπαράστασης που προσφέρει το εργαλείο GeoGebra, όπως η δυναμική γεωμετρία, οι οποίες δεν είναι αλγεβρικές έχουν την ικανότητα να εκφράζουν ισχυρά την εξάρτηση μεταξύ δύο ποσών (Lagrange, 2014) και συμβάλλουν θετικά στη νοηματοδότηση των συναρτησιακών σχέσεων εξάρτησης αλλά και τη συμμεταβολή μέσα από την παρατήρηση από τον μαθητή της μεταβολής των εξαρτημένων γεωμετρικών κατασκευών όταν κάποια γεωμετρικά αντικείμενα σύρονται (Falcade et al. 2007). Η δυνατότητα στο GeoGebra να δημιουργηθούν dynagraph και γραφικές παραστάσεις στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων είναι σημαντική, καθώς απεικονίζουν κατάλληλα και εκφράζουν την έννοια της αντιστοιχίας καθώς και το πως μεταβάλλονται οι συναρτήσεις (Panorkou et al., 2014).

• Η έρευνα έχει δείξει ότι τα ψηφιακά εργαλεία με λειτουργικότητες όπως εκείνες του GeoGebra είναι πιο αποτελεσματικά από τα παραδοσιακά μέσα στο να υποστηρίξουν την προσέγγιση της συνάρτησης ως συμμεταβολή επειδή δίνουν εξίσου σημασία στην σχέση μεταξύ των τιμών των ποσοτήτων ανά γραμμές και ανά στήλες αντίστοιχα στον πίνακα τιμών (Noss et al.,1997). Επιπλέον η εξερεύνηση των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων της συνάρτησης μέσω της αξιοποίησης χαρακτηριστικών των ψηφιακών εργαλείων, όπως η οπτικοποίηση και ο χειρισμός μαθηματικών αντικειμένων σύμφωνα με τον Castillo-Garsow (2012) ενισχύουν τη σκέψη σχετικά με τα δυναμικά μεταβαλλόμενα φαινόμενα.

• Τα ψηφιακά εργαλεία ωθούν τους μαθητές να αναγνωρίσουν τη συναρτησιακή σχέση που μπορεί να έχουν οι συντεταγμένες ενός σημείου, οπότε αρχίζουν έτσι να εμπλέκονται σταδιακά με τον φορμαλισμό της Άλγεβρας (Kafetzopoulos & Psycharis, 2022).

• Δυναμικά εργαλεία όπως το GeoGebra δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να προσεγγίσουν μαθηματικές έννοιες που σχετίζονται με την συνάρτηση μέσα από τις εναλλακτικές αναπαραστάσεις, χωρίς να είναι απαραίτητο να εξαρτώνται μόνο από τον αλγεβρικό της τύπο. Με αυτόν τον τρόπο όμως μπορούν να εισαχθούν πιο ομαλά σε νέα μαθηματικά φαινόμενα μέσω αναπαραστατικών μεθόδων που δεν απαιτούν επιδεξιότητα στον χειρισμό του τυπικού αλγεβρικού φορμαλισμού (Sacristán et al., 2009).

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1 Είδος της έρευνας και το σκεπτικό επιλογής του

Επέλεξα να διεξάγω ποιοτική έρευνα για να μελετήσω τα ερευνητικά μου ερωτήματα και πιο συγκεκριμένα την μέθοδο της Έρευνας Σχεδιασμού (Design based Research). Οι λόγοι επιλογής μιας ποιοτικής έρευνας για την συγκεκριμένη διπλωματική εργασία είναι:

- Τα ερωτήματά μου είναι διερευνητικού τύπου και ανοιχτά οπότε ταυτίζομαι με την άποψη των Ίσαρη & Πουρκό (2015) οι οποίοι κατατάσσουν τα ερωτήματα με γενικό και ανοιχτό χαρακτήρα σε εκείνα που απαιτούν ποιοτικές μεθοδολογίες ώστε να μελετηθούν.

- Σύμφωνα με τους Ίσαρη & Πουρκό (2015) προτιμάται η ποιοτική μεθοδολογία όταν σχεδιάζουμε μια βαθύτερη μελέτη για την κατανόηση ενός φαινομένου. Οπότε είναι ορθό να την επιλέξω και εγώ αφού επιθυμώ να μελετήσω συμπεριφορές, τρόπους σκέψης και μάθησης γύρω από την έννοια της συμμεταβολής και της συνάρτησης δηλαδή να ερευνήσω σε βάθος τα νοήματα που δομούν οι μαθητές γύρω από αυτές τις έννοιες.

- Η ποιοτική είναι το κατάλληλο είδος έρευνας εάν δεν είναι σκοπός του ερευνητή η γενίκευση ή να επαληθεύσει κάποιες υποθέσεις αλλά η μελέτη και η δημιουργία μιας αναλυτικής περιγραφής για το φαινόμενο που μελετάται και των πτυχών του (Ίσαρη & Πουρκός, 2015). Στην δική μου έρευνα με ενδιαφέρει να ερμηνεύσω σε βάθος τον τρόπο με τον οποίο διαμορφώνεται και αναπτύσσεται η μαθηματική σκέψη των εκπαιδευομένων και να αναζητήσω τους παράγοντες που την επηρεάζουν καθώς εκείνοι διερευνούν, πειραματίζονται και εμπλέκονται ενεργά με το ψηφιακό εργαλείο GeoGebra στο πραγματικό κοινωνικό πλαίσιο της σχολικής τάξης.

- Στόχος μου είναι να εστιάσω στο πως σκέφτονται, τι κάνουν και πως αλληλεπιδρούν οι μαθητές ως υποκείμενα καθώς μελετούν, εκφράζονται και μαστορεύουν με τις συναρτήσεις με όχημα τη συμμεταβολή και τις πολλαπλές αναπαραστάσεις που προσφέρει το ψηφιακό εργαλείο. Άρα σύμφωνα με τους Ίσαρη & Πουρκό (2015) η ποιοτικές μέθοδοι είναι καταλληλότερες επειδή μας προσφέρουν αρκετές πληροφορίες για την προσωπική νοηματοδότηση του θέματος που ερευνάται από τους υπό μελέτη συμμετέχοντες.

- Οι ποιοτικοί ερευνητές συλλέγουν τα δεδομένα τους απ' ευθείας από τα υποκείμενα της έρευνας παρατηρώντας την αλληλεπίδραση και την συμπεριφορά τους εντός του φυσικού περιβάλλοντος δράσης τους (Ίσαρη & Πουρκός, 2015). Έτσι και εγώ θεωρώ σημαντικό η έρευνά μου να διεξαχθεί εντός του σχολικού περιβάλλοντος καθώς εκεί θα έχω πιο άμεση επαφή με τους μαθητές και θα υπάρχει η δυνατότητα καταγραφής απρόσμενων πτυχών και περισσότερων λεπτομερειών καθώς οι συμμετέχοντες θα εκφράζονται πιο αναλυτικά.

- Η ποιοτική έρευνα προσφέρει μεγαλύτερη ευελιξία αφού υπάρχει η δυνατότητα τροποποίησης του ερευνητικού σχεδιασμού και των ερωτημάτων με βάση τα δεδομένα που λαμβάνει ο ερευνητής κατά τη διάρκεια της ερευνητικής διαδικασίας (Ίσαρη & Πουρκός, 2015).

3.2 Έρευνα Σχεδιασμού

Επιλέχθηκε η έρευνα σχεδιασμού καθώς αποτελεί μια ευρέως εφαρμόσιμη ποιοτική μέθοδο η οποία απευθύνεται σε παιδαγωγούς και ερευνητές της εκπαίδευσης που αναζητούν καινοτόμες λύσεις σε πρακτικά διδακτικά προβλήματα. Έχει ως στόχο να φέρει πιο κοντά και να συνδέσει την θεωρία με την εκπαιδευτική πράξη (Λάτση, 2022) και τα κύρια χαρακτηριστικά της είναι η επαναλαμβανόμενη διαδικασία σχεδιασμού, εφαρμογής, αξιολόγησης και επανασχεδιασμού μιας παρέμβασης με παραγόμενα κάποια μαθησιακά αντικείμενα (Bakker, 2018; Μαυρομμάτη, 2019). Τέτοιου είδους αντικείμενα-προτάσεις αξιολογούνται ως προς την αποτελεσματικότητα αντιμετώπισης των δυσκολιών και έπειτα από την βελτίωση τους σκοπός είναι να αποτελέσουν την μέθοδο επίλυσης του διδακτικού προβλήματος, καθώς και να αναπτυχθεί μιας θεωρία η οποία θα είναι εφαρμόσιμη και έχει προκύψει από δεδομένα μέσα από το σχολικό περιβάλλον και τους ίδιους τους μαθητές (Μαυρομμάτη, 2019).

Με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα που έθεσα σκοπός ήταν να σχεδιάσω μια εκπαιδευτική παρέμβαση με το εργαλείο GeoGebra που να επικεντρώνεται στην μελέτη της συνάρτησης με όχημα τη συμμεταβολή, να την υλοποιήσω στο περιβάλλον της σχολικής τάξης, λειτουργώντας ως παρατηρητής όταν αυτή θα εφαρμόζεται από έναν συνάδελφο εκπαιδευτικό και ταυτόχρονα θα γίνεται συλλογή δεδομένων με διάφορες μεθόδους. Στη συνέχεια αφού αναλύσω τα αρχικά δεδομένα με τις κατάλληλες τεχνικές, στόχος είναι να μελετήσω πως το περιβάλλον και οι λειτουργικότητες του ψηφιακού εργαλείου συμβάλλουν και επηρεάζουν την έρευνά μου, τροποποιώντας στη συνέχεια τον σχεδιασμό ανάλογα με τα αποτελέσματα που προκύπτουν στα διάφορα στάδια. Έπειτα από κύκλους βελτιώσεων κατά την εφαρμογή της παρέμβασης κατέληξα σε μια θεωρία η οποία μπορεί να συμβάλλει θετικά στην αναβάθμιση της εκπαιδευτικής πράξης και την αντιμετώπιση των διδακτικών προβλημάτων που σχετίζονται με την έννοια της συνάρτησης.

3.3 Εφαρμογή της έρευνας

3.3.1 Συμμετέχοντες στην έρευνα

Η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε σε τρείς διδακτικές ώρες τον Μάϊο του 2023 σε ένα τμήμα Β' Γυμνασίου, ενός σχολείου της Αθήνας, 25 ατόμων, μέσου γνωστικού και κοινωνικοοικονομικού επιπέδου, στα πλαίσια της διδασκαλίας των Μαθηματικών Β' Γυμνασίου επειδή σε αυτή την τάξη ο μαθητές έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με τις συναρτήσεις. Συμμετέχοντες ήταν οι μαθητές του τμήματος οι οποίοι χωρίστηκαν σε ισοδύναμες ομάδες των δυο ατόμων καθώς και ο καθηγητής Μαθηματικών του τμήματος με τον οποίο οι μαθητές είχαν μεγαλύτερη οικειότητα. Η εκπαιδευτική παρέμβαση διεξήχθηκε στο εργαστήριο Πληροφορικής του σχολείου ώστε να είναι άμεση η πρόσβαση σε Η/Υ, αλλά και σε περισσότερα μέσα συλλογής δεδομένων ώστε να παρατηρηθεί με μεγαλύτερη ακρίβεια η εξέλιξη της μαθησιακής διαδικασίας και η δραστηριότητα των συμμετεχόντων. Όλοι οι συμμετέχοντες είχαν τις απαραίτητες γνώσεις Η/Υ ώστε να μην δυσκολευτούν με το λογισμικό και η έρευνα εστίασε κυρίως σε δυο ομάδες μαθητών οι οποίες επιλέχθηκαν από τον εκπαιδευτικό για περαιτέρω ανάλυση.

3.3.2 Οργάνωση και Χρονοδιάγραμμα Υλοποίησης Έρευνας

Η διαδικασία της παρέμβασης οργανώθηκε σύμφωνα με τα παρακάτω βήματα:

1. Σχεδιασμός της έρευνας.
2. Εξασφάλιση των κατάλληλων αδειών για την διεξαγωγή της έρευνας από τους αρμόδιους φορείς και της γραπτής συγκατάθεσης των συμμετεχόντων πριν την έναρξή της.
3. Πραγματοποίηση της παρέμβασης (3 ώρες) με ρόλο παρατηρητή και ταυτόχρονη συλλογή δεδομένων.
4. Οργάνωση και ανάλυση των δεδομένων που προέκυψαν.
5. Εξαγωγή συμπερασμάτων και συγγραφή των ερευνητικών αποτελεσμάτων.

3.3.3 Συλλογή δεδομένων

Η συλλογή των δεδομένων παίζει σημαντικό ρόλο σε οποιαδήποτε έρευνα. Κύριες πηγές δεδομένων στην εκπαιδευτική έρευνα είναι ότι έχει σχέση με τον άνθρωπο, όπως οι συμπεριφορές, οι δράσεις, οι κατασκευές, οι αλληλεπιδράσεις και μορφές έκφρασης όπως ο λόγος ή το κείμενο (Ίσαρη & Πουρκός, 2015). Τα εργαλεία τα οποία επιλέχθηκαν για την συλλογή στην συγκεκριμένη έρευνα είναι:

1. Η καταγραφή του ήχου των συζητήσεων των συμμετεχόντων και μετά η απομαγνητοφώνηση και η επιλογή των σημαντικών σημείων. Μέσα από την ανάλυσή τους προέκυψαν σημαντικές πληροφορίες σχετικά με τον τρόπο που οι μαθητές δομούν νοήματα γύρω από τις έννοιες της συμμεταβολής και της συνάρτησης καθώς και εάν η συμμεταβολή συμβάλλει στην ανάπτυξη συναρτησιακού τρόπου σκέψης.
2. Η καταγραφή βίντεο της δραστηριότητας στην οθόνη των μαθητών μέσω ειδικού λογισμικού και στη συνέχεια η μελέτη των σημαντικότερων στιγμιότυπων ώστε να μελετηθεί η αλληλεπίδραση και οι ενέργειες των μαθητών με το εργαλείο GeoGebra. Με αυτό τον τρόπο θα δόθηκε η ευκαιρία να αναλυθεί ο τρόπος που χρησιμοποιούν τις διαθέσιμες αναπαραστάσεις που προσφέρει το εργαλείο και αν αυτές προσδίδουν πρόσθετη παιδαγωγική αξία στην μελέτη των συναρτήσεων.
3. Το ημερολόγιο στο οποίο σημειώθηκαν οι σημαντικότερες πληροφορίες και γεγονότα που παρατήρησα κατά την υλοποίηση της έρευνας. Μέσα από την παρατήρηση, η οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην εκπαιδευτική έρευνα (Patton, 1990) είναι πιθανό να προκύψουν σημαντικά δεδομένα τα οποία δεν μπορούν να καταγραφούν από τα υπόλοιπα μέσα, όπως αντιδράσεις, εκφράσεις των συμμετεχόντων και το κλίμα της τάξης. Επίσης είναι πιθανό ο ερευνητής να κατανοήσει καλύτερα τις συνθήκες μέσα στις οποίες δρουν και σκέφτονται οι μαθητές καθώς συνεργάζονται.

4. Τα φύλλα εργασίας των μαθητών τα οποία βοήθησαν στην ταυτοποίηση και κατηγοριοποίηση των απαντήσεων κατά την απομαγνητοφώνηση των δεδομένων.

3.3.4 Ανάλυση δεδομένων

Κατά την συλλογή των δεδομένων προέκυψαν πολυπληθείς πληροφορίες και με πολλές λεπτομέρειες λόγω της ποικιλίας και του ποιοτικού χαρακτήρα της έρευνας, οπότε ακολουθήθηκαν οι συμβουλές των Ίσαρη & Πουρκού, (2015), δηλαδή έγινε αρχικά η απομαγνητοφώνηση, οργανώθηκαν και κατηγοριοποιήθηκαν τα δεδομένα για να καταστούν διαχειρίσιμα στη συνέχεια. Η μέθοδος ανάλυσης των δεδομένων που επιλέχθηκε για την συγκεκριμένη έρευνα είναι εκείνη της θεματικής ανάλυσης.

Η θεματική ανάλυση είναι μια προσιτή και ευέλικτη θεωρητικά μέθοδος η οποία χρησιμοποιείται συχνά για την ανάλυση ποιοτικών δεδομένων και είναι κατάλληλη ώστε ένας νέος ερευνητής, όπως εγώ, να εισαχθεί στην ποιοτική έρευνα (Braun & Clark, 2006). Σκοπός της είναι η εύρεση, η καταγραφή, η κατηγοριοποίηση και η ανάλυση αναδυόμενων μοτίβων τα οποία επαναλαμβάνονται στα δεδομένα. Προσφέρει αρκετά πλεονεκτήματα όπως η ευελιξία αφού δεν δεσμεύει τον ερευνητή σε κάποια επιστημολογική θέση από πριν και η συμβατότητα με τις περισσότερες επιστημολογίες καθώς ο ερευνητής καθορίζει τον χαρακτήρα της ανάλυσής του (Braun & Clark, 2006). Επίσης είναι κατάλληλη για να συνδυαστεί με ερευνητικά ερωτήματα που σχετίζονται με την κατασκευή νοημάτων.

Η ανάλυση των δεδομένων πραγματοποιήθηκε σύμφωνα με τους Braun και Clark (2006) στις παρακάτω φάσεις:

1. <u>Εξοικείωση με τα δεδομένα</u>: Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν, αρχικά απομαγνητοφωνήθηκαν και στη συνέχεια αναγνώστηκαν πολλές φορές και με προσοχή.
2. <u>Κωδικοποίηση</u>: Δημιουργήθηκαν κωδικοί-ετικέτες οι οποίες αναφέρονται σε σημαντικά χαρακτηριστικά των δεδομένων όπως εκείνα που έχουν σχέση με τη δόμηση νοημάτων από τους μαθητές για τη συμμεταβολή ή τη συνάρτηση, τον τρόπο χρήσης των αναπαραστάσεων του εργαλείου και πως αυτός επηρεάζει την νοηματοδότηση αλλά και την ανάπτυξη συλλογισμού με την συμμεταβολή και τη συνάρτηση.
3. <u>Αναζήτηση θεμάτων</u>: Αναλύθηκαν οι κωδικοί που δημιουργήθηκαν στο προηγούμενο στάδιο, ώστε να βρεθούν ευρύτερα νοήματα τα οποία αποτελούν και πιθανά θέματα.
4. <u>Ανασκόπηση θεμάτων</u>: Έγινε έλεγχος των αρχικών ευρημάτων ως προς το σύνολο των δεδομένων και τη σχετικότητα με τα ερευνητικά ερωτήματα και στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε διαλογή ή μετασχηματισμός τους.
5. <u>Ορισμός και επιλογή τίτλου θεμάτων</u>: Δημιουργήθηκε αναλυτική περιγραφή και ορίστηκαν ονόματα για τα θέματα που επιλέχθηκαν.

6. Συγγραφή: Συγκεντρώθηκαν όλα τα θέματα συνοδευόμενα από τα αντίστοιχα δεδομένα και έγινε σύνδεση, τεκμηρίωση και ένταξή τους στα πλαίσια της βιβλιογραφίας.

3.3.5 Θέματα ηθικής και δεοντολογίας

Στην εκπαιδευτική έρευνα η ηθική και η δεοντολογία είναι από τα πιο σημαντικά θέματα και απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή από τον ερευνητή ώστε να τηρηθούν σωστά οι προϋποθέσεις που απαιτούν οι αρχές τους (Ίσαρη & Πουρκός, 2015). Σύμφωνα με την Willig (2013) αυτές είναι η πληροφορημένη συγκατάθεση, η ανωνυμία και η εμπιστευτικότητα, το δικαίωμα της απόσυρσης από την έρευνα, η προστασία από ενδεχόμενη βλάβη, η ενημέρωση για το σκοπό της έρευνας καθώς και η δυνατότητα πρόσβασης στα αποτελέσματά της όταν ολοκληρωθεί.

Αρχικά πριν τη συλλογή των δεδομένων της δικής μου έρευνας εξασφαλίστηκε άδεια διεξαγωγής της έρευνας από την αντίστοιχη Δευτεροβάθμια υπηρεσία η οποία στη συνέχεια θα ενημέρωσε το αντίστοιχο σχολείο και τον εκπαιδευτικό του τμήματος στο οποίο θα διεξαγόταν η έρευνα. Αφού εγκρίθηκε το αίτημα διεξαγωγής της έρευνας, δόθηκαν ενημερωτικά έγγραφα στους μαθητές που θα συμμετείχαν και τους γονείς τους και τα οποία περιείχαν πληροφορίες αναφορικά με τη σπουδαιότητα, το σκοπό διεξαγωγής της έρευνας αλλά και λειτουργικά ζητήματα όπως ο τόπος και η διάρκεια της έρευνας. Επίσης τους ζητήθηκε πριν την συλλογή των δεδομένων να υπογράψουν μια φόρμα συναίνεσης στην οποία δηλώσαν ότι συμφωνούσαν να πάρουν μέρος στην διαδικασία της έρευνας και αποδεχόταν όρους όπως η ηχογράφηση και η βιντεοσκόπηση αλλά και η δημοσίευση των ερευνητικών δεδομένων. Επιπλέον ενημερώθηκαν γραπτώς για το δικαίωμα που είχαν να αποσύρουν τη συμμετοχή τους από την έρευνα από την αρχή της διαδικασίας, έως και ένα εύλογο διάστημα μετά την έναρξή της. Ως προς την εμπιστευτικότητα τους γνωστοποιήθηκε ότι η έρευνα περιλαμβάνει τη χρήση ψευδωνύμων και αλλαγή των τοποθεσιών με γενικότερες πληροφορίες ώστε να νιώθουν μεγαλύτερη ασφάλεια και ελευθερία να εκφραστούν.

4. Περιγραφή και ανάλυση της παρέμβασης

Σε αυτή την ενότητα περιγράφονται και αναλύονται τα pre-tests, τα μαθηματικά δομήματα και οι δραστηριότητες που δημιουργήθηκαν για την υλοποίηση της έρευνας, με τις οποίες ήρθαν σε επαφή οι μαθητές και επιπλέον αναλύονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

4.1 Τα pre-tests και τα αντίστοιχα αποτελέσματα

Πριν την έναρξη της παρέμβασης στο εργαστήριο πληροφορικής, είχε σχεδιαστεί και είχε δοθεί στους μαθητές να συμπληρώσουν εντός της τάξης ένα pre-test ώστε να εντοπιστεί πως οι μαθητές αντιμετώπιζαν την μεταβολή δυο ποσοτήτων, εάν και πως αντιλαμβανόταν την συμμεταβολή και τις συναρτήσεις. Τα pre-test μοιράστηκαν από τον εκπαιδευτικό στο τελευταίο μάθημα και στη συνέχεια συλλέχθηκαν και αναλύθηκαν από τον ερευνητή πριν οι μαθητές έρθουν σε επαφή με τα ψηφιακά μαθηματικά δομήματα της έρευνας.

Στην 1η δραστηριότητα που περιείχε το pre-test (το οποίο βρίσκεται στο κεφάλαιο 8 της εργασίας) ζητούνταν από τους μαθητές τα παρακάτω:

Ένα λιοντάρι διανύει τρέχοντας 7 μέτρα κάθε 3 δευτερόλεπτα.
α) Βρείτε πόση απόσταση θα έχει διανύσει μετά από 9 δευτερόλεπτα
β) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα και στη συνέχεια περιγράψτε πως μεταβάλλεται το κάθε ποσό ξεχωριστά αλλά και πως μεταβάλλεται το ένα ποσό σε σχέση με το άλλο.

Από τις απαντήσεις των μαθητών φάνηκε ότι οι περισσότεροι προσέγγισαν το πρόβλημα μέσα από τη χρήση της έννοιας των ανάλογων ποσών και την επίλυση εξισώσεων. Υπάρχουν ενδείξεις ότι αρχικά συνδύασαν τα δυο ποσά θεωρώντας ότι συνδέονται με αναλογία και ότι μεταβάλλονται ταυτόχρονα, προσεγγίζοντας σε ένα αρχικό στάδιο τη συμμεταβολή. Επιπλέον στη συνέχεια προσπάθησαν στον πίνακα τιμών να τα συντονίσουν και κάποιοι από αυτούς με βάση την αναλογική σχέση που τα συνδέει προσπάθησαν να την εκφράσουν. Λίγοι ήταν αυτοί που την έγραψαν με αλγεβρικό τρόπο καθώς οι περισσότεροι σκεπτόμενοι την αναλογία εξέφρασαν σε κάθε γραμμή του πίνακα ξεχωριστούς αριθμητικούς λόγους για τις τιμές της κάθε γραμμής. Επομένως νοηματοδότησαν ότι υπάρχει μια σταθερή σχέση που συνδέει τα δυο ποσά, ότι οι τιμές μεταβάλλονται ταυτόχρονα συνδυάζοντάς αυτές αλλά και τις ενδιάμεσες τιμές.

Στη 2η δραστηριότητα που περιείχε το pre-test ζητούνταν από τους μαθητές τα παρακάτω:

Έχουμε τρία διαφορετικά δοχεία με το ίδιο ύψος που γεμίζουν με νερό, ανοίγοντας ταυτόχρονα τρεις ίδιες βρύσες, τις οποίες κλείνουμε όταν γεμίσουν τα δοχεία. Συμπληρώστε στην κορυφή του πίνακα ποιο δοχείο αντιστοιχεί σε κάθε στήλη.

Μέσα από τις απαντήσεις των μαθητών σε αυτή τη δραστηριότητα φάνηκε ότι οι περισσότεροι από αυτούς νοηματοδότησαν τον τρόπο που συμμεταβάλονται τα ποσά του χρόνου και του ύψους της στάθμης μέσα από τον συντονισμό των αντίστοιχων τιμών.

Στην 3η δραστηριότητα που περιείχε το pre-test ζητούνταν από τους μαθητές τα παρακάτω:

Ένα αυτοκίνητο κινείται σε ένα αυτοκινητόδρομο με σταθερή ταχύτητα 50 μέτρα ανά 3 δευτερόλεπτα:

α) Πόση απόσταση θα έχει διανύσει το αυτοκίνητο μετά από 15 δευτερόλεπτα και γιατί;

β) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος (s)	*0*	*3*		*9*		*15*	*45*	*180*
Απόσταση(m)		*50*	*100*		*200*			

γ) Παρατηρήστε τον πίνακα και προσπαθήστε να περιγράψετε τη συμπεριφορά των τιμών του κάθε ποσού.

δ) Αφού μελετήσετε όλες τις τιμές του πίνακα, σχολιάστε παρακάτω αν οι τιμές των δυο ποσών έχουν κάποια σχέση και πως αυτές μεταβάλλονται. Εάν οι τιμές συνδέονται με κάποιο τρόπο, καταγράψτε ποια είναι η μεταξύ τους σχέση αφού το δικαιολογήσετε.

Οι περισσότεροι μαθητές συντόνισαν και αναγνώρισαν την κατεύθυνση μεταβολής των τιμών, επιπλέον διατύπωσαν ότι τα ποσά συνδέονται με μια σταθερή σχέση αναλογίας αλλά όμως λίγοι ήταν εκείνοι που την εξέφρασαν σωστά σε αλγεβρική μορφή. Σύμφωνα με τα επίπεδα νοηματοδότησης της συμμεταβολής των Thompson & Carlson (2017) και με βάση την περιγραφή της συμπεριφοράς των τιμών από τους μαθητές υπάρχουν ενδείξεις ότι την αντιμετωπίζουν ως κατετμημένη συνεχή συμμεταβολή αναγνωρίζοντας τις ταυτόχρονες μεταβολές σε όλες τις τιμές και νοηματοδότηση της συμμεταβολής σε τμήματα.

Στην 4η δραστηριότητα που περιείχε το pre-test ζητούνταν από τους μαθητές τα παρακάτω:

Σε ένα κτήμα σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις 80 μέτρα και 50 μέτρα, ο ιδιοκτήτης του αποφάσισε να φυτέψει λαχανικά σε ένα χώρο του που θα έχει σχήμα τετραγώνου με πλευρά x μέτρα.

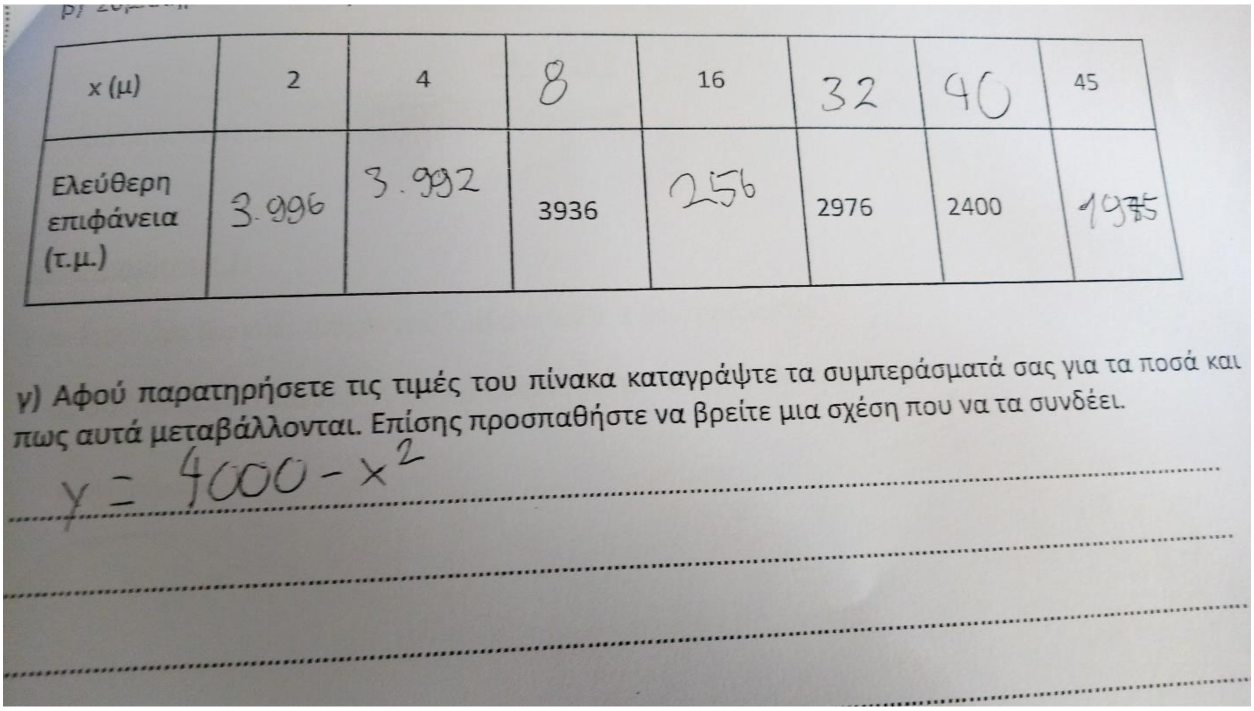
α) Πόση επιφάνεια θα μείνει ελεύθερη στο κτήμα αν ο χώρος με τα λαχανικά έχει πλευρά 10 μέτρα;

β) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

x (μ)	2	4		16			45
Ελεύθερη επιφάνεια (τ.μ.)			3936		2976	2400	

γ) Αφού παρατηρήσετε τις τιμές του πίνακα καταγράψτε τα συμπεράσματά σας για τα ποσά και πως αυτά μεταβάλλονται. Επίσης προσπαθήστε να βρείτε μια σχέση που να τα συνδέει.

Οι μαθητές έδειξαν να μην δυσκολεύονται με την επίλυση αυτής της δραστηριότητας και οι περισσότεροι απάντησαν σωστά στα δυο πρώτα ερωτήματα. Στο τελευταίο ερώτημα πολλοί βρήκαν μια κατάλληλη αλγεβρική σχέση που να συνδέει τα ποσά αλλά αρκετοί από αυτούς εξέφρασαν την λανθασμένη άποψη ότι τα ποσά που μελετήθηκαν ήταν αντιστρόφως ανάλογα καθώς δεν νοηματοδότησαν σε βάθος τη συμμεταβολή και βασίστηκαν μόνο στην αντίθετη κατεύθυνση μεταβολής στις τιμές των ποσών η οποία δεν συνέβαλε στο σωστό συντονισμό τους. Παρατηρήθηκε επίσης ότι δεν κατέγραψαν καθόλου άλλα συμπεράσματα για τα ποσά πέρα από την μαθηματική σχέση. Με βάση αυτό φαίνεται πως οι εκπαιδευόμενοι λόγω του χαρακτήρα της παραδοσιακής εκπαίδευσης η οποία μαθαίνει τους μαθητές να λύνουν ασκήσεις με στόχο τις εξετάσεις και όχι πως να σκέφτονται και να εκφράζονται με τα Μαθηματικά, προτιμούν να χειρίζονται αριθμούς και αλγεβρικά σύμβολα χωρίς να αναλύουν με κριτική σκέψη τα ευρήματά τους. Ως προς την έννοια της συνάρτησης οι μαθητές νοηματοδότησαν ότι τα ποσά συνδεόταν με μια σταθερή σχέση την οποία κατάφεραν να εκφράσουν όπως είπαμε μέσω μιας αλγεβρικής σχέσης με αφαιρετικό τρόπο.



x (μ)	2	4	8	16	32	40	45
Ελεύθερη επιφάνεια (τ.μ.)	3.996	3.992	3936	256	2976	2400	1975

γ) Αφού παρατηρήσετε τις τιμές του πίνακα καταγράψτε τα συμπεράσματά σας για τα ποσά και πως αυτά μεταβάλλονται. Επίσης προσπαθήστε να βρείτε μια σχέση που να τα συνδέει.

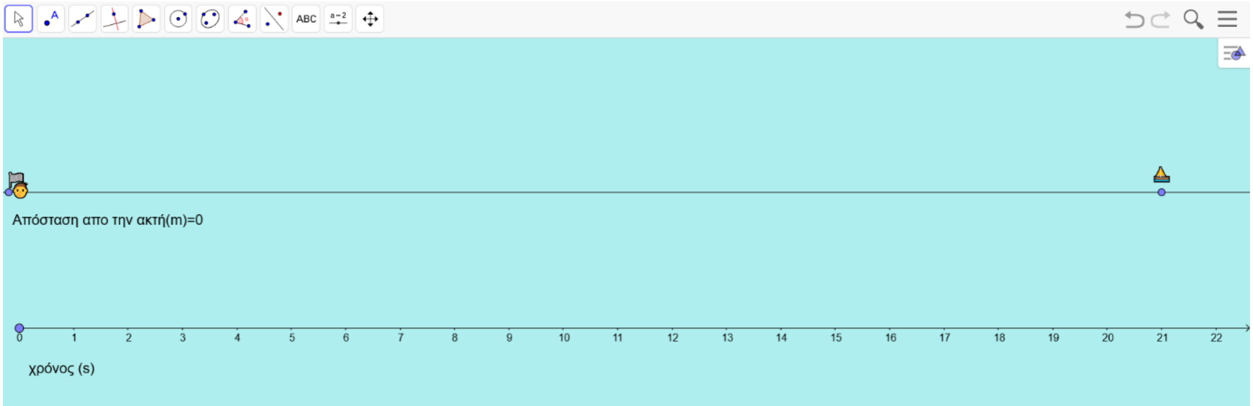
$y = 4000 - x^2$

Εικόνα 7 Στιγμιότυπο από το pre-test ενός μαθητή

4.2 Περιγραφή των δομημάτων και της δραστηριότητας των μαθητών

4.2.1 1ο ψηφιακό μαθηματικό δόμημα

1η Δραστηριότητα



Εικόνα 8 Το δόμημα με το dynagraph στο πρώτο μέρος της 1ης δραστηριότητας

Η δραστηριότητα 1 περιλαμβάνει την μελέτη μιας συνάρτησης μέσω της συμμεταβολής δυο ποσών από τους μαθητές χρησιμοποιώντας ένα dynagraph δυο παράλληλων οριζόντιων αξόνων και τον συγχρονισμό των τιμών τους μέσα από τον δυναμικό χειρισμό των ποσών καθώς και την παρατήρηση των αντίστοιχων τιμών του υπολογιστικού φύλλου. Το dynagraph έχει βρεθεί ότι γεφυρώνει τις αριθμητικές με τις πιο αφηρημένες αναπαραστάσεις της συνάρτησης (Goldenberg et al., 1992). Επίσης δίνει έμφαση στη συνεχή μεταβολή των τιμών μέσα από το δυναμικό χειρισμό των ποσοτήτων, προσεγγίζοντας οι μαθητές τη συνάρτηση μέσα από την εμπειρία τους (1 διάσταση) και εστιάζοντας παράλληλα στις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων. Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα υπάρχουν δυο παράλληλοι άξονες αριθμών που απεικονίζουν τις τιμές των ποσών του χρόνου και της απόστασης και ο μαθητής μπορεί να χειριστεί δυναμικά και να διαδράσει με τα κινούμενα σημεία παρατηρώντας τις τιμές που παίρνουν τα δυο ποσά και τη συμπεριφορά τους, κάνοντας παράλληλα υποθέσεις και ελέγχοντάς αυτές μέσα από τις λειτουργικότητες του εργαλείου.

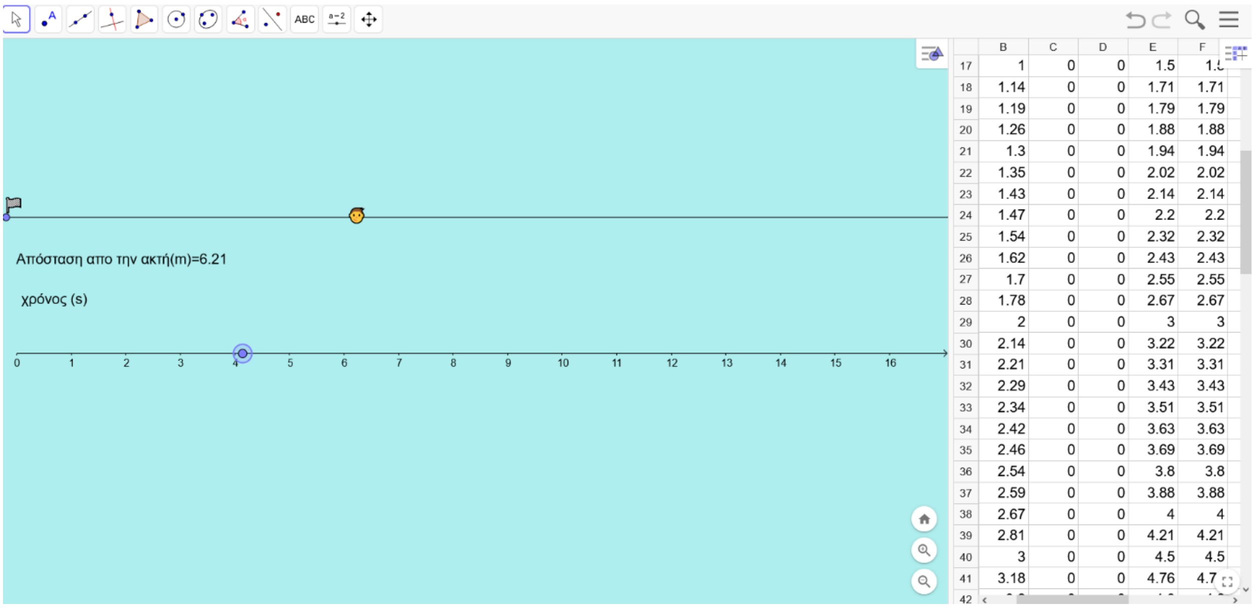
Οι μαθητές ξεκίνησαν με την πρώτη δραστηριότητα στην οποία αρχικά ζητούνταν τα εξής:

Ένας κολυμβητής ξεκινάει από την ακτή να κολυμπά με στόχο να φτάσει σε ένα σκάφος το οποίο είναι αγκυροβολημένο μακριά:

α) (i) Μετακινήστε το μωβ σημείο και παρακολουθήσετε την εξέλιξη της κίνησης του κολυμβητή. Τι παρατηρείτε;

(ii) Περιγράψτε σε ένα σύντομο κείμενο το φαινόμενο που μόλις παρατηρήσατε.

Ξεκινώντας ο εκπαιδευτικός έδωσε λίγο χρόνο στους μαθητές ώστε να παρατηρήσουν τη δοσμένη κατασκευή και στη συνέχεια περιέγραψε τα βασικά χαρακτηριστικά της, αναφέροντας ότι υπάρχουν δυο παράλληλοι άξονες αριθμών που απεικονίζουν τις τιμές δυο ποσών τα οποία αντιπροσωπεύουν την εξέλιξη του φαινομένου της κίνησης ενός κολυμβητή που θέλει να φτάσει κολυμπώντας σε ένα σκάφος. Στη συνέχεια τόνισε στους μαθητές ότι μπορούν να χειριστούν το μωβ σημείο του κάτω άξονα παρατηρώντας παράλληλα τις αλλαγές που συμβαίνουν στην οθόνη κατά την εξέλιξη του φαινομένου. Τα ποσά του χρόνου και της απόστασης από την ακτή είναι δυναμικά συνδεδεμένα με την συναρτησιακή σχέση Απόσταση= 1,5·χρόνος που δεν είναι φανερή στους μαθητές και επίσης είναι αλληλεξαρτώμενα καθώς όταν μετακινούν το μωβ σημείο του χρόνου τότε μετακινείται από μόνος του ο κολυμβητής στον πάνω άξονα μια αντίστοιχη απόσταση με βάση τη συνάρτηση. Ζητείται από τους μαθητές να πειραματιστούν με τον χρόνο, να παρακολουθήσουν τα αποτελέσματα του δυναμικού τους χειρισμού και να περιγράψουν το φαινόμενο που παρατηρούν να συμβαίνει στην οθόνη. Από τις αρχικές ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις που έκαναν και οι δύο ομάδες είναι ότι όταν αλλάζει το ένα ποσό τότε αλλάζει και το άλλο και συγκεκριμένα αυξάνονται ταυτόχρονα. Επιπλέον είπαν ότι τα δυο ποσά σχετίζονται και μια ομάδα (ομάδα 2) ανέφερε ότι τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα αλλάζοντας γνώμη στη συνέχεια καθώς παρατηρούσε το dynagraph, ενώ η άλλη (ομάδα 1) παρατήρησε από την αρχή ότι τα ποσά είναι ανάλογα. Τέλος η μια ομάδα (ομάδα 1) αναγνώρισε μέσα από την αναπαράσταση του εργαλείου και την ταχύτητα του κολυμβητή λέγοντας ότι αφού σε ένα δευτερόλεπτο η απόσταση είναι 1,5 αυτή θα είναι η ταχύτητά του.



Εικόνα 9 Το dynagraph και το υπολογιστικό φύλλο του δεύτερου μέρους της 1ης δραστηριότητας

Οι μαθητές συνέχισαν με το δεύτερο σκέλος της πρώτης δραστηριότητας όπου ζητούνταν τα εξής:

β) (i) Πειραματιστείτε με τον χρόνο και βρείτε πόση απόσταση θα έχει κολυμπήσει μετά από 4, και μετά από 9,5 δευτερόλεπτα. Επαληθεύστε τις τιμές που βρήκατε μέσα και από την καταγραφή τους στο υπολογιστικό φύλλο επιλέγοντας μέσα από τις ρυθμίσεις Προβολή > Υπολογιστικό Φύλλο *και με δεξί κλικ στο σημείο* Εγγραφή στο Υπολογιστικό Φύλλο

(ii) Σε πόσο χρόνο θα έχει κολυμπήσει 6 και 10,5 μέτρα αντίστοιχα; Επαληθεύστε τις τιμές που βρήκατε μέσα και από το υπολογιστικό φύλλο.

Ο εκπαιδευτικός τους κάλεσε να ενεργοποιήσουν αρχικά την εμφάνιση του παραθύρου του υπολογιστικού φύλλου μέσα από τις ρυθμίσεις του εργαλείου και στη συνέχεια να πειραματιστούν με το μωβ σημείο του χρόνου για να βρούνε πόση απόσταση έχει από την ακτή ο κολυμβητής μετά από 4 και 9,5 δευτερόλεπτα. Στο ερώτημα αυτό η μελέτη του φαινομένου εμπλουτίζεται με μια επιπλέον αναπαραστατική μέθοδο, εκείνη του υπολογιστικού φύλλου, κατά την οποία οι μαθητές επιλέγουν την αυτόματη καταγραφή των μεταβαλλόμενων τιμών του χρόνου και της απόστασης οι οποίες αποθηκεύονται αυτόματα σε έναν πίνακα και είναι διαθέσιμες προς εξερεύνηση από τους μαθητές. Μέσα από αυτή τη λειτουργικότητα αναμέναμε οι μαθητές να επαληθεύσουν τις υποθέσεις που έκαναν για τη ζητούμενη απόσταση καθώς και να μελετήσουν τον τρόπο που μεταβάλλονται οι τιμές κάθετα στις στήλες και οριζόντια στις γραμμές. Οι μαθητές ξεκίνησαν να πειραματίζονται όπως στο προηγούμενο ερώτημα με την αρχική αναπαράσταση μετακινώντας το μωβ σημείο και παρατηρώντας την θέση του κολυμβητή. Στη συνέχεια ενεργοποίησαν το υπολογιστικό φύλλο μέσω του οποίου ξεκίνησαν να εξερευνούν τις καταγραφόμενες τιμές στις στήλες και τις γραμμές του πίνακα καθώς μετακινούσαν το μωβ σημείο, προσπαθώντας να νοηματοδοτήσουν τον τρόπο που μεταβάλλονται τα ποσά του χρόνου και της απόστασης, αλλά και να συνδέσουν τις τιμές των δυο ποσών μεταξύ τους ώστε να επαληθεύσουν τα ευρήματά τους. Έχοντας αναγνωρίσει νωρίτερα τον τρόπο που μεταβάλλονται τα ποσά μέσω του δυναμικού χειρισμού, οι ομάδες επικεντρώθηκαν στην σύνδεση των ποσών στις γραμμές προσπαθώντας να αντιστοιχίσουν στις τιμές 4 και 9,5 της στήλης του χρόνου τις σωστές τιμές της στήλης της απόστασης. Μια αξιοσημείωτη ενέργεια που παρατηρήθηκε είναι ότι η ομάδα 2 χρησιμοποίησε την εφαρμογή της αριθμομηχανής για να υπολογίσει κάποιες ενδιάμεσες τιμές οι οποίες δεν είχαν καταγραφεί, αξιοποιώντας την έννοια του μέσου όρου που γνώριζε από μικρότερες τάξεις και είχε εμπειρίες με αυτή. Στο δεύτερο υποερώτημα ζητήθηκε αντίστροφα να βρεθεί σε πόσο χρόνο ο κολυμβητής θα είχε κολυμπήσει 6 και 10,5 μέτρα αντίστοιχα. Οι μαθητές εργάστηκαν με παρόμοιο τρόπο όπως στο προηγούμενο υποερώτημα και προσπάθησαν ξανά μέσω αριθμητικών πράξεων με τις οποίες έχουν εμπειρία να υπολογίσουν το ζητούμενο και να επαληθεύσουν τις υποθέσεις τους.

Στο τελευταίο ερώτημα της πρώτης δραστηριότητας ζητήθηκε το εξής:

γ) Περιγράψτε το φαινόμενο της κίνησης του κολυμβητή χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες του υπολογιστικού φύλλου

Το συγκεκριμένο ερώτημα σχεδιάστηκε ώστε να εκφράσουν οι μαθητές με ένα δικό τους τρόπο το φαινόμενο της κίνησης του κολυμβητή και της μεταβολής των αντίστοιχων ποσοτήτων μέσα από την αναπαράσταση του υπολογιστικού φύλλου καθώς και για να γίνει πιο εμφανές το πώς νοηματοδοτούν οι ίδιοι την έννοια της συμμεταβολής και της συνάρτησης με αυτή και αν τους οδηγεί σε περαιτέρω συμπεράσματα σε σχέση με πριν όταν την χρησιμοποιούν.

<u>2η Δραστηριότητα</u>

Οι μαθητές συνέχισαν στη δεύτερη δραστηριότητα η οποία αποτελούνταν από τα εξής ερωτήματα:

α) Πόσο χρόνο χρειάζεται ο κολυμβητής για να φτάσει το σκάφος; Μπορεί ο χρόνος αυτός να αλλάξει;

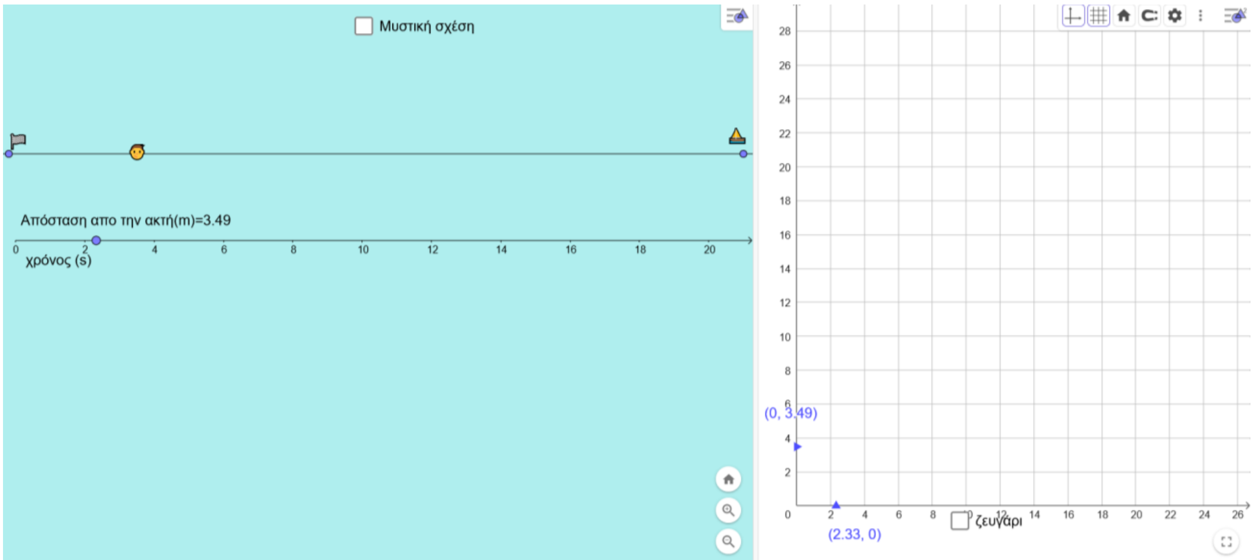
β) Μελετήστε τις τιμές που προέκυψαν μέχρι τώρα και αναζητήστε αν συνδέονται τα δυο ποσά. Περιγράψτε πως συμπεριφέρονται οι τιμές τους ξεχωριστά αλλά και μαζί καταγράφοντας στη συνέχεια μια σχέση που να τα συνδέει.

Αρχικά ο εκπαιδευτικός ενημέρωσε τους μαθητές ότι θα συνεχίσουν να χρησιμοποιούν τα δυο διαθέσιμα παράθυρα του εργαλείου και ότι πρέπει στο πρώτο ερώτημα να βρούνε σε πόσο χρόνο κάνει ο κολυμβητής στο σκάφος και να εξετάσουν αν μπορεί ο χρόνος αυτός να αλλάξει. Οι μαθητές και των δυο ομάδων χρησιμοποιώντας το dynagraph μετακίνησαν το μωβ σημείο του χρόνου ώσπου ο κολυμβητής να φτάσει στο σκάφος και παρατήρησαν ποια είναι η αντίστοιχη τιμή του στον οριζόντιο άξονα απαντώντας ότι θα χρειαστούν 21 δευτερόλεπτα. Στη συνέχεια έπειτα από συζήτηση η ομάδα 2 εξέφρασε την άποψη ότι ο χρόνος θα μπορούσε να αλλάξει αν μεταβληθεί η απόσταση του σκάφους από την ακτή ή τα μέτρα που διανύει ο κολυμβητής ανά δευτερόλεπτο, δηλαδή η ταχύτητά του. Αντίστοιχα η ομάδα 1 παρατήρησε και αυτή ότι αν αλλάξει η ταχύτητα ο κολυμβητής θα φτάνει σε διαφορετικό χρόνο στο σκάφος.

Στο επόμενο ερώτημα οι μαθητές κλήθηκαν να μελετήσουν όλα τα αποτελέσματα του πειραματισμού τους ώστε να αναζητήσουν αν συνδέονται τα ποσά του χρόνου και της απόστασης, να περιγράψουν πως μεταβάλλονται οι τιμές τους ξεχωριστά αλλά και μαζί καθώς και να διατυπώσουν μια αλγεβρική σχέση που να τα συνδέει. Οι δυο ομάδες νοηματοδότησαν με ευκολία ότι τα δυο ποσά συνδέονται γιατί σύμφωνα με εκείνους όταν μεταβάλλεται ο χρόνος, αλλάζει και η θέση του κολυμβητή πάντα όπως φαίνεται από το dynagraph. Παρατηρώντας τις τιμές στο υπολογιστικό φύλλο διατύπωσαν την άποψη ότι εάν ο χρόνος αλλάξει κατά 1 δευτερόλεπτο τότε η απόσταση θα αλλάξει κατά 1,5 μέτρο Τέλος διατύπωσαν τη σχέση απόσταση = 1,5 · χρόνος η οποία συνδέει τα δυο ποσά.

4.2.2 2ο ψηφιακό μαθηματικό δόμημα

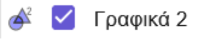
<u>1η Δραστηριότητα</u>



Εικόνα 10 Το ψηφιακό δόμημα του δεύτερου φύλλου εργασίας

Στο δεύτερο μέρος της παρέμβασης προσφέρεται ένας διαφορετικός συνδυασμός αναπαραστάσεων του προηγούμενου φαινομένου του κολυμβητή με το dynagraph και τη γραφική παράσταση στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων να είναι διαθέσιμα στους μαθητές σε διαφορετικά παράθυρα για να μελετηθεί η νοηματοδότηση της συνάρτησης μέσα από τη συμμεταβολή των ποσών του χρόνου και της απόστασης τα οποία βρίσκονται σε δύο άξονες και στις δυο περιπτώσεις. Ξεκινώντας ο εκπαιδευτικός έδωσε τον απαραίτητο χρόνο στους μαθητές ώστε να διαδράσουν με την εφαρμογή και να θυμηθούν με τι είχαν ασχοληθεί την 1η ώρα της παρέμβασης και στη συνέχεια ανέφερε την ύπαρξη επιπλέον χαρακτηριστικών της δοσμένης κατασκευής όπως το παράθυρο με το καρτεσιανό επίπεδο. Οι μαθητές ξεκίνησαν με την πρώτη δραστηριότητα στην οποία αρχικά ζητούνταν τα εξής:

Ο κολυμβητής που γνωρίσαμε την περασμένη φορά ξεκινάει από την ακτή να κολυμπά με στόχο να φτάσει σε ένα σκάφος:

α) (i) Μέσα από τις ρυθμίσεις  *, επιλέξτε Προβολή και ενεργοποιήστε την επιλογή* 

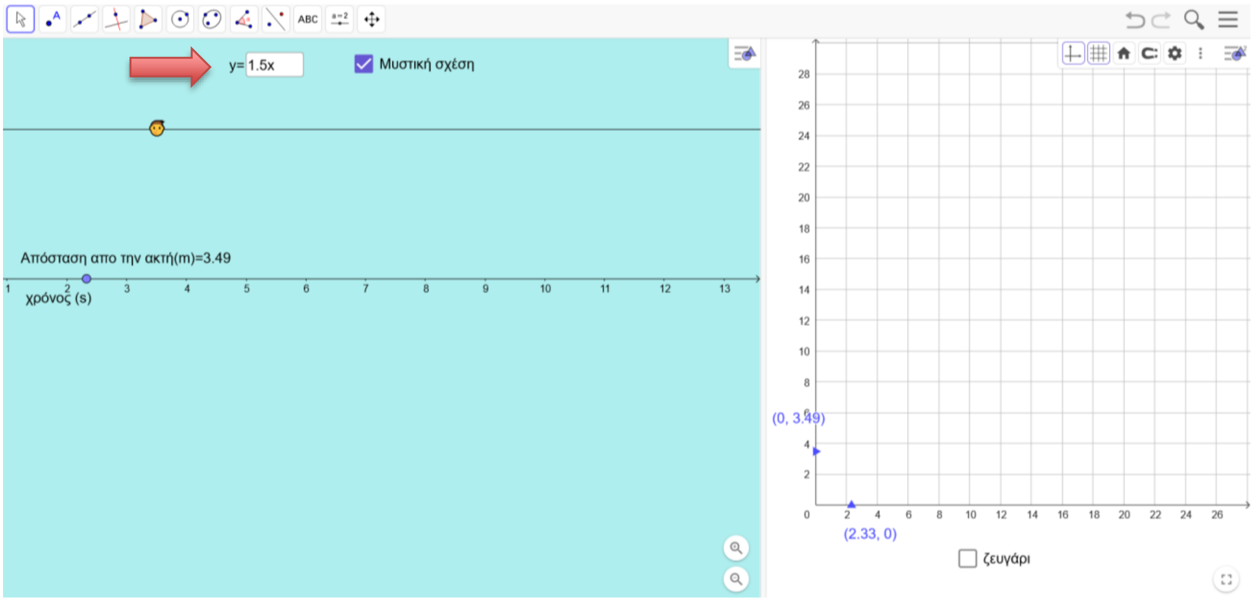
. Αφού πειραματιστείτε με το μωβ σημείο, περιγράψτε το φαινόμενο της κίνησης του κολυμβητή χρησιμοποιώντας τη νέα αναπαράσταση (Γραφικά 2).

(ii) Πόση απόσταση ακόμη έχει να διανύσει ο κολυμβητής μετά από χρόνο 5 δευτερόλεπτα για να φτάσει στο σκάφος; Σε ποιο σημείο θα βρισκόταν αντίστοιχα και στις δυο αναπαραστάσεις;

Αφού πειραματίστηκαν με το dynagraph και εξοικειώθηκαν ξανά με το πρόβλημα, ενεργοποίησαν την εμφάνιση της νέας αναπαράστασης όπου αρχικά δεν ήταν εμφανής ο κολυμβητής αλλά δυο κινούμενα σημεία στους άξονες και άρχισαν να μελετούν το καρτεσιανό γράφημα και πως αυτό σχετίζεται με το φαινόμενο. Η πρώτη ομάδα αφού εξερεύνησε την κατασκευή και τις δυο αναπαραστάσεις εξέφρασε την άποψη ότι τα ποσά στους κάθετους άξονες είναι ο χρόνος και η απόσταση, αυτά συνδέονται με την σχέση $y=1{,}5\cdot x$ και ότι το νέο παράθυρο εκφράζει το φαινόμενο της κίνησης του κολυμβητή. Η δεύτερη ομάδα αρχικά απάντησε αυθόρμητα ότι όταν ο χρόνος αλλάζει τότε τα δυο σημεία κινούνται στο παράθυρο του καρτεσιανού.

Στο επόμενο υποερώτημα οι μαθητές κλήθηκαν να υπολογίσουν την απόσταση που μένει να διανύσει ο κολυμβητής μέχρι το σκάφος μετά από 5 δευτερόλεπτα καθώς και να βρούνε σε ποιο σημείο θα βρισκόταν και στις δυο αναπαραστάσεις. Η ομάδα 1 φάνηκε να νοηματοδοτεί πιο αποδοτικά το ζητούμενο παρατηρώντας την απόσταση που έμενε αφού μετακίνησαν το σημείο στο dynagraph στα 5 δευτερόλεπτα και αφαίρεσαν με αλγεβρική πράξη από τη συνολική απόσταση μέχρι το σκάφος τον αριθμό 7,5 που αντιστοιχούσε στα 5 δευτερόλεπτα. Η ομάδα 2 έδειξε να δυσκολεύεται αρχικά καθώς δεν είχαν αντιληφθεί ότι θα πρέπει να υπολογίσουν πόση απόσταση μένει και προσπαθούσαν να υπολογίσουν μόνο πόση είχε διανύσει μέχρι τότε ο κολυμβητής, Μετά από βοηθητική παρέμβαση του ερευνητή οι μαθητές της 2ης ομάδας αντιλήφθηκαν ποιο ήταν το ζητούμενο και ακολούθησαν την ίδια στρατηγική με την ομάδα 1. Οι μαθητές στη συνέχεια προσπάθησαν να βρούνε σε ποια θέση θα βρισκόταν ο κολυμβητής στο νέο παράθυρο τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή και απάντησαν οι δύο ομάδες ότι για 5 οριζόντια στον κάθετο άξονα θα είναι στο 7,5. Η ομάδα 1 τέλος παρατήρησε ότι αν συνδυάσει τις τιμές στους δυο άξονες τότε θα δημιουργηθεί ένα νέο σημείο το οποίο θα εκφράζει τη θέση του κολυμβητή στο γράφημα των καρτεσιανών συντεταγμένων.

2^{η} Δραστηριότητα



Εικόνα 11 Η μορφή του δεύτερου ψηφιακού δομήματος στη δραστηριότητα 2

Στη δεύτερη δραστηριότητα του φύλλου εργασίας ζητήθηκε από τους μαθητές το εξής:

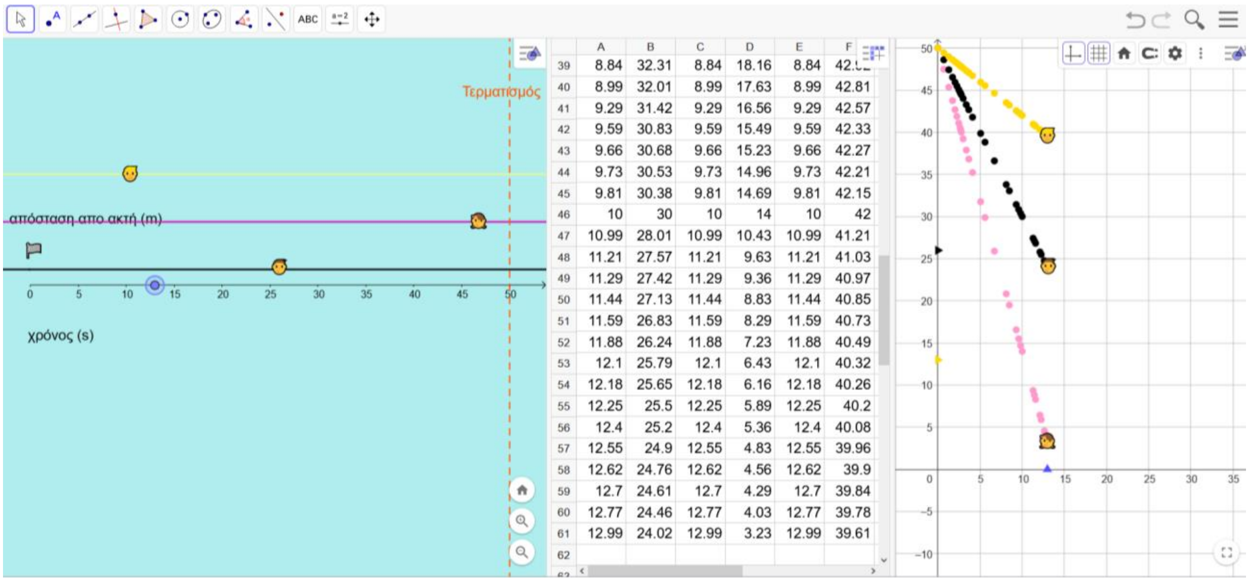
> *Διορθώστε την <<μυστική σχέση>> ώστε ο κολυμβητής να φτάνει στα $\frac{3}{4}$ του αρχικού χρόνου στο σκάφος. Ποιες μεταβολές παρατηρείτε στα δυο σχήματα;*

Στο παράθυρο του dynagraph υπήρχε ένα κουτί με τίτλο <<Μυστική σχέση>> το οποίο μπορούσαν να ενεργοποιήσουν οι μαθητές και τότε εμφάνιζε μια αλγεβρική σχέση που συνέδεε δυο μεταβλητές χ και y οι οποίες αντιπροσώπευαν τα ποσά του χρόνου και της απόστασης. Επιπλέον δινόταν η δυνατότητα στους μαθητές να πειραματιστούν και να μεταβάλλουν τη σχέση αυτή πληκτρολογώντας στο λευκό κουτί μια διαφορετική ώστε τα χαρακτηριστικά του φαινομένου να αλλάξουν και να ικανοποιούν διαφορετικές υποθέσεις. Με αυτόν τον τρόπο εισάγεται ακόμη μια διαφορετική αναπαράσταση της συνάρτησης, η τυπική αλγεβρική μορφή της, που είναι αλληλοσυνδεμένη με τις υπόλοιπες και δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να νοηματοδοτήσουν σε βάθος την έννοια της συνάρτησης μέσα από τον ταυτόχρονο χειρισμό του αλγεβρικού τύπου της και του δυναμικού χειρισμού του διαδραστικού σημείου του χρόνου. Ο εκπαιδευτικός ξεκινώντας η δραστηριότητα εξήγησε στους μαθητές ότι θα πρέπει να ενεργοποιήσουν και να μελετήσουν την μυστική σχέση ώστε στη συνέχεια να τη διορθώσουν με σκοπό ο κολυμβητής να φτάνει στο σκάφος στα $\frac{3}{4}$ του αρχικού χρόνου.

Αφού συζήτησαν μεταξύ τους, οι μαθητές της ομάδας 1 βασιζόμενοι στη σχέση ταχύτητα=$\frac{απόσταση}{χρόνος}$ την οποία γνώριζαν από την Φυσική υπέθεσαν αρχικά ότι θα έπρεπε να πολλαπλασιάσουν το 1,5 με το $\frac{3}{4}$ αλλά στη συνέχεια μέσα από περαιτέρω συζήτηση μεταξύ τους κατέληξαν στο ότι θα πρέπει τελικά να διαιρέσουν το 1,5 με το $\frac{3}{4}$ για να διορθώσουν τη σχέση. Η ομάδα 2 αντίστοιχα χρησιμοποίησε και αυτή τις αριθμητικές πράξεις για να βρει το ζητούμενο πολλαπλασιάζοντας αρχικά το 0,75 με τα 14 δευτερόλεπτα στην αριθμομηχανή και αφού βρήκε σαν αποτέλεσμα το 10,5 ως τον νέο χρόνο του κολυμβητή, τότε διαίρεσε ξανά με την αριθμομηχανή 21:10,5 βρίσκοντας έτσι ότι θα πρέπει να αλλάξουν στην σχέση τον αριθμό 1,5 σε 2. Από τις ενέργειες και των δυο ομάδων φάνηκε ότι οι μαθητές βασίστηκαν κυρίως στις αριθμητικές πράξεις και τον αλγεβρικό χειρισμό της σχέσης για να καταλήξουν στο ζητούμενο και δεν έκαναν ιδιαίτερη χρήση των αναπαραστάσεων που είχαν στη διάθεσή τους. Στο τέλος άλλαξαν και οι δυο ομάδες τον συντελεστή στη σχέση από 1,5 σε 2 και επαλήθευσαν τις υποθέσεις τους μετακινώντας το σημείο του χρόνου στο 10,5 και παρατηρώντας παράλληλα τον κολυμβητή να φτάνει το σκάφος.

4.2.3 $3^{ο}$ ψηφιακό μαθηματικό δόμημα

Δραστηριότητα



Εικόνα 12 Οι τρείς αναπαραστάσεις με το 3ο ψηφιακό μαθηματικό δόμημα

Το τρίτο μέρος της παρέμβασης ξεκίνησε με την εμπλοκή των μαθητών με το $3^{ο}$ ψηφιακό μαθηματικό δόμημα το οποίο συνοδευόταν με μια δραστηριότητα η οποία περιείχε τα παρακάτω ερωτήματα:

*Σε ένα σχολικό κολυμβητικό αγώνα 50 μέτρων συμμετέχουν ο **Γιώργος**, η Ελένη και ο Θάνος. Με βάση τα τρία παράθυρα που εμφανίζονται στην οθόνη:*

α) Υπολογίστε με ποιο ρυθμό μειώνεται η απόσταση από τον τερματισμό για κάθε κολυμβητή.

β) Βρείτε μια σχέση για τον κάθε κολυμβητή που να εκφράζει την απόσταση του από τον τερματισμό σε σχέση με τον χρόνο.

γ) Ποια στιγμή η Ελένη απέχει την μισή απόσταση σε σχέση με τον Γιάννη από τον τερματισμό;

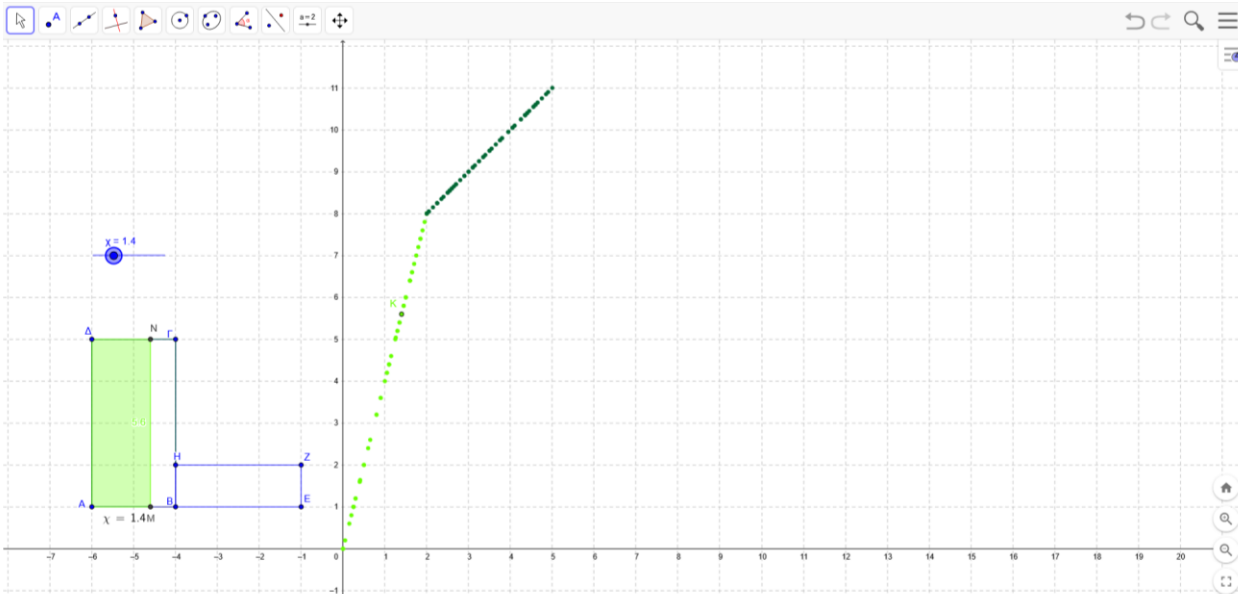
Η συγκεκριμένη εφαρμογή κινούνταν στο ίδιο θεματικό πλαίσιο με την προηγούμενη αλλά προσέφερε στους μαθητές περισσότερες αναπαραστάσεις ταυτόχρονα, όπως το dynagraph, το υπολογιστικό φύλλο και η γραφική παράσταση στο καρτεσιανό επίπεδο και συνδύαζε περισσότερες συναρτήσεις απ' ότι πριν φέρνοντας σε επαφή τους μαθητές με πολλά συμμεταβαλλόμενα ποσά του ίδιου είδους. Τους έδωσε την ευκαιρία να διερευνήσουν και να παρατηρήσουν τις διαφορετικές μορφές έκφρασης του φαινομένου και να νοηματοδοτήσουν τον ρόλο των παραμέτρων και τα ποιοτικά χαρακτηριστικά όπως η κλίση στη γραφική παράσταση του φαινομένου ή ο ρυθμός μεταβολής μέσα από την παρατήρηση των τιμών του υπολογιστικού φύλλου.

Συγκεκριμένα δινόταν το διαδραστικό μωβ σημείο του χρόνου που οι μαθητές μπορούσαν να χειριστούν δυναμικά και άλλοι τρείς παράλληλοι άξονες στους οποίους κινούνταν ταυτόχρονα οι κολυμβητές με βάση μια διαφορετική συνάρτηση η οποία συνδέει το χρόνο και την απόσταση από την έναρξη. Δίπλα σε αυτό το παράθυρο υπήρχε ένα υπολογιστικό φύλλο που κατέγραφε αυτόματα τις τιμές του χρόνου και της απόστασης από τον τερματισμό του κάθε κολυμβητή σε δυο στήλες καθώς ο μαθητής κινεί το μωβ σημείο του χρόνου στο dynagraph, δίνοντάς του τη δυνατότητα να παρατηρεί πως τα ποσά μεταβάλλονται κατά στήλες και γραμμές αντίστοιχα. Επιπλέον δίπλα στο υπολογιστικό φύλλο προσφερόταν και η αναπαράσταση του φαινομένου με τις γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων οι οποίες δημιουργούνταν μέσω της καταγραφής του ίχνους ενός σημείου που είχε ως τετμημένη το ποσό του χρόνου και τεταγμένη το ποσό της απόστασης του κάθε κολυμβητή από τον τερματισμό.

Με βάση τα τρία παράθυρα των πολλαπλών αλληλοσυνδεδεμένων αναπαραστάσεων ζητήθηκε από τους μαθητές αρχικά να υπολογίσουν το ρυθμό μείωσης της απόστασης του κάθε κολυμβητή από τον τερματισμό. Μετά από πειραματισμό με το εργαλείο η ομάδα 1 παρατήρησε μέσα από το υπολογιστικό φύλλο ότι ο ρυθμός που μειώνεται η απόσταση του Γιώργου από τον τερματισμό είναι 2 μέτρα το δευτερόλεπτο καθώς σύμφωνα με τους μαθητές στο $1^{ο}$ δευτερόλεπτο η απόσταση από τον τερματισμό είναι 48 μέτρα ενώ αρχικά ήταν 50. Η ομάδα 1 όμως φάνηκε πως είχε πάρει ως δεδομένο ότι η απόσταση μειώνεται με σταθερό ρυθμό χωρίς να το έχει εξερευνήσει όσο θα έπρεπε. Μετά από παρέμβαση του ερευνητή τέθηκε μια αντίστοιχη ερώτηση ώστε οι μαθητές να προβληματιστούν ως προς το συγκεκριμένο θέμα και οι ίδιοι προσπάθησαν μέσα από πειραματισμό με το εργαλείο να επαληθεύσουν την υπόθεσή τους ότι η απόσταση μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό. Η ομάδα 2 ανέφερε ότι ο ρυθμός μείωσης της απόστασης θα είναι η ταχύτητα του κάθε κολυμβητή. Στο δεύτερο ερώτημα οι μαθητές κλήθηκαν να βρουν μια σχέση που να εκφράζει την απόσταση από τον τερματισμό σε σχέση με τον χρόνο για τον κάθε κολυμβητή. Η ομάδα 1 είπε αρχικά ότι όσο αυξάνεται ο χρόνος μειώνεται η απόσταση από τον τερματισμό και ότι για αυτό τα ποσά συμπεριφέρονται με αντίθετο τρόπο. Επίσης ανέφεραν ότι μπορούν να συμβολίσουν με την μεταβλητή χ το ποσό του χρόνου και ότι τα ποσά συνδέονται με μια γραμμική σχέση. Η ομάδα 2 αντιμετώπισε δυσκολίες αρχικά σε αυτό το ερώτημα καθώς οι μαθητές δεν παρατήρησαν στις αναπαραστάσεις ότι η απόσταση μειώνεται όταν ο χρόνος αυξάνεται δηλαδή δεν είχαν συνδέσει τις τιμές των δυο ποσών με τη συμμεταβολή. Η συγκεκριμένη ομάδα είχε προσπαθήσει να εκφράσει από το προηγούμενο ερώτημα μια σχέση που να συνδέει τα δυο ποσά θέτοντας τον χρόνο με την μεταβλητή χ και χρησιμοποίησε την αριθμομηχανή και τις τιμές που εμφανιζόταν στο υπολογιστικό φύλλο χωρίς να συνδέει τις διαθέσιμες αναπαραστάσεις, ακολουθώντας πιο παραδοσιακούς τρόπους με τους οποίους είχε μεγαλύτερη εξοικείωση.

4.2.4 4^o ψηφιακό μαθηματικό δόμημα

Δραστηριότητα



Εικόνα 13 Η δραστηριότητα με το 4ο ψηφιακό μαθηματικό δόμημα

Το τρίτο μέρος της παρέμβασης συνεχίστηκε με την εμπλοκή των μαθητών με το 4^o ψηφιακό μαθηματικό δόμημα το οποίο συνοδευόταν με μια δραστηριότητα η οποία έθετε το παρακάτω ερώτημα:

Ένας κηπουρός θέλει να φυτέψει γρασίδι σε δυο γειτονικούς κήπους διαφορετικών διαστάσεων:

Βρείτε κάποια μαθηματική σχέση που να εκφράζει το εμβαδόν του μέρους του κήπου που ορίζεται από το κινούμενο ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ.

Η τελευταία εφαρμογή αφορά την διερεύνηση ενός διαδραστικού φαινομένου το οποίο σχετίζεται με την μελέτη του εμβαδού ενός επίπεδου χωρίου το οποίο αποτελείται από δυο ορθογώνια διαφορετικών διαστάσεων. Η διάσταση του μήκους μπορεί να μεταβάλλεται από τον χρήστη δυναμικά μέσα από ένα ολισθητή και ταυτόχρονα να καλύπτεται η επιφάνεια του χωρίου με πράσινο χρώμα το οποίο αντιπροσωπεύει το γρασίδι που θέλει να φυτέψει ο κηπουρός. Τα ποσά του μήκους και του εμβαδού είναι δυναμικά συνδεδεμένα με δυο συναρτησιακές σχέσεις Εμβαδό= 4·μήκος και Εμβαδό= 1·μήκος που δεν είναι φανερή στους μαθητές και είναι αλληλεξαρτώμενα. Στο ίδιο παράθυρο προσφέρεται η αναπαράσταση του φαινομένου στο καρτεσιανό επίπεδο, όπου ο οριζόντιος άξονας εκφράζει το μήκος, ο κάθετος άξονας το εμβαδό και το κινούμενο σημείο την μεταβολή του εμβαδού σε σχέση με το μήκος. Η δραστηριότητα αυτή σχεδιάστηκε ώστε οι μαθητές να έρθουν σε επαφή με μια συνάρτηση της οποίας ο αλγεβρικός τύπος και η συμπεριφορά της γενικότερα δεν παραμένει σταθερή ώστε να μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο θα δράσουν και τα νοήματα που θα δομήσουν σε μια πιο πολύπλοκη περίπτωση την οποία δεν έχουν μελετήσει στο παρελθόν δίνοντάς τους ένα πιο ελεύθερο ρόλο.

Ξεκινώντας ο εκπαιδευτικός έδωσε λίγο χρόνο στους μαθητές ώστε να παρατηρήσουν τη δοσμένη κατασκευή και στη συνέχεια περιέγραψε τα βασικά χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν τονίζοντας στους μαθητές ότι μπορούν να χειριστούν τον ολισθητή παρατηρώντας παράλληλα τις αλλαγές που συμβαίνουν κατά την εξέλιξη του φαινομένου. Ζητήθηκε από τους μαθητές να πειραματιστούν, να εξερευνήσουν την κατασκευή και να περιγράψουν το φαινόμενο που παρατηρούν με μια σχέση. Η ομάδα 2 προσπάθησε αρχικά να βρει το εμβαδό από τον αριστερά κήπο μετακινώντας τον ολισθητή και αφού παρατήρησε το σχήμα απάντησε ότι είναι 5 τετραγωνικές μονάδες ενώ ήταν 8 καθώς δεν είχαν μελετήσει σωστά τις διαστάσεις του ορθογωνίου. Στη συνέχεια όμως προσπάθησε να προσεγγίσει μια γενικότερη λύση για κάθε στιγμή καθώς μεταβάλλεται το μήκος και διατυπώθηκε ότι το εμβαδό υπολογίζεται από τη σχέση Εμβαδό= 4·μήκος. Επιπλέον προσπάθησαν να εκφράσουν αντίστοιχα και το εμβαδό του δεξιά χωρίου. Μετά από παρέμβαση του ερευνητή ζητήθηκε από τους μαθητές να περιγράψουν τι εκφράζει η γραφική παράσταση που δημιουργείται και η ομάδα 2 απάντησε ότι η γραμμή είναι το πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν ή εκφράζει το συνολικό εμβαδό των σχημάτων. Επίσης οι μαθητές παρατήρησαν ότι όταν γεμίζει το αριστερά ορθογώνιο τότε η γραμμή της γραφικής παράστασης αλλάζει μορφή.

4.3 Ανάλυση της εμπλοκής των μαθητών με τα δομήματα

Παρακάτω γίνεται αναφορά και ανάλυση σημαντικών αποσπασμάτων από τα λεγόμενα των μαθητών κατά τη διάρκεια του πειραματισμού με το ψηφιακό εργαλείο. Με Μ9 και Μ14 συμβολίζονται οι μαθητές της 1ης ομάδας που εστίασε η έρευνα και με Μ6, Μ11 οι μαθητές της 2ης ομάδας αντίστοιχα. Ο εκπαιδευτικός συμβολίζεται με τα αρχικά Εκπ και ο ερευνητής με Ε.

1ο επεισόδιο: Από τους αριθμούς στις σχέσεις και τον αφαιρετικό συλλογισμό

Οι μαθητές αρχικά στο 1ο φύλλο εργασίας με το dynagraph φάνηκε ότι προτιμούσαν να επιλέγουν κυρίως ακέραιες τιμές και τις μελετούσαν για να εξερευνήσουν τι συμβαίνει μεταξύ των δυο ποσών. Από τις παρακάτω φράσεις φαίνεται ότι η νοηματοδότηση τους κυμαίνεται στην κατετμημένη συνεχή συμμεταβολή και στη συνάρτηση ως διαδικασία, σκεπτόμενοι ότι τα δυο ποσά μεταβάλλονται προς την ίδια κατεύθυνση:

<u>Ομάδα 1</u>

Μ9: Νομίζω ότι ανά 1 δευτερόλεπτο διανύει 1,5 μέτρο

…………………………………………………………………………………………………....

Μ14: Όταν ο χρόνος είναι 1 δευτερόλεπτο η απόσταση είναι 1,5 μέτρα και όταν μετακινήσουμε τον χρόνο στα 2 δευτερόλεπτα η απόσταση θα μετακινηθεί αντίστοιχα στα 3 μέτρα.

…………………………………………………………………………………………………....

M9: Αν το μετακινήσουμε στο 4 τότε βλέπουμε ότι ο χρόνος θα είναι 6

…………………………………………………………………………………………………...

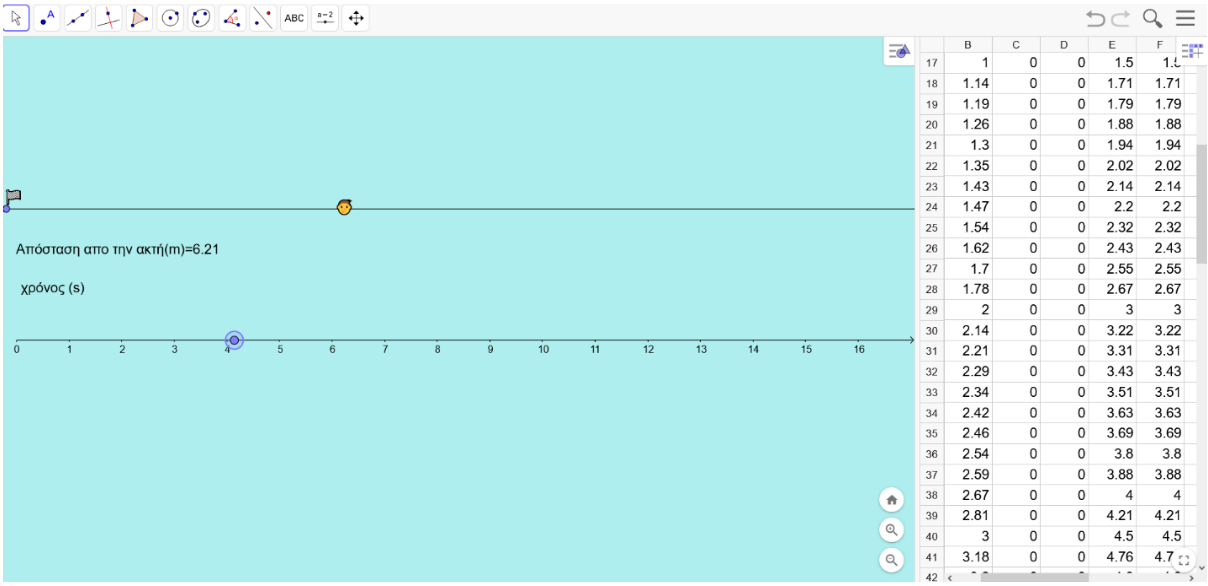
M9: Μετατοπίζεται σταθερά και η απόσταση που κάνει είναι ανάλογη με τον χρόνο

…………………………………………………………………………………………………...

Στην συνέχεια που εντάχθηκε και το υπολογιστικό φύλλο άρχισαν να μελετούν και τις ενδιάμεσες τιμές καταλήγοντας σε αφαιρέσεις σχετικά με τα ποσά του χρόνου και της απόστασης από την ακτή καθώς και για τη συναρτησιακή σχέση που τα συνδέει.

Στο ερώτημα (β) της 1ης δραστηριότητας ζητούνταν από τους μαθητές τα εξής:

> *β) (i) Πειραματιστείτε με τον χρόνο και βρείτε πόση απόσταση θα έχει κολυμπήσει μετά από 4, και μετά από 9,5 δευτερόλεπτα. Επαληθεύστε τις τιμές που βρήκατε μέσα και από την καταγραφή τους στο υπολογιστικό φύλλο επιλέγοντας μέσα από τις ρυθμίσεις* Προβολή > Υπολογιστικό Φύλλο *και με δεξί κλικ στο σημείο* Εγγραφή στο Υπολογιστικό Φύλλο ✓
>
> *(ii) Σε πόσο χρόνο θα έχει κολυμπήσει 6 και 10,5 μέτρα αντίστοιχα; Επαληθεύστε τις τιμές που βρήκατε μέσα και από το υπολογιστικό φύλλο.*



Εικόνα 14 Οι δυο αναπαραστάσεις του πρώτου μέρους της παρέμβασης

Αφού οι μαθητές ενεργοποίησαν το υπολογιστικό φύλλο, ξεκίνησαν να μετακινούν το μωβ σημείο του χρόνου στο dynagraph και να παρατηρούν παράλληλα τις τιμές στο υπολογιστικό φύλλο. Στη συνέχεια διατύπωσαν τα εξής:

Ομάδα 1

Μ9: Σε 4 δευτερόλεπτα θα είναι 6 μέτρα όπως φαίνεται στο υπολογιστικό φύλλο

Μ14: Ο χρόνος στην πρώτη στήλη αλλάζει και αυξάνεται ενώ οι τιμές της απόστασης αυξάνονται αντίστοιχα με ένα πιο γρήγορο ρυθμό.

Μ9: Οι τιμές μεταξύ τους δεν είναι τυχαίες.

Μ14: Η απόσταση από την ακτή είναι 1,5 φορές μεγαλύτερη από τον χρόνο. Όσο ο χρόνος αυξάνεται κατά 1 δευτερόλεπτο η απόσταση αυξάνεται κατά 1,5 μέτρο.

Μ9: Στήλη Ε ίσον 1,5 επί στήλη Β για όλες τις τιμές

Αφού επαλήθευσαν με την αριθμομηχανή ότι η σχέση ισχύει και για άλλες τιμές στις γραμμές του υπολογιστικού φύλλου είπαν:

Μ14: Άρα αυτή θα είναι η σχέση.

Μ9: m=1,5·s (m=μέτρα, s=δευτερόλεπτα)

Ομάδα 2

Μ11: Μετά από 4 δευτερόλεπτα θα έχει κολυμπήσει 4· 1,5, άρα 6 μέτρα.

Μ6: Πώς το κατάλαβες;

Μ11: Όταν ήμουν στο 1 δευτερόλεπτο ο κολυμβητής ήταν στα 1,5 μέτρα.

Μ6: (Μετακίνησε τον χρόνο στο 1 και το επαλήθευσε και μετά τον μετακίνησε στο 4 και βρήκε ότι είναι 6 μέτρα) Σωστά!

Μ11: Μπορούμε να κάνουμε 14,32 : 9,54 (κάνει την πράξη) και βγαίνει 1,5.

Μ6: Α ναι; Όντως; 1,5 είναι το τέτοιο ρε!

Μ11: Είναι λογικό αφού είναι μια απόσταση, θα ισχύει γενικά.

Μ6: Μπορούμε να κρατήσουμε την πράξη στο κομπιουτεράκι στην άκρη σαν απόδειξη.

Μ11: Είναι λογικό αφού είναι μια απόσταση, θα ισχύει γενικά.

Ε: Τι παρατηρείται στο υπολογιστικό φύλλο;

Μ11: Οι αυξομειώσεις του χρόνου στην πρώτη στήλη έχουν μια αναλογική σχέση με τα μέτρα στην άλλη στήλη και υπάρχει αναλογία σε ότι και να γίνει.

Αντίστοιχα οι μαθητές φαίνεται να έχουν την ίδια αφαιρετική συλλογιστική και στο δεύτερο ερώτημα της δραστηριότητας 2 όπου ζητούνταν τα εξής:

> *β) Μελετήστε τις τιμές που προέκυψαν μέχρι τώρα και αναζητήστε αν συνδέονται τα δυο ποσά. Περιγράψτε πως συμπεριφέρονται οι τιμές τους ξεχωριστά αλλά και μαζί καταγράφοντας στη συνέχεια μια σχέση που να τα συνδέει.*

Αφού οι μαθητές μελέτησαν τις τιμές που είχαν προκύψει στις διαθέσιμες αναπαραστάσεις συζήτησαν μεταξύ τους σχετικά με αυτές λέγοντας τα εξής:

Ομάδα 1

M14: Οι τιμές συνδέονται σε κάθε περίπτωση.

M9: Σε όλα συνδέονται με μια ανάλογη σχέση όπου η στήλη της απόστασης είναι 1,5 φορές την στήλη του χρόνου.

M14: Η σχέση θα είναι m=1,5·s όπως και πριν

M9: Ή $s=\frac{m}{1,5}$

Ομάδα 2

M11: Οι τιμές των ποσών συνδέονται και όσο αυξάνεται ο χρόνος

M6: Αντίστοιχα αυξάνεται και η απόσταση

M11: Και έχουν ένα συγκεκριμένο σταθερό πηλίκο, ο αριθμός της απόστασης με τον χρόνο έχουν ένα σταθερό πηλίκο (έγραψαν στο φύλλο εργασίας: $\frac{χρόνος}{απόσταση}$ *)*

Φαίνεται μέσα από τους διαλόγους των μαθητών ότι αρχικά μέσω μόνο του dynagraph νοηματοδοτούσαν τις τιμές με την κατατμημένη συνεχή συμμεταβολή προσεγγίζοντας παράλληλα την έννοια της συνάρτησης ως διαδικασία. Στη συνέχεια όταν εντάχθηκε και το υπολογιστικό φύλλο στον πειραματισμό άρχισαν να διατυπώνουν αφαιρετικές ιδέες και αλγεβρικούς τύπους για τη σχέση μεταξύ των τιμών και να συνδέουν τις τιμές των γραμμών, μεταβαίνοντας έτσι στην ομαλή συνεχή συμμεταβολή, προσεγγίζοντας παράλληλα το ρυθμό μεταβολής και τη συνάρτηση ως αντικείμενο, δηλαδή μέσα από μια φορμαλιστική προσέγγισή της και νοηματοδοτώντας παράλληλα την συνάρτηση ως μια διαδικασία αντιστοιχίας μεταξύ των στηλών. Άρα υπάρχουν ενδείξεις ότι η συμμεταβολή και η λειτουργικότητα του υπολογιστικού φύλλου σε συνδυασμό με το dynagraph ενισχύουν τη συλλογιστική των μαθητών καθώς μέσα από τον πειραματισμό και την μελέτη των τιμών και της συμμεταβολής τους σταδιακά μεταβαίνουν στη συλλογιστική με τη συνάρτηση και τη δημιουργία μια σχέσης που συνδέει τα δυο ποσά.

2ο επεισόδιο: Συνεχής συντονισμός των ποσοτήτων, η συνάρτηση ως σταθερή σχέση και ενδείξεις αντιστοιχίας

Η ομάδα 2 κατά τον πειραματισμό της με το υπολογιστικό φύλλο στο (β) ερώτημα της 1ης δραστηριότητας που αναφέρθηκε και προηγουμένως, έδειξε μια ενδιαφέρουσα αντιμετώπιση σχετικά με την απουσία κάποιων τιμών στο υπολογιστικό φύλλο όπου προσπάθησαν να το μελετήσουν και να βρουν σε 9,5 δευτερόλεπτα πόση απόσταση θα έχει κάνει ο κολυμβητής. Κινώντας το σημείο του χρόνου στο dynagraph διατύπωσαν τα παρακάτω:

Ομάδα 2

M6: Ας πάμε το σημείο στο 9,5.

M11: Ναι!

(Έψαξαν στο υπολογιστικό φύλλο για την ζητούμενη τιμή, όμως εκείνη δεν είχε καταγραφεί)

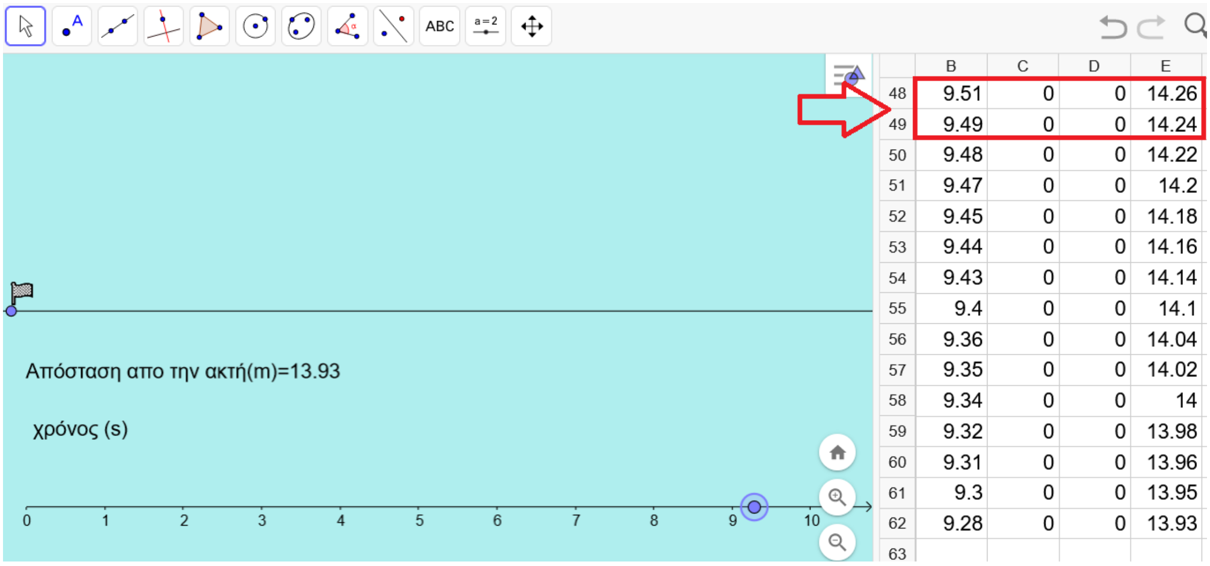
Μ6: (Ρωτάει τον ερευνητή) Εδώ στον πίνακα γιατί λείπει το 9,5;

Ε: Αν κίνησες πολύ γρήγορα τον κολυμβητή δεν πρόλαβε να το καταγράψει. Σε ενδιαφέρει μόνο αυτή η τιμή; Οι υπόλοιπες τιμές βοηθάνε;

Μ11: Κοίτα να δεις ποιες τιμές θα μελετήσουμε (κοιτούν το υπολογιστικό φύλλο για να διαλέξουν)

Μ6: Το 9,49 και το 9,50 θα μελετήσουμε και θα βρούμε τον μέσο όρο γιατί όσο κατεβαίνουμε στις στήλες οι τιμές αυξάνονται.

(Είδαν από το υπολογιστικό φύλλο ότι ανάμεσα από το 14,24 και το 14,26 που ήταν οι αντίστοιχες τιμές της απόστασης, είναι το 14,25 και επιβεβαίωσαν την υπόθεσή τους ξανά με την αριθμομηχανή)

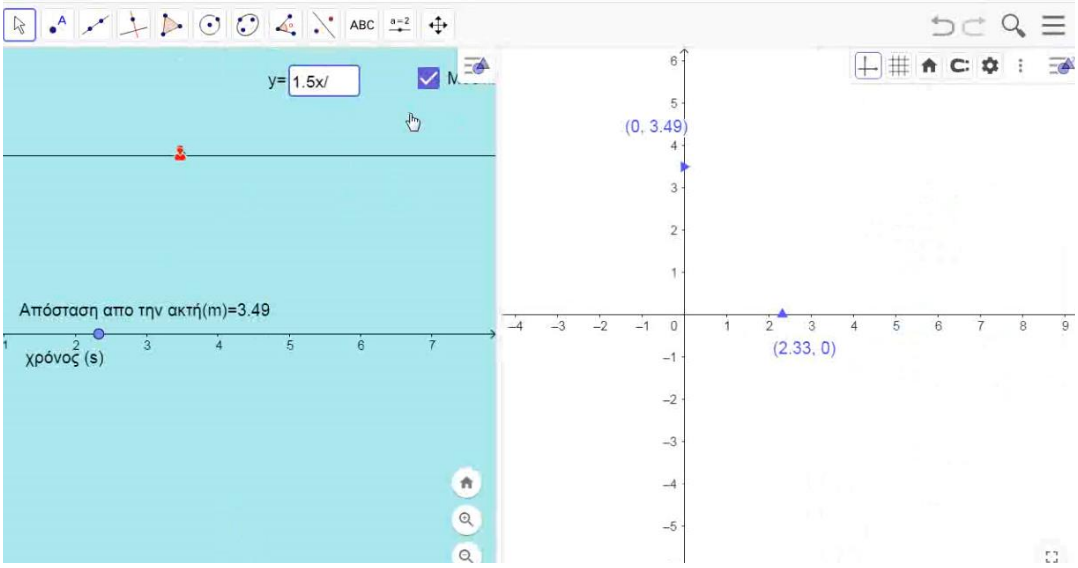


Εικόνα 15 Παράδειγμα τιμών οι οποίες λειτούργησαν ως αφορμή για δημιουργία υποθέσεων από την 2η ομάδα

Από το συγκεκριμένο κρίσιμο περιστατικό παρατηρούμε ότι οι μαθητές παρά την έλλειψη της ενδιάμεσης τιμής από το υπολογιστικό φύλλο κατάφεραν να υπολογίσουν το ζητούμενο καθώς νοηματοδότησαν ότι τα ποσά συμμεταβάλλονται μέσα από τον συνεχή συντονισμό των τιμών τους, δημιουργώντας παράλληλα διακριτά ζεύγη τιμών για αυτά και επιπλέον εξετάζοντας τις ενδιάμεσες τιμές που έλειπαν. Άρα σύμφωνα με τα επίπεδα των Thompson και Carlson αντιμετώπιζαν τις μεταβολές ότι γίνονται ταυτόχρονα και οι ποσότητες περνούν συνεχώς από όλες τις τιμές άρα συλλογιζόταν στο επίπεδο της ομαλά συνεχούς συμμεταβολής. Φαίνεται επίσης ότι μέσα από την νοηματοδότηση της συμμεταβολής των ποσών και την χρήση του υπολογιστικού φύλλου ότι οι μαθητές εξερεύνησαν τις τιμές που παραγόταν αυτόματα από το εργαλείο και με αφορμή αυτές έκαναν υποθέσεις τις οποίες επαλήθευσαν με όφελος και την παράλληλη νοηματοδότηση για τη συνάρτηση ως μια σταθερή σχέση που συνδέει τα δυο ποσά. Επομένως με την προϋπόθεση ότι ισχύει συνεχώς αυτή η σχέση υπέθεσαν ότι αν την εφαρμόσουν και για τις τιμές που λείπουν θα είχαν το ζητούμενο. Υπάρχουν ενδείξεις ότι οι μαθητές αρχίζουν να σκέφτονται μερικώς και την αντιστοιχία γιατί πιθανόν υπέθεσαν ότι για την τιμή του χρόνου που λείπει υπάρχει μια αντίστοιχη τιμή της απόστασης και από την αντίδρασή τους τέλος δείχνουν ότι νοηματοδοτούν και τη συνάρτηση, ως διαδικασία περισσότερο.

3ο επεισόδιο: Σύνδεση αναπαραστάσεων

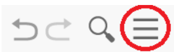
Το φύλλο εργασίας 2 σχεδιάστηκε ώστε να προσφέρει ένα διαφορετικό συνδυασμό αναπαραστάσεων, ενσωματώνοντας στο εργαλείο το dynagraph και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.



Εικόνα 16 Στιγμιότυπο από τον πειραματισμό των μαθητών με το δεύτερο δόμημα

Οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν στα παρακάτω ερωτήματα:

Ο κολυμβητής που γνωρίσαμε την περασμένη φορά ξεκινάει από την ακτή να κολυμπά με στόχο να φτάσει σε ένα σκάφος:

α) (i) Μέσα από τις ρυθμίσεις *, επιλέξτε Προβολή και ενεργοποιήστε την επιλογή* 

. Αφού πειραματιστείτε με το μωβ σημείο, περιγράψτε το φαινόμενο της κίνησης του κολυμβητή χρησιμοποιώντας τη νέα αναπαράσταση (Γραφικά 2).
(ii) Πόση απόσταση ακόμη έχει να διανύσει ο κολυμβητής μετά από χρόνο 5 δευτερόλεπτα για να φτάσει στο σκάφος; Σε ποιο σημείο θα βρισκόταν αντίστοιχα και στις δυο αναπαραστάσεις;

Αφού ενεργοποίησαν την εμφάνιση της γραφικής παράστασης, ξεκίνησαν να μετακινούν το μωβ σημείο του χρόνου στο dynagraph και να παρατηρούν τις αλλαγές στην οθόνη με στόχο να περιγράψουν το φαινόμενο. Στη συνέχεια διατύπωσαν τα εξής:

<u>Ομάδα 1</u>

Μ9: Δεξιά βλέπουμε δυο τρίγωνα που το ένα δείχνει το χρόνο και το άλλο την απόσταση και συνδέονται μεταξύ τους.

……………………………………………………………………………………………………

Μ14: Αν ο άξονας χ αυξηθεί κατά 1 τότε και ο άξονας y θα αυξηθεί κατά 1,5.

Μ9: Άρα ότι γίνεται και στο αριστερά παράθυρο.

Μ14: Ο άξονας y συνδέεται με τον χ με τη σχέση 1,5·x=y

……………………………………………………………………………………………

Ομάδα 2

M11: Το ένα σημείο ισούται με τον χρόνο και το άλλο με την απόσταση.

M6: Ο χρόνος μεταβάλλεται στον άξονα του χ και η απόσταση στον άξονα του y.

M11: Τα βελάκια ισούνται με την απόσταση από την ακτή και τον χρόνο. Και έχουν μια σχέση ισότητας με τα ποσά στα αριστερά εφόσον το μωβ σημείο αριστερά είναι στην ίδια τιμή με το βελάκι στα δεξιά. Όταν ο κολυμβητής κινείται πίσω αυτά μειώνονται ενώ όταν κινείται μπροστά αυξάνονται γενικά.

Οι μαθητές σύμφωνα με όσα διατύπωσαν δείχνουν να συνδέουν τις δυο αυτές αναπαραστάσεις μεταξύ τους αναγνωρίζοντας αρχικά τα ποσά που εκφράζουν οι άξονες του γραφήματος και μέσα από τη συμμεταβολή που παρατηρούν να υπάρχει σε αυτά στο δεξί παράθυρο, συντονίζουν τις τιμές τους και καταγράφουν την αλγεβρική σχέση της συνάρτησης που συνδέει τα ποσά αυτά. Το εργαλείο μοίρασε την οθόνη σε δύο μέρη παραθέτοντας έτσι τις δυο αναπαραστάσεις παράλληλα και έδωσε την ευκαιρία στους μαθητές να τις μελετήσουν ταυτόχρονα, προσφέροντας καλύτερη εποπτικότητα και ποικίλες προσεγγίσεις γύρω από την έννοια τα συνάρτησης. Επιπλέον σημαντικό φαίνεται πως ήταν το ότι οι αναπαραστάσεις αυτές είναι συνδεδεμένες και αλληλεξαρτώμενες καθώς οι αλλαγές στην μια προκαλούν την ίδια στιγμή αντίστοιχες αλλαγές στην άλλη αλλά και οι εκπαιδευόμενοι μπόρεσαν να τις παρατηρήσουν να εκφράζονται με διαφορετικούς τρόπους για την ίδια έννοια παρέχοντας έτσι πλουσιότερη νοηματοδότηση για τη συνάρτηση.

4ο επεισόδιο: Δημιουργία πολλαπλασιαστικού αντικειμένου

Στη δραστηριότητα 1 του 2ου φύλλου εργασίας αφού οι μαθητές αρχικά αναγνώρισαν την λειτουργία της νέας αναπαράστασης του γραφήματος στο καρτεσιανό σύστημα και τη συνέδεσαν με εκείνη του dynagraph προσπάθησαν να εκφράσουν τις ιδέες τους σχετικά με το ερώτημα που τους είχε τεθεί ώστε να περιγράψουν το φαινόμενο μέσα από το γράφημα. Οι μαθητές εκφράστηκαν ως εξής για αυτό:

Ομάδα 1

M14: Τα ποσά στο δεξί παράθυρο συνδέονται μεταξύ τους, έχουν μια ανάλογη σχέση και αν κάνουμε διακεκομμένες γραμμές κάθετα στις θέσεις που είναι δεξιά τα βελάκια τότε αυτά θα συναντηθούν στο σημείο (4,6).

M9: Το σημείο αυτό είναι ένα σημείο μιας σχέσης μεταξύ δυο τιμών, του χρόνου και της απόστασης.

Αντίστοιχα στο δεύτερο υποερώτημα που ζητούνταν να εκφράσουν που θα ήταν ο κολυμβητής και στις δυο αναπαραστάσεις οι μαθητές της 1ης ομάδας είπαν τα παρακάτω:

Μ9: Το σκάφος είναι στο 21 οπότε ο κολυμβητής θα έχει ακόμη να κάνει 13,5. Το ύψος του σημείου στα δεξιά σε σχέση με τον άξονα χ θα ήτανε…..Η αναλογία του χρόνου και της μετατόπισης θα ήταν ίδια με του χ και του y.

Μ14: Το σημείο θα ήταν το (5, 7,5)

Η άλλη ομάδα διατύπωσε για τα ίδια ερωτήματα τα εξής:

<u>Ομάδα 2</u>

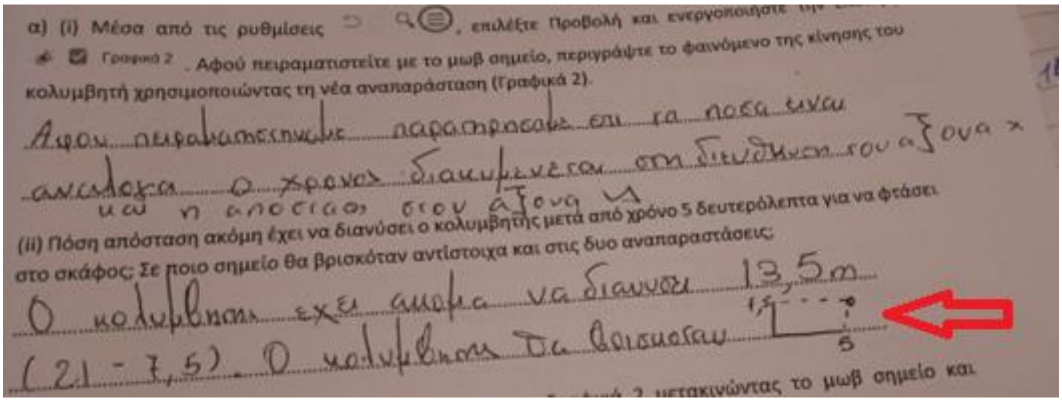
Μ6: Αν μετακινήσω το χρόνο στα 5 δευτερόλεπτα βλέπουμε ότι ο κολυμβητής είναι στα 7,5 μέτρα, ενώ αν τον μετακινήσω στα 14 δευτερόλεπτα ο κολυμβητής φτάνει στον τερματισμό και η απόσταση είναι 21 μέτρα.

Μ11: Πήγαινε τώρα στο 5 (βλέπει ότι η απόσταση εκεί είναι 7,5 στο εργαλείο)

Μ6: Άρα 21 μείον 7,5 (άνοιξαν την αριθμομηχανή και επαλήθευσαν ότι είναι 13,5 το αποτέλεσμα)

Μ6:Ο κολυμβητής στα αριστερά (dynagraph) στα 5 δευτερόλεπτα βρίσκεται στα 7,5 μέτρα, ενώ στα δεξιά θα βρίσκεται σε αυτό το σημείο (έδειξε στο γράφημα των καρτεσιανών συντεταγμένων το σημείο (5, 7,5) και σχεδίασε το σχήμα της παρακάτω εικόνας).

Μ11: Γράψε θα είναι F ολική.


α) (i) Μέσα από τις ρυθμίσεις , επιλέξτε Προβολή και ενεργοποιήστε

Γραφικά 2 . Αφού πειραματιστείτε με το μωβ σημείο, περιγράψτε το φαινόμενο της κίνησης του κολυμβητή χρησιμοποιώντας τη νέα αναπαράσταση (Γραφικά 2).

Αφου πειραματιστηκαμε παρατηρησαμε οτι τα ποσα ειναι αναλογα ο χρονος διακυμαινεται στη διευθυνση του αξονα x και η αποσταση στον αξονα y

(ii) Πόση απόσταση ακόμη έχει να διανύσει ο κολυμβητής μετά από χρόνο 5 δευτερόλεπτα για να φτάσει στο σκάφος; Σε ποιο σημείο θα βρισκόταν αντίστοιχα και στις δυο αναπαραστάσεις;

Ο κολυμβητης εχει ακομα να διανυσει 13,5m (21 - 7,5). Ο κολυμβητης θα βρισκεται

7,5

5

μετακινώντας το μωβ σημείο και

Εικόνα 17 Στιγμιότυπο από το φύλλο εργασίας 2 της δεύτερης ομάδας

Από τα παραπάνω λόγια των μαθητών και τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποίησαν το εργαλείο φαίνεται ότι νοηματοδότησαν το φαινόμενο της κίνησης του κολυμβητή σκεπτόμενοι κατά βάση με τη συμμεταβολή καθώς αντιμετώπισαν τις δυο ποσότητες ως ταυτόχρονα μεταβαλλόμενες, συνδυάζοντας αντίστοιχα αυτές καθώς συμβαίνουν και έχοντας μια συνεχή εικόνα τους ενώνοντάς σε ένα πολλαπλασιαστικό αντικείμενο. Έτσι φάνηκε πως θεώρησαν ότι για κάθε τιμή του χρόνου υπάρχει μια αντίστοιχη τιμή για την απόσταση από την ακτή και ενοποίησαν στο συλλογισμό τους τις ιδιότητες των δυο ποσοτήτων με αποτέλεσμα να δημιουργήσουν ένα νέο σημείο στο γράφημα των καρτεσιανών συντεταγμένων. Από τα λόγια της ομάδας 1 υπάρχουν ενδείξεις ότι έχει νοηματοδοτήσει σε βάθος τη συνάρτηση ως διαδικασία και αρχίζει να μεταβαίνει στη συνάρτηση ως αντικείμενο καθώς χρησιμοποιεί φράσεις σχετικά με μια γενική σχέση που συνδέει τις μεταβλητές και φαίνεται πως οι μαθητές κάνουν πιο αφαιρετικές σκέψεις. Η ομάδα 2 αντίστοιχα αντιλαμβάνεται πως τα δυο ποσά συνδέονται αλλά αντιμετωπίζει τη συνάρτηση ως διαδικασία επειδή οι μαθητές εκφράζονται κυρίως για αριθμητικές τιμές των μεταβλητών αλλά δεν διατυπώνει σκέψεις ως προς την αλγεβρική μορφή που συνδέει τα δυο ποσά. Έδειξαν όμως οι μαθητές ότι συσχέτισαν τις τιμές των μεταβλητών σε βάθος και δημιούργησαν ένα πολλαπλασιαστικό αντικείμενο όπως φάνηκε από το παραπάνω απόσπασμα και το αντίστοιχο φύλλο εργασίας όπου οι μαθητές το σχεδίασαν ως ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου συνδυάζοντας ένα ζευγάρι τιμών. Οι μαθητές μέσα από τις απαντήσεις τους έδειξαν να εκφράζονται φυσικά και αυθόρμητα με τους όρους της συμμεταβολής προσεγγίζοντας την έννοια της συνάρτησης μέσα από την ενασχόληση με ένα πραγματικό πρόβλημα. Το εργαλείο από την μεριά του παρέχοντας το παράθυρο της γραφικής παράστασης στο επίπεδο λειτούργησε θετικά ως προς τον αφαιρετικό συλλογισμό   και τη νοηματοδότηση των μαθητών καθώς προσέφερε ένα νέο πεδίο έκφρασης της μεταβολής των τιμών και της συνάρτησης, με πιο σημαντικό στοιχείο τη δημιουργία του πολλαπλασιαστικού αντικειμένου το οποίο συνέδεε τα δυο ποσά.

5ο επεισόδιο: Νοηματοδότηση ρυθμού μεταβολής

Στη δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές κλήθηκαν να πειραματιστούν και να διορθώσουν την <<μυστική σχέση>> ώστε ο κολυμβητής να φτάνει στα $\frac{3}{4}$ του αρχικού χρόνου στο σκάφος. Οι μαθητές αντέδρασαν ως εξής:

Ομάδα 1

Μ14: Αν αλλάξουμε το y βάλ' το y=1·x τότε το μωβ σημείο και ο κολυμβητής πάνε μαζί (το επαλήθευσε με το εργαλείο αλλάζοντας την σχέση y=1,5·x)

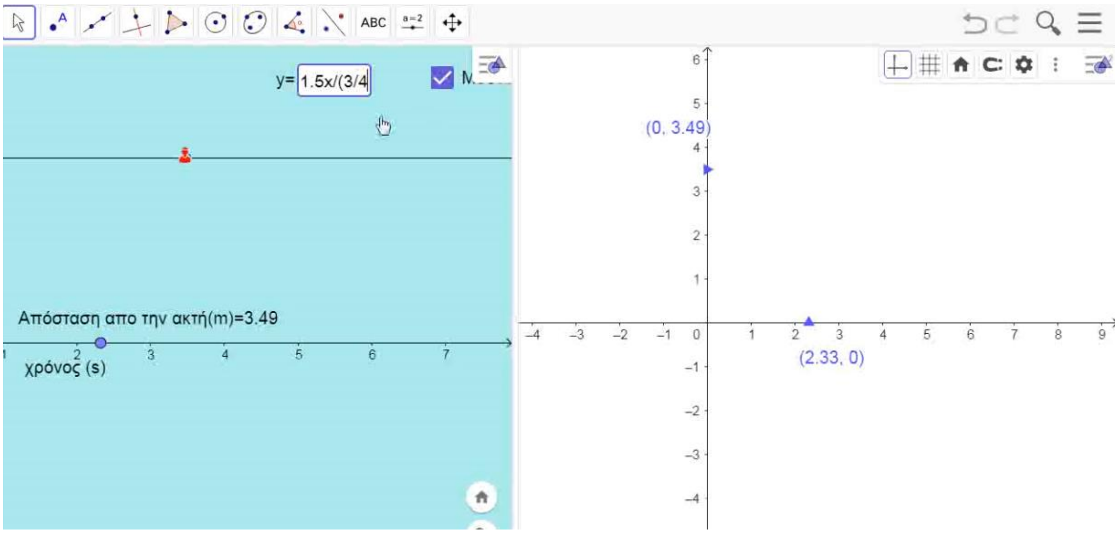
Μ9: Ενώ όταν είναι y=1,5·x φτάνει σε 14 δευτερόλεπτα.

Μ14: Πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το 1,5 με τα ¾ .

Μ9: Αν το πολλαπλασιάσουμε όμως με το ¾ θα πηγαίνει πιο αργά, οπότε θα χρειάζεται περισσότερο χρόνο.

Μ14: Σωστά!

Μ9: Άρα θα το διαιρέσουμε μάλλον με το ¾ . Αφού η ταχύτητα είναι ίση με τα μέτρα ανά δευτερόλεπτο , για να μικρύνουμε το χρόνο θα πρέπει να μεγαλώσουμε τα μέτρα γιατί είναι αντιστρόφως ανάλογα.



Εικόνα 18 Ο πειραματισμός της ομάδας 1 με την μυστική σχέση

Από το παραπάνω απόσπασμα φαίνεται ότι οι μαθητές της ομάδας 1 νοηματοδοτούν τον ρυθμό μεταβολής και τον χρησιμοποιούν στην αλλαγή της μυστικής σχέσης που αποτελεί τη συνάρτηση κίνησης του κολυμβητή. Εκφράζονται με τη συμμεταβολή για τα ποσά του χρόνου και της απόστασης, αναγνωρίζουν την κατεύθυνση της αλλαγής τους και στηρίζονται σε αυτή για να βρουν με ποιο τρόπο θα πρέπει να αλλάξει η μυστική σχέση. Επομένως ο συλλογισμός της συμμεταβολής συνέβαλε και αυτός στην νοηματοδότηση της συνάρτησης που συνέδεε τα δυο ποσά. Το εργαλείο προσέφερε τη δυνατότητα να εμπλακούν οι μαθητές ταυτόχρονα με τις αναπαραστάσεις του dynagraph, τη γραφικής παράστασης στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων καθώς και με την τυπική αλγεβρική έκφραση της συνάρτησης. Μέσα από τις υποθέσεις και τις αλλαγές που έκαναν οι μαθητές στο ειδικό πλαίσιο του αλγεβρικού τύπου είχαν την ευκαιρία να διερευνήσουν τον ρόλο της παραμέτρου του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης και να νοηματοδοτήσουν πως αυτή μεταβάλλεται.

6ο επεισόδιο: Δυσκολίες στην αξιοποίηση των πολλών αναπαραστάσεων και την μελέτη φαινομένων

Η δραστηριότητα 1 του φύλλου εργασίας 3 σχεδιάστηκε ώστε να προσφέρει συνδυασμό όλων αναπαραστάσεων της συνάρτησης ταυτόχρονα, ενσωματώνοντας στο εργαλείο το dynagraph, το υπολογιστικό φύλλο τη γραφική παράσταση τριών συναρτήσεων ταυτόχρονα καθώς και να εμπλέξει τους μαθητές με την αλγεβρική αναπαράσταση μέσω της αναζήτησης μιας αντίστοιχης μαθηματικής σχέσης. Οι συναρτήσεις που επιλέχθηκαν ήταν γραμμικής μορφής με διαφορετική συμπεριφορά σε σχέση με εκείνες στα προηγούμενα ερωτήματα. Ζητούνταν από τους μαθητές τα εξής:

*Σε ένα σχολικό κολυμβητικό αγώνα 50 μέτρων συμμετέχουν ο **Γιώργος**, η Ελένη και ο Θάνος. Με βάση τα τρία παράθυρα που εμφανίζονται στην οθόνη:*

α) Υπολογίστε με ποιο ρυθμό μειώνεται η απόσταση από τον τερματισμό για κάθε κολυμβητή.

β) Βρείτε μια σχέση για τον κάθε κολυμβητή που να εκφράζει την απόσταση του από τον τερματισμό σε σχέση με τον χρόνο.

γ) Ποια στιγμή η Ελένη απέχει την μισή απόσταση σε σχέση με τον Γιώργο από τον τερματισμό;

Από τις αρχικές ενέργειες και τις συζητήσεις των μαθητών φάνηκε να αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη νοηματοδότηση σχετικά με τη συνάρτηση και τη διαχείριση των αναπαραστάσεων της. Παρακάτω παρατίθενται ενδεικτικά αποσπάσματα:

<u>Ομάδα 1</u>

Εκπ: Ανοίξτε τα τρία παράλληλα παράθυρα και χρησιμοποιήστε τα για να βρείτε τον ρυθμό μείωσης της απόστασης με όποιο τρόπο θέλετε.

Μ9: Ο τερματισμός είναι στο 50 (Έσυρε το μωβ σημείο στο dynagraph κοντά στο 1 και παρατήρησε το υπολογιστικό φύλλο, αλλά φάνηκε να δυσκολεύεται να ξεχωρίσει τι εκφράζουν οι τιμές)

Μ14: Τι εκφράζουν οι στήλες του υπολογιστικού φύλλου;

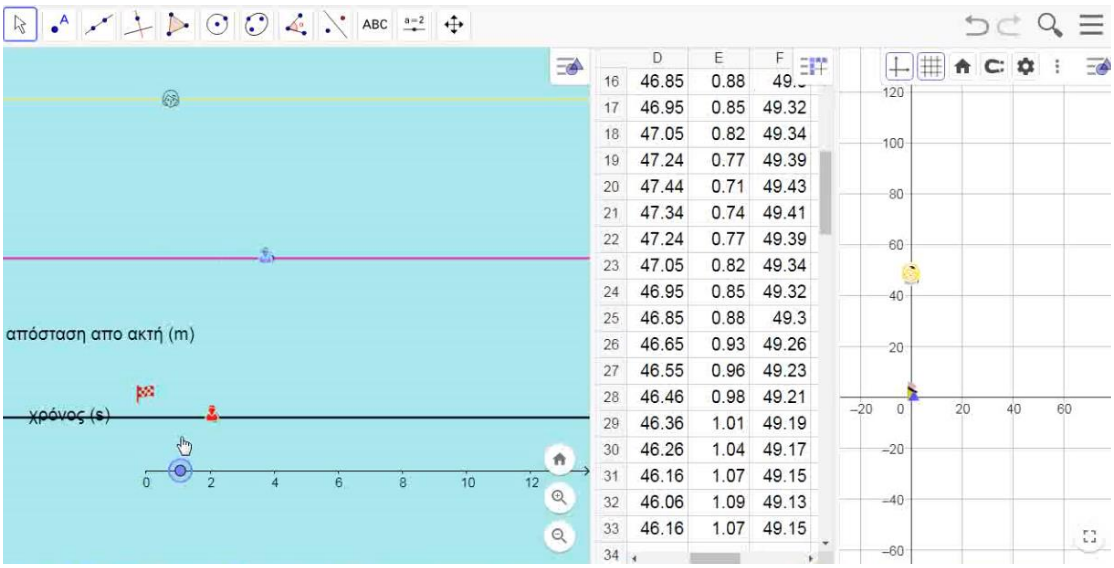
Ε: Οι στήλες μας δείχνουν την απόσταση που μένει μέχρι τον τερματισμό για κάθε κολυμβητή και το χρόνο.

<u>Ομάδα 2</u>

(Αρχικά άνοιξαν και τα τρία παράθυρα των αναπαραστάσεων και κίνησαν το σημείο του dynagraph για να τις παρατηρήσουν)

Μ6: Πρέπει να βρούμε πόσο γρήγορα μειώνεται η απόσταση. Τι δείχνουν όμως οι τιμές στον πίνακα;

Ε: Δείχνουν το χρόνο και την απόσταση από το τέλος για τους κολυμβητές.



Εικόνα 19 Στιγμιότυπο από τον πειραματισμό της ομάδας 1 στο φύλλο εργασίας 3

Στη συνέχεια όπως φαίνεται και από την παραπάνω εικόνα η ομάδα 1 προσπαθεί να προσεγγίσει την ταχύτητα του κάθε κολυμβητή μέσα από την μετακίνηση του μωβ σημείου στη θέση 1 στα αριστερά παρατηρώντας παράλληλα τις τιμές στο υπολογιστικό φύλλο. Ακολουθεί το αντίστοιχο απόσπασμα:

Ομάδα 1

Μ9: Κάθε δευτερόλεπτο ο Γιώργος πλησιάζει 2 μέτρα προς τον τερματισμό αφού ήταν 50 και έγινε 48, η Ελένη 3,6 μέτρα και ο Θάνος 0,8 μέτρα. Η ταχύτητα παραμένει σταθερή.

(Ο μαθητής όμως δεν αναζήτησε αν για όλες τις τιμές είναι σταθερή η ταχύτητα)

Ε: Η ταχύτητα είναι παντού η ίδια για κάθε κολυμβητή;

Μ9: Αυτό μάλλον….δεν το ξέρουμε σίγουρα.(Ελέγχει ξανά τις τιμές μετακινώντας στα 2 δευτερόλεπτα το χρόνο).

Μ9: Ο Γιώργος στα 2 δευτερόλεπτα έχει διανύσει 4 μέτρα, η Ελένη 7,2 και ο Θάνος 1,6 μέτρα, άρα η ταχύτητα μάλλον είναι σταθερή.

(Στη συνέχεια ο μαθητής κατέγραψε στο φύλλο εργασίας τις αλγεβρικές σχέσεις για κάθε συνάρτηση: y=50-2x, y=50-3,6x, y=50-0,8x)

Η 2^{η} ομάδα παρ' ότι αρχικά προσέγγισε αποτελεσματικά το πρόβλημα στη συνέχεια ήταν σε σύγχυση σχετικά με την εύρεση του ρυθμού μείωσης της απόστασης καθώς δεν υπολόγιζε για το ίδιο χρονικό διάστημα πόση απόσταση διανύουν οι κολυμβητές. Ενδεικτικά εκφράστηκαν ως εξής:

Μ11: Ο ρυθμός μείωσης θα είναι μάλλον η ταχύτητα του κολυμβητή.

Μ6: Ο ρυθμός που μειώνεται εξαρτάται και από την ταχύτητα αλλά όχι μόνο από αυτή.

Μ11: Στο υπολογιστικό φύλλο φαίνεται ότι αν ο χρόνος είναι 0,96 έχει διανύσει 48,08, δηλαδή 2 μέτρα.

Μ6: (Το επαλήθευσε στην αριθμομηχανή).

Μ11: Η απόσταση του Γιώργου μειώνεται 2 μέτρα το δευτερόλεπτο.

Μ6: Αφού τα 2 μέτρα τα κάνει σε 1 δευτερόλεπτο τότε το 1 μέτρο το κάνει σε 0,5 δευτερόλεπτα.

Μ11: Αντίστοιχα η Ελένη κάνει τα 3,5 μέτρα σε 1 δευτερόλεπτο.

Μ6: Πρέπει να τα κάνουμε όλα σε 1 δευτερόλεπτο καλύτερα. (Άνοιξε την αριθμομηχανή και έκανε την πράξη 3,5 : 0,96 αλλά φάνηκε να δυσκολεύεται να αντιληφθεί το ζητούμενο)

Μ11: Θα είναι το 1/3 του 0,96, περίπου 0,3.

Μ11: Ο Θάνος θα διανύει 1 μέτρο το δευτερόλεπτο (το είπε αφού είδε στο υπολογιστικό φύλλο ότι σε 0,96 δευτερόλεπτα διανύσει 49,23 μέτρα)

Από τα παραπάνω αποσπάσματα φαίνεται αρχικά ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν τι εκφράζουν οι τιμές στις στήλες του υπολογιστικού φύλλου γιατί η συμπεριφορά της συνάρτησης είναι διαφορετική πλέον, άρα και ο τρόπος που μεταβάλλονται οι αριθμοί αφού η σχέση μεταξύ των ποσών δεν είναι αναλογική ούτε οι τιμές αυξάνονται σταθερά στο υπολογιστικό φύλλο. Άλλη μια σημαντική παρατήρηση είναι πως οι μαθητές πιθανόν πιστεύουν ότι μια ποσότητα πάντα έχει σταθερό ρυθμό μεταβολής καθώς το θεωρούν ως υπόθεση χωρίς να το ελέγχουν μέσα από τις λειτουργικότητες που προσφέρονται. Μόνο όταν ο ερευνητής έθιξε το θέμα στην ομάδα 1, φάνηκε να το νοηματοδοτεί πιο αποτελεσματικά ελέγχοντας το υπολογιστικό φύλλο.

Μέσα από τα λόγια των μαθητών και τη νοηματοδότηση ότι ο ρυθμός μείωσης είναι η ταχύτητα του κάθε κολυμβητή φαίνεται ότι ο συλλογισμός με τη συμμεταβολή που ακολουθούν τους βοήθησε να εκφραστούν σχετικά με τον ρυθμό μεταβολής. Επιπλέον η διατύπωση των αλγεβρικών σχέσεων για κάθε συνάρτηση φαίνεται να προβλημάτισε την ομάδα 2 γιατί δεν είχε αντιληφθεί την φύση του προβλήματος καθώς και το ζητούμενο. Όταν τελικά αντιλήφθηκαν τι ζητούσε το πρόβλημα μετά από παρέμβαση του ερευνητή δεν δυσκολεύτηκαν και διατύπωσαν τις σχέσεις των συναρτήσεων, σκεπτόμενοι τη συνάρτηση αφαιρετικά ως αντικείμενο. Από αυτό το περιστατικό υπάρχουν ενδείξεις ότι οι μαθητές δεν έχουν συνηθίσει να μελετούν πραγματικά φαινόμενα στα σχολικά Μαθηματικά καθώς και τα αντίστοιχα προβλήματα, αντιμετωπίζοντας έτσι εμπόδια στη νοηματοδότηση τους.

Από τα συγκεκριμένα παραδείγματα αλλά και από προηγούμενα φαίνεται ότι οι μαθητές δεν εκμεταλλεύονται σε βάθος όλες τις παραστάσεις που τους παρέχονται για την επαλήθευση των υποθέσεών τους. Είναι πιθανό πως προτιμούν να προσεγγίζουν διαισθητικά αρχικά το πρόβλημα μέσω του dynagraph και στη συνέχεια να χρησιμοποιούν δεδομένα αριθμητικού τύπου από το υπολογιστικό φύλλο κάνοντας παράλληλα πράξεις με την αριθμομηχανή και χειριζόμενοι αλγεβρικά σύμβολα, χωρίς να εξετάζουν ιδιαίτερα τα ποιοτικά στοιχεία της γραφικής παράστασης στο επίπεδο. Άλλο ένα παράδειγμα μέσα από την παρέμβαση που ενισχύει αυτό το συμπέρασμα μπορούμε να δούμε στο παρακάτω απόσπασμα που περιγράφει πως ο μαθητής της ομάδας 1 αντιμετώπισε το (γ) ερώτημα της δραστηριότητας 1:

** Η ομάδα 1 αποτελούνταν από τον μαθητή 9 μόνο εκείνη την ημέρα καθώς ο μαθητής 14 απουσίαζε*

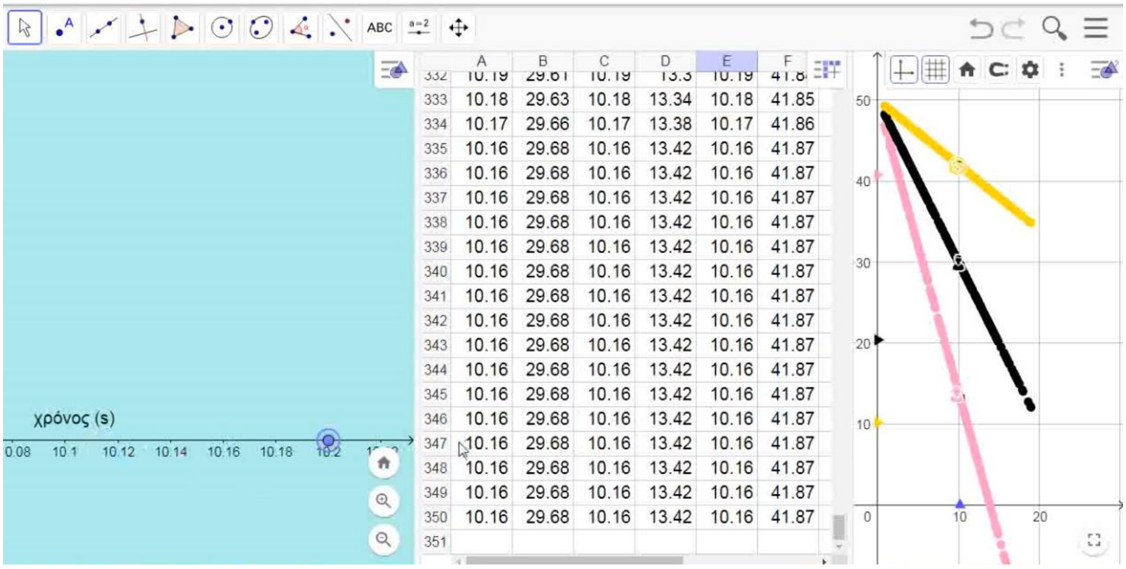
Ε: Προσπάθησε με όποιο τρόπο θέλεις να βρεις ποια χρονική στιγμή η Ελένη θα απέχει την μισή απόσταση σε σχέση με τον Γιώργο από τον τερματισμό.

(Ο μαθητής 9 κινεί το μωβ σημείο στο dynagraph και μελετά τις τιμές του υπολογιστικού φύλλου μόνο, για να βρει το ζητούμενο αλλά φαίνεται να αντιμετωπίζει δυσκολίες).

(Απευθυνόμενος στους μαθητές που καθόταν σε διπλανή ομάδα λέει)

Μ9: Εγώ για το (γ) σκέφτηκα ότι θα πρέπει να φτιάξουμε και να λύσουμε τρείς εξισώσεις με τρείς αγνώστους, όμως είναι δύσκολο να λυθεί και με πράξεις θα ήθελε πολύ χρόνο.

(Συνεχίζει να μελετά τις τιμές του υπολογιστικού φύλλου και να εστιάζει εξερευνητικά πιο κοντά σε κάποια διαστήματα τιμών χωρίς να εμπλέκεται με την γραφική παράσταση. Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα καταγράφει στο φύλλο εργασίας την απάντηση 9,6 δευτερόλεπτα που είναι κοντά στο σωστό αποτέλεσμα)



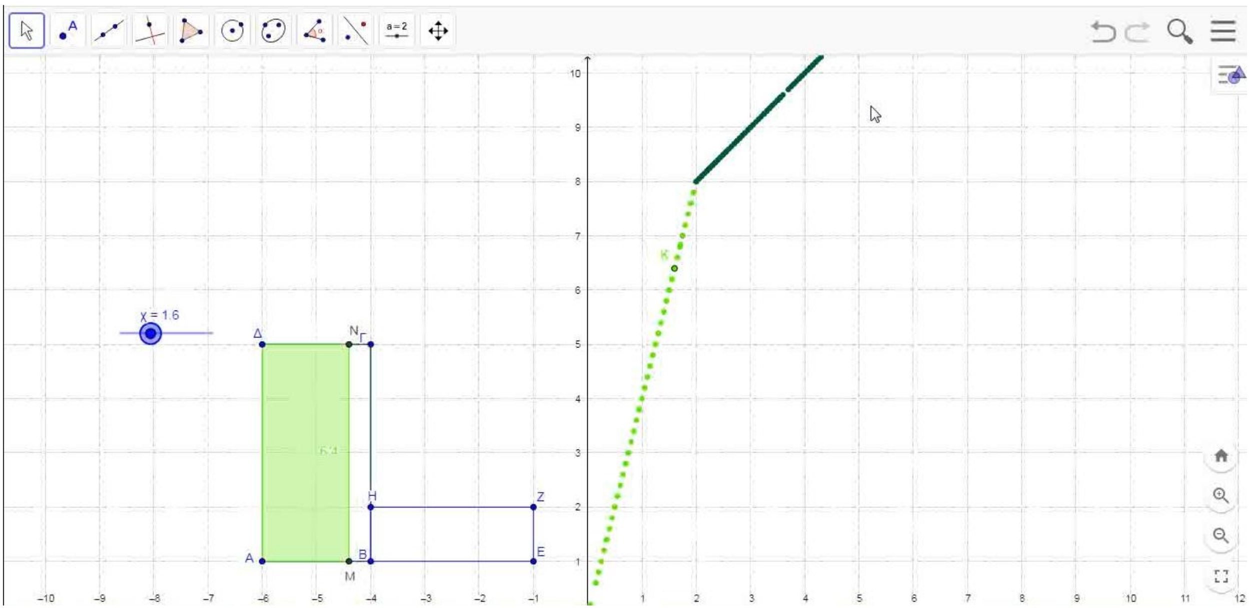
Εικόνα 20 Στιγμιότυπο από τον πειραματισμό της 1ης ομάδας στη δραστηριότητα 1 (γ)

7ο επεισόδιο: Η διερεύνηση μιας συνάρτησης διπλού τύπου

Η τελευταία δραστηριότητα της παρέμβασης αποτελούνταν από ένα δόμημα με διαφορετικό θέμα το οποίο αφορούσε μια συνάρτηση της οποίας ο τύπος μεταβάλλεται και εφαρμόστηκε με σκοπό να μελετηθεί ο τρόπος που θα προσεγγίσουν οι μαθητές μια τέτοια πιο πολύπλοκη συνάρτηση της οποίας η συμπεριφορά αλλάζει, αφήνοντας τους μαθητές να εκφραστούν πιο ελεύθερα και να διερευνήσουν. Το πρόβλημα που δινόταν ήταν το εξής:

Ένας κηπουρός θέλει να φυτέψει γρασίδι σε δυο γειτονικούς κήπους διαφορετικών διαστάσεων:

Βρείτε κάποια μαθηματική σχέση που να εκφράζει το εμβαδόν του μέρους του κήπου που ορίζεται από το κινούμενο ευθύγραμμο τμήμα MN.



Εικόνα 21 Στιγμιότυπο από τον πειραματισμό της ομάδας 2 με το 4ο ψηφιακό δόμημα

Λόγω του περιορισμένου χρόνου μόνο η ομάδα 2 πρόλαβε να εμπλακεί για λίγο με το ψηφιακό δόμημα που δημιουργήθηκε και τα μέλη της διατύπωσαν τα εξής:

Μ11: Πρέπει να βρούμε μια ισότητα για τα εμβαδά και στους δυο κήπους;

Μ6: Οι κήποι είναι ξεχωριστοί;

Ε: Είναι ένας κήπος ουσιαστικά, αλλά φαίνεται το σχήμα του να αλλάζει.

(Πειραματίζονται με τον ολισθητή και παρατηρούν ότι δημιουργούνται οι γραμμές στα δεξιά)

Μ6: Αυτό δεξιά τι είναι; Ααα…αυτό είναι ένα σημείο εδώ (δείχνει το (2,8)).

(Μετακινεί τον ολισθητή στο χ=2 και γεμίζει ο πρώτος κήπος)

Μ6: Εκφράζει το εμβαδόν μάλλον.

Μ11: Το εμβαδόν είναι 8 (εννοεί του αριστερά μέρους, καθώς το παρατηρεί).

Μ11: x=εμβαδό:4

Μ6: Γιατί;

Μ11: Γιατί είναι (2,8). Άρα εμβαδό=x·4.

Ε: Πως μεταβάλλεται το εμβαδό;

Μ11: Όσο μεγαλύτερο είναι το πράσινο μέρος τόσο πιο πολύ αφαιρείται.

Μ6: Όταν αυξάνεται το x αυξάνεται και το εμβαδόν. (κίνησε ταυτόχρονα και τον ολισθητή επιβεβαιώνοντας αυτό που έλεγε)

Μ11: Το δεξιά σχήμα εκφράζει το εμβαδό του σχήματος που έχει επιλεχθεί.

Μ6: Εκφράζει το τμήμα του εμβαδού που επιλέγουμε με το x. Το ΑΒ μεταβάλλεται και γεμίζει το σχήμα.

Ε: Σε σχέση με τη δεξιά γραμμή;

Μ6: Η μεταβολή του x έχει κάποια σχέση με την δεξιά γραμμή.

Από το παραπάνω απόσπασμα υπάρχουν ενδείξεις ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν το εμβαδό των δυο κήπων ως κάτι ξεχωριστό καθώς και τα δυο ορθογώνια χωρία ως διακριτά μεταξύ τους, γιατί δεν φαίνεται μέσα από τις ενέργειές τους να τα συσχετίζουν με κάποιο τρόπο. Φαίνεται όμως ότι συνέδεσαν και νοηματοδότησαν σε ένα αρχικό επίπεδο τον ρόλο της γραφικής παράστασης ως το εμβαδό του πράσινου χωρίου και ότι τα δυο σχήματα αφού είναι διαφορετικά χρειάζεται το καθένα να εκφραστεί με διαφορετική αλγεβρική σχέση. Στη συνέχεια κατάφεραν να εκφράσουν το εμβαδό μόνο του πρώτου χωρίου, για τιμές του μήκους από μηδέν έως δυο με μια συναρτησιακή σχέση και την περιέγραψαν με τη συμμεταβολή και την κατεύθυνση της αλλαγής των τιμών. Από τα λόγια του μαθητή 11 καταλαβαίνουμε ότι το γράφημα και ειδικότερα τα σημεία του όπως το (2,8) είναι πιθανό να τα νοηματοδότησαν οι μαθητές ως πολλαπλασιαστικά αντικείμενα καθώς συσχετίζουν την τιμή του x με το 2 και στη συνέχεια γενικεύουν την ιδέα τους παράγοντας τη συναρτησιακή σχέση εμβαδό=x·4. Άρα η διαδραστικότητα και οι λειτουργικότητες που παρείχαν οι προσφερόμενες αναπαραστάσεις ωφέλησαν στη νοηματοδότηση ενός μέρους της συνάρτησης, όμως παρουσιάστηκαν δυσκολίες στο να εκφράσουν οι μαθητές μια σχέση για το δεύτερο χωρίο. Τέλος συλλογίστηκαν τη συνάρτηση σε ένα προχωρημένο στάδιο ως διαδικασία, αρχίζοντας να μεταβαίνουν σταδιακά προς το αντικείμενο.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Με βάση τις λειτουργικότητες του εργαλείου και την αξιοποίησή τους από τους μαθητές προέκυψε ότι χρησιμοποίησαν περισσότερο το dynagraph, το υπολογιστικό φύλλο και την αριθμομηχανή στον πειραματισμό τους με τις συναρτήσεις και λιγότερο τη γραφική παράσταση. Έκαναν χρήση των ακέραιων τιμών αρχικά για να εξερευνήσουν τη συμπεριφορά των ποσών βγάζοντας γρήγορα συμπεράσματα για τη σχέση και την κατεύθυνση της μεταβολής τους, μέσα από τη συμμεταβολή και το dynagraph. Στη συνέχεια μελέτησαν αναλυτικά ανά στήλες και γραμμές το υπολογιστικό φύλλο διατυπώνοντας πιο αφαιρετικές σχέσεις και νοηματοδοτώντας τη συνάρτηση, χωρίς όμως να βασίζονται ιδιαίτερα στο γράφημα.

Το υπολογιστικό φύλλο φαίνεται ότι συνέβαλε στον καλύτερο έλεγχο και συντονισμό κατά στήλες των ενδιάμεσων τιμών των μεταβλητών της συνάρτησης καθώς και στη σύνδεση των τιμών ανά γραμμή με μια συναρτησιακή σχέση. Ώθησε σε παρατήρηση μοτίβων και αφαιρετικό συλλογισμό σχετικά με τη συνάρτηση, εκφράζοντάς την και αλγεβρικά αλλά και στη νοηματοδότηση της έννοιας της αντιστοιχίας μεταξύ των τιμών των μεταβλητών. Επίσης μέσω της αυτόματης καταγραφής των τιμών στο υπολογιστικό φύλλο διευκολύνθηκε η εξερεύνηση των τιμών και δόθηκε περισσότερος χρόνος για διερεύνηση, δημιουργία υποθέσεων και αναστοχασμό σχετικά με σημαντικές παραμέτρους της συνάρτησης όπως ο ρυθμός μεταβολής. Ο συνδυασμός του dynagraph με το υπολογιστικό φύλλο ενίσχυσε το συλλογισμό των μαθητών με τη συμμεταβολή, μεταβαίνοντας εκείνοι από την κατατμημένη στην ομαλά συνεχή συμμεταβολή καθώς και με την βοήθεια της υπάρχουν ενδείξεις ότι ήταν ικανοί να αναπτύξουν αφαιρετικό συλλογισμό και να νοηματοδοτούν τη συνάρτηση ως αντικείμενο.

Η λειτουργικότητα του γραφήματος στο καρτεσιανό επίπεδο φαίνεται πως βοήθησε τους μαθητές στη δημιουργία πολλαπλασιαστικών αντικειμένων μεταξύ τιμών των δυο ποσοτήτων οι οποίες αντιμετωπίστηκαν ως ταυτόχρονα μεταβαλλόμενες και συνδυάστηκαν μέσα από την γραφική παράσταση δημιουργώντας ένα αντικείμενο-σημείο που έχει τις ιδιότητες και των δυο ποσοτήτων. Σε συνδυασμό με την προσέγγιση με τη συμμεταβολή οδήγησε σε πλουσιότερη νοηματοδότηση και βαθύτερα συμπεράσματα για τη συνάρτηση. Στην περίπτωση που με τις υπόλοιπες αναπαραστάσεις της συνάρτησης συνδυάστηκε παράλληλα και η τυπική αλγεβρική μορφή της τότε μέσω της συμμεταβολής μπόρεσε να νοηματοδοτηθεί η έννοια του ρυθμού μεταβολής αυθόρμητα και πιο αποτελεσματικά.

Η διαδραστικότητα και οι λειτουργικότητες της δυναμικής γεωμετρίας που αξιοποιούνται από ψηφιακά εργαλεία όπως ο δυναμικός χειρισμός και η παρατήρηση των άμεσων αποτελεσμάτων της ανατροφοδότησης φάνηκε πως βοήθησαν τους εκπαιδευόμενους να μεταβούν από το συλλογισμό με την κατατμημένη συνεχή συμμεταβολή στην ομαλά συνεχή συμμεταβολή καθώς και στη δημιουργία συναρτησιακών σχέσεων μεταξύ των δυο ποσών. Παρέχοντας ταυτόχρονα στην ίδια οθόνη ποικίλες αναπαραστάσεις της συνάρτησης προσφέρθηκε βελτιωμένη εποπτικότητα στους εκπαιδευόμενους, εύκολη σύγκριση των στοιχείων που προέκυψαν από όλες αυτές ταυτόχρονα καθώς και μια πολυδιάστατη προσέγγιση της έννοιας που ενίσχυσε τον αναστοχασμό των διαφόρων πτυχών και ιδιοτήτων που προβάλλει η κάθε μια από αυτές.

Τα εργαλείο GeoGebra ενίσχυσε τη συζήτηση και την έκφραση των μαθητών γύρω από μαθηματικές έννοιες όπως εκείνη της συνάρτησης. Μέσα από την συνεργασία εντός των ομάδων στο κοινωνικό πλαίσιο της τάξης οι εκπαιδευόμενοι εξερεύνησαν τα ψηφιακά δομήματα τα οποία δομήθηκαν με βάση τη συμμεταβολή και τη συνάρτηση, πειραματιζόμενοι με τις λειτουργικότητες του εργαλείου και αντάλλαξαν απόψεις και ιδέες μεταξύ τους πάνω στα αποτελέσματα της άμεσης ανατροφοδότησης επιβεβαιώνοντας ή απορρίπτοντας τις υποθέσεις τους και μετά από συνεργασία καταλήγουν σε συμπεράσματα γύρω από τις συναρτήσεις ως σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων. Σε αντίθεση με το παραδοσιακό μοντέλο όπου μεγαλύτερο βάρος δίνεται στο χειρισμό αλγεβρικών συμβόλων, ο ρόλος των μαθητών είναι συνήθως παθητικός και δεν προωθείται η έκφραση γύρω από τις μαθηματικές έννοιες, τα ψηφιακά εργαλεία με τις αναπαραστάσεις και τις λειτουργικότητές τους δίνουν στους εκπαιδευόμενους ένα πιο ενεργό ρόλο εμπλέκοντάς τους σε διαδραστικές δραστηριότητες πραγματικών προβλημάτων με νόημα δίνοντάς τους εμπειρίες συλλογισμού και έκφρασης κάνοντας Μαθηματικά γύρω από τις συναρτήσεις.

Υπάρχουν ενδείξεις όμως ότι οι μαθητές παρά τη συμβολή του εργαλείου αρκετές φορές επικεντρώθηκαν σε μεθόδους χειρισμού αλγεβρικών σχέσεων ή αριθμητικών πράξεων όπως διδάσκονται στην παραδοσιακή τάξη αγνοώντας μερικές φορές τις διαθέσιμες αναπαραστάσεις όπως η γραφική παράσταση ή μελετώντας κυρίως ποσοτικά χαρακτηριστικά χωρίς να εστιάζουν ιδιαίτερα στα αντίστοιχα ποιοτικά της συνάρτησης. Αυτά είναι πιθανό να οφείλονται στην προσήλωση και την οικειότητα που έχουν με τις μεθόδους διδασκαλίας της παραδοσιακής τάξης και την τυπική αλγεβρική μορφή. Επιπλέον με τις ενέργειές τους οι εκπαιδευόμενοι έδειξαν ότι με αυτό τον τρόπο δεν εστίασαν όσο θα έπρεπε στα ποιοτικά χαρακτηριστικά της μεταβολής των ποσών και της συνάρτησης αλλά αρκετές φορές βασίστηκαν στην μορφή ήδη γνωστών τυπικών σχέσεων χωρίς να συνδυάσουν στο συλλογισμό τους και τις αντίστοιχες διαθέσιμες αναπαραστάσεις του εργαλείου. Το ψηφιακό εργαλείο βέβαια λειτούργησε ως αφορμή για προβληματισμό και αναστοχασμό καθώς οι πρότερες αντιλήψεις και πεποιθήσεις των μαθητών για τη σχέση, την μεταβολή και την συμμεταβολή ποσοτήτων ήρθαν σε σύγκρουση με τις νέες μαθηματικές ιδέες των συναρτήσεων και των αναπαραστάσεων τους, οι οποίες <<κρύβονται>> πίσω από τις δραστηριότητες και το σχεδιασμό των ψηφιακών δομημάτων από τον εκπαιδευτικό.

Τέλος προκλήσεις αντιμετώπισαν με τις συναρτήσεις που δεν προκύπτουν από μια σχέση αναλογίας και δεν ήταν αρκετά εξοικειωμένοι με πραγματικά προβλήματα, υπάρχουν όμως ενδείξεις ότι εργαλεία όπως το GeoGebra εμπλέκουν πιο ενεργά τους εκπαιδευόμενους σε αυτά μέσα από τη διαδραστικότητα τον πειραματισμό και τις δυνατότητες διερεύνησης.

6. ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΡΟΛΟΓΙΑΣ

Ξενόγλωσσος όρος	**Ελληνικός όρος**
Concept image	Εννοιολογική εικόνα
Concept definition	Εννοιολογικός ορισμός
Pre-function	Προ-συνάρτηση
Action	Ενέργεια
Process	Διαδικασία
Object	Αντικείμενο
Co-variation	Συμμεταβολή
Quantity	Ποσότητα
Magnitude	Μέγεθος
Quantitative reasoning	Ποσοτικός συλλογισμός
Multiplicative object	Πολλαπλασιαστικό αντικείμενο
Chunky reasoning	Κατετμημένη συλλογιστική
Smooth reasoning	Ομαλή συλλογιστική
Smooth continuous reasoning	Συνεχής ομαλή συλλογιστική
Scaling continuous reasoning	Κλιμακούμενη συνεχής σκέψη
Learnable	Προσιτή στην εκμάθηση
Constructionism	Κονστραξιονισμός
Learning trajectories	Μαθησιακές τροχιές
Working spaces	Περιοχές εργασίας
Dynamic Mathematics Software	Δυναμικό λογισμικό Μαθηματικών
Dynamic Geometry Software	Λογισμικό δυναμικής Γεωμετρίας
Computer Algebra System	Υπολογιστικά συστήματα Άλγεβρας
Scaffolding	Σκαλωσιά

Design based research	Έρευνα σχεδιασμού
Dynagraph	Γραφική παράσταση δυο οριζόντιων αξόνων

7. ΣΥΝΤΜΗΣΕΙΣ – ΑΡΚΤΙΚΟΛΕΞΑ – ΑΚΡΩΝΥΜΙΑ

DMS	Dynamic Mathematics Software
DGS	Dynamic Geometry Software
CAS	Computer Algebra System

8. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ – ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

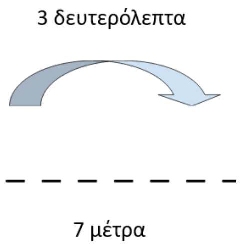
PRE-TEST

Ονοματεπώνυμο:…………………………………………..

<u>Δραστηριότητα 1:</u>

Ένα λιοντάρι διανύει τρέχοντας 7 μέτρα κάθε 3 δευτερόλεπτα.

α) Βρείτε πόση απόσταση θα έχει διανύσει μετά από 9 δευτερόλεπτα.

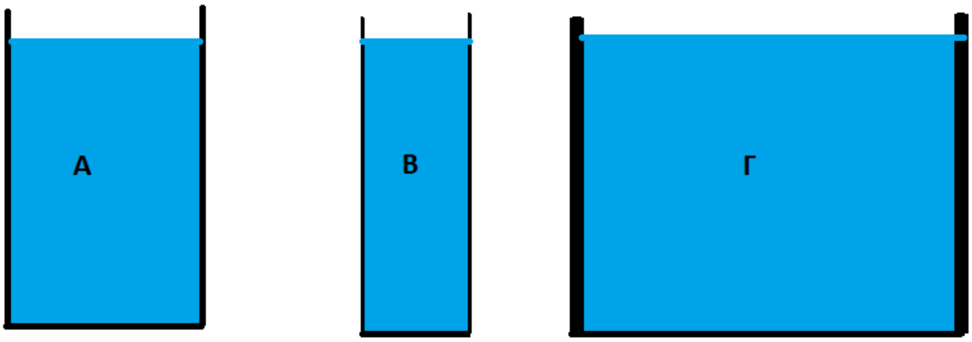


β) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα και στη συνέχεια περιγράψτε πως μεταβάλλεται το κάθε ποσό ξεχωριστά αλλά και πως μεταβάλλεται το ένα ποσό σε σχέση με το άλλο.

Χρόνος (δευτερόλεπτα)	*Σχέση που συνδέει τα ποσά*	*Απόσταση (μέτρα)*
0		
3		7
6		
9		
		28
15		
		42
45		
150		

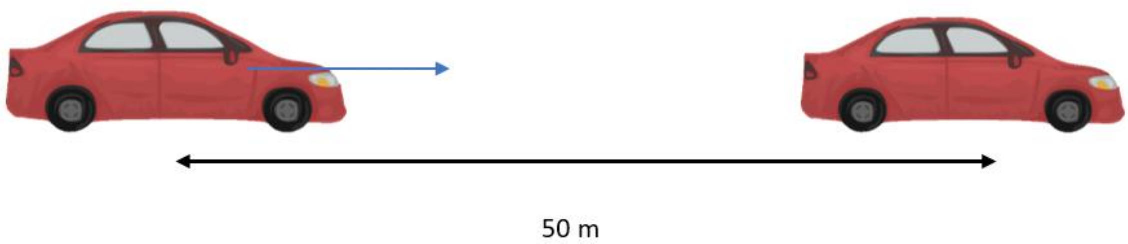
Δραστηριότητα 2:

Έχουμε τρία διαφορετικά δοχεία με το ίδιο ύψος που γεμίζουν με νερό, ανοίγοντας ταυτόχρονα τρεις ίδιες βρύσες, τις οποίες κλείνουμε όταν γεμίσουν τα δοχεία. Συμπληρώστε στην κορυφή του πίνακα ποιο δοχείο αντιστοιχεί σε κάθε στήλη:



Χρόνος (s)	*´Υψος στάθμης δοχείου (cm) ………*	*´Υψος στάθμης δοχείου (cm) ………*	*´Υψος στάθμης δοχείου (cm) ………*
2	*0,66*	*1*	*2*
3	*1*	*1,5*	*3*
5	*1,66*	*2,5*	*5*
6	*2*	*3*	*6*

Δραστηριότητα 3:



Ένα αυτοκίνητο κινείται σε ένα αυτοκινητόδρομο με σταθερή ταχύτητα 50 μέτρα ανά 3 δευτερόλεπτα:

α) Πόση απόσταση θα έχει διανύσει το αυτοκίνητο μετά από 15 δευτερόλεπτα και γιατί;

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

β) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος (s)	0	3		9		15	45	180
Απόσταση(m)		50	100		200			

γ) Παρατηρήστε τον πίνακα και προσπαθήστε να περιγράψετε τη συμπεριφορά των τιμών του κάθε ποσού.

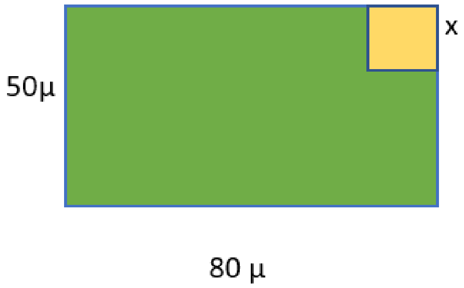
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

δ) Αφού μελετήσετε όλες τις τιμές του πίνακα, σχολιάστε παρακάτω αν οι τιμές των δυο ποσών έχουν κάποια σχέση και πως αυτές μεταβάλλονται. Εάν οι τιμές συνδέονται με κάποιο τρόπο, καταγράψτε ποια είναι η μεταξύ τους σχέση αφού το δικαιολογήσετε.

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

<u>Δραστηριότητα 4:</u>

Σε ένα κτήμα σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις 80 μέτρα και 50 μέτρα, ο ιδιοκτήτης του αποφάσισε να φυτέψει λαχανικά σε ένα χώρο του που θα έχει σχήμα τετραγώνου με πλευρά x μέτρα.



α) Πόση επιφάνεια θα μείνει ελεύθερη στο κτήμα αν ο χώρος με τα λαχανικά έχει πλευρά 10 μέτρα;

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

β) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

x (μ)	2	4		16			45
Ελεύθερη επιφάνεια (τ.μ.)			3936		2976	2400	

γ) Αφού παρατηρήσετε τις τιμές του πίνακα καταγράψτε τα συμπεράσματά σας για τα ποσά και πως αυτά μεταβάλλονται. Επίσης προσπαθήστε να βρείτε μια σχέση που να τα συνδέει.

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

Φύλλο εργασίας 1

Ονοματεπώνυμο:……………………………………………..

https://www.geogebra.org/classic/waauh8ht

Δραστηριότητα 1:

Ένας κολυμβητής ξεκινάει από την ακτή να κολυμπά με στόχο να φτάσει σε ένα σκάφος το οποίο είναι αγκυροβολημένο μακριά:

α) (i) Μετακινήστε το μωβ σημείο και παρακολουθήσετε την εξέλιξη της κίνησης του κολυμβητή. Τι παρατηρείτε;
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

(ii) Περιγράψτε σε ένα σύντομο κείμενο το φαινόμενο που μόλις παρατηρήσατε:

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

β) (i) Πειραματιστείτε με τον χρόνο και βρείτε πόση απόσταση θα έχει κολυμπήσει μετά από 4, και μετά από 9,5 δευτερόλεπτα. Επαληθεύστε τις τιμές που βρήκατε μέσα και από την καταγραφή τους στο υπολογιστικό φύλλο επιλέγοντας μέσα από τις ρυθμίσεις Προβολή > Υπολογιστικό Φύλλο και με δεξί κλικ στο σημείο Εγγραφή στο Υπολογιστικό Φύλλο ✓

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

(ii) Σε πόσο χρόνο θα έχει κολυμπήσει 6 και 10,5 μέτρα αντίστοιχα; Επαληθεύστε τις τιμές που βρήκατε μέσα και από το υπολογιστικό φύλλο.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

γ) Περιγράψτε το φαινόμενο της κίνησης του κολυμβητή χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες του υπολογιστικού φύλλου:

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

<u>Δραστηριότητα 2:</u>

α) Πόσο χρόνο χρειάζεται ο κολυμβητής για να φτάσει το σκάφος; Μπορεί ο χρόνος αυτός να αλλάξει;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

β) Μελετήστε τις τιμές που προέκυψαν μέχρι τώρα και αναζητήστε αν συνδέονται τα δυο ποσά. Περιγράψτε πως συμπεριφέρονται οι τιμές τους ξεχωριστά αλλά και μαζί καταγράφοντας στη συνέχεια μια σχέση που να τα συνδέει.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

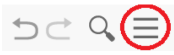
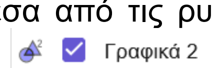
Φύλλο εργασίας 2

Ονοματεπώνυμο:……………………………………………..

https://www.geogebra.org/classic/xxcnfq4j

Δραστηριότητα 1:

Ο κολυμβητής που γνωρίσαμε την περασμένη φορά ξεκινάει από την ακτή να κολυμπά με στόχο να φτάσει σε ένα σκάφος:

α) (i) Μέσα από τις ρυθμίσεις , επιλέξτε Προβολή και ενεργοποιήστε την επιλογή 

. Αφού πειραματιστείτε με το μωβ σημείο, περιγράψτε το φαινόμενο της κίνησης του κολυμβητή χρησιμοποιώντας τη νέα αναπαράσταση (Γραφικά 2).

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

(ii) Πόση απόσταση ακόμη έχει να διανύσει ο κολυμβητής μετά από χρόνο 5 δευτερόλεπτα για να φτάσει στο σκάφος; Σε ποιο σημείο θα βρισκόταν αντίστοιχα και στις δυο αναπαραστάσεις;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 2:

Διορθώστε την <<μυστική σχέση>> ώστε ο κολυμβητής να φτάνει στα $\frac{3}{4}$ του αρχικού χρόνου στο σκάφος. Ποιες μεταβολές παρατηρείτε στα δυο σχήματα;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

Φύλλο εργασίας 3

Ονοματεπώνυμο:……………………………………………..

https://www.geogebra.org/classic/yjuvwbbw

Δραστηριότητα 1:

Σε ένα σχολικό κολυμβητικό αγώνα 50 μέτρων συμμετέχουν ο **Γιώργος**, η Ελένη και ο Θάνος. Με βάση τα τρία παράθυρα που εμφανίζονται στην οθόνη:

α) Υπολογίστε με ποιο ρυθμό μειώνεται η απόσταση από τον τερματισμό για κάθε κολυμβητή.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

β) Βρείτε μια σχέση για τον κάθε κολυμβητή που να εκφράζει την απόσταση του από τον τερματισμό σε σχέση με τον χρόνο.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

γ) Ποια στιγμή η Ελένη απέχει την μισή απόσταση σε σχέση με τον Γιώργο από τον τερματισμό;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

<u>Δραστηριότητα 2:</u>

https://www.geogebra.org/classic/mpjjpse4

Ένας κηπουρός θέλει να φυτέψει γρασίδι σε δυο γειτονικούς κήπους διαφορετικών διαστάσεων:

Βρείτε κάποια μαθηματική σχέση που να εκφράζει το εμβαδόν του μέρους του κήπου που ορίζεται από το κινούμενο ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ.

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

9. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2022). Μαθηματικά Β' Γυμνασίου, Υπουργείο Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος»
2. Ίσαρη, Φ., & Πουρκός, Μ. (2015). Ποιοτική μεθοδολογία έρευνας [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. https://hdl.handle.net/11419/5826
3. Καφετζόπουλος, Γ. Ι, & Ψυχάρης, Γ. (2015). Νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής με χρήση του λογισμικού Casyopée. In Δ. Δεσλή, Παπαδόπουλος, Ι., & Τζεκάκη, Μ. (Eds.), .) Πρακτικά 6ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών (ΕΝΕΔΙΜ 6) (pp. 499-508). Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.
4. Κυνηγός Χ. (2011). Το μάθημα της διερεύνησης. Αθήνα. Εκδόσεις Τόπος.
5. Λάτση, Μ. (2022). Σημειώσεις μαθήματος «Ερευνητική Εργασία» - Educational Design Research – Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας – Ε.Κ.Π.Α.
6. Μαυρομμάτη Μ. (2019). Η Έρευνα Βασισμένη σε Σχεδιασμό ως Εργαλείο Εκπαιδευτικής Χειραφέτησης. Επιστήμες Αγωγής, 2019(2), 75–88. ανακτήθηκε από https://ejournals.lib.uoc.gr/index.php/edusci/article/view/593
7. Ainsworth, S. E., Bibby, P. A., & Wood, D. J. (1998). Analysing the costs and benefits of multi-representational learning environments. Learning with multiple representations, 120-134.
8. Bakker, A. (2018). Design research in education: A practical guide for early career researchers. Routledge.
9. Borba, M.C., Confrey, J. (1996) A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment. Educ Stud Math 31, 319–337. https://doi.org/10.1007/BF00376325
10. Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation. New York: Springer. https://doi.org/10.1007/b105001
11. Boyer, C. B. (1946). Proportion, equation, function: Three steps in the development of a concept. Scripta Mathematica, 12, 5–13.
12. Braun, V., 7 Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. Qualitative Research in Psychology, 3, 77-101. doi:10.1191/1478088706qp063oa.
13. Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. Educational Studies in Mathematics, 23(3), 247–285. https://doi.org/10.1007/bf02309532
14. Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In J. J. Kaput, A. H. Schoenfeld, & E. Dubinsky (Eds.), Research in collegiate mathematics education, 3, CBMS issues in mathematics education (Vol. 7, pp. 114–162). Washington DC: Mathematical Association of America. http://dx.doi.org/10.1090/cbmath/007

15. Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. Journal for Research in Mathematics Education, 33(5), 352-378.
16. Carlson, M. P., Smith, N., & Persson, J. (2003). Developing and Connecting Calculus Students' Notions of Rate-of Change and Accumulation: The Fundamental Theorem of Calculus. International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 165-172.
17. Castillo-Garsow, Carlos. (2012). Continuous quantitative reasoning. Quantitative Reasoning and Mathematical Modeling: A Driver for STEM Integrated Education and Teaching in Context. 2. 55-73.
18. Clements, D. H. (2002). Computers in early childhood mathematics. Contemporary issues in early childhood, 3(2), 160-181.
19. Confrey, J. (1991). The Use of Contextual Problems and Multi-Representational Software To Teach the Concept of Functions. Final Project Report.
20. Confrey, J., & Maloney, A. (1996). Function probe. Communications of the ACM, 39(8), 86–87. https://doi.org/10.1145/232014.232036
21. Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. Educational Studies in Mathematics, 26(2–3), 135–164. https://doi.org/10.1007/bf01273661
22. Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. Journal for Research in Mathematics Education, 26(1), 66. https://doi.org/10.2307/749228
23. Cooney T. & Wilson M. (2012). Teachers’ thinking about functions: Historical and research perspectives. In Integrating Research on the Graphical Representation of Functions (pp. 142–169). Routledge.
24. Deaney, R., Ruthven, K., & Hennessy, S. (2003). Pupil perspectives on the contribution of information and communication technology to teaching and learning in secondary school. Research papers in education, 18(2), 141–165.
25. DiSessa A. (1983). Phenomenology and the evolution of intuition. In Mental Models (pp. 23–42). Psychology Press.
26. Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1984). Intuitions on functions. Journal of Experimental Education, 52(2), 77–85. https://doi.org/10.1080/00220973.1984.11011875
27. Drier, H. S. (2000). Investigating mathematics as a community of learners. Teaching Children Mathematics, 6(6), 358–363. https://doi.org/10.5951/tcm.6.6.0358
28. Dubinsky, E. (2002). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In: Tall, D. (eds) Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library, vol 11. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7
29. Duval, R. A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. Educ Stud Math 61, 103–131 (2006). https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

30. Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (pp. 153-174). The Mathematical Association of America.
31. Eisenberg, T. (2002). Functions and Associated Learning Difficulties. In: Tall, D. (eds) Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library, vol 11. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_9
32. Elia, I., Panaoura, A., Gagatsis, A. et al. Exploring Different Aspects of the Understanding of Function: Toward a Four-Facet Model. Can J Sci Math Techn 8, 49–69 (2008). https://link.springer.com/article/10.1080/14926150802152277#citeas
33. Ellis, Amy & Ely, Robert & Singleton, Brandon & Tasova, Halil. (2020). Scaling-continuous variation: supporting students' algebraic reasoning. Educational Studies in Mathematics. 104. 10.1007/s10649-020-09951-6.
34. Ely, R. (2011). Envisioning the infinite by projecting finite properties. The Journal of Mathematical Behavior, 30(1), 1–18. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.12.001
35. Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. Educational Studies in Mathematics, 66(3), 317–333. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9072-y
36. Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus: Ideas discussed at PME over the last 30 years. In Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education (pp. 237–273). BRILL.
37. Freudenthal, H. (1982). Variables and functions. In G. V. Barneveld & H. Krabbendam (Eds.), Proceedings of Conference on Functions (pp. 7–20). Enschede, The Netherlands: National Institute for Curriculum Development.
38. Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004) Ability to Translate from One Representation of the Concept of Function to Another and Mathematical Problem Solving, Educational Psychology, 24:5, 645-657, DOI: 10.1080/0144341042000262953
39. Goldenberg, E. P. (1988). Mathematics, metaphors, and human factors: Mathematical, technical, and pedagogical challenges in the educational use of graphical representation of functions. The Journal of Mathematical Behavior, 7(2), 135–173.
40. Goldenberg, E. P., Lewis, P. and O'Keefe, J. (1992). Dynamic representation and the development of a process understanding of function. In G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy. MAA Notes, Volume 25 1992, Washington, DC: Mathematical Association of America.
41. Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. In Computer algebra systems and dynamic geometry systems in mathematics teaching conference (pp. 1-6).
42. Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., & Lavicza, Z. (2008). Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra.

43. Hohenwarter, M. & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27(3), 126-131.
44. Hoyles, C. (1993). Microworlds/schoolworlds: The transformation of an innovation. In Learning from computers: Mathematics education and technology (pp. 1-17). Springer Berlin Heidelberg.
45. Hoyles C., & Noss R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), Second International Handbook of Research in Mathematics Education (pp. 323–349). Dordrecht: Kluwer.
46. Hoyles, C., & Noss, R. (2008). Next steps in implementing Kaput's research programme. Educational Studies in Mathematics, 68(2), 85–97. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9102-4
47. Hoyles, C., Lagrange, J. B., & Noss, R. (2006). Developing and evaluating alternative technological infrastructures for learning mathematics. In New Mathematics Education Research and Practice (pp. 263–312). BRILL. https://doi.org/10.1163/9789087903510_022
48. Kafetzopoulos G , Psycharis G (2022), Conceptualization of function as a covariational relationship between two quantities through modeling tasks, The Journal of Mathematical Behavior,Volume 67 https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100993
49. Kaput, J. J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra1. In Mathematics classrooms that promote understanding (pp. 133-155). Routledge.
50. Kaput, J., Noss, R., Hoyles, C. (2002) Developing new notations for a learnable mathematics in the computational era. In: English, L, (ed.) Handbook of international research in mathematics education. (pp. 51-75). Lawrence Erlbaum: Mahwah, NJ; London.
51. Katz, V. J. (2009). A history of mathematics (3rd ed.). Pearson.
52. Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 390–419). New York: Macmillan.
53. Kieran, C., & Yerushalmy, M. (2006). Research on the role of technological environments in algebra learning and teaching. In New ICMI Study Series (pp. 97–152). Kluwer Academic Publishers.
54. Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. The College Mathematics Journal, 20(4), 282–300.https://doi.org/10.1080/07468342.1989.11973245
55. Kleiner, I. Functions: Historical and pedagogical aspects. Sci Educ 2, 183–209 (1993). https://doi.org/10.1007/BF00592206
56. Kynigos, Chronis. (2015). Constructionism: Theory of Learning or Theory of Design?. 10.1007/978-3-319-17187-6_24.
57. Lagrange, J.-B. (2010). Teaching and learning about functions at upper secondary level: designing and experimenting the software environment Casyopée.

International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41(2), 243-255.

58. Lagrange, J.-B., & Psycharis, G. (2014). Investigating the potential of computer environments for the teaching and learning of functions: A double analysis from two research traditions. Technology Knowledge and Learning, 19(3), 255–286. https://doi.org/10.1007/s10758-013-9211-3

59. Lagrange, J.-B. (2014). New representational infrastructures: broadening the focus on functions. Teaching Mathematics and Its Applications An International Journal of the IMA, 33(3), 179–192. https://doi.org/10.1093/teamat/hru018

60. Lakatos, Imre (1976). Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery. In J. Worrall and E. Zahar (eds.), Cambridge CambridgeUniversity Press.

61. Laurillard, D. (2012). Teaching as a Design Science: Building Pedagogical Patterns for Learning and Technology (1st ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203125083

62. Moore, K. C., Paoletti, T., & Musgrave, S. (2013). Covariational reasoning and invariance among coordinate systems. The Journal of Mathematical Behavior, 32(3), 461–473. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.05.002

63. Moore, K. C., & Carlson, M. P. (2012). Students' images of problem contexts when solving applied problems. The Journal of Mathematical Behavior, 31(1), 48–59. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.09.001

64. Noss, R., & Hoyles, C. (1996). Tools and Technologies. In Windows on Mathematical Meanings. Springer Netherlands.

65. Noss, R., Healy, L. & Hoyles, C. (1997). The Construction of Mathematical Meanings: Connecting the Visual with the Symbolic. Educational Studies in Mathematics 33, 203–233. https://doi.org/10.1023/A:1002943821419

66. Oehrtman, M., Carlson, M., & Thompson, P. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), Making the Connection (pp. 27–42). The Mathematical Association of America. DOI: 10.5948/UPO9780883859759.004

67. Panorkou, N., Maloney, A. P., & Confrey, J. (2014). Expressing covariation and correspondence relationships in elementary schooling.

68. Papert S. (1993). Νοητικές θύελλες. Παιδιά, Ηλεκτρονικοί υπολογιστές και Δυναμικές Ιδέες. Αθήνα. Εκδόσεις Οδυσσέας.

69. Papert S. (1971). (1972) Teaching Children to be Mathematicians Versus Teaching About Mathematics, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 3:3, 249-262

70. Patton, M. Q. (1990). Qualitative evaluation and research methods. SAGE Publications, inc. (pp. 169-186)

71. Piaget, J., Grize, J.-B., Szeminska, A., & Bang, V. (1977). In Epistemology and Psychology of Functions. Springer Netherlands.

72. Prensky, M. (2001). Digital natives, digital immigrants part 1. On the Horizon, 9(5), 1–6. https://doi.org/10.1108/10748120110424816

73. Roschelle, J., & Kaput, J. J. (1996). SimCalc MathWorlds for the mathematics of change. Communications of the ACM, 39(8), 97–99. https://doi.org/10.1145/232014.232041

74. Roschelle, J., Kaput, J., & Stroup, W. (2000). SimCalc: Accelerating student engagement with the mathematics of change. In M.J. Jacobsen & R.B. Kozma, Learning the sciences of the 21st century: Research, design, and implementing advanced technology learning environments. Hillsdale, NJ: Earlbaum.

75. Sacristán, A. I., Calder, N., Rojano, T., Santos-Trigo, M., Friedlander, A., Meissner, H., Tabach, M., Moreno, L., & Perrusquía, E. (2009). The influence and shaping of digital technologies on the learning – and learning trajectories – of mathematical concepts. In New ICMI Study Series (pp. 179–226). Springer US.

76. Saldanha, L. A., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S. B. Berenson & W. N. Coulombe (Eds.), Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education- North America (Vol. 1, pp. 298–304). Raleigh: North Carolina State University. Retrieved from http://bit.ly/1b4sjQE

77. Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22(1), 1–36. https://doi.org/10.1007/bf00302715

78. Sierpinska, Anna. (1992). On understanding the notion of function. The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy. 25.

79. Stalvey, H. E., & Vidakovic, D. (2015). Students’ reasoning about relationships between variables in a real-world problem. The Journal of Mathematical Behavior, 40, 192–210. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.08.002

80. Stephens, A., Ellis, A., Blanton, M., & Brizuela, B. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. In J. Cai (Ed.). Compendium of research on mathematics teaching and learning (pp. 386-420). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

81. Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education, 1, Issues in Mathematics Education (Vol. 4, pp. 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society.

82. Thompson, P.W. (2002). Didactic Objects and Didactic Models in Radical Constructivism. In: Gravemeijer, K., Lehrer, R., Van Oers, B., Verschaffel, L. (eds) Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education. Mathematics Education Library, vol 30. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3194-2_12

83. Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In L. L. Hatfield, S. Chamberlain & S. Belbase (Eds.), New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education. WISDOMe Mongraphs (Vol. 1, pp. 33-57). Laramie, WY:University of Wyoming.

84. Thompson P.W. & Carlson M. P. (2017) Variation, co-variation & functions. Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.) Compendium for

researching mathematics education (pp. 421-456). Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics

85. Trigueros, M., & Ursini, S. (1999). Does the understanding of variable evolve through schooling? In O. Zaslavsky (Ed.), Proceedings of the International Group for the Psychology of Education (Vol. 4, pp. 273–280). Haifa, Israel: PME.
86. Vygotsky, L. S. (1981). The genesis of higher mental functions. In J. V. Wersch (Ed. and Trans.), The Concept of Activity in Soviet Psychology (pp. 144–188). Armonk, NY: Sharpe.
87. Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14(3), 293–305. https://doi.org/10.1080/0020739830140305
88. Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. Journal for Research in Mathematics Education, 20(4), 356. https://doi.org/10.2307/749441
89. White, P., & Mitchelmore, M. (1996). Conceptual knowledge in introductory calculus. Journal for Research in Mathematics Education, 27(1), 79. https://doi.org/10.2307/749199
90. Willig, C. (2013). Introducing qualitative research in psychology (3rd ed.). Open University Press.
91. Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. Journal of Child Psychology and Psychiatry, and Allied Disciplines, 17(2), 89–100. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x
92. Zachariades T., Christou C. & Papageorgiou E. (2023). The difficulties and reasoning of undergraduate mathematics students in the identification of functions.
93. Zengin, Y., Furkan, H., & Kutluca, T. (2012). The effect of dynamic mathematics software geogebra on student achievement in teaching of trigonometry. Procedia, Social and Behavioral Sciences, 31, 183–187. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.12.038