



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

Αυτόματος έλεγχος περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς



Φοιτητής: Σάββας Τσιλίκας

ΑΜ: 50347572

Επιβλέπων Καθηγητής

Αλέξανδρος Αλεξανδρίδης

Καθηγητής

ΑΘΗΝΑ-ΑΙΓΑΛΕΩ, Μάρτιος 2024



UNIVERSITY OF WEST ATTICA
FACULTY OF ENGINEERING
DEPARTMENT OF ELECTRICAL & ELECTRONICS ENGINEERING

Diploma Thesis

Automatic control of a rotary inverted pendulum



Student: Savvas Tsilikas
Registration Number: 50347572

Supervisor

Alex Alexandridis
Professor

ATHENS-EGALEO, March 2024

Η Διπλωματική Εργασία έγινε αποδεκτή και βαθμολογήθηκε από την εξής τριμελή επιτροπή:

Αλέξανδρος Αλεξανδρίδης, Καθηγητής	Μαρία Ραγκούση, Καθηγήτρια	Διονύσιος Κανδρός, Καθηγητής
(Υπογραφή)	(Υπογραφή)	(Υπογραφή)

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ και Σάββας Τσιλίκας,
Μάρτιος, 2024**

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τους συγγραφείς.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον/την συγγραφέα του και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις θέσεις του επιβλέποντος, της επιτροπής εξέτασης ή τις επίσημες θέσεις του Τμήματος και του Ιδρύματος.

ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο κάτωθι υπογεγραμμένος Τσιλίκας Σάββας του Δημητρίου, με αριθμό μητρώου 50347572 φοιτητής του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής της Σχολής ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ του Τμήματος ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ,

δηλώνω υπεύθυνα ότι:

«Είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, οι όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε ακριβώς είτε παραφρασμένες, αναφέρονται στο σύνολό τους, με πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία έχει συγγραφεί από μένα αποκλειστικά και αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου, όσο και του Ιδρύματος.

Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του διπλώματός μου.»

Ο Δηλών
Τσιλίκας Σάββας



*“Success is not final,
failure is not fatal.
It is the courage
to continue that
counts.”*
-Winston Churchill-

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, Αλέξανδρο Αλεξανδρίδη, για την ευκαιρία που μου έδωσε να μάθω μαζί του και με τον υποψήφιο διδάκτορα, Θεόδωρο Πρωτούλη. Τους ευχαριστώ ιδιαίτερος για την προθυμία τους να με βοηθήσουν στο οποιοδήποτε ερώτημά μου, για την καθοδήγηση τους, την υπομονή τους, την κατανόηση που μου έδειξαν και τον τρόπο τους να με ενθαρρύνουν να φτάσω στην «Ιθάκη» καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Ίσως κάποτε να έρθει η μέρα που θα δώσω περισσότερη σημασία στο ταξίδι παρά στον προορισμό.

Ένα ευχαριστώ στα άτομα που γνώρισα κατά την διάρκεια των σπουδών μου στη σχολή για τις στιγμές που περάσαμε. Χωρίς την παρέα τους και την καλή τους διάθεση κάθε φορά που αντικρίζαμε ο ένας τον άλλο, σίγουρα η μέρα μου θα περνούσε λιγότερο ευχάριστα. Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη που έχω απέναντι στους φίλους μου και την οικογένειά μου για τις στιγμές που με στήριξαν κατά την διάρκεια όχι μόνο των ακαδημαϊκών μου σπουδών αλλά και της ζωής μου. Λυπάμαι για τις φορές που σας απογοήτευσα. Είστε ένα «δώρο» που εύχομαι όλος ο κόσμος να μπορούσε να το αποκτήσει.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία αντιμετωπίστηκε το πρόβλημα της ανύψωσης και σταθεροποίησης ενός περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς χρησιμοποιώντας διάφορες μεθόδους αυτομάτου ελέγχου. Ο αυτόματος έλεγχος του συστήματος αυτού είναι ένα πρόβλημα εξαιρετικά περίπλοκο, καθώς παρουσιάζει έντονα μη γραμμικούς όρους. Για τον λόγο αυτό το πρόβλημα του περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς παίζει σημαντικό ρόλο στην αξιολόγηση μεθοδολογιών αυτομάτου ελέγχου. Για τη μαθηματική μοντελοποίηση και την προσομοίωση της δυναμικής συμπεριφοράς του περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς χρησιμοποιήθηκαν οι εξαγμένες μέσω της μεθόδου Lagrange εξισώσεις κίνησης. Συγκεκριμένα, υπολογίστηκαν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος και πραγματοποιήθηκε η γραμμικοποίηση του γύρω από το κατάλληλο σημείο ισορροπίας. Το συγκεκριμένο σημείο ισορροπίας είναι αυτό για το οποίο το περιστροφικό ανάστροφο εκκρεμές παραμένει στην κατακόρυφη προς τα πάνω θέση σταθερό, δηλαδή χωρίς να μεταβάλλονται οι γωνιακές θέσεις του βραχίονα και της ράβδου. Η σταθεροποίηση του εκκρεμούς προσομοιώθηκε και υλοποιήθηκε στην πράξη με τη χρήση τριών γραμμικών ελεγκτών, οι οποίοι λειτουργούν σε εύρος γωνιών $\pm 20^\circ$. Ο πρώτος ελεγκτής που σχεδιάστηκε είναι ένας τυπικός ελεγκτής PID. Λόγω της φύσης του ελεγκτή αυτού, δεν ήταν δυνατό να πραγματοποιηθεί ο ταυτόχρονος έλεγχος όλων των καταστάσεων του συστήματος. Στη συνέχεια σχεδιάστηκαν δύο ελεγκτές γραμμικής ανάδρασης κατάστασης, και συγκεκριμένα ένας τυπικός ελεγκτής linear quadratic regulator (LQR) και ένας ελεγκτής LQR-Observer, ο οποίος κάνει χρήση ενός παρατηρητή πλήρους τάξης, μέσω των μεθόδων τοποθέτησης πόλων και Bass - Gura. Οι τρεις ελεγκτές που σχεδιάστηκαν συγκρίθηκαν αρχικά μέσω προσομοιώσεων, ενώ στην συνέχεια πραγματοποιήθηκε εφαρμογή σε μία πραγματική διάταξη περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς. Τέλος, χρησιμοποιώντας την μηχανική ενέργεια του εκκρεμούς σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε ένας ελεγκτής ανύψωσης του εκκρεμούς (swing-up controller), ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με τους γραμμικούς ελεγκτές ανάδρασης κατάστασης για την ανύψωση του εκκρεμούς ξεκινώντας από το κάτω σημείο ισορροπίας, και την σταθεροποίηση του στο επάνω σημείο ισορροπίας.

Λέξεις – κλειδιά

Ανάστροφο εκκρεμές, γραμμικός τετραγωνικός ρυθμιστής, ελεγκτής PID, ελεγκτής ανύψωσης, εξισώσεις κίνησης, παρατηρητής πλήρους τάξης, σημεία ισορροπίας, χώρος κατάστασης

Abstract

In this thesis, the problem of swinging up and stabilizing a rotary inverted pendulum was addressed using various control methods. The automatic control of this system is an extremely complex problem, as it presents strongly nonlinear terms. For this reason, the problem of the rotary inverted pendulum plays a significant role in evaluating automatic control methodologies. The equations of motion extracted by the Lagrange method were used for mathematical modelling and simulation of the dynamic behavior of the rotary inverted pendulum. In particular, the equilibrium points of the system were calculated and linearization around the appropriate equilibrium point was performed. This specific equilibrium point is the one for which the rotary inverted pendulum remains stable in the vertical upward position, without changing the angular positions of the arm and the rod. The stabilization of the pendulum was simulated and implemented in practice using three linear controllers, which operate within an angular range of $\pm 20^\circ$. The first controller designed is a typical PID controller. Due to the nature of the controller, it was not possible to perform simultaneous control of all states of the system. Subsequently, two linear state feedback controllers were designed, namely a standard linear quadratic regulator (LQR) controller and an LQR-Observer controller, which utilizes a full-order observer, through the pole placement and Bass - Gura methods. The three designed controllers were initially compared through simulations and then applied to a real experimental rotary inverted pendulum system. Finally, utilizing the mechanical energy of the pendulum, a swing-up controller was designed and implemented, which can be used in combination with the linear state feedback controllers for raising the pendulum, starting from the lower equilibrium point and stabilizing it at the upper equilibrium point.

Keywords

Equations of motion, equilibrium points, full-order observer, inverted pendulum, linear quadratic regulator, PID controller, state space, swing-up controller

Κατάλογος Πινάκων.....	10
Κατάλογος Σχημάτων	10
Αλφαβητικό Ευρετήριο.....	13
1 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο : ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	14
2 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο : Δυναμική Μοντελοποίηση Περιστροφικού Ανάστροφου Εκκρεμούς 16	
2.1 Εξισώσεις Κίνησης.....	16
2.2 Σημεία Ισορροπίας	17
2.3 Γραμμικοποίηση.....	20
2.4 Σύντομη περιγραφή της διαδικασίας των προσομοιώσεων	23
2.5 Σύγκριση μη γραμμικού και γραμμικού μοντέλου	23
2.6 Μετατροπή του μοντέλου ροπής σε μοντέλο τάσης	23
3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο : Θεωρία Παρατηρητών.....	25
3.1 Σχεδίαση Παρατηρητή	26
3.1.1 Έλεγχος παρατηρησιμότητας.....	26
3.2 Υπολογισμός των κερδών του παρατηρητή μέσω της κλασσικής μεθόδου τοποθέτησης ιδιοτιμών και με Bass - Gura.....	30
3.3 Σχεδίαση παρατηρητή πλήρους τάξης με δύο διαθέσιμες μετρήσεις	34
4 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο : Έλεγχος Ανάδρασης Κατάστασης	35
4.1 Θεωρία Ελεγκτών Ανάδρασης Κατάστασης.....	35
4.2 Σχεδίαση Γραμμικού Τετραγωνικού Ρυθμιστή LQR.....	36
5 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο : Swing-up Controller.....	37
5.1 Ανάλυση Ελεγκτή	37
6 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο : Πειραματικά Αποτελέσματα	40
6.1 Πειράματα για τη σταθεροποίηση του εκκρεμούς μέσω προσομοίωσης	40
6.1.1 Προσομοίωση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος.....	40
6.1.2 Προσομοίωση με τη χρήση του ελεγκτή PID	42
6.1.3 Προσομοίωση με τη χρήση του ελεγκτή LQR.....	43
6.1.4 Προσομοιώσεις με τη χρήση του ελεγκτή LQR σε συνδυασμό με τον παρατηρητή	45
6.2 Πειράματα για τη σταθεροποίηση του εκκρεμούς στο πραγματικό σύστημα	46
6.2.1 Πειραματικά αποτελέσματα με τη χρήση του ελεγκτή LQR	48
6.2.2 Πειραματικά αποτελέσματα με τη χρήση του σχήματος ελέγχου LQR-Observer	51
6.3 Εφαρμογή του swing-up controller	55
6.4 Συζήτηση προσομοιώσεων και πειραματικών αποτελεσμάτων.....	58
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	59
Βιβλιογραφία – Αναφορές - Διαδικτυακές Πηγές	60

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1: Πίνακας τιμών των πειραματικών αποτελεσμάτων του συστήματος με τη χρήση του LQR	47
Πίνακας 2: Πίνακας τιμών των πειραματικών αποτελεσμάτων του συστήματος με τη χρήση του LQR-Observer	47
Πίνακας 3: Πίνακας τιμών των πειραματικών αποτελεσμάτων του συστήματος με τη χρήση του ελεγκτή ανύψωσης (Swing Up- LQR- Observer)	55

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1: Η απόκριση της γωνίας α για το γραμμικό και το μη γραμμικό μοντέλο του περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς με μηδενική είσοδο και μηδενικές αρχικές συνθήκες	23
Σχήμα 2: Το δομικό διάγραμμα ενός παρατηρητή [38]	25
Σχήμα 3: Το διάγραμμα του συστήματος LQR-observer [38]	34
Σχήμα 4: Το σύστημα κλειστού βρόχου για γραμμικό έλεγχο ανάδρασης κατάστασης [31]	35
Σχήμα 5: Γεωμετρική απεικόνιση της στρατηγικής της ανύψωσης του εκκρεμούς [35]	38
Σχήμα 6: Οι γωνιακές θέσεις του εκκρεμούς και του βραχίονα για αρχική γωνία $\alpha=90^\circ$	40
Σχήμα 7: Οι γωνιακές ταχύτητες του εκκρεμούς και του βραχίονα για $\alpha=90^\circ$	40
Σχήμα 8: Οι γωνιακές θέσεις του εκκρεμούς και του βραχίονα για αρχική γωνία $\alpha=120^\circ$	40
Σχήμα 9: Οι γωνιακές ταχύτητες του εκκρεμούς και του βραχίονα για $\alpha=120^\circ$	40
Σχήμα 10: Η απόκριση της θέσης του βραχίονα θ με τη χρήση του PID ελεγκτή	42
Σχήμα 11: Σταθεροποίηση της θέσης του εκκρεμούς α με τη χρήση του PID ελεγκτή	42
Σχήμα 12: Οι αποκρίσεις των γωνιακών ταχυτήτων του βραχίονα και του εκκρεμούς	43
Σχήμα 13: Το σήμα του σερβοκινητήρα	43
Σχήμα 14: Οι αποκρίσεις των θέσεων του βραχίονα για τις ενισχύσεις K_1 και K_2 του LQR	44
Σχήμα 15: Οι αποκρίσεις των θέσεων του εκκρεμούς για τις ενισχύσεις K_1 και K_2 του LQR	44
Σχήμα 16: Οι αποκρίσεις των ταχυτήτων του βραχίονα για τις ενισχύσεις K_1 και K_2 του LQR	44
Σχήμα 17: Οι αποκρίσεις των ταχυτήτων του εκκρεμούς για τις ενισχύσεις K_1 και K_2 του LQR ...	44
Σχήμα 18: Οι τάσεις του σερβοκινητήρα για τις ενισχύσεις K_1 και K_2 του LQR	44
Σχήμα 19: Οι αποκρίσεις της κατάστασης θ και της εκτίμησής της	45
Σχήμα 20: Οι αποκρίσεις της κατάστασης α και της εκτίμησής της	45
Σχήμα 21: Οι αποκρίσεις της γωνιακής ταχύτητας του βραχίονα και της εκτίμησής της	45

Σχήμα 22: Οι αποκρίσεις της γωνιακής ταχύτητας του εκκρεμούς και της εκτίμησής της	45
Σχήμα 23: Η τάση του σερβοκινητήρα που παράγει ο ελεγκτής	46
Σχήμα 24: Η διάταξη του περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς	47
Σχήμα 25: Η βάση σερβοκινητήρα SRV02 της Quanser [34]	47
Σχήμα 26: Η απόκριση της θέσης του βραχίονα με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 1	48
Σχήμα 27: Η απόκριση της θέσης του εκκρεμούς με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 1	48
Σχήμα 28: Η απόκριση της γωνιακής ταχύτητας του βραχίονα με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 1	48
Σχήμα 29: Η απόκριση της γωνιακής ταχύτητας του εκκρεμούς με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 1	48
Σχήμα 30: Η τάση του σερβοκινητήρα που παράγει ο ελεγκτής LQR για την περίπτωση 1.....	48
Σχήμα 31: Η απόκριση της θέσης του βραχίονα με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 2	49
Σχήμα 32: Η απόκριση της θέσης του εκκρεμούς με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 2	49
Σχήμα 33: Η απόκριση της γωνιακής ταχύτητας του βραχίονα με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 2	49
Σχήμα 34: Η απόκριση της γωνιακής ταχύτητας του εκκρεμούς με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 2	49
Σχήμα 35: Η τάση του σερβοκινητήρα που παράγει ο ελεγκτής LQR για την περίπτωση 2.....	49
Σχήμα 36: Η απόκριση της θέσης του βραχίονα με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 3	50
Σχήμα 37: Η απόκριση της θέσης του εκκρεμούς με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 3	50
Σχήμα 38: Η απόκριση της γωνιακής ταχύτητας του βραχίονα με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 3	50
Σχήμα 39: Η απόκριση της γωνιακής ταχύτητας του εκκρεμούς με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 3	50
Σχήμα 40: Η τάση του σερβοκινητήρα που παράγει ο ελεγκτής LQR για την περίπτωση 3.....	50
Σχήμα 41: Οι αποκρίσεις της θέσης του βραχίονα με τον ελεγκτή LQR-ObsERVER για την περίπτωση 1	51

Σχήμα 42: Οι αποκρίσεις της θέσης του εκκρεμούς με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 1.....	51
Σχήμα 43: Οι αποκρίσεις των ταχυτήτων του βραχίονα με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 1.....	51
Σχήμα 44: Οι αποκρίσεις των ταχυτήτων του εκκρεμούς με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 1.....	51
Σχήμα 45: Το σήμα του σερβοκινητήρα με τη χρήση του LQR-Observer ελεγκτή για την περίπτωση 1.....	51
Σχήμα 46: Οι αποκρίσεις της θέσης του βραχίονα με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 2.i.....	52
Σχήμα 47: Οι αποκρίσεις της θέσης του εκκρεμούς με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 2.i.....	52
Σχήμα 48: Οι αποκρίσεις των ταχυτήτων του βραχίονα με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 2.i.....	52
Σχήμα 49: Οι αποκρίσεις των ταχυτήτων του εκκρεμούς με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 2.i.....	52
Σχήμα 50: Το σήμα του σερβοκινητήρα με τη χρήση του LQR-Observer ελεγκτή για την περίπτωση 2.i.....	53
Σχήμα 51: Οι αποκρίσεις της θέσης του βραχίονα με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 2.ii.....	53
Σχήμα 52: Οι αποκρίσεις της θέσης του εκκρεμούς με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 2.ii.....	53
Σχήμα 53: Οι αποκρίσεις των ταχυτήτων του βραχίονα με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 2.ii.....	53
Σχήμα 54: Οι αποκρίσεις των ταχυτήτων του εκκρεμούς με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 2.ii.....	53
Σχήμα 55: Το σήμα του σερβοκινητήρα με τη χρήση του LQR-Observer ελεγκτή για την περίπτωση 2.ii.....	54
Σχήμα 56: Οι αποκρίσεις της θέσης του βραχίονα με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 3.....	54
Σχήμα 57: Οι αποκρίσεις της θέσης του εκκρεμούς με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 3.....	54
Σχήμα 58: Οι αποκρίσεις των ταχυτήτων του βραχίονα με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 3.....	54
Σχήμα 59: Οι αποκρίσεις των ταχυτήτων του εκκρεμούς με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 3.....	54

Σχήμα 60: Το σήμα του σερβοκινητήρα με τη χρήση του LQR-Observer ελεγκτή για την περίπτωση 3	55
Σχήμα 61: Η απόκριση της θέσης του βραχίονα με τον Swing Up-LQR-Observer για την περίπτωση 1	56
Σχήμα 62: Η απόκριση της θέσης του εκκρεμούς με τον Swing Up-LQR-Observer για την περίπτωση 1	56
Σχήμα 63: Η απόκριση της γωνιακής ταχύτητας του βραχίονα με τον Swing Up-LQR-Observer για την περίπτωση 1	56
Σχήμα 64: Η απόκριση της γωνιακής ταχύτητας του εκκρεμούς με τον Swing Up-LQR-Observer για την περίπτωση 1	56
Σχήμα 65: Το σήμα του σερβοκινητήρα με τη χρήση του Swing Up-LQR-Observer για την περίπτωση 1	56
Σχήμα 66: Η απόκριση της θέσης του βραχίονα με τον Swing Up-LQR-Observer για την περίπτωση 2	57
Σχήμα 67: Η απόκριση της θέσης του εκκρεμούς με τον Swing Up-LQR-Observer για την περίπτωση 2	57
Σχήμα 68: Η απόκριση της γωνιακής ταχύτητας του βραχίονα με τον Swing Up-LQR-Observer για την περίπτωση 2	57
Σχήμα 69: Η απόκριση της γωνιακής ταχύτητας του εκκρεμούς με τον Swing Up-LQR-Observer για την περίπτωση 2	57
Σχήμα 70: Το σήμα του σερβοκινητήρα με τη χρήση του Swing Up-LQR-Observer για την περίπτωση 2	57

Αλφαβητικό Ευρετήριο

EoM: Equations of Motion

DoF: Degrees of Freedom

PID controller: Proportional Integral Derivative controller

LQR controller: Linear Quadratic Regulator

FSF: Full State Feedback

1 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο : ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το περιστροφικό ανάστροφο εκκρεμές είναι ένα ασταθές μη γραμμικό υποενεργούμενο σύστημα, ευρέως γνωστό στο χώρο του αυτομάτου ελέγχου. Ο έλεγχος αυτού, λόγω των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών του, είναι ένα αρκετά δύσκολο πρόβλημα και για τον λόγο αυτό το σύστημα του ανάστροφου εκκρεμούς χρησιμοποιείται συχνά για την αξιολόγηση μεθοδολογιών αυτομάτου ελέγχου. Συγκεκριμένα, το περιστροφικό ανάστροφο εκκρεμές είναι ένα σύστημα που παρουσιάζει από τη φύση του έντονα μη γραμμικούς όρους και αναπαριστά όμοια δυναμική συμπεριφορά με άλλα συστήματα του πραγματικού κόσμου. Παραδείγματα αυτών αποτελούν τα συστήματα εκτόξευσης πυραύλων (κατά το στάδιο της εκτόξευσης), τα συστήματα ανθρώπινης στάσης του σώματος, τα συστήματα μεταφοράς Segway, τα ρομποτικά συστήματα αυτοεξισορρόπησης, τα βιομηχανικά συστήματα γερανών, κ.α. Γενικά, κάθε σύστημα που απαιτεί κατακόρυφη σταθεροποίηση έχει δυναμική παρόμοια με αυτή του ανάστροφου εκκρεμούς. Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η μοντελοποίηση του συστήματος του περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς της εταιρείας Quanser στο χώρο κατάστασης, και η σχεδίαση γραμμικών ελεγκτών για τη σταθεροποίηση του στο κατακόρυφα προς τα πάνω σημείο ισορροπίας του. Επιπλέον, η εργασία στοχεύει όχι μόνο στην επεξήγηση και τη σχεδίαση των ελεγκτών που υλοποιήθηκαν αλλά και στη σύγκριση τους μέσω προσομοιώσεων και πειραματικών αποτελεσμάτων ως προς την αποδοτικότητά τους στο πρόβλημα της σταθεροποίησης του εκκρεμούς.

Πέρα από τα πλαίσια της συγκεκριμένης εργασίας, αξίζει να αναφερθούν και άλλες μεθοδολογίες αυτομάτου ελέγχου οι οποίες είναι πιο εξειδικευμένες. Μία από αυτές είναι και ο προβλεπτικός έλεγχος ή MPC (Model Predictive Control) [1]. Ο MPC είναι μια ευέλικτη μέθοδος ελέγχου ικανή να αντιμετωπίζει περιορισμούς και αβεβαιότητες ενώ μπορεί να προβλέπει και να βελτιστοποιεί τη μελλοντική συμπεριφορά του συστήματος σε ένα πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα. Στην [2] παρουσιάζεται μια μέθοδος παρακολούθησης τροχιάς τετρακόπτερου με MPC, που βασίζεται στη βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο σμήνους σωματιδίων PSO (Particle Swarm Optimization). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι δημοσιεύσεις [3, 4] όπου χρησιμοποιείται προβλεπτικός έλεγχος σε συνδυασμό με νευρωνικά δίκτυα ακτινικής βάσης RBF (Radial Basis Functions) για τον έλεγχο ανάρτησης ενός οχήματος και την αυτόματη αποφυγή σύγκρουσης σκαφών. Στις [5, 6] ο MPC ενσωματώνεται σε ένα NN (Neural Network) για την αξιολόγηση ενός νέου αλγόριθμου εκπαίδευσης νευρωνικών δικτύων RBF. Μία άλλη μη γραμμική μέθοδος ελέγχου είναι η μέθοδος backstepping, η οποία ονομάζεται έτσι διότι ο νόμος ελέγχου σχεδιάζεται αναδρομικά ξεκινώντας από την τελική προς την αρχική κατάσταση του συστήματος. Ο έλεγχος backstepping [7] βασίζεται στον διαχωρισμό του προβλήματος σε αρκετά βήματα, όπου σε κάθε βήμα σχεδιάζεται ένας εικονικός ελεγκτής για να σταθεροποιήσει το προηγούμενο σύστημα, ώστε στο τέλος όλα τα υποσυστήματα να είναι σταθερά.

Τα νευρωνικά δίκτυα [8, 9, 10] είναι μοντέλα μηχανικής μάθησης όπου η λειτουργία και η δομή τους είναι εμπνευσμένη από αυτή του ανθρώπινου εγκεφάλου. Αποτελούνται από επίπεδα διασυνδεδεμένων κόμβων (νευρώνες) που επεξεργάζονται ένα σύνολο δεδομένων εισόδων και εξάγουν ένα αποτέλεσμα ανάλογα με τα βάρη και τα κατώφλια ενεργοποίησης των επιμέρους κόμβων του. Οι νευρωνικοί ελεγκτές χρησιμοποιούν τα νευρωνικά δίκτυα για τη δράση ελέγχου τους. Είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι σε καταστάσεις όπου οι παραδοσιακές μέθοδοι ελέγχου δεν είναι εύκολο να χρησιμοποιηθούν λόγω της πολυπλοκότητας των συστημάτων. Τέτοιοι ελεγκτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για εφαρμογές όπως είναι ο μη γραμμικός έλεγχος ενός χημικού αντιδραστήρα CSTR (Continuous Stirred Tank Reactor) [11, 12]

Η μελέτη του συστήματος του περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς εξελίσσεται όλο και περισσότερο. Για πολλούς ερευνητές αποτελεί πηγή έμπνευσης και αφορμή για να δοκιμάζουν ποικίλες μεθοδολογίες αυτομάτου ελέγχου. Ένας από τους πρώτους ερευνητές που ασχολήθηκε με τον έλεγχο του ανάστροφου εκκρεμούς ήταν ο Katsuhisa Furuta το 1991 [13]. Από τότε έχουν αναπτυχθεί διάφορες μεθοδολογίες ελέγχου για την σταθεροποίηση και την ανύψωση του περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς οι οποίες είναι γραμμικές και μη. Παραδείγματα αυτών αποτελούν ο γραμμικός και μη γραμμικός προβλεπτικός έλεγχος (MPC) [14, 15, 16], ο έλεγχος με ασαφή λογική (fuzzy logic control) [17, 18], ο έλεγχος με τη χρήση ελεγκτών PID [19] και γραμμικών τετραγωνικών ελεγκτών (LQR) [17], ο μη γραμμικός έλεγχος ολίσθησης επί επιφάνειας (Sliding Mode Control – SMC) [20, 21], ο έλεγχος με τη χρήση νεωρωνικών δικτύων και με συναρτήσεις ακτινικής βάσης (RBF) [22, 23], ο έλεγχος με χρήση της μεθόδου H_∞ (H- infinite) [24]. Επιπλέον, τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιούνται και παραλλαγές του απλού περιστροφικού εκκρεμούς όπως είναι το διπλό περιστροφικό ανάστροφο εκκρεμές ή και με παραπάνω από δύο συνδέσμους (n- links) [25]. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η εργασία [26], όπου γίνεται έλεγχος του περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς με τη χρήση προωθητών κρύου αερίου τύπου on-off.

Με την παρούσα εργασία, στοχεύουμε επίσης να συνεισφέρουμε στις τρέχουσες ερευνητικές προσπάθειες για τον έλεγχο του περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς, διερευνώντας κάποιες από τις μεθόδους που προαναφέρθηκαν δια μέσω θεωρητικής ανάλυσης, προσομοιώσεων και πειραμάτων. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι οι ελεγκτές που σχεδιάστηκαν και υλοποιήθηκαν, εφαρμόστηκαν στην πραγματική διάταξη περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς της εταιρείας Quanser.

Η εργασία αποτελείται συνολικά από 5 κεφάλαια. Στο 1^ο κεφάλαιο περιγράφονται οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος και η μαθηματική διαδικασία που ακολουθήθηκε για τον υπολογισμό των σημείων ισορροπίας και στη συνέχεια τη γραμμικοποίηση του γύρω από το τοπικά ευσταθές σημείο ισορροπίας που επιλέχθηκε για τη σχεδίαση των ελεγκτών που υλοποιήθηκαν. Το 2^ο κεφάλαιο περιλαμβάνει τη θεωρία των παρατηρητών και τη διαδικασία που ακολουθήθηκε για το σχεδιασμό του παρατηρητή που υλοποιήθηκε. Το 3^ο κεφάλαιο αφορά τη σχεδίαση του γραμμικού τετραγωνικού ρυθμιστή. Στο 4^ο κεφάλαιο αναλύεται ο μη γραμμικός ελεγκτής που χρησιμοποιήθηκε για την ανύψωση του εκκρεμούς. Το 5^ο κεφάλαιο της εργασίας περιλαμβάνει τα πειραματικά αποτελέσματα των προσομοιώσεων και των πειραματικών αποτελεσμάτων. Ακολουθούν τα συμπεράσματα και η βιβλιογραφία.

2 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο : Δυναμική Μοντελοποίηση Περιστροφικού Ανάστροφου

Εκκρεμούς

Το κεφάλαιο περιέχει τη μαθηματική μοντελοποίηση του περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς. Συγκεκριμένα, γράφονται οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος και οι υπολογισμοί των σημείων ισορροπίας του με στόχο την γραμμικοποίηση του και τον έλεγχο του γύρω από ένα επιθυμητό σημείο ισορροπίας. Τέλος, περιγράφεται η διαδικασία μετατροπής του μοντέλου ροπής σε τάσης.

2.1 Εξισώσεις Κίνησης

Για να προσομοιωθεί και να κατανοηθεί η συμπεριφορά του περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς, θα πρέπει να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης (Equations of Motion - EoM) του, όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουν παραχθεί μέσω εφαρμογής της μεθόδου Lagrange [27, 28] και είναι οι παρακάτω:

Εξίσωση κίνησης του βραχίονα:

$$\left(m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha)^2 + J_r \right) \ddot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \right) \ddot{\alpha} + \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \right) \dot{\theta} \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha) \right) \dot{\alpha}^2 = \tau - B_r \dot{\theta} \quad (2.1)$$

Εξίσωση κίνησης του εκκρεμούς:

$$-\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \ddot{\theta} + \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \ddot{\alpha} - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m_p L_p g \sin(\alpha) = -B_p \dot{\alpha} \quad (2.2)$$

όπου θ , α , $\dot{\theta}$, $\dot{\alpha}$ οι καταστάσεις του συστήματος του εκκρεμούς. Στην παρακάτω λίστα εξηγούνται τα σύμβολα των παραπάνω εξισώσεων:

- m_p : μάζα της ράβδου του εκκρεμούς
- L_r : το μήκος του βραχίονα
- L_p : το μήκος της ράβδου του εκκρεμούς
- J_r : ο συντελεστής αδράνειας του βραχίονα
- J_p : ο συντελεστής αδράνειας του εκκρεμούς
- τ : η ροπή που επιβάλλεται στον βραχίονα
- B_r : Ο συντελεστής τριβής της ροπής που αντιτίθεται στην επιβαλλομένη ροπή του κινητήρα
- B_p : Ο συντελεστής τριβής που αντιστοιχεί στη δύναμη απόσβεσης που ασκείται στο εκκρεμές
- θ : η γωνία του βραχίονα
- α : η γωνία του εκκρεμούς
- $\dot{\theta}$, $\dot{\alpha}$: οι γωνιακές ταχύτητες του βραχίονα και του εκκρεμούς

Το σύστημά μας έχει 2 βαθμούς ελευθερίας (Degrees of Freedom - DoF) και οι εξισώσεις που προέκυψαν είναι 2 μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης. Από τις παραπάνω εξισώσεις παρατηρείται ότι υπάρχουν πολλοί μη γραμμικοί όροι, πράγμα που αναδεικνύει ότι το σύστημα είναι έντονα μη γραμμικό. Για την s-function που δημιουργήθηκε στο Matlab χρειάστηκε να φέρουμε τις εξισώσεις λειτουργίας στη μορφή εξισώσεων κατάστασης (4 διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης), όπου $n = 4$ οι μεταβλητές κατάστασης του συστήματός μας (4^{ης} τάξης σύστημα). Γενικά, η κινηματική εξίσωση ενός σώματος εκφράζεται από την παρακάτω σχέση:

$$J\ddot{x} + b\dot{x} + g(x) = \tau_1, \text{ όπου:}$$

- x : Γωνιακή θέση
- J : Στιγμιαία αδράνεια
- b : Συντελεστής απόσβεσης
- $g(x)$: Συνάρτηση βαρύτητας
- τ_1 : Εφαρμοζόμενη ροπή

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί σε μορφή πινάκων θεωρώντας το διάνυσμα των γενικευμένων συντεταγμένων q ως εξής:

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (2.3)$$

Η s-function απεικονίζει το πραγματικό μας σύστημα και γράφτηκε έχοντας ως βάση την σχέση (2.3) όπου:

- $q = [\theta \ \alpha]^T$: Πίνακας γενικευμένων συντεταγμένων
- D : Πίνακας με τις αδράνειες του συστήματος
- C : Πίνακας των αποσβέσεων
- $g(q)$: Βαρυτικό διάνυσμα
- τ : Διάνυσμα ροπής

2.2 Σημεία Ισορροπίας

Σκοπός μας είναι να βρούμε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε αν φέρουμε το σύστημα μας στη μορφή εξισώσεων κατάστασης. Αν η είσοδος μας είναι σταθερή και ίση με μηδέν, $u = u_0 = 0$, τότε τα σημεία ισορροπίας μπορούν να υπολογιστούν μέσω του μηδενισμού των εξισώσεων κατάστασης του συστήματος, δηλαδή $\dot{x} = 0$ [29].

Ορίζοντας τις μεταβλητές κατάστασης του συστήματος ως $x = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]^T$, οι εξισώσεις κατάστασης θα είναι: $\dot{x} = [\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \dot{x}_3 \ \dot{x}_4]^T$ ή $\dot{x} = [x_3 \ x_4 \ \ddot{\theta} \ \ddot{\alpha}]^T$.

Σε όλες τις πράξεις που ακολουθούν υπάρχουν χρονικές συναρτήσεις. Για λόγους ευκολίας αντί για $x_1(t) = \alpha(t)$, θα γράφεται απλώς $x_1 = \alpha$ και αντί για $\frac{d\alpha}{dt}$, $\dot{\alpha}$. Οι μεταβλητές κατάστασης του συστήματος είναι: $x = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]^T$. Από τις σχέσεις (2.1), (2.2), (2.3) έχουμε:

$$\begin{bmatrix} m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha)^2 + J_r & -\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \\ -\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) & J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_r + \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)\right) \dot{\alpha} & \frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha) \dot{\alpha} \\ -\frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta} & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} m_p L_p g \sin(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Για να βρούμε τις εξισώσεις κατάστασης θα πρέπει να λύσουμε την σχέση (2.4) ως προς $\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix}$. Οπότε είναι:

Αυτόματος έλεγχος περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha)^2 + J_r & -\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \\ -\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) & J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} B_r \dot{\theta} + \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\theta} + \frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2 \\ -\frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 + B_p \dot{\alpha} - \frac{1}{2} m_p L_p g \sin(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \\
 & \begin{bmatrix} m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha)^2 + J_r & -\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \\ -\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) & J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} \tau - B_r \dot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2 \\ \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 - B_p \dot{\alpha} + \frac{1}{2} m_p L_p g \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

Από θεωρία πινάκων είναι γνωστό ότι ο αντίστροφος ενός πίνακα 2x2 μπορεί να υπολογιστεί με την παρακάτω φόρμουλα:

$$A^{-1} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \frac{1}{\text{ορίζουσα}(A)} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} \text{ όπου } \text{ορίζουσα}(A) = \alpha\delta - \beta\gamma$$

Η ορίζουσα του πίνακα D υπολογίζεται ως:

$$\begin{aligned}
 \det(D) &= \left(m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha)^2 + J_r \right) \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) - \left(-\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \right)^2 \\
 \det(D) &= m_p L_r^2 J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 J_p - \frac{1}{4} m_p L_p^2 J_p \cos(\alpha)^2 + J_r J_p + \frac{1}{4} m_p^2 L_r^2 L_p^2 + \frac{1}{16} m_p^2 L_p^4 - \\
 & - \frac{1}{16} m_p^2 L_p^4 \cos(\alpha)^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 J_r - \frac{1}{4} m_p^2 L_r^2 L_p^2 \cos(\alpha)^2
 \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\det(D)} \begin{bmatrix} J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 & \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \\ \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) & m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha)^2 + J_r \end{bmatrix} \times \\
 & \times \begin{bmatrix} \tau - B_r \dot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2 \\ \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 - B_p \dot{\alpha} + \frac{1}{2} m_p L_p g \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Αν γράψουμε την σχέση (2.6) σε μορφή εξισώσεων προκύπτουν:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_3 &= \frac{1}{\det(D)} \left[\left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \left(\tau - B_r \dot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2 \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{\det(D)} \left[\left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \right) \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 - B_p \dot{\alpha} + \frac{1}{2} m_p L_p g \sin(\alpha) \right) \right] \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Αυτόματος έλεγχος περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = \frac{1}{\det(D)} & \left[\left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \right) \left(\tau - B_r \dot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2 \right) \right] \\ & + \frac{1}{\det(D)} \left[\left(m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha)^2 + J_r \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 - B_p \dot{\alpha} + \frac{1}{2} m_p L_p g \sin(\alpha) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Κάνοντας τις πράξεις προκύπτουν:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = \frac{1}{\det(D)} & \left(J_p \tau - B_r \dot{\theta} J_p - \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\theta} J_p - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2 J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \tau - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} m_p L_p^2 B_r \dot{\theta} + \frac{1}{8} m_p^2 L_p^4 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \frac{1}{8} m_p^2 L_p^3 L_r \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2 \right) + \\ & + \frac{1}{\det(D)} \left(\frac{1}{4} m_p^2 L_p^2 L_r \sin(\alpha) \cos(\alpha) - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) B_p \dot{\alpha} + \frac{1}{8} m_p^2 L_p^3 L_r \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = \frac{1}{\det(D)} & \left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \tau - \frac{1}{2} m_p L_p L_r B_r \cos(\alpha) \dot{\theta} + \frac{1}{4} m_p^2 L_p^3 L_r^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)^2 \dot{\alpha} \dot{\theta} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} m_p^2 L_p^2 L_r^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\alpha}^2 \right) + \frac{1}{\det(D)} \left(\frac{1}{2} m_p^2 L_r^2 L_p g \sin(\alpha) - m_p L_r^2 B_p \dot{\alpha} + \right. \\ & + \frac{1}{4} m_p^2 L_p^2 L_r^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{8} m_p^2 L_p^3 g \sin(\alpha) - \frac{1}{4} m_p L_p^2 B_p \dot{\alpha} + \frac{1}{16} m_p^2 L_p^4 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 - \\ & - \frac{1}{8} m_p^2 L_p^3 g \sin(\alpha) \cos(\alpha)^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha)^2 B_p \dot{\alpha} - \frac{1}{16} m_p^2 L_p^4 \cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 + \\ & \left. + \frac{1}{2} J_r m_p L_p g \sin(\alpha) - J_r B_p \dot{\alpha} + \frac{1}{4} J_r m_p L_p^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Η είσοδος του συστήματος είναι μηδενική και σταθερή ($\tau = 0$). Γνωρίζοντας τις μεταβλητές κατάστασης έχουμε $\dot{x} = [\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \dot{x}_3 \ \dot{x}_4]^T$ (2.11). Επειδή πρέπει $\dot{x} = 0$, προκύπτουν οι σχέσεις $\dot{x}_1 = 0 = x_3$ (2.12) και $\dot{x}_2 = 0 = x_4$ (2.13). Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.11) έχουμε:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{\frac{1}{4} m_p^2 L_p^2 L_r \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\det(D)} \\ \frac{\frac{1}{4} m_p^2 L_r^2 L_p g \sin(\alpha) + \frac{1}{8} m_p^2 L_p^3 g \sin(\alpha) - \frac{1}{8} m_p^2 L_p^3 g \sin(\alpha) \cos(\alpha)^2 + \frac{1}{2} J_r m_p L_p g \sin(\alpha)}{\det(D)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Για να είναι ίσα με τα μηδέν τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα θα πρέπει οι αριθμητές των κλασμάτων να είναι ίσοι με το μηδέν, δηλαδή:

$$\frac{1}{4} m_p^2 L_p^2 L_r \sin(\alpha) \cos(\alpha) = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{4} m_p^2 L_r^2 L_p g \sin(\alpha) + \frac{1}{8} m_p^2 L_p^3 g \sin(\alpha) - \frac{1}{8} m_p^2 L_p^3 g \sin(\alpha) \cos(\alpha)^2 + \frac{1}{2} J_r m_p L_p g \sin(\alpha) = 0 \quad (2.15)$$

Βλέποντας την σχέση (2.14) παρατηρούμε ότι για να ισούται με το μηδέν θα πρέπει τουλάχιστον ένας από τους τριγωνομετρικούς όρους να ισούται με το μηδέν. Συνεπώς, οι πιθανές λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι $\alpha = \kappa\pi$ ή $\alpha = \kappa\frac{\pi}{2}$ όπου $\kappa=1, 2, 3, \dots, \kappa \in \mathbb{Z}$.

Παρατηρώντας τους όρους της εξίσωσης (2.15), γίνεται αντιληπτό ότι για να ισούται το αριστερό μέρος της εξίσωσης με μηδέν, θα πρέπει όλοι οι όροι να είναι μηδενικοί. Έστω ότι $\alpha = \kappa\frac{\pi}{2}$, τότε οι τριγωνομετρικοί όροι της εξίσωσης (2.15) είναι $\sin(\alpha) = 1$ και $\cos(\alpha) = 0$. Οπότε θα είναι:

$$\dot{x}_4 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} m_p^2 L_r^2 L_p g + \frac{1}{8} m_p^2 L_p^3 g - 0 + \frac{1}{2} J_r m_p L_p g = 0, \text{ όμως αυτό είναι μαθηματικά άτοπο,}$$

καθώς όλοι οι όροι της εξίσωσης είναι θετικοί και μη μηδενικοί με σταθερές θετικές ποσότητες m_p ,

L_p, L_r, J_r, g . Αν όμως $\alpha = \kappa\pi$, τότε οι τριγωνομετρικοί όροι της εξίσωσης (2.15) είναι $\sin(\alpha) = 1$ και $\cos(\alpha) = 0$ και θα ισχύει: $\dot{x}_4 = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

Επομένως, ισχύει $\alpha = \kappa\pi$, όπου $\kappa=1, 2, 3, \dots, \kappa \in \mathbb{Z}$ και άρα τα σημεία ισορροπίας του συστήματος είναι: $x_{eq} = [x_1 \ \kappa\pi \ 0 \ 0]^T$ με $x_1 \in \mathbb{R}$. Επειδή σε καμία από τις παραπάνω σχέσεις δεν εμφανίζεται όρος που να περιέχει τη γωνία του περιστρεφόμενου βραχίονα θ , διαπιστώνεται ότι τα σημεία ισορροπίας του συστήματος είναι **άπειρα**. Αυτό σημαίνει ότι για να ισορροπεί το σύστημα μας, μπορούμε να διαλέξουμε όποια τιμή θέλουμε για τη γωνία θ και για εμάς είναι επιθυμητό το σύστημα μας να σταθεροποιηθεί στο σημείο: $x_{eq} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

2.3 Γραμμικοποίηση

Για να βρεθεί το γραμμικό μοντέλο του συστήματος, χρησιμοποιήθηκε ο παρακάτω μαθηματικός τύπος ο οποίος είναι η σειρά Taylor, κρατώντας μόνο τους πρώτους όρους [27, 29, 31]:

$$f_{\text{linear}} = f(x_{eq}) + \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right|_{x=x_{eq}} (x_1 - a) + \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right|_{x=x_{eq}} (x_2 - b) + \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} \right|_{x=x_{eq}} (x_3 - c) + \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_4} \right|_{x=x_{eq}} (x_4 - d) \quad (2.16)$$

Εμείς θέλουμε να γραμμικοποιήσουμε το σύστημα μας γύρω από το σημείο ισορροπίας $x_{eq} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ γιατί γύρω από αυτό το σημείο θέλουμε να ελέγξουμε το σύστημα. Οι εξισώσεις που θέλουμε να γραμμικοποιήσουμε είναι οι (2.1), (2.2). Μεταφέροντας όλους τους παραγοντικούς όρους στο αριστερό μέλος έχουμε:

$$\left(m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha)^2 + J_r \right) \ddot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \right) \ddot{\alpha} + \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \right) \dot{\theta} \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha) \right) \dot{\alpha}^2 + B_r \dot{\theta} = \tau \quad (2.17)$$

$$- \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \ddot{\theta} + \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \ddot{\alpha} - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m_p L_p g \sin(\alpha) + B_p \dot{\alpha} = 0 \quad (2.18)$$

Οι μεταβλητές κατάστασης του συστήματος μας είναι: $x = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]^T$.

Πρέπει να υπολογιστούν η συνάρτηση $f(x_{eq})$ και οι μερικές παράγωγοι της σχέσης (2.16) για την σχέση (2.17) ως προς το μη σταθερό σημείο ισορροπίας του συστήματος μας. Οπότε θα είναι:

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right|_{x=x_{eq}} = 0, \text{ αφού δεν υπάρχει η μεταβλητή } \theta \text{ στη σχέση (2.17).}$$

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right|_{x=x_{eq}} = 0 + 0 + \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \ddot{\theta} + 0 + \frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha) \ddot{\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{2} m_p L_p^2 (\sin(\alpha) \cos(\alpha))' \dot{\theta} \dot{\alpha} + \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \dot{\alpha}^2 + 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right|_{x=x_{eq}} = \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \dot{\alpha}^2$$

[Είναι γνωστό από τα μαθηματικά ότι: $(\sin(a) \cos(a))' = \cos(a)^2 - \sin(a)^2 = \cos(2a)$]

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right|_{x=x_{eq}} = 0$$

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} \right|_{x=x_{eq}} = \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\alpha} + B_r = B_r$$

Αυτόματος έλεγχος περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς

$$\left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_4} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_{eq}} = \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\theta} + m_p L_p L_r \sin(\alpha) = 0$$

$$f(\mathbf{x}_{eq}) = \left(m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 + J_r \right) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \ddot{\alpha} + 0 + 0 + 0$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (2.16) η σχέση (2.17) γίνεται:

$$\left(m_p L_r^2 + J_r \right) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \ddot{\alpha} + B_r \dot{\theta} = \tau \quad (2.19)$$

Με αντίστοιχο τρόπο γραμμικοποιούμε και την σχέση (2.18).

$$\left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_{eq}} = 0, \text{ αφού δεν υπάρχει η μεταβλητή } \theta \text{ στη σχέση (2.18)}$$

$$\left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_{eq}} = \frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha) \ddot{\theta} + 0 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(2\alpha) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m_p L_p g \cos(\alpha) + 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_{eq}} = -\frac{1}{2} m_p L_p g$$

$$\left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_3} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_{eq}} = 0 + 0 + \frac{1}{2} m_p L_p^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) - 0 + 0 = 0$$

$$\left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_4} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_{eq}} = B_p$$

$$f(\mathbf{x}_{eq}) = -\frac{1}{2} m_p L_p L_r \ddot{\theta} + \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \ddot{\alpha} - 0 - 0 + 0$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (2.16) η γραμμικοποιημένη συνάρτηση για την σχέση (2.18) είναι:

$$-\frac{1}{2} m_p L_p L_r \ddot{\theta} + \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \ddot{\alpha} - \frac{1}{2} m_p L_p g \alpha + B_p \dot{\alpha} \quad (2.20)$$

Οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\left(m_p L_r^2 + J_r \right) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \ddot{\alpha} + B_r \dot{\theta} = \tau$$

$$-\frac{1}{2} m_p L_p L_r \ddot{\theta} + \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \ddot{\alpha} - \frac{1}{2} m_p L_p g \alpha + B_p \dot{\alpha} = 0$$

Όπως και με το μη γραμμικό μοντέλο, θέλουμε να φέρουμε τις 2 παραπάνω εξισώσεις στη μορφή εξισώσεων κατάστασης, για να βρούμε τους πίνακες A, B της εξίσωσης $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$. Με βάση την σχέση (2.3) θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} m_p L_r^2 + J_r & -\frac{1}{2} m_p L_p L_r \\ -\frac{1}{2} m_p L_p L_r & J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_r & 0 \\ 0 & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} m_p L_p g \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

Φέρνουμε τους όρους των επιταχύνσεων στο αριστερό μέρος.

$$\begin{bmatrix} m_p L_r^2 + J_r & -\frac{1}{2} m_p L_p L_r \\ -\frac{1}{2} m_p L_p L_r & J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau - B_r \dot{\theta} \\ -B_p \dot{\alpha} + \frac{1}{2} m_p L_p g \alpha \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε τον αντίστοιχο πίνακα D^{-1} με τη γνωστή μαθηματική φόρμουλα. Θα είναι:

$$D^{-1} = \frac{1}{\det(D)} \begin{bmatrix} J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 & + \frac{1}{2} m_p L_p L_r \\ + \frac{1}{2} m_p L_p L_r & m_p L_r^2 + J_r \end{bmatrix}$$

$$\mu\epsilon \det(D) = (m_p L_r^2 + J_r) \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) - \left(-\frac{1}{2} m_p L_p L_r \right)^2$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\det(D)} \begin{bmatrix} J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 & \frac{1}{2} m_p L_p L_r \\ \frac{1}{2} m_p L_p L_r & m_p L_r^2 + J_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau - B_r \dot{\theta} \\ -B_p \dot{\alpha} + \frac{1}{2} m_p L_p g \alpha \end{bmatrix} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\det(D)} \begin{bmatrix} \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) (\tau - B_r \dot{\theta}) + \left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r \right) \left(-B_p \dot{\alpha} + \frac{1}{2} m_p L_p g \alpha \right) \\ \left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r \right) (\tau - B_r \dot{\theta}) + (m_p L_r^2 + J_r) \left(-B_p \dot{\alpha} + \frac{1}{2} m_p L_p g \alpha \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Λύνοντας την παραπάνω σχέση σε μορφή εξισώσεων θα είναι:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{\det(D)} \left(J_p \tau - B_r \dot{\theta} J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \tau - \frac{1}{4} m_p L_p^2 B_r \dot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r B_p \dot{\alpha} + \frac{1}{4} m_p^2 L_p^2 L_r g \alpha \right)$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{\det(D)} \left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r \tau - \frac{1}{2} m_p L_p L_r B_r \dot{\theta} - m_p L_r^2 B_p \dot{\alpha} + \frac{1}{2} m_p^2 L_r^2 L_p g \alpha - J_r B_p \dot{\alpha} + \frac{1}{2} m_p L_p g \alpha J_r \right)$$

Γενικά, το γραμμικό μοντέλο ενός συστήματος στο χώρο κατάστασης αναπαρίσταται ως:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

όπου:

- A: Πίνακας κατάστασης με διαστάσεις $n \times n$ (n καταστάσεις)
- B: Πίνακας εισόδου με διαστάσεις $n \times p$ (p εισόδοι)
- C: Πίνακας μέτρησης με διαστάσεις $q \times n$ (q εξόδοι)
- D: Πίνακας απευθείας μεταφοράς $q \times p$

Για το σύστημα του περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς οι πίνακες A,B,C,D διαμορφώνονται ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{31} \\ b_{41} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u = \tau$$

$$\alpha_{32} = \frac{\frac{1}{4} m_p^2 L_p^2 L_r g}{\det(D)}, \alpha_{33} = \frac{-B_r J_p - \frac{1}{4} m_p L_p^2 B_r}{\det(D)}, \alpha_{34} = \frac{-\frac{1}{2} m_p L_p L_r B_p}{\det(D)}, \alpha_{42} = \frac{\frac{1}{2} m_p^2 L_r^2 L_p g + \frac{1}{2} m_p L_p g J_r}{\det(D)},$$

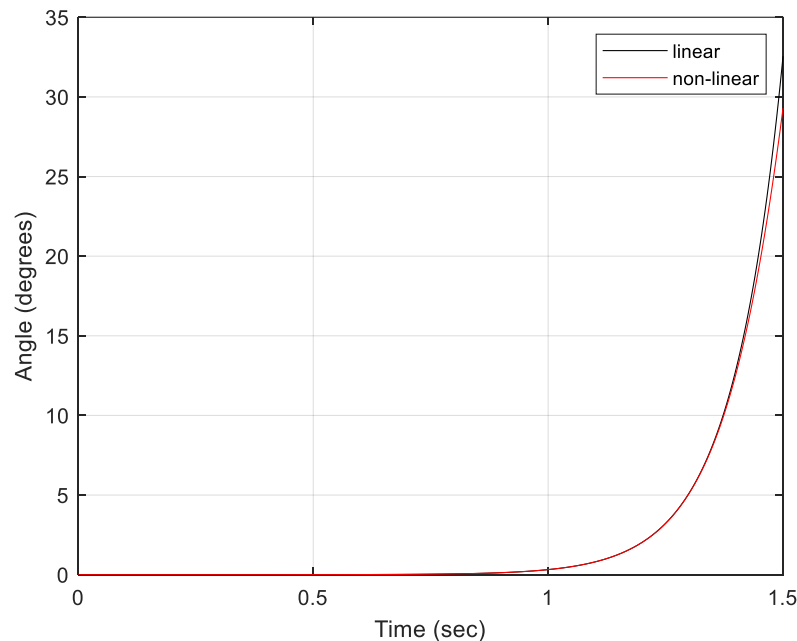
$$\alpha_{43} = \frac{-\frac{1}{2} m_p L_p L_r B_r}{\det(D)}, \alpha_{44} = \frac{-(m_p L_r^2 B_p + J_r B_p)}{\det(D)}, b_{31} = \frac{J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2}{\det(D)}, b_{41} = \frac{\frac{1}{2} m_p L_p L_r}{\det(D)}$$

2.4 Σύντομη περιγραφή της διαδικασίας των προσομοιώσεων

Όλες οι προσομοιώσεις και τα πειράματα της εργασίας αυτής πραγματοποιήθηκαν με το Simulink το οποίο είναι ένα περιβάλλον γραφικού προγραμματισμού του Matlab. Με βάση τα αποτελέσματα των υπολογισμών από το Matlab και γνωρίζοντας τα δομικά διαγράμματα των συστημάτων, σχεδιάστηκαν στο Simulink τα αντίστοιχα συστήματα κλειστού βρόχου. Το Simulink και το Matlab χρησιμοποιούν αριθμητικές μεθόδους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων (ODE solvers) και έτσι επιλέχθηκε ο solver ODE 3. Το μη γραμμικό και το γραμμικό μοντέλο του περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς προγραμματίστηκε με τη χρήση της s-function (level 1) και ενσωματώθηκαν στο Simulink μέσω του block s-function. Για τα πειράματα χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιοι κώδικες που δημιουργήθηκαν στο Matlab για το κομμάτι των προσομοιώσεων.

2.5 Σύγκριση μη γραμμικού και γραμμικού μοντέλου

Για να δούμε σε ποια περιοχή γωνιών θα δουλεύουν οι ελεγκτές, έγινε προσομοίωση του γραμμικού και του μη γραμμικού μοντέλου του συστήματος για την εύρεση της ζώνης όπου τα δύο μοντέλα παρουσιάζουν παρόμοιες αποκρίσεις. Η ζώνη αυτή είναι η περιοχή όπου η αρχική γωνία του εκκρεμούς κυμαίνεται από 0 έως περίπου 15 μοίρες, όπου $\alpha = 20^\circ$ είναι το σημείο όπου τα 2 μοντέλα πλέον δεν συμπίπτουν. Για τον λόγο αυτό, η λειτουργία των γραμμικών ελεγκτών που σχεδιάστηκαν πραγματοποιήθηκε για αρχική γωνία του εκκρεμούς ίση με $\alpha = 20^\circ$. Η σύγκριση των μοντέλων φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Σχήμα 1: Η απόκριση της γωνίας α για το γραμμικό και το μη γραμμικό μοντέλο του περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς με μηδενική είσοδο και μηδενικές αρχικές συνθήκες

2.6 Μετατροπή του μοντέλου ροπής σε μοντέλο τάσης

Μέχρι στιγμής, για όλα όσα έχουν ειπωθεί, ο τρόπος που έχουμε σχεδιάσει το μοντέλο του ανάστροφου εκκρεμούς παίρνει ως είσοδο την ροπή του συστήματος, με το παραγόμενο σήμα του ελεγκτή να είναι ροπή. Όμως, σε ένα πραγματικό σύστημα θα ήταν πιο λογικό το σήμα ελέγχου να είναι σε τάση. Για τον λόγο αυτό θα πρέπει να εισαχθούν στο γραμμικό μας μοντέλο οι όροι που μετατρέπουν τη ροπή σε τάση. Υπενθυμίζοντας ότι η ροπή από [27] εκφράζεται από τη σχέση:

$$\tau = \frac{\eta_g K_g \eta_m k_t (V_m - K_g k_m \theta)}{R_m},$$

τότε αν αντικαταστήσουμε όπου τ στις εξισώσεις κίνησης την παραπάνω σχέση, τελικά θα παρατηρήσουμε ότι αλλάζουν μόνο οι όροι a_{33} , a_{34} , b_{31} , b_{41} των πινάκων A , B που περιγράφουν την δυναμική του γραμμικού συστήματος. Δηλαδή θα είναι:

$$\alpha_{33} = \frac{\left(B_r - \frac{h_g h_m k_t k_m K_g^2}{R_m} \right) J_p - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \left(B_r + \frac{h_g h_m k_t k_m K_g^2}{R_m} \right)}{\det(D)},$$

$$\alpha_{43} = \frac{-\frac{1}{2} m_p L_p L_r \left(B_r + \frac{h_g h_m k_t k_m K_g^2}{R_m} \right)}{\det(D)}, \quad b_{31} = \frac{\left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \left(\frac{h_g h_m k_t K_g}{R_m} \right)}{\det(D)}, \quad b_{41} = \frac{\frac{1}{2} m_p L_p L_r \frac{h_g h_m k_t K_g}{R_m}}{\det(D)}$$

όπου: h_g , h_m , k_t , k_m , K_g , R_m είναι οι σταθερές της περιστροφικής μονάδας σερβομηχανισμού SRV02 της Quanser στην οποία τοποθετείται το εκκρεμές.

Το γραμμικοποιημένο σύστημα μας προκύπτει μέσω υπολογισμών ότι θα είναι:

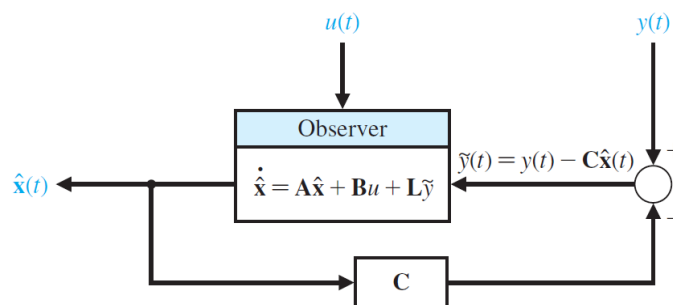
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 58.0285 & -20.5286 & -0.6634 \\ 0 & 99.4949 & -19.7446 & -1.1375 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 36.9025 \\ 35.4933 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u = V(2.21)$$

Το σήμα που θα παράγει πλέον ο ελεγκτής ανάδρασης θα είναι σε τάση. Ωστόσο, το μοντέλο μας είναι σχεδιασμένο να δέχεται σαν είσοδο τη ροπή του συστήματος. Οπότε, μεταβαίνοντας στο Simulink για να προσομοιώσουμε το σύστημα θα πρέπει να μετατρέψουμε την τάση του ελεγκτή σε ροπή με τη σχέση ροπής-τάσης που είναι γνωστή.

Για τη σχεδίαση του παρατηρητή που ακολουθεί σε επόμενο κεφάλαιο, χρησιμοποιείται το μοντέλο τάσης του πραγματικού συστήματος, έχοντας ως διαθέσιμες μέτρησεις τις καταστάσεις του βραχίονα και του εκκρεμούς και το σύστημα μας θα είναι αυτό της σχέσης (2.21).

3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο : Θεωρία Παρατηρητών

Οι παρατηρητές (state observers) μπορούν να εκτιμούν τις μεταβλητές κατάστασης ενός συστήματος αν υπάρχουν διαθέσιμες μετρήσεις εξόδων και εισόδων. Η χρήση τους καθίσταται αναγκαία στο χώρο του αυτομάτου ελέγχου, αφού συχνά δεν είναι εύκολη η τοποθέτηση αισθητήρων ή είναι μέχρι και αδύνατη η μέτρηση όλων των μεταβλητών κατάστασης. Βέβαια η χρήση διαφοριστών είναι μια επιλογή η οποία μπορεί να μας υπολογίσει τις καταστάσεις που θέλουμε να βρούμε αλλά ενισχύουν τον θόρυβο του συστήματος και για αυτό το λόγο προτιμούνται οι εκτιμητές κατάστασης. Οι παρατηρητές περιέχουν πάντα στη δομή τους ένα «αντίγραφο» του αρχικού συστήματος. Το δομικό διάγραμμα ενός παρατηρητή απεικονίζεται στο σχήμα 2. Από το σχήμα 2 βλέπουμε ότι ο παρατηρητής έχει σαν εισόδους το σήμα ελέγχου $u(t)$ και τις αποκρίσεις των καταστάσεων $y(t)$ του φυσικού συστήματος, οι οποίες δύναται να μετρηθούν, και σαν έξοδο έχει τις εκτιμήσεις των καταστάσεων $\hat{x}(t)$ του συστήματος.



Σχήμα 2: Το δομικό διάγραμμα ενός παρατηρητή [38]

Στόχος της σχεδίασης ενός παρατηρητή είναι να εκτιμά όσο καλύτερα γίνεται την πραγματική κατάσταση του συστήματος, δηλαδή θα πρέπει η προς εκτίμηση κατάσταση να συμπίπτει με την πραγματική. Ωστόσο, πάντα θα υπάρχει ένα μικρό σφάλμα εκτίμησης e :

$$e = x - \hat{x}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu \Rightarrow \dot{e} = Ae$$

Από την παραπάνω σχέση, παρατηρούμε ότι το σφάλμα κατάστασης θα συγκλίνει εκθετικά στο μηδέν αν οι ιδιοτιμές του A είναι στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Όμως, το πρόβλημα που υπάρχει με την επιλογή αυτού του παρατηρητή είναι ότι το σφάλμα κατάστασης δεν συγκλίνει αρκετά γρήγορα στο μηδέν με αποτέλεσμα η εκτίμηση να μην είναι η καλύτερη. Έτσι λοιπόν οι σχέσεις που εκφράζουν τη βέλτιστη δυναμική συμπεριφορά των παρατηρητών είναι οι παρακάτω:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) - LDu \quad (3.1)$$

$$\hat{y} = C\hat{x} + Du \quad (3.2)$$

όπου $D = 0$, \hat{x} οι εκτιμώμενες μεταβλητές κατάστασης και L οι ενισχύσεις του παρατηρητή. Η διαφορική εξίσωση του σφάλματος εκτίμησης είναι:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= x - \hat{x} = Ax + Bu - (A\hat{x} + Bu + Ly - LC\hat{x}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{e} &= Ax - A\hat{x} - Ly + LC\hat{x} \Rightarrow Ae - LCe \Rightarrow \dot{e} = (A - LC)e \end{aligned} \quad (3.3)$$

Από την σχέση (3.3) βλέπουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα $A - LC$ είναι αυτές που καθορίζουν την ταχύτητα με την οποία το σφάλμα συγκλίνει στο μηδέν και πρέπει να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Επίσης, φαίνεται ότι το πρόβλημα της σχεδίασης του παρατηρητή είναι όμοιο με αυτό της γραμμικής ανάδρασης κατάστασης. Σύμφωνα με την **αρχή του διαχωρισμού** (separation principle) [38] η διαδικασία υπολογισμού των κερδών L για τον παρατηρητή γίνεται ανεξάρτητα από την διαδικασία υπολογισμών των κερδών K του ελεγκτή γραμμικής ανάδρασης. Οι επιθυμητές ιδιοτιμές του παρατηρητή πρέπει να είναι τουλάχιστον 2 με 6 φορές μεγαλύτερες από τις ιδιοτιμές του συστήματος κλειστού βρόγχου και τον αντίστοιχο ελεγκτή που έχει σχεδιαστεί.

3.1 Σχεδίαση Παρατηρητή

Όπως χρειάζεται να εξετάσουμε την ελεγκσιμότητα του συστήματος για τη σχεδίαση του LQR, κατά παρόμοιο τρόπο πρέπει να εξεταστεί το σύστημά μας ως προς την παρατηρησιμότητά του έτσι ώστε να ξέρουμε αν μπορεί να σχεδιαστεί παρατηρητής. Αυτό γίνεται με τον τρόπο που περιγράφεται στο υποκεφάλαιο 3.1.1.

3.1.1 Έλεγχος παρατηρησιμότητας

Θεώρημα: Για να είναι ένα γραμμικό χρονικά ανεξάρτητο (Γ.Χ.Α.) σύστημα με ζεύγος (A, C) παρατηρήσιμο θα πρέπει ο βαθμός του πίνακα παρατηρησιμότητας W να ισούται με το αριθμό των καταστάσεων του. Για το συγκεκριμένο σύστημα πρέπει $n=4$. Δηλαδή:

$$\text{rank}(W) = n = 4 \text{ με } W = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{31} \\ b_{41} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{με } a_{32} = \frac{\frac{1}{4}m_p^2 L_p^2 L_r g}{\det(D)}, a_{33} = \frac{-B_r J_p - \frac{1}{4}m_p L_p^2 B_r}{\det(D)}, a_{34} = \frac{-\frac{1}{2}m_p L_p L_r B_p}{\det(D)}, a_{42} = \frac{\frac{1}{2}m_p^2 L_r^2 L_p g + \frac{1}{2}m_p L_p g J_r}{\det(D)},$$

$$a_{43} = \frac{-\frac{1}{2}m_p L_p L_r B_r}{\det(D)}, a_{44} = \frac{-(m_p L_r^2 B_p + J_r B_p)}{\det(D)}, b_{31} = \frac{J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2}{\det(D)}, b_{41} = \frac{\frac{1}{2}m_p L_p L_r}{\det(D)}$$

Κάνοντας τους υπολογισμούς προκύπτει ότι:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 58.0285 & -0.6897 & -0.6634 \\ 0 & 99.4949 & -0.6634 & -1.1375 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 287.3947 \\ 276.4197 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, θα ελέγξουμε την παρατηρησιμότητα του συστήματός μας για τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Θεωρώντας ως έξοδο μόνο τη γωνία του βραχίονα α , $C_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$
2. Θεωρώντας ως έξοδο μόνο τη γωνία του εκκρεμούς θ , $C_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$
3. Θεωρώντας και τις 2 εξόδους, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1^η Περίπτωση:

Πρέπει $\text{rank}(W) = 4$. Υπολογίζουμε τα στοιχεία του πίνακα παρατηρησιμότητας W_1 .

Αυτόματος έλεγχος περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς

$$W_{21} = C_1 \cdot A = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = [c\alpha_{11} \quad c\alpha_{12} \quad c\alpha_{13} \quad c\alpha_{14}] \quad (3.1.1)$$

$$c\alpha_{11} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0, c\alpha_{12} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot a_{32} + 0 \cdot a_{42} = 0$$

$$c\alpha_{13} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot a_{33} + 0 \cdot a_{43} = 1, c\alpha_{14} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot a_{34} + 0 \cdot a_{44} = 0$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στη σχέση (3.1.1) βρίσκουμε το πρώτο στοιχείο του W.

$$W_{21} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \quad (3.1.2)$$

Κατά την ίδια διαδικασία υπολογίζουμε και τα υπόλοιπα στοιχεία.

$$W_{31} = C_1 \cdot A^2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (3.1.3)$$

Για να βρεθούν τα στοιχεία W_{31} και W_{41} πρέπει να υπολογιστούν οι πίνακες A^2, A^3 . Είναι:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$A_{11}^2 = 0, A_{12}^2 = a_{32}, A_{13}^2 = a_{33}, A_{14}^2 = a_{34}$$

$$A_{21}^2 = 0, A_{22}^2 = a_{42}, A_{23}^2 = a_{43}, A_{24}^2 = a_{44}$$

$$A_{31}^2 = 0, A_{32}^2 = a_{33}a_{32}, A_{33}^2 = a_{33}^2 + a_{34}a_{43}, A_{34}^2 = a_{32} + a_{33}a_{34} + a_{34}a_{44}$$

$$A_{41}^2 = 0, A_{42}^2 = a_{43}a_{32} + a_{44}a_{42}, A_{43}^2 = a_{43}a_{33} + a_{44}a_{43}, A_{44}^2 = a_{42} + a_{43}a_{34} + a_{44}^2$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 58.0285 & -0.6897 & -0.6634 \\ 0 & 99.4949 & -0.6634 & -1.1375 \\ 0 & -106.0306 & 0.9159 & 59.2407 \\ 0 & -151.6688 & 1.2122 & 101.2288 \end{bmatrix} \quad (3.1.4)$$

Με αντίστοιχο τρόπο, γνωρίζοντας πλέον τον πίνακα A^2 , υπολογίζεται και ο πίνακας A^3 .

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 58.0285 & -0.6897 & -0.6634 \\ 0 & 99.4949 & -0.6634 & -1.1375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 58.0285 & -0.6897 & -0.6634 \\ 0 & 99.4949 & -0.6634 & -1.1375 \\ 0 & -106.0306 & 0.9159 & 59.2407 \\ 0 & -151.6688 & 1.2122 & 101.2288 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -106.0306 & 0.9159 & 59.2407 \\ 0 & -151.6688 & 1.2122 & 101.2288 \\ 0 & 5497.3 & -39.9324 & -1740227 \\ 0 & 10142 & -67.992 & -267.6175 \end{bmatrix} \quad (3.1.5)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.1.4) στην σχέση (3.1.5) προκύπτει:

$$W_{31} = [0 \quad 58.0285 \quad -0.6897 \quad -0.6634] \quad (3.1.6)$$

Το τελευταίο στοιχείο του πίνακα παρατηρησιμότητας W υπολογίζεται ως εξής:

$$W_{41} = C_1 \cdot A^3 \quad (3.1.7)$$

Από τις σχέσεις (3.1.5) και (3.1.7) προκύπτει:

$$W_{41} = [0 \quad -106.0306 \quad 0.9159 \quad 59.2407] \quad (3.1.8)$$

Άρα ο πίνακας παρατηρησιμότητας για την περίπτωση που η έξοδος του συστήματος είναι μόνο η γωνία του βραχίονα θ είναι ο παρακάτω:

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 58.0285 & -0.6897 & -0.6634 \\ 0 & -106.0306 & 0.9159 & 59.2407 \end{bmatrix}$$

Υπενθυμίζεται ότι ο βαθμός ενός πίνακα $n \times n$ διαστάσεων ισούται με n αν έχει μη μηδενική ορίζουσα, $\det(W_1) \neq 0$.

Η ορίζουσα του πίνακα W_1 υπολογίζεται ως:

$$\det(W_1) = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 58.0285 & -0.6897 & -0.6634 \\ -106.0306 & 0.9159 & 59.2407 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 58.0285 & -0.6897 & -0.6634 \\ -106.0306 & 0.9159 & 59.2407 \end{vmatrix} = d$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του παραπάνω 3x3 υπο-πίνακα:

$$\det(d) = 1 \begin{vmatrix} 58.0285 & -0.6634 \\ -106.0306 & 59.2407 \end{vmatrix} = [(58.0285)(59.2407) - (-106.0306)(-0.6634)] =$$

$$3437.65 - 70.34 = -3367.31 \neq 0$$

Αφού $\det(W_1) \neq 0 \rightarrow \text{rank}(W_1) = n = 4$. Άρα το σύστημα είναι παρατηρήσιμο, δηλαδή είναι εφικτή η εκτίμηση των μεταβλητών κατάστασης.

2^η Περίπτωση:

Υπολογίζουμε τα στοιχεία του πίνακα παρατηρησιμότητας W_2 .

$$W_{21} = C_2 \cdot A = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \Rightarrow W_{21} = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (3.1.9)$$

Οι πίνακες A^2 και A^3 είναι οι ίδιοι που υπολογίστηκαν προηγουμένως. Οπότε:

$$W_{31} = C_2 \cdot A^2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 58.0285 & -0.6897 & -0.6634 \\ 0 & 99.4949 & -0.6634 & -1.1375 \\ 0 & -106.0306 & 0.9159 & 59.2407 \\ 0 & -151.6688 & 1.2122 & 101.2288 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{21} = [0 \ 99.4949 \ -0.6634 \ -1.1375] \quad (3.1.10)$$

$$W_{41} = C_2 \cdot A^3 = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & -106.0306 & 0.9159 & 59.2407 \\ 0 & -151.6688 & 1.2122 & 101.2288 \\ 0 & 5497.3 & -39.9324 & -1740227 \\ 0 & 10142 & -67.992 & -267.6175 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{41} = [0 \ -151.6688 \ 1.2122 \ 101.2288] \quad (3.1.11)$$

Άρα από τις σχέσεις (3.1.9), (3.1.10), (3.1.11) ο πίνακας παρατηρησιμότητας W_2 είναι:

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 99.4949 & -0.6634 & -1.1375 \\ 0 & -151.6688 & 1.2122 & 101.2288 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη στήλη του W_2 αποτελείται από μηδενικά, οπότε είναι αδύνατο να είναι βαθμού $n = 4$. Συνεπώς το σύστημα δεν είναι παρατηρήσιμο όταν η μετρούμενη έξοδος είναι μόνο η γωνία του εκκρεμούς α , αφού $\text{rank}(W_2) < n$. Αξίζει να σημειωθεί ότι η 1^η στήλη του πίνακα παρατηρησιμότητας είναι λογικό να εμφανίζεται μηδενική, καθώς καμία από τις διαφορικές εξισώσεις του μοντελοποιημένου συστήματος δεν περιέχει τον όρο θ (γωνία του βραχίονα). Αυτό σημαίνει ότι αν δεν έχουμε κάποιον αισθητήρα να μετρά τη γωνία του βραχίονα, τότε είναι αδύνατο να εκτιμήσουμε τη γωνία του βραχίονα μετρώντας μόνο τη γωνία του εκκρεμούς.

3^η Περίπτωση:

Όπως και για τις προηγούμενες περιπτώσεις υπολογίζουμε τον πίνακα W_3 για $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$W_{21} = C_3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 58.0285 & -0.6897 & -0.6634 \\ 0 & 99.4949 & -0.6634 & -1.1375 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$W_{21} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.12)$$

$$W_{31} = C_3 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 58.0285 & -0.6897 & -0.6634 \\ 0 & 99.4949 & -0.6634 & -1.1375 \\ 0 & -106.0306 & 0.9159 & 59.2407 \\ 0 & -151.6688 & 1.2122 & 101.2288 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 58.0285 & -0.6897 & -0.6634 \\ 0 & 99.4949 & -0.6634 & -1.1375 \end{bmatrix} \quad (3.1.13)$$

$$W_{41} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -106.0306 & 0.9159 & 59.2407 \\ 0 & -151.6688 & 1.2122 & 101.2288 \\ 0 & 5497.3 & -39.9324 & -1740227 \\ 0 & 10142 & -67.992 & -267.6175 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{41} = \begin{bmatrix} 0 & -106.0306 & 0.9159 & 59.2407 \\ 0 & -151.6688 & 1.2122 & 101.2288 \end{bmatrix} \quad (3.1.14)$$

Από τις σχέσεις (3.1.12), (3.1.13), (3.1.14) προκύπτει ο πίνακας παρατηρησιμότητας:

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 58.0285 & -0.6897 & -0.6634 \\ 0 & 99.4949 & -0.6634 & -1.1375 \\ 0 & -106.0306 & 0.9159 & 59.2407 \\ 0 & -151.6688 & 1.2122 & 101.2288 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας W_3 έχει διαστάσεις 8×4 , οπότε ο βαθμός του δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από $n = 4$. Αν φέρουμε τον παραπάνω πίνακα στην κλιμακωτή μορφή του, θα δούμε ότι θα έχει 4 γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές και άρα το σύστημα είναι παρατηρήσιμο. Αυτό επιβεβαιώνεται και με την εντολή `rank` του Matlab.

3.2 Υπολογισμός των κερδών του παρατηρητή μέσω της κλασσικής μεθόδου τοποθέτησης ιδιοτιμών και με Bass - Gura

Έχουμε το γραμμικό μας σύστημα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 58.0285 & -0.6897 & -0.6634 \\ 0 & 99.4949 & -0.6634 & -1.1375 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 287.3947 \\ 276.4197 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Στο προηγούμενο ύπο-υποκεφάλαιο υπολογίστηκε ο πίνακας παρατηρησιμότητας W_3 για το ζεύγος (A, C) και μάλιστα είδαμε ότι $\text{rank}(W_3) = n = 4$. Οπότε γνωρίζοντας ότι το διάνυσμα κατάστασης είναι πλήρως παρατηρήσιμο μπορούμε μέσω τοποθέτησης πόλων (pole placement) να υπολογίσουμε τις ενισχύσεις του παρατηρητή. Διαμορφώνοντας τη σχέση (3.1) έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{\dot{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) - LDu \Rightarrow \hat{\dot{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \Rightarrow \\ &\Rightarrow \hat{\dot{x}} = (A - LC)\hat{x} + \begin{bmatrix} B & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Από τη σχέση (3.2.1), η οποία είναι εκφρασμένη με τρόπο τέτοιο όπου η είσοδος και η έξοδος είναι σαν μια εννιαία είσοδος στο σύστημα, παίρνουμε μια ιδέα για τις διαστάσεις όλων των πινάκων συμπεριλαμβανόμενου και του πίνακα των κερδών L ο οποίος φαίνεται ότι θα είναι διαστάσεων 4×2 [32]. Επίσης η σχέση (3.2.1) είναι εύκολα υλοποιήσιμη και σε λογισμικό όπως το Simulink με χρήση των state-space block που περιέχει στις βιβλιοθήκες του.

Τα κέρδη του παρατηρητή θα υπολογιστούν για τις παρακάτω επιθυμητές ιδιοτιμές:

$$\begin{aligned} A - LC &= 3 \times (A - KC) = 3[-230.4534 \quad -9.0288 \quad -3.3891 \quad -1.0278] \Rightarrow \\ &\Rightarrow A - LC = [-691.3602 \quad -27.0865 \quad -10.1674 \quad -3.0835] \end{aligned}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του παρατηρητή θα είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} p_d(s) &= s^n + p_1s^{n-1} + \dots + p_{n-1}s + p_n \Rightarrow \\ &\Rightarrow p_d(s) = s^4 + p_1s^3 + p_2s^2 + p_3s + p_4 \end{aligned}$$

όπου p_1, p_2, p_3, p_4 οι συντελεστές του επιθυμητού Χ.Π που πρέπει να βρεθούν.

Η επιθυμητή χαρακτηριστική εξίσωση για τον παρατηρητή υπολογίζεται παρακάτω:

$$\begin{aligned}
 p_d(s) &= (s + 691.3602)(s + 27.0865)(s + 10.1674)(s + 3.0835) = \\
 &= (s^2 + 27.0865s + 691.3602s + 18727.528)(s + 10.1674)(s + 3.0835) = \\
 &= (s^3 + 27.0865s^2 + 691.3602s^2 + 18727.528s + 10.1674s^2 + 275.4s + 7029.3357s \\
 &\quad + 190410.2682)(s + 3.0835) \\
 &= (s^3 + 728.6141s^2 + 26032.2637s + 190410.2682)(s + 3.0835) = \\
 &= s^4 + 728.6141s^3 + 26032.2637s^2 + 190410.2682s + 3.0835s^3 + 2246.6816s^2 \\
 &\quad + 80270.4851s + 587130.062 \Rightarrow \\
 \Rightarrow p_d(s) &= s^4 + 731.6176s^3 + 28728.9453s^2 + 270680.7533s + 587130.062 = 0 \quad (3.2.2)
 \end{aligned}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του παρατηρητή είναι:

$$\begin{aligned}
 |sI - A + LC| &= 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 58.0285 & -0.6897 & -0.6634 \\ 0 & 99.4949 & -0.6634 & -1.1375 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \\ L_{31} & L_{32} \\ L_{41} & L_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{bmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ 0 & -58.0285 & s + 0.6897 & 0.6634 \\ 0 & -99.4949 & 0.6634 & s + 1.1375 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{11} & L_{11} & 0 & 0 \\ L_{11} & L_{11} & 0 & 0 \\ L_{11} & L_{11} & 0 & 0 \\ L_{11} & L_{11} & 0 & 0 \end{bmatrix} &= 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{bmatrix} s + L_{11} & L_{21} & -1 & 0 \\ L_{21} & s + L_{22} & 0 & -1 \\ L_{31} & L_{32} - 58.0285 & s + 0.6897 & 0.6634 \\ L_{41} & L_{42} - 99.4949 & 0.6634 & s + 1.1375 \end{bmatrix} &= 0
 \end{aligned}$$

Παρατηρώντας την παραπάνω σχέση μπορεί να γίνει αντιληπτό ότι ο υπολογισμός των κερδών με τον τρόπο αυτό είναι εξαιρετικά δύσκολος και περίπλοκος, πόσο μάλλον για ένα σύστημα με περισσότερες μεταβλητές κατάστασης. Για τον λόγο αυτό, αποφεύγεται η επίλυση με το χέρι και χρησιμοποιούμε άλλες μεθόδους για τον υπολογισμό των κερδών, όπως είναι η φόρμουλα του Ackerman [31], αλλά συνιστάται η χρήση κάποιου λογισμικού. Για το συγκεκριμένο σύστημα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ίδια μέθοδος που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των κερδών του παρατηρητή για το σύστημα της 1^{ης} περίπτωσης. Για την περίπτωση όπου το σύστημά μας είναι αυτό της 1^{ης} περίπτωσης, μπορούμε να υπολογίσουμε τα κέρδη του παρατηρητή όπως στο [33], ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα.

Βήμα 1: Αν το ζεύγος (A,C) είναι παρατηρήσιμο, τότε ξεκινάμε υπολογίζοντας το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του, από το οποίο χρειαζόμαστε τους συντελεστές του. Το Χ.Π. είναι της μορφής $p(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$ και υπολογίζεται ως: $|sI - A|$.

Βήμα 2: Υπολογίζουμε το επιθυμητό Χ.Π. του συστήματος, δηλαδή για το σύστημα της σχέσης (3.1), για να βρούμε τους συντελεστές του p_n . Αν το σύστημα είναι ελέγξιμο, που για την περίπτωση μας έχουμε δει μέσω Matlab ότι είναι, τότε μπορούμε αυθαίρετα να επιλέξουμε τους πόλους του, οπότε μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το Χ.Π. Για ένα σύστημα $n=4$ θα είναι:

$$p_d(s) = (s - p1)(s - p2)(s - p3)(s - p4).$$

Βήμα 3: Βρίσκουμε τον πίνακα παρατηρησιμότητας για την παρατηρήσιμη κανονική μορφή:

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Βήμα 4: Τα κέρδη L του παρατηρητή θα είναι:

$$L = W^{-1} \tilde{W} \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ p_3 - a_3 \\ p_4 - a_4 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα μας είναι το παρακάτω:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 58.0285 & -0.6897 & -0.6634 \\ 0 & 99.4949 & -0.6634 & -1.1375 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 287.3947 \\ 276.4197 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

με πίνακα παρατηρήσιμότητας $W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 58.0285 & -0.6897 & -0.6634 \\ 0 & -106.0306 & 0.9159 & 59.2407 \end{bmatrix}$

Ακολουθούμε τα βήματα. Το Χ.Π του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \begin{vmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 58.0285 & -0.6897 & -0.6634 \\ 0 & 99.4949 & -0.6634 & -1.1375 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ 0 & -58.0285 & s + 0.6897 & 0.6634 \\ 0 & -99.4949 & 0.6634 & s + 1.1375 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του παραπάνω πίνακα:

$$\begin{aligned} s \begin{vmatrix} s & 0 & -1 \\ -58.0285 & s + 0.6897 & 0.6634 \\ -99.4949 & 0.6634 & s + 1.1375 \end{vmatrix} &= s \begin{vmatrix} s + 0.6897 & 0.6634 \\ 0.6634 & s + 1.1375 \end{vmatrix} - \\ - \begin{vmatrix} -58.0285 & s + 0.6897 \\ -99.4949 & 0.6634 \end{vmatrix} &= s[(s + 0.6897)(s + 1.1375) - 0.6634^2] - (-58.0285 \cdot \\ & 0.6634) - (-99.4949)(s + 0.6897) \end{aligned}$$

Προκύπτει το Χ.Π. :

$$p(s) = s^4 + 1.8272s^3 - 99.1505s^2 - 30.1255s + 0 \quad (3.2.3)$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα ανοιχτού βρόχου είναι ασταθές, αφού ένας τουλάχιστον από τους όρους του πολυωνύμου είναι αρνητικός. Οι συντελεστές είναι $a_1 = 1.8272$, $a_2 = -99.1505$, $a_3 = -30.1255$, $a_4 = 0$. Το Χ.Π. του συστήματος του παρατηρητή είναι αυτό της σχέσης (3.2.2). Οπότε από τις σχέσεις (3.2.2) και (3.2.3) προκύπτει:

Αυτόματος έλεγχος περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς

$$\begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ p_3 - a_3 \\ p_4 - a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 729.08704 \\ 28378.0958 \\ 270710.8788 \\ 587130.062 \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

Ο πίνακας παρατηρησιμότητας \tilde{W} υπολογίζεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.8272 & 1 & 0 & 0 \\ -99.1505 & 1.8272 & 1 & 0 \\ -30.1255 & -99.1505 & 1.8272 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1.8272 & 1 & 0 & 0 \\ 102.4892 & -1.8272 & 1 & 0 \\ -338.3105 & 102.4892 & -1.8272 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.5) \end{aligned}$$

Ο αντίστροφος πίνακας του πίνακα παρατηρησιμότητας W είναι:

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.012 & 0.0176 & 0.0002 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0059 & 0.0315 & 0.0172 \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

Από τις (3.2.4), (3.2.5), (3.2.6) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} L &= W^{-1} \tilde{W} \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ p_3 - a_3 \\ p_4 - a_4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.012 & 0.0176 & 0.0002 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0059 & 0.0315 & 0.0172 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1.8272 & 1 & 0 & 0 \\ 102.4892 & -1.8272 & 1 & 0 \\ -338.3105 & 102.4892 & -1.8272 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 729.08704 \\ 28378.0958 \\ 270710.8788 \\ 587130.062 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Κάνοντας τις πράξεις πινάκων έχουμε:

$$L = \begin{bmatrix} 730 \\ 6032 \\ 27044 \\ 56867 \end{bmatrix} \quad (3.2.7)$$

Για τον υπολογισμό των αντίστροφων πινάκων πρέπει να υπολογιστούν οι ορίζουσες τους και τα αλγεβρικά τους συμπληρώματα. Για τον πίνακα W η ορίζουσα έχει υπολογιστεί ήδη και γνωρίζουμε ότι είναι αντιστρέψιμος. Η ορίζουσα του \tilde{W}^{-1} υπολογίζεται εύκολα γιατί η κύρια διαγώνιος αποτελείται από μοναδιαία στοιχεία και είναι κάτω τριγωνικός, οπότε η ορίζουσα είναι ίση με $\det(\tilde{W}^{-1}) = 1 \neq 0$. Παραμένει ο υπολογισμός αλγεβρικών συμπληρωμάτων.

Γενικά ο αντίστροφος μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$\Pi^{-1} = \frac{\text{adj}(W)}{\det(W)}$$

Οι ενισχύσεις της σχέσης (3.2.7) μπορεί να μην είναι οι βέλτιστες. Η σχεδίαση του παρατηρητή με την τοποθέτηση ιδιοτιμών μας εγγυάται την ευστάθεια του συστήματος αλλά όχι την απόκριση του. Η απόκριση του εξαρτάται από την επιλογή των πόλων, δηλαδή από την κρίση του μηχανικού.

3.3 Σχεδίαση παρατηρητή πλήρους τάξης με δύο διαθέσιμες μετρήσεις

Ο παρατηρητής πλήρους τάξης χρησιμοποιείται για την εκτίμηση όλων των καταστάσεων ενός συστήματος, χωρίς να έχει σημασία ποιες από τις καταστάσεις του είναι διαθέσιμες για μέτρηση. Έχοντας το σύστημα της σχέσης (2.21), χρησιμοποιούμε τη μεθοδολογία υπολογισμού των κερδών που περιγράφηκε σε προηγούμενο υποκεφάλαιο. Τα κέρδη του παρατηρητή που προσομοιώθηκε υπολογίστηκαν για τις παρακάτω ιδιοτιμές:

$$A - LC = 3 \times (A - KC) =$$

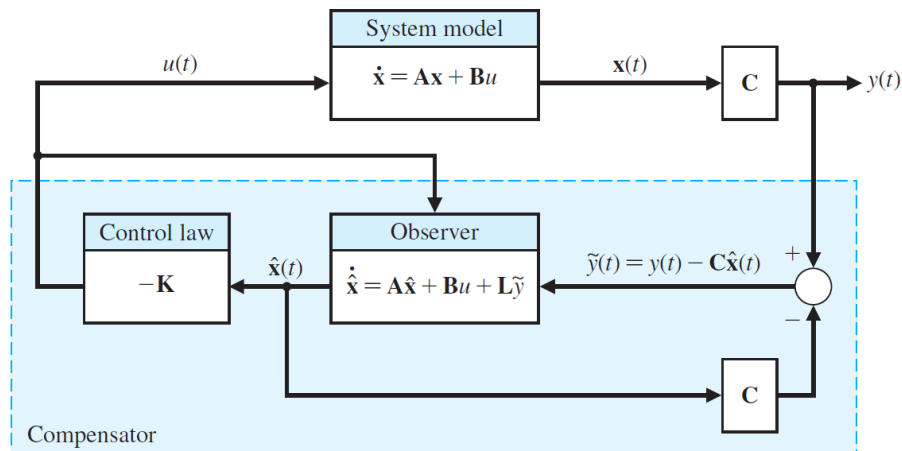
$$= 3[-46.3139 \quad -4.4757 + 2.1245i \quad -4.4757 + 2.1245i \quad -2.0054] \Rightarrow$$

όπου K είναι ο πίνακας των κερδών του ελεγκτή ανάδρασης κατάστασης που σχεδιάστηκε και παρουσιάζεται σε επόμενο κεφάλαιο.

Χρησιμοποιώντας το Matlab, προέκυψαν τα παρακάτω κέρδη:

$$L = \begin{bmatrix} 216.24 & 234.2989 \\ 276.7419 & 907.502 \\ 190.1534 & -6696.9 \\ 17261 & 64132 \end{bmatrix} \quad (3.3.1)$$

Το σύστημα του LQR-observer είναι αυτό που απεικονίζεται στο σχήμα 3.



Σχήμα 3: Το διάγραμμα του συστήματος LQR-observer [38]

4 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο : Έλεγχος Ανάδρασης Κατάστασης

Το κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει τη διαδικασία της σχεδίασης του ελεγκτή LQR-observer. Αρχικά, γίνεται η εισαγωγή στο θεωρητικό υπόβαθρο της ανάδρασης κατάστασης, αναφέρονται η σχέση ελεγκσιμότητας-παρατηρησιμότητας και η αρχή του διαχωρισμού. Στη συνέχεια αναλύονται οι τρόποι υπολογισμού των κερδών του ελεγκτή LQR και του παρατηρητή πλήρους τάξης, για τον οποίο χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Bass Gura. Τέλος, υπολογίζονται με το μοντέλο τάσης, τα κέρδη του παρατηρητή που συνδέεται με τον LQR.

4.1 Θεωρία Ελεγκτών Ανάδρασης Κατάστασης

Ο γραμμικός ελεγκτής ανάδρασης κατάστασης επιτυγχάνει τον έλεγχο του συστήματος μέσω της τοποθέτησης των ιδιοτιμών του κλειστού βρόχου σε συγκεκριμένες θέσεις, έτσι ώστε να επιτυγχάνονται οι επιθυμητές προδιαγραφές για τη δυναμική απόκριση. Η πιο κοινή διαδικασία υπολογισμού των κερδών της γραμμικής ανάδρασης κατάστασης ονομάζεται τοποθέτηση πόλων (pole-placement). Απαραίτητες προϋποθέσεις για την σχεδίαση του ελεγκτή είναι:

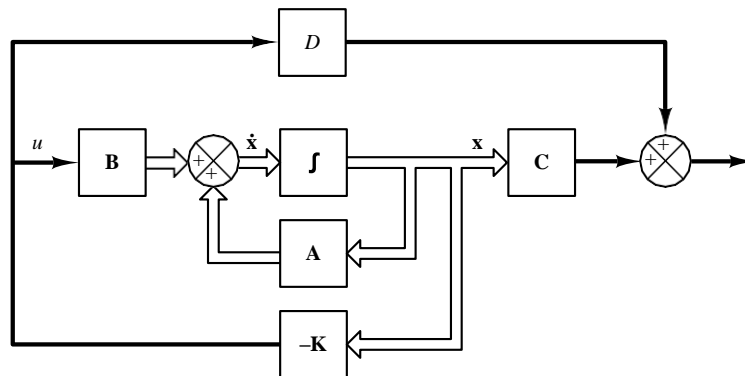
- Να είναι όλες οι καταστάσεις του συστήματος μετρήσιμες.
- Το σύστημα να είναι ελέγξιμο.

Ένα σύστημα είναι ελέγξιμο όταν ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα: Για να είναι ένα Γ.Χ.Α. σύστημα με ζεύγος (A, B) ελέγξιμο θα πρέπει ο βαθμός του πίνακα ελεγκσιμότητας M να ισούται με το αριθμό των καταστάσεων του n . Δηλαδή:

$$\text{rank}(M) = n \text{ με } M = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

Ας υποθέσουμε ότι το ελεγχόμενο σύστημά μας είναι αυτό που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4: Το σύστημα κλειστού βρόχου για γραμμικό έλεγχο ανάδρασης κατάστασης [31]

Επειδή το σύστημα αυτό έχει σταθερό σήμα αναφοράς $r(t)$, το οποίο στην περίπτωση αυτή είναι και μηδενικό, ονομάζεται **ρυθμιστής** (regulator system) [31, 38]. Ο στόχος ελέγχου του συστήματος αυτού είναι να οδηγηθούν όλες οι καταστάσεις του στο μηδέν. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να τροποποιηθούν οι ιδιοτιμές του συστήματος. Το σήμα ελέγχου του δίνεται από τη σχέση:

$$u = -Kx \quad (4.1.1)$$

Υπενθυμίζεται ότι ένα Γ.Χ.Α. σύστημα στο χώρο κατάστασης εκφράζεται από:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.1.1) στη σχέση (4.1.2) προκύπτει:

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (4.1.3)$$

Παρατηρώντας τη σχέση (4.1.3) βλέπουμε ότι οι ιδιοτιμές του συστήματος μπορούν να μετακινηθούν μέσω της κατάλληλης επιλογής των κερδών K του ελεγκτή. Σε περίπτωση που το σύστημα έχει και σήμα αναφοράς $r(t)$ τότε στις σχέσεις (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) προστίθεται και ο όρος $k_r r(t)$, όπου k_r είναι μια παράμετρος του ελεγκτή. Στην περίπτωση αυτή, στόχος ελέγχου είναι η έξοδος του συστήματος να οδηγείται στην είσοδο αναφοράς και να παραμένει εκεί (reference tracking). Τέτοιο σύστημα δεν χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία.

Ο υπολογισμός των κερδών του γραμμικού ελεγκτή ανάδρασης κατάστασης με τη μέθοδο τοποθέτησης ιδιοτιμών μπορεί να είναι περίπλοκος αλλά και μη αξιόπιστος. Θα πρέπει ο σχεδιαστής να έχει την εμπειρία να επιλέγει κατάλληλα τις ιδιοτιμές για την επιθυμητή μεταβολή της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος. Ωστόσο, με τη μέθοδο που αναφέρεται στο επόμενο υποκεφάλαιο, είναι πιθανό να υπολογιστούν με πιο συστηματικό τρόπο τα βέλτιστα κέρδη K μέσω της ελαχιστοποίησης ενός δείκτη επίδοσης ο οποίος συσχετίζει την έξοδο του συστήματος με το μέγεθος της εισόδου ελέγχου που απαιτείται για να επιτευχθεί το συγκεκριμένο επίπεδο απόδοσης.

4.2 Σχεδίαση Γραμμικού Τετραγωνικού Ρυθμιστή LQR

Ο LQR είναι ένας ελεγκτής ανάδρασης κατάστασης ο οποίος, αν έχουμε γραμμικοποιήσει το σύστημα που θέλουμε να ελέγξουμε, παρέχει τις κατάλληλες σταθερές ενισχύσεις έτσι ώστε να καθιστά το σημείο ισορροπίας, γύρω από το οποίο έχουμε γραμμικοποιήσει το σύστημα μας, τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές. Το δομικό διάγραμμα του LQR είναι αυτό του σχήματος 4. Ο πίνακας των ενισχύσεων K της σχέσης $u = -Kx$ μπορεί να βρεθεί ελαχιστοποιώντας μια τετραγωνική συνάρτηση κόστους [28, 30] η οποία είναι η ακόλουθη:

$$J = \int_0^{\infty} x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) dt \quad (4.2.1)$$

όπου Q , R είναι πίνακες με βάρη που ποινικοποιούν τις καταστάσεις και την ενέργεια ελέγχου του συστήματος, αντίστοιχα. Πρέπει να είναι συμμετρικοί θετικά ορισμένοι πίνακες, δηλαδή $Q > 0$, $R > 0$. Πιο συγκεκριμένα, ο βέλτιστος πίνακας των ενισχύσεων K που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους δίνεται από την σχέση $K = R^{-1} B^T P$ (4.2.2), όπου P είναι η λύση της εξίσωσης $A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P = 0$ (4.2.3). Η (4.2.3) ονομάζεται αλγεβρική εξίσωση Riccati (Algebraic Riccati Equation-ARE) και είναι η εξίσωση που πρέπει να επιλυθεί για τον υπολογισμό των βέλτιστων κερδών του ελεγκτή.

Για το δικό μας σύστημα, η γραμμικοποίηση του συστήματος έγινε γύρω από το σημείο ισορροπίας $x_{eq} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Για τη σχεδίαση του LQR ελεγκτή και τη λύση της εξίσωσης ARE χρησιμοποιήθηκε το Matlab. Με διάφορες δοκιμές παρατηρήθηκε ότι όσο πιο μεγάλα βάρη βάζαμε στον πίνακα Q τόσο πιο γρήγορα οι καταστάσεις του συστήματος συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας και όσο πιο μεγάλη τιμή βάζαμε για την τιμή R τόσο «λιγότερη προσπάθεια» έκανε ο σερβοκινητήρας για να φέρει το σύστημα σε ισορροπία. Ωστόσο, για την επιλογή των βαρών Q και R έπρεπε να υπάρχει κάποια ισορροπία για να έχουμε επιθυμητές αποκρίσεις. Επίσης, το βάρος R που αντιστοιχεί στο σήμα ελέγχου που έχουμε, το οποίο είναι η τάση του σερβοκινητήρα που κινεί τον βραχίονα του συστήματος, επιλέχθηκε έτσι ώστε η τάση που επιβάλλεται σε αυτόν να μην ξεπερνά τα $\pm 6V$ που είναι τα άνω και κάτω όρια τάσης τα οποία δέχεται ο συγκεκριμένος σερβοκινητήρας της πραγματικής διάταξης [34].

5 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο : Swing-up Controller

Ο ελεγκτής ανύψωσης (swing-up controller) είναι ένας μη γραμμικός ελεγκτής, όπου ο νόμος ελέγχου του βασίζεται στην ενέργεια του εκκρεμούς, όταν ταλαντώνεται από την αρχική θέση ισορροπίας του $\alpha = 180^\circ$, προς την κατακόρυφη προς τα πάνω θέση ισορροπίας $\alpha = 0^\circ$. Ο έλεγχος ανύψωσης βασίζεται στη στρατηγική που περιγράφεται στην δημοσίευση [35]. Μόλις το εκκρεμές φτάσει κοντά στο κατακόρυφα προς τα πάνω σημείο ισορροπίας, μπορούν να εφαρμοστούν οι μέθοδοι ελέγχου που έχουν αναλυθεί στα προηγούμενα κεφάλαια. Από το φυλλάδιο της Quanser [27], μας δίνονται όλοι οι απαραίτητοι τύποι για την ανάλυση του ελεγκτή που ακολουθεί.

5.1 Ανάλυση Ελεγκτή

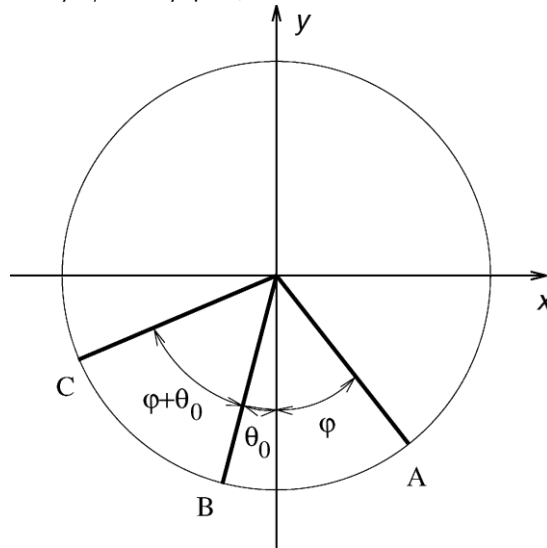
Η επιτάχυνση του άξονα περιστροφής του εκκρεμούς και η μηχανική του ενέργεια έχουν τον μεγαλύτερο ρόλο για την ανύψωση του εκκρεμούς. Η δυναμική του εκκρεμούς μπορεί να γραφτεί ως προς την επιτάχυνση του άξονα περιστροφής του u :

$$J_p \ddot{\alpha} + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin(\alpha) = \frac{1}{2} m_p L_p u \cos(\alpha) \quad (5.1)$$

Η συνολική ενέργεια του εκκρεμούς υπολογίζεται ως το άθροισμα της κινητικής του ενέργειας E_k και της δυναμικής του ενέργειας E_p :

$$E = E_k + E_p \Rightarrow E = \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p (1 - \cos(\alpha)) \quad (5.2)$$

Πρωτού περιγραφούν οι νόμοι ελέγχου, καλό θα ήταν να καταλάβουμε πως ακριβώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ενέργεια του εκκρεμούς για την ανύψωση του. Η ιδέα της στρατηγικής ανύψωσης μπορεί να γίνει αντιληπτή αν αναλογιστούμε ποια θα είναι η ενέργεια του εκκρεμούς για κάθε ένα από τα σημεία της τροχιάς του στο σχήμα 5. Ας υποθέσουμε ότι το εκκρεμές θα αρχίσει να εκτελεί ταλαντώσεις από το σημείο A. Πριν ακόμα αφεθεί ελεύθερο το εκκρεμές, παρατηρώντας και τη σχέση (5.2) βλέπουμε ότι η μηχανική του ενέργεια θα είναι ίση με τη δυναμική του ενέργεια E_p . Αφήνοντας το εκκρεμές, αυτό αρχίζει και κινείται προς το σημείο B, μετατρέποντας μεγάλο μέρος της ενέργειάς του από δυναμική σε κινητική. Σε σύγκριση με όλα τα σημεία, στο σημείο αυτό το εκκρεμές έχει την λιγότερη δυναμική ενέργεια E_p και την μεγαλύτερη κινητική ενέργεια E_k . Το εκκρεμές καταλήγει στο σημείο C, στο οποίο υποθέτουμε ότι το σημείο αυτό είναι το πιο υψηλό σημείο που μπορεί να φτάσει στην τροχιά του. Συνεπώς, η κινητική του ενέργεια θα έχει μετατραπεί στη μέγιστη δυναμική του ενέργεια. Είναι γνωστό ότι όταν η κινητική ενέργεια ενός σώματος είναι μηδέν, η ταχύτητα του θα είναι μηδέν και άρα και η επιτάχυνση του. Κάθε φορά που η επιτάχυνση είναι ίση με το μηδέν, η συνολική ενέργεια του εκκρεμούς ισούται με την μέγιστη δυναμική του ενέργεια $E = E_{p_{\max}}$. Είναι επιθυμητό το εκκρεμές να σταθεροποιηθεί στο κατακόρυφα προς τα πάνω σημείο ισορροπίας, όπου θα έχει μηδενική επιτάχυνση $u = 0$. Με όλα όσα έχουν ειπωθεί, αντιλαμβανόμαστε πως η ενέργεια του συστήματος του εκκρεμούς επηρεάζεται από την επιτάχυνσή του.



Σχήμα 5: Γεωμετρική απεικόνιση της στρατηγικής της ανύψωσης του εκκρεμούς [35]

Παραγωγίζοντας την σχέση (5.2) ως προς τον χρόνο και χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.1) για να εισάγουμε στην παρακάτω σχέση τον όρο της επιτάχυνσης του άξονα του εκκρεμούς u , τελικά έχουμε:

$$\dot{E} = \frac{1}{2} m_p L_p u \dot{\alpha} \cos(\alpha) \quad (5.3)$$

Από τη σχέση (5.3) παρατηρούμε ότι $u = 0$ εάν $\alpha = 0^\circ$ ή $\alpha = \pm 90^\circ$, δηλαδή όταν το εκκρεμές φτάνει στη κατακόρυφη προς τα πάνω επιθυμητή θέση ισορροπίας ή όταν βρίσκεται σε οριζόντια θέση. Σύμφωνα με την [27], μπορούμε να λάβουμε τον νόμο ελέγχου:

$$u = k(E - E_r) \dot{\alpha} \cos(\alpha) \quad (5.4)$$

όπου E_r είναι η επιθυμητή τιμή της ενέργειας και k είναι μια ρυθμιζόμενη μεταβλητή ελέγχου η οποία καθορίζει την συμπεριφορά του ελεγκτή. Το εκκρεμές για να αντλήσει ενέργεια εκτελεί ταλαντώσεις, μετατρέποντας την ενέργειά του. Ένας τρόπος για να ταλαντωθεί το εκκρεμές στο κατακόρυφο προς τα πάνω σημείο ισορροπίας είναι να του δώσουμε την ενέργεια που αντιστοιχεί στη θέση αυτή. Έτσι, είναι λογικό να ορίσουμε σαν επιθυμητή ενέργεια E_r την δυναμική ενέργεια που αντιστοιχεί στην προς τα πάνω θέση ισορροπίας $E_r = E_{pmax}$.

Για να γίνει η μετατροπή της κινητικής ενέργειας σε δυναμική ενέργεια όσο πιο γρήγορα γίνεται, θα πρέπει το μέτρο του σήματος ελέγχου να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο. Αυτό επιτυγχάνεται από το νόμο ελέγχου:

$$u = ng \operatorname{sign}((E - E_r) \dot{\alpha} \cos(\alpha)) \quad (5.5)$$

Ωστόσο, ο νόμος ελέγχου που περιγράφεται από τη σχέση (4.5) μπορεί να οδηγήσει σε chattering. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να συμβεί λόγω απότομων ταλαντώσεων του εκκρεμούς γύρω από το επιθυμητό σημείο ισορροπίας. Αυτό δεν είναι επιθυμητό καθώς το σύστημα οδηγείται σε αστάθεια και υπάρχει ο κίνδυνος φθοράς των μηχανικών εξαρτημάτων του συστήματος. Για τον λόγο αυτό είναι προτιμότερη η υλοποίηση του ελεγκτή ανύψωσης με τον παρακάτω νόμο ελέγχου:

$$u = \operatorname{sat}_{U_{max}}(\mu(E - E_r) \operatorname{sign}(\dot{\alpha} \cos(\alpha))) \quad (5.6)$$

Αυτόματος έλεγχος περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς

ώπου $\text{sat}_{U_{\max}}$ μια γραμμική συνάρτηση που οριοθετεί το σήμα ελέγχου στη μέγιστη επιτάχυνση του εκκρεμούς U_{\max} . Από την [35] δίνεται ότι:

$$n = \frac{U_{\max}}{g} \Rightarrow U_{\max} = ng \quad (5.7)$$

ώπου n είναι ένας λόγος ο οποίος καθορίζει τον αριθμό των ταλαντώσεων που χρειάζεται να πραγματοποιήσει το εκκρεμές, έτσι ώστε να φτάσει στο κατακόρυφο σημείο ισορροπίας. Ο αριθμός των ταλαντώσεων που πραγματοποιεί το εκκρεμές πριν φτάσει στην όρθια θέση χρησιμοποιείται ως πρωτεύων ταξινομητής και ο αριθμός των εναλλαγών του σήματος ελέγχου ως δευτερεύων ταξινομητής.

6 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο : Πειραματικά Αποτελέσματα

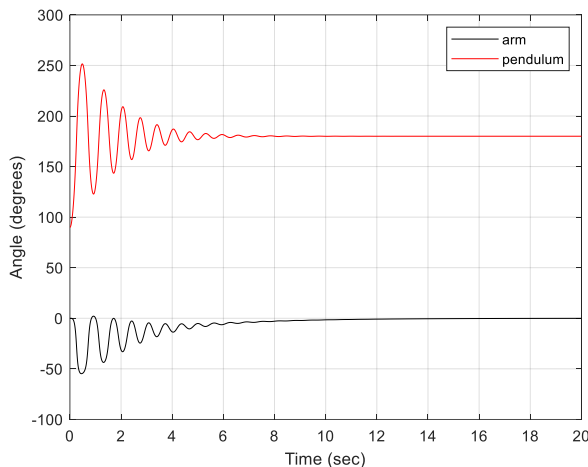
Το υποκεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει τις προσομοιώσεις που υλοποιήθηκαν μέσω Matlab/Simulink και τα αποτελέσματα των πειραμάτων που υλοποιήθηκαν στην πράξη.

6.1 Πειράματα για τη σταθεροποίηση του εκκρεμούς μέσω προσομοίωσης

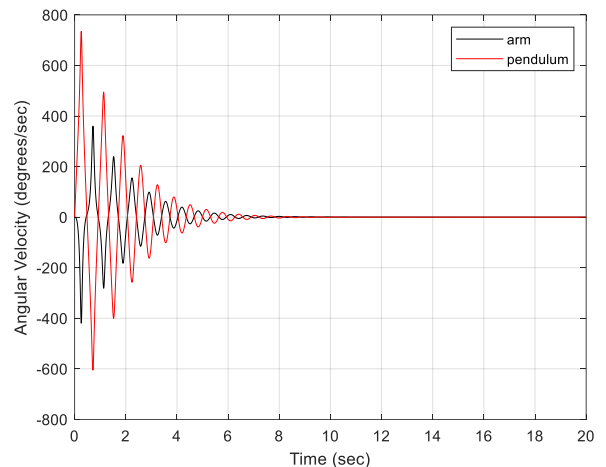
6.1.1 Προσομοίωση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος

Με μηδενική είσοδο του συστήματος και μηδενικές αρχικές συνθήκες όλων των καταστάσεων, εκτός της γωνίας του εκκρεμούς, έχουμε τις ακόλουθες αποκρίσεις:

Για $\alpha=90^\circ$:

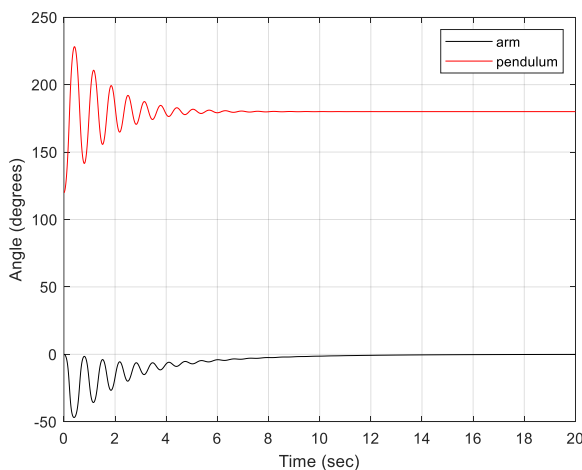


Σχήμα 6: Οι γωνιακές θέσεις του εκκρεμούς και του βραχίονα για αρχική γωνία $\alpha=90^\circ$

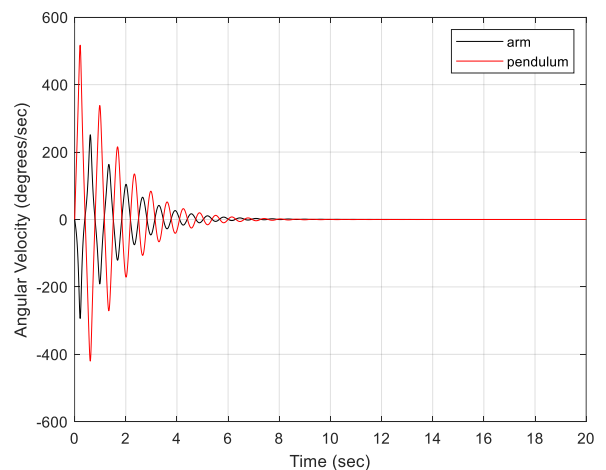


Σχήμα 7: Οι γωνιακές ταχύτητες του εκκρεμούς και του βραχίονα για $\alpha=90^\circ$

Για $\alpha=120^\circ$:



Σχήμα 8: Οι γωνιακές θέσεις του εκκρεμούς και του βραχίονα για αρχική γωνία $\alpha=120^\circ$



Σχήμα 9: Οι γωνιακές ταχύτητες του εκκρεμούς και του βραχίονα για $\alpha=120^\circ$

Σε όλα τα σχήματα βλέπουμε ότι έχουμε ταλαντώσεις και ότι για $t = 10s$ το σύστημα προσεγγίζει το σημείο ισορροπίας ($x_{equilibrium} = [0 \ 180 \ 0 \ 0]^T$). Για τα σημεία ισορροπίας του συστήματος γίνεται ανάλυση σε επόμενη ενότητα.

Κοιτώντας το σχήμα 6 και γνωρίζοντας ότι $\alpha = 0^\circ$ είναι η γωνία για την οποία η ράβδος βρίσκεται στην κατακόρυφη προς τα πάνω θέση, $\alpha = 180^\circ$ είναι η γωνία για την οποία η ράβδος βρίσκεται στην κατακόρυφη προς τα κάτω θέση καταλαβαίνουμε ότι μόλις αφηθεί, θα κινηθεί αριστερόστροφα (από τους δείκτες του ρολογιού) περνώντας από τη θέση $\alpha = 180^\circ$. Η υψηλότερη θέση που φτάνει

Αυτόματος έλεγχος περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς

είναι περίπου $\alpha = 250^\circ$ και μετά κινείται δεξιόστροφα-αριστερόστροφα εκτελώντας ταλαντώσεις, μέχρι να μηδενιστεί η ενέργεια του συστήματος και να φτάσει στη θέση $\alpha=180^\circ$. Κατά τη διάρκεια που το εκκρεμές ταλαντώνεται, κινείται και ο περιστροφικός βραχίονας και μάλιστα με την αντίθετη διεύθυνση από αυτή του εκκρεμούς.

Κοιτώντας το σχήμα 8 βλέπουμε ό,τι συμβαίνει και στο σχήμα 6, με τη διαφορά ότι το εκκρεμές πέφτει από χαμηλότερο σημείο και η υψηλότερη θέση που φτάνει είναι περίπου $\alpha=230^\circ$. Παρόλα αυτά, φαίνεται ότι και για τις 2 περιπτώσεις το εκκρεμές παύει να κινείται μετά από το ίδιο χρονικό διάστημα.

Από τα σχήματα 7-9 βλέπουμε ότι το σύστημα του περιστρεφόμενου ανάστροφου εκκρεμούς κινείται πιο γρήγορα στην περίπτωση που $\alpha=90^\circ$.

Ελεγκτής PID

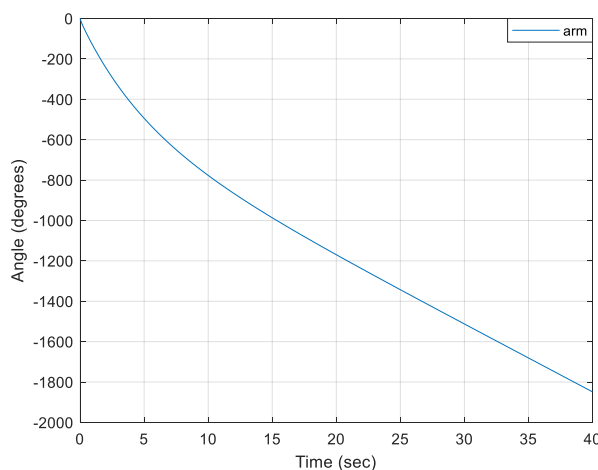
Ο PID είναι ένας γραμμικός συχνοτικός ελεγκτής και είναι ο συνδυασμός τριών άλλων απλών ελεγκτών [36, 37]. Αυτοί είναι ο αναλογικός ελεγκτής P (proportional), ο διαφορικός ελεγκτής D (derivative) και ο ολοκληρωτικός ελεγκτής I (integral). Το σήμα ελέγχου του PID στο χρόνο μπορεί να περιγραφεί από την σχέση:

$$u(t) = k_p e(t) + k_p k_i \int_0^t e(t) dt + k_p k_d \frac{de(t)}{dt} \quad (6.1)$$

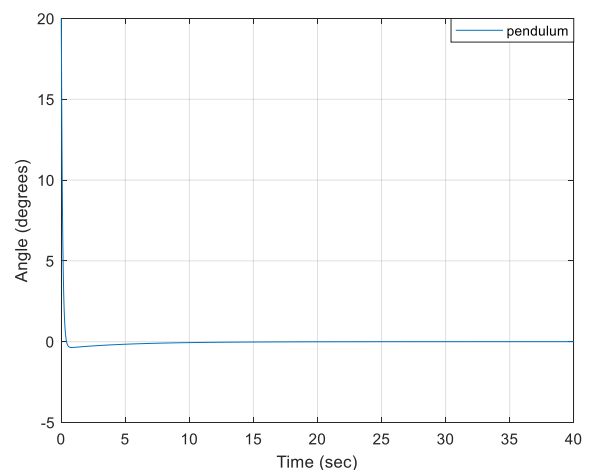
Οι συντελεστές k_p , k_i , k_d της παραπάνω σχέσης είναι οι ενισχύσεις που διαλέγουμε για τη σχεδίαση του PID. Ενισχύοντας τον συντελεστή k_p αυξάνονται οι ταλαντώσεις του συστήματος και επιτυγχάνεται η μείωση, αλλά όχι ο μηδενισμός, του σφάλματος ελέγχου. Αυξάνοντας την ενίσχυση k_i το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση μηδενίζεται πλήρως αλλά αυξάνεται ο χρόνος αποκατάστασης του συστήματος και προστίθεται στο σύστημα ένας πόλος με αποτέλεσμα την αύξηση της τάξης του συστήματος κατά μία μονάδα. Η προσθήκη αυτού μπορεί να οδηγήσει το σύστημα σε αστάθεια, καθώς ο γεωμετρικός τόπος ριζών μετατοπίζεται δεξιότερα. Η ενίσχυση k_d περιορίζει την τάση του συστήματος για ταλάντωση όμως μπορεί να φέρει στο σύστημα θόρυβο. Το διαφορικό κομμάτι του PID χρησιμοποιεί την κλίση του σφάλματος ελέγχου για να προβλέπει πόσο μεταβάλλεται και να το καταστέλλει. Ο D ελεγκτής προσθέτει ένα μηδενικό στο σύστημα βελτιώνοντας την ταχύτητα απόκρισης του αλλά αυξάνοντας την πιθανότητα ύπαρξης μόνιμου σφάλματος.

6.1.2 Προσομοίωση με τη χρήση του ελεγκτή PID

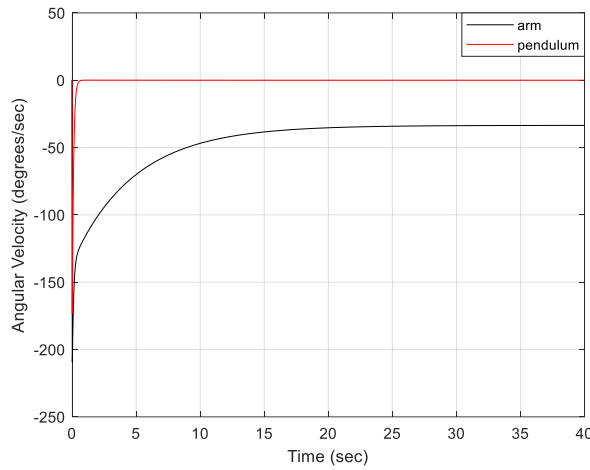
Η επιλογή των κερδών για το σύστημα μας έγινε χειροκίνητα με διάφορες δοκιμές τιμών. Αρχικά θέσαμε τις τιμές όλων των κερδών στο μηδέν και σταδιακά αυξήσαμε την τιμή της k_p μέχρι το σφάλμα να φτάσει κοντά στο μηδέν. Με την αύξηση της k_p δημιουργήθηκαν ταλαντώσεις, οπότε έπρεπε να αυξήσουμε ελαφρώς την τιμή της k_d , για να αποφύγουμε αστάθεια λόγω θορύβου, ώστε να μην έχουμε ταλαντώσεις. Τέλος, αυξήσαμε ελαφρώς την τιμή της k_i έτσι ώστε το σφάλμα να γίνει μηδενικό.



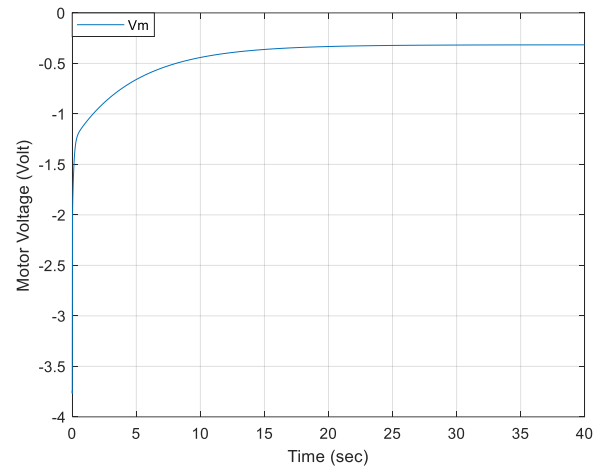
Σχήμα 10: Η απόκριση της θέσης του βραχίονα θ με τη χρήση του PID ελεγκτή



Σχήμα 11: Σταθεροποίηση της θέσης του εκκρεμούς α με τη χρήση του PID ελεγκτή



Σχήμα 12: Οι αποκρίσεις των γωνιακών ταχυτήτων του βραχίονα και το εκκρεμούς



Σχήμα 13: Το σήμα του σερβοκινητήρα

Με τη λογική που αναφέρθηκε προηγουμένως και με διάφορες δοκιμές, οι ενισχύσεις που επιλέχθηκαν για τον ελεγκτή PID είναι: $k_p = 10$, $k_i = 2$, $k_d = 1$. Για $\theta = 0$, $\alpha = 20^\circ$, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\alpha} = 0$ οι αποκρίσεις των καταστάσεων και του σήματος ελέγχου είναι:

Από τις παραπάνω αποκρίσεις παρατηρούμε ότι με τη χρήση του PID ελεγκτή είναι αδύνατο να ελέγξουμε ταυτόχρονα και τη γωνία του βραχίονα και τη γωνία του εκκρεμούς καθώς το σύστημά μας είναι υπο-ενεργοποιημένο, δηλαδή οι είσοδοι του είναι περισσότεροι από τις εξόδους του. Για τον λόγο αυτό δεν υλοποιήθηκε στην πράξη ο έλεγχος με τον PID ελεγκτή, καθώς θα θέλαμε όχι μόνο η γωνία του εκκρεμούς να σταθεροποιηθεί, αλλά και οι υπόλοιπες καταστάσεις του. Με την χρήση 2 PID ελεγκτών όπως στο [19], είναι δυνατόν να ελεγχθούν και οι 2 γωνίες αν και κάτι τέτοιο ήταν εκτός των στόχων αυτής της εργασίας, που εστιάζει περισσότερο στη χρήση του ελεγκτή LQR σε συνδυασμό με παρατηρητές. Παρατηρούμε ότι η τάση του σερβοκινητήρα δεν μηδενίζεται, η θέση του βραχίονα συνεχίζει και αυξάνεται. Στην πράξη αυτό θα οδηγούσε σε βλάβη του συστήματος.

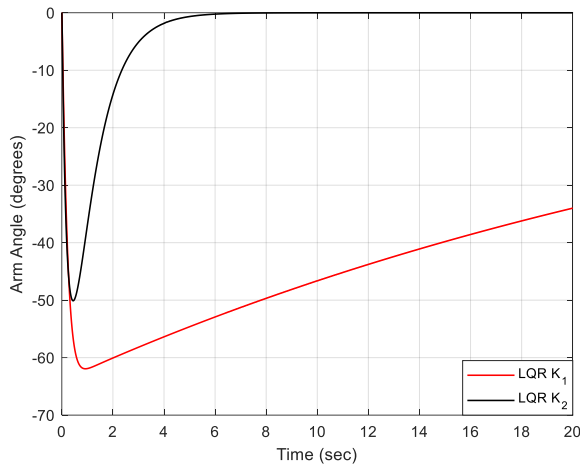
6.1.3 Προσομοίωση με τη χρήση του ελεγκτή LQR

Οι αποκρίσεις που ακολουθούν είναι για $K_1 = [-0.0316 \ 16.4382 \ -1.0135 \ 2.529]$ με βάρη:

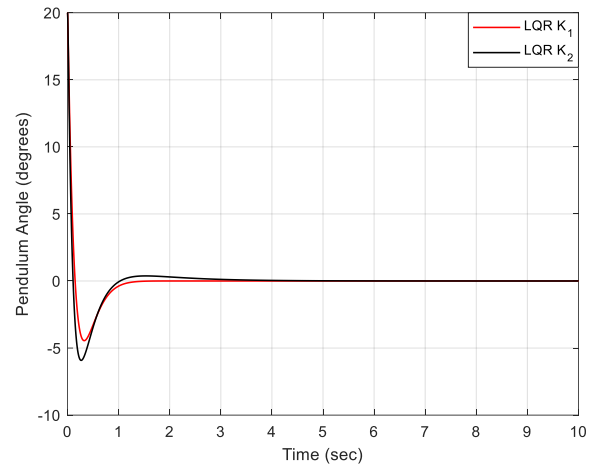
$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1$$

και $K_2 = [-0.5774 \ 12.745 \ -0.8075 \ 1.7153]$ με βάρη:

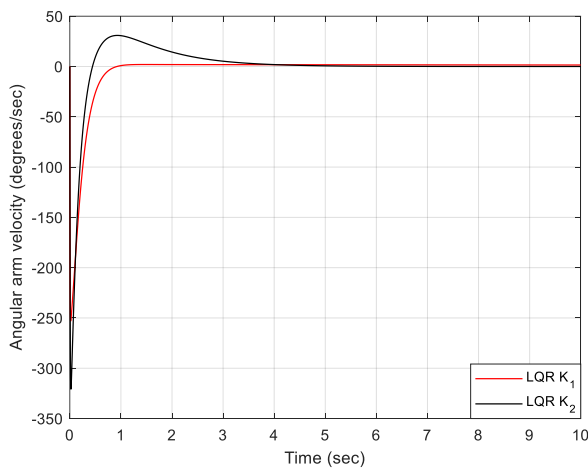
$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 3.$$



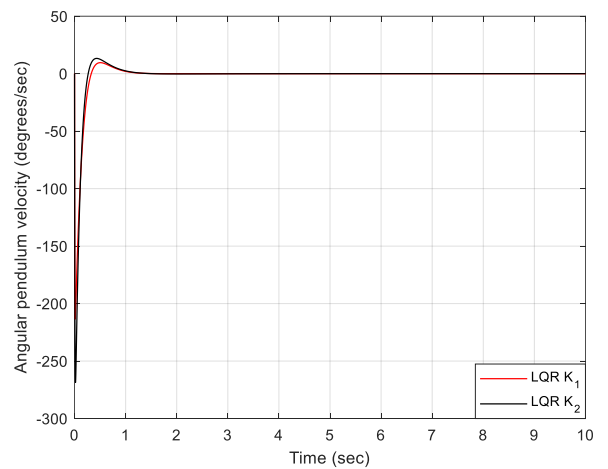
Σχήμα 14: Οι αποκρίσεις των θέσεων του βραχίονα για τις ενισχύσεις K_1 και K_2 του LQR



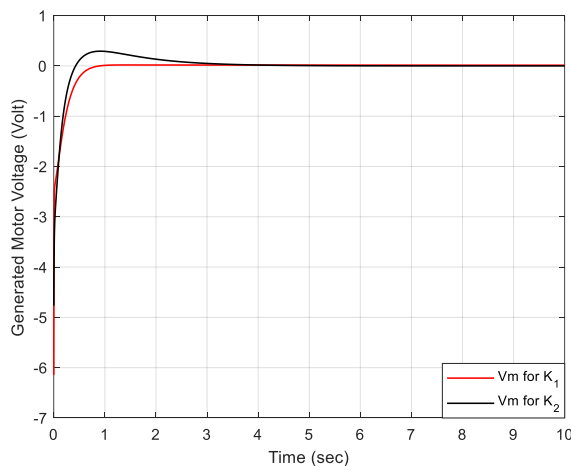
Σχήμα 15: Οι αποκρίσεις των θέσεων του εκκρεμούς για τις ενισχύσεις K_1 και K_2 του LQR



Σχήμα 16: Οι αποκρίσεις των ταχυτήτων του βραχίονα για τις ενισχύσεις K_1 και K_2 του LQR



Σχήμα 17: Οι αποκρίσεις των ταχυτήτων του εκκρεμούς για τις ενισχύσεις K_1 και K_2 του LQR



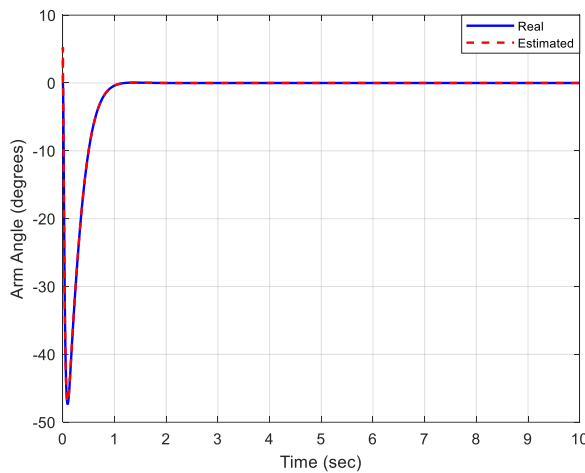
Σχήμα 18: Οι τάσεις του σερβοκινητήρα για τις ενισχύσεις K_1 και K_2 του LQR

Παρατηρώντας τα παραπάνω διαγράμματα, μπορούμε να δούμε ότι όλα όσα έχουν ειπωθεί αληθεύουν. Για παράδειγμα, στο σχήμα 14 είναι $Q_{1,11} < Q_{2,11}$ και μετά από 20 δευτερόλεπτα η κατάσταση του συστήματος ακόμα δεν προσεγγίζει το σημείο ισορροπίας. Επιπλέον για την περίπτωση 1 όπου $R = 1$, βλέπουμε ότι η τάση του σερβοκινητήρα είναι μεγαλύτερη από αυτή της περίπτωσης 2. Από τις 2 περιπτώσεις που έχουμε προσομοιώσει, η 2^η (όπου $K_2 > Q_2 R_2$) είναι αυτή που μας δίνει πιο επιθυμητά αποτελέσματα.

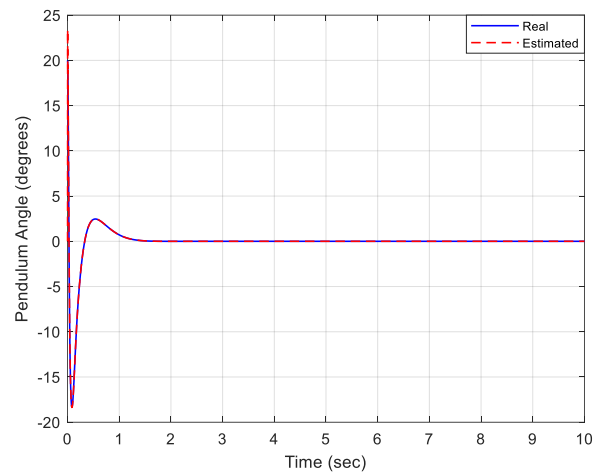
6.1.4 Προσομοιώσεις με τη χρήση του ελεγκτή LQR σε συνδυασμό με τον παρατηρητή

Για την προσομοίωση του συστήματος με χρήση του ελεγκτή LQR σε συνδυασμό με τον παρατηρητή, επιλέχθηκαν οι ενισχύσεις του παρατηρητή να είναι κατά $L_p = 20$ φορές μεγαλύτεροι του LQR, με τον ελεγκτή LQR να έχει τις ενισχύσεις: $K = [-14142 \ 20.4262 \ -1.824 \ 2.8995]$ με βάρη:

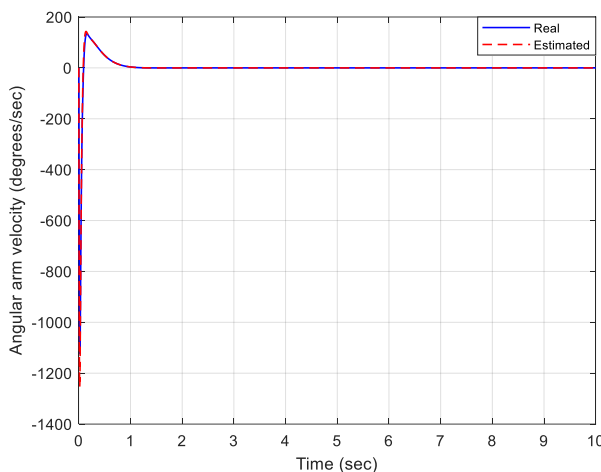
$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, R = 5$$



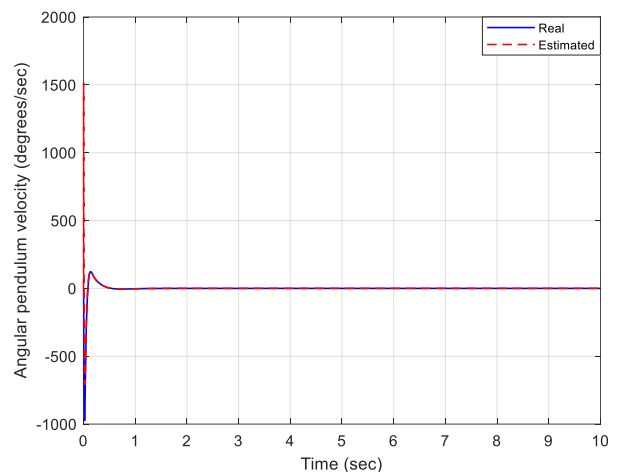
Σχήμα 19: Οι αποκρίσεις της κατάστασης θ και της εκτίμησής της



Σχήμα 20: Οι αποκρίσεις της κατάστασης α και της εκτίμησής της



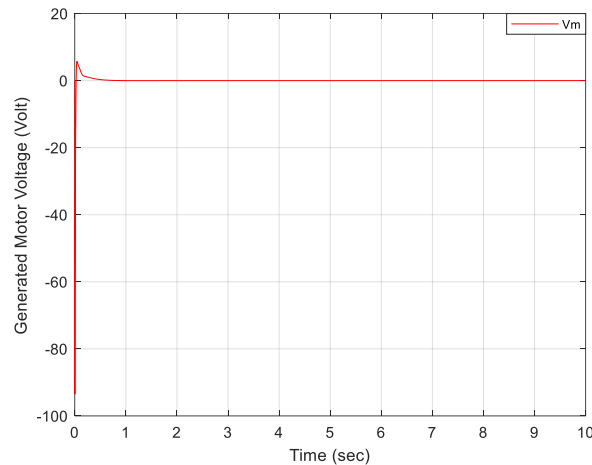
Σχήμα 21: Οι αποκρίσεις της γωνιακής ταχύτητας του βραχίονα και της εκτίμησής της



Σχήμα 22: Οι αποκρίσεις της γωνιακής ταχύτητας του εκκρεμούς και της εκτίμησής της

Από τα παραπάνω διαγράμματα βλέπουμε ότι οι αποκρίσεις των εκτιμώμενων καταστάσεων ακολουθούν τις αποκρίσεις των καταστάσεων του συστήματος και σχεδόν συμπίπτουν με αυτές. Για όλα τα διαγράμματα παρατηρούμε ότι υπάρχει μια μικρή απόκλιση μεταξύ των καταστάσεων και των εκτιμώμενων καταστάσεων και αυτό γίνεται επειδή ο παρατηρητής δεν μπορεί να γνωρίζει την αρχική κατάσταση του συστήματος. Ωστόσο, οι εκτιμήσεις πλησιάζουν τις πραγματικές καταστάσεις του συστήματος και αυτό συμβαίνει γιατί το σφάλμα κατάστασης είναι ανάλογο της ενίσχυσης του παρατηρητή. Έτσι, όσο μεγαλύτερη οριστεί η ενίσχυση του παρατηρητή L , τόσο το σφάλμα κατάστασης θα διορθώνεται γρηγορότερα, έχοντας υπόψη πάντα να τηρούνται οι επιθυμητές προδιαγραφές. Για την προσομοίωση αυτή επιλέχθηκαν οι πόλοι του παρατηρητή να είναι 20 φορές

μεγαλύτεροι από του ελεγκτή ανάδρασης κατάσταση. Σύμφωνα με το σχήμα 23, γνωρίζοντας από την [34] ότι η τάση του σερβοκινητήρα δεν θα πρέπει να υπερβαίνει τα όρια τάσης των προδιαγραφών, η επιλογή του συγκεκριμένου κέρδους παρατηρητή δεν είναι αποδεκτή και θα οδηγούσε σε καταστροφή του συστήματος. Θα δούμε όμως στο υποκεφάλαιο των πειραματικών αποτελεσμάτων ότι η προσομοίωση διαφέρει από την πράξη.



Σχήμα 23: Η τάση του σερβοκινητήρα που παράγει ο ελεγκτής

6.2 Πειράματα για τη σταθεροποίηση του εκκρεμούς στο πραγματικό σύστημα

Η πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη του συστήματος περιλαμβάνει τη μονάδα SRV02, τον περιστροφικό βραχίονα και τη ράβδο του εκκρεμούς. Ο περιστροφικός βραχίονας του συστήματος είναι στερεωμένος στη βάση σερβοκινητήρα SRV02 και μπορεί να περιστραφεί ελεύθερα γύρω από το σημείο στήριξης (pivot point). Η γωνία του βραχίονα αυξάνεται κατά θετική φορά όταν περιστρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού (CCW direction), δηλαδή όταν η τάση ελέγχου που επιβάλλεται σε αυτόν είναι θετική.

Η ράβδος του εκκρεμούς είναι συνδεδεμένη στην άκρη του περιστροφικού βραχίονα. Έχει μήκος L_p και το κέντρο μάζας του είναι $\frac{L_p}{2}$. Η γωνία του ανάστροφου εκκρεμούς ισούται με μηδέν, $\alpha = 0^\circ$, όταν αυτό βρίσκεται στην κατακόρυφη προς τα πάνω θέση ισορροπίας και αυξάνεται κατά θετική φορά όταν περιστρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού.

Οι παρακάτω εικόνες απεικονίζουν την πειραματική διάταξη στην οποία εφαρμόστηκαν οι ελεγκτές που υλοποιήθηκαν:



Σχήμα 24: Η διάταξη του περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς



Σχήμα 25: Η βάση σερβοκινητήρα SRV02 της Quanser [34]

Στις επόμενες σελίδες απεικονίζονται τα πειραματικά αποτελέσματα του συστήματος με χρήση των ελεγκτών LQR, LQR-Observer για διάφορες τιμές του LQR και των κερδών του παρατηρητή πλήρους τάξης. Οι παρακάτω πίνακες (Πίνακες 1-2) περιλαμβάνουν όλες τις τιμές που επιλέχθηκαν για τα βάρη του LQR, τα βάρη του σήματος του ηλεκτροκινητήρα και τα κέρδη του παρατηρητή.

Περιπτώσεις	Βάρη Καταστάσεων Q_i του LQR				Βάρη R σήματος εισόδου
	Q_{11}	Q_{22}	Q_{33}	Q_{44}	
1	1	10	1	5	5
2	10	10	1	5	5
3	100	10	1	5	5

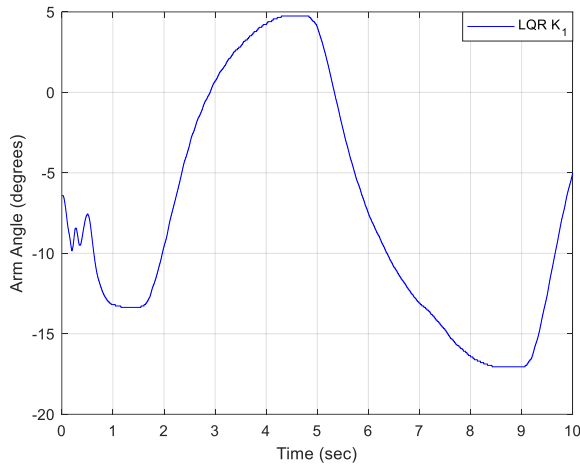
Πίνακας 1: Πίνακας τιμών των πειραματικών αποτελεσμάτων του συστήματος με τη χρήση του LQR

Περιπτώσεις	Βάρη Καταστάσεων Q του LQR				Βάρη R σήματος εισόδου	Πολλαπλασιαστικός παράγοντας πόλων παρατηρητή σε σύγκριση με τους πόλους του ελεγκτή P_L
	Q_{11}	Q_{22}	Q_{33}	Q_{44}		
1	1	10	1	5	5	20
2.i	10	10	1	5	5	20
2.ii	10	10	1	5	5	10
3	100	10	1	5	5	20

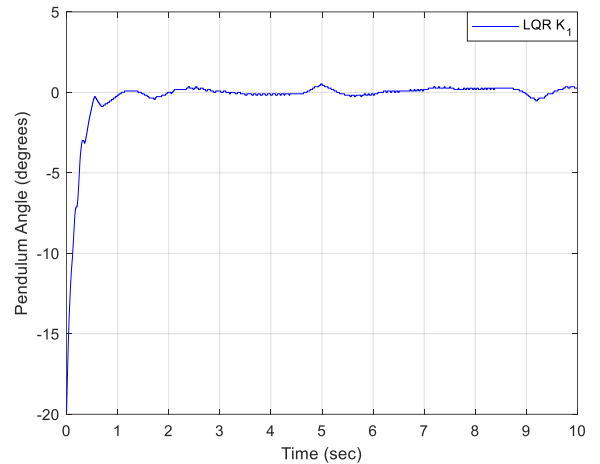
Πίνακας 2: Πίνακας τιμών των πειραματικών αποτελεσμάτων του συστήματος με τη χρήση του LQR-Observer

6.2.1 Πειραματικά αποτελέσματα με τη χρήση του ελεγκτή LQR

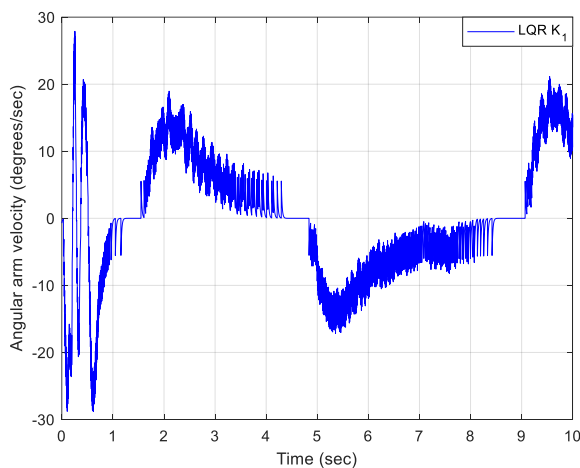
1^η Περίπτωση:



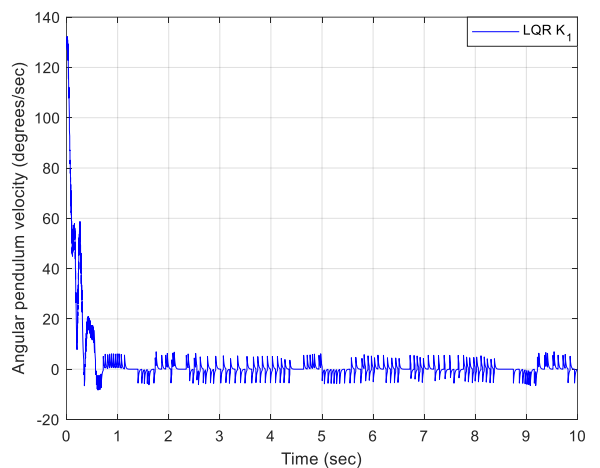
Σχήμα 26: Η απόκριση της θέσης του βραχίονα με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 1



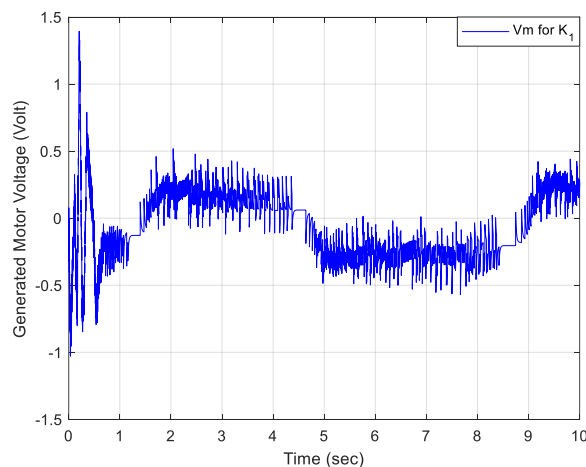
Σχήμα 27: Η απόκριση της θέσης του εκκρεμούς με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 1



Σχήμα 28: Η απόκριση της γωνιακής ταχύτητας του βραχίονα με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 1



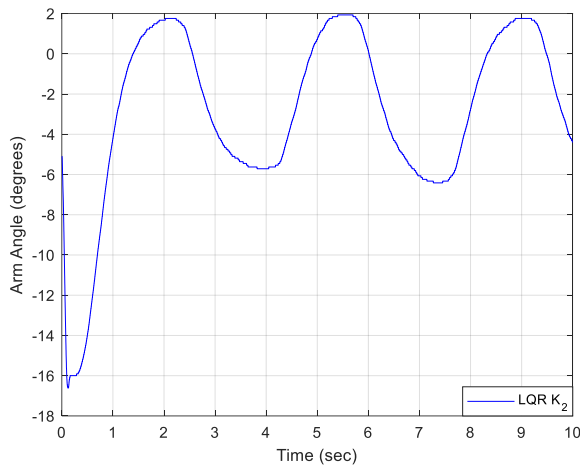
Σχήμα 29: Η απόκριση της γωνιακής ταχύτητας του εκκρεμούς με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 1



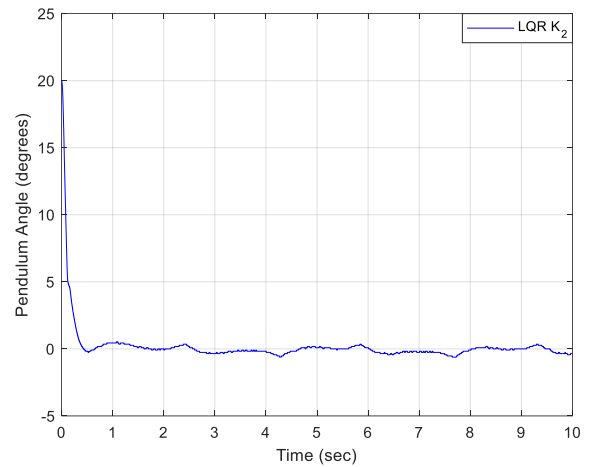
Σχήμα 30: Η τάση του σερβοκινητήρα που παράγει ο ελεγκτής LQR για την περίπτωση 1

Για τα παραπάνω διαγράμματα επιλέχθηκε η τιμή του στοιχείου q_{11} του πίνακα Q που αντιστοιχεί στη γωνία του βραχίονα να είναι μικρότερη των υπόλοιπων περιπτώσεων και παρατηρούμε ότι αυτό επηρεάζει αρνητικά τον έλεγχο του εκκρεμούς, καθώς η απόκριση της θέσης του βραχίονα δεν προσεγγίζει καλά το σημείο ισορροπίας και ο έλεγχος δεν είναι τόσο καλός.

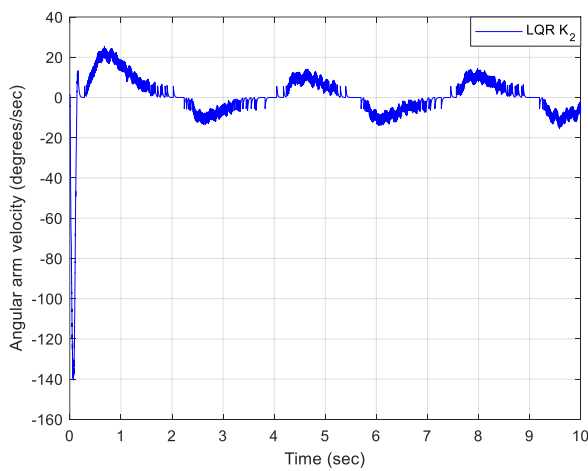
2^η Περίπτωση:



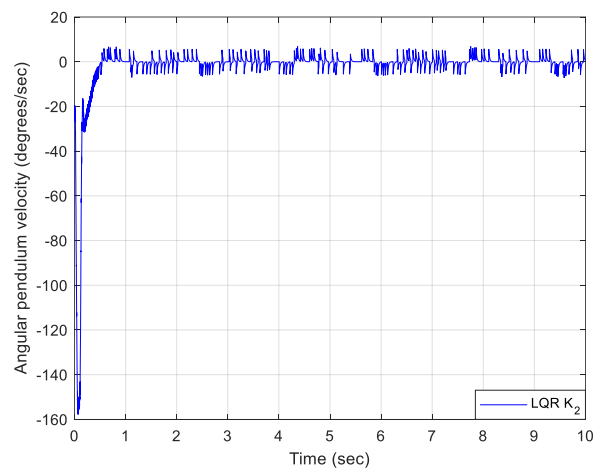
Σχήμα 31: Η απόκριση της θέσης του βραχίονα με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 2



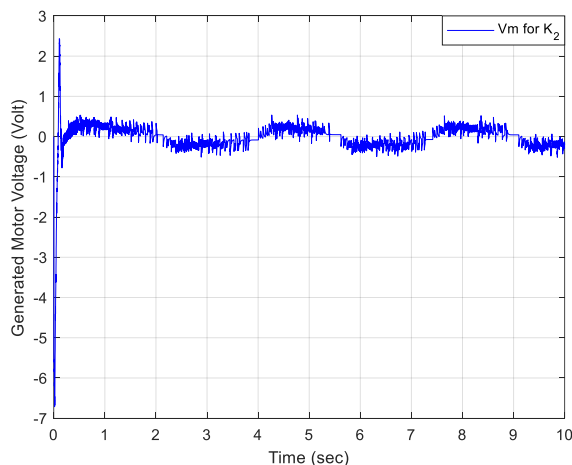
Σχήμα 32: Η απόκριση της θέσης του εκκρεμούς με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 2



Σχήμα 33: Η απόκριση της γωνιακής ταχύτητας του βραχίονα με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 2



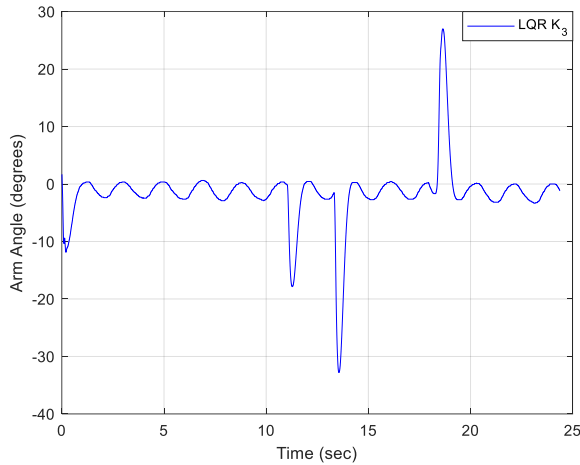
Σχήμα 34: Η απόκριση της γωνιακής ταχύτητας του εκκρεμούς με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 2



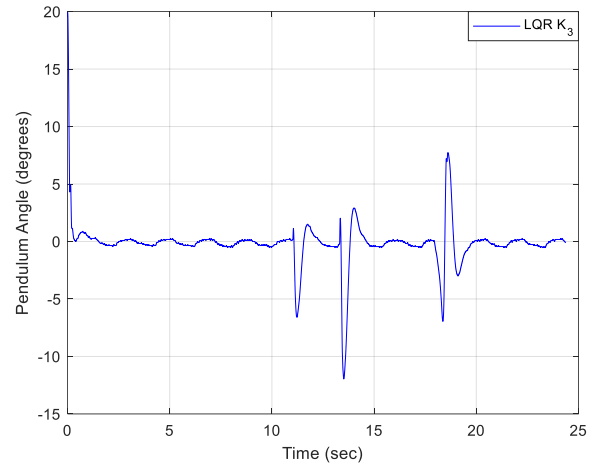
Σχήμα 35: Η τάση του σερβοκινητήρα που παράγει ο ελεγκτής LQR για την περίπτωση 2

Στα διαγράμματα της περίπτωσης αυτής παρατηρούμε ότι η δυναμική απόκριση του συστήματος βελτιώνεται. Αυτό συμβαίνει λόγω της αύξησης του στοιχείου q_{11} του πίνακα Q που αντιστοιχεί στην ποινικοποίηση της γωνίας του βραχίονα.

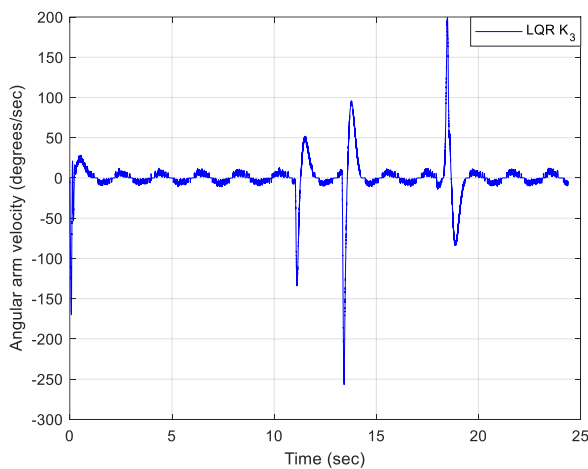
3^η Περίπτωση:



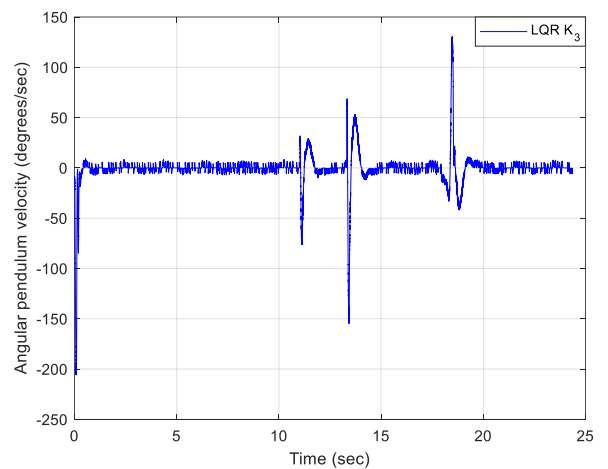
Σχήμα 36: Η απόκριση της θέσης του βραχίονα με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 3



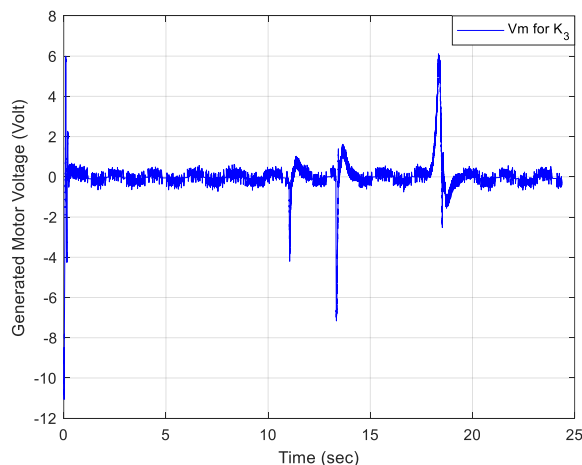
Σχήμα 37: Η απόκριση της θέσης του εκκρεμούς με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 3



Σχήμα 38: Η απόκριση της γωνιακής ταχύτητας του βραχίονα με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 3



Σχήμα 39: Η απόκριση της γωνιακής ταχύτητας του εκκρεμούς με τη χρήση του ελεγκτή LQR για την περίπτωση 3



Σχήμα 40: Η τάση του σερβοκινητήρα που παράγει ο ελεγκτής LQR για την περίπτωση 3

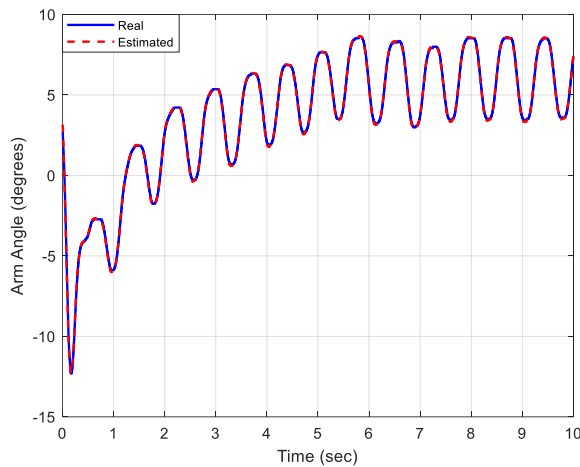
Στα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε ότι με την περαιτέρω αύξηση του στοιχείου q_{11} , το εύρος των ταλαντώσεων μικραίνει και οι καταστάσεις του συστήματος προσεγγίζουν ακόμα καλύτερα το σημείο ισορροπίας. Στην συγκεκριμένη περίπτωση ασκήθηκε μια εξωτερική διαταραχή μέσω της άσκησης δύναμης (με το χέρι) στην άκρη της ράβδου και στην άκρη του βραχίονα για να γίνει φανερό ότι υπάρχει ευρωστία, αν επιλέξουμε τα κατάλληλα βάρη του πίνακα Q . Η τιμή του βάρους R

Αυτόματος έλεγχος περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς

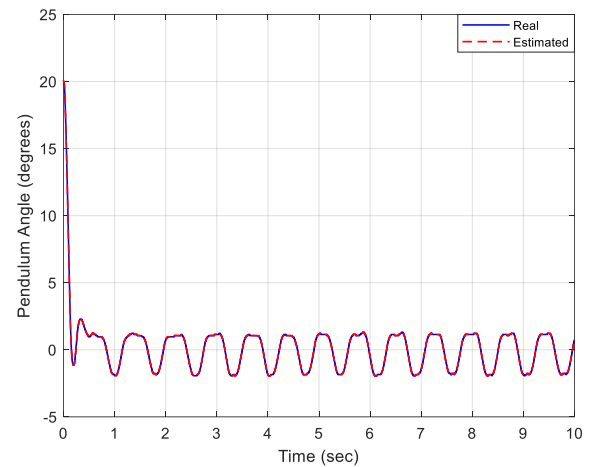
επιλέχθηκε με τέτοιο τρόπο ώστε να υπάρχει ισορροπία μεταξύ των επιθυμητών δυναμικών αποκρίσεων του συστήματος και της απαιτούμενης ενέργειας ελέγχου.

6.2.2 Πειραματικά αποτελέσματα με τη χρήση του σχήματος ελέγχου LQR-Observer

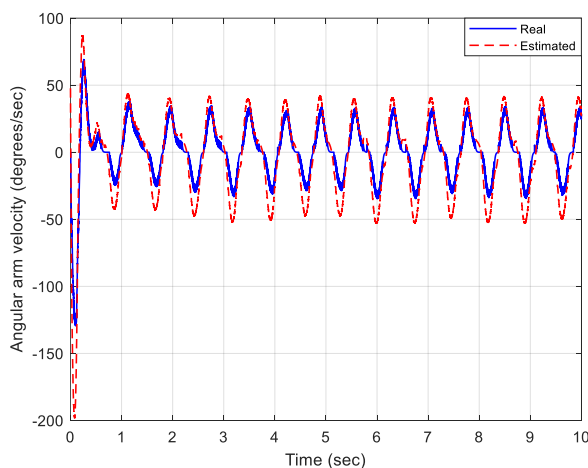
Περίπτωση 1:



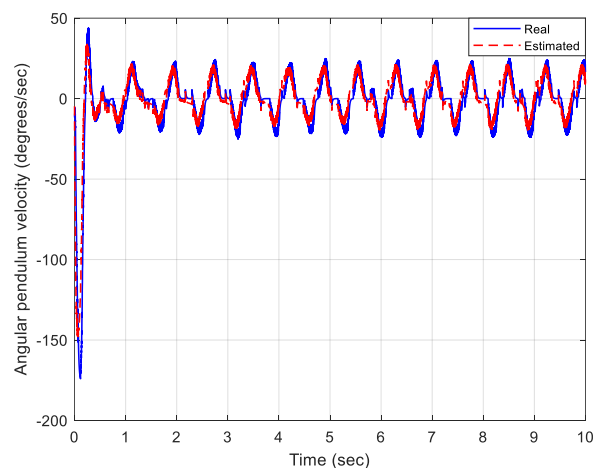
Σχήμα 41: Οι αποκρίσεις της θέσης του βραχίονα με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 1



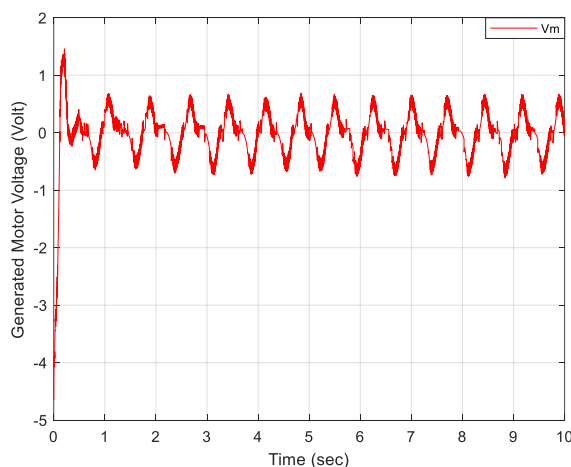
Σχήμα 42: Οι αποκρίσεις της θέσης του εκκρεμούς με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 1



Σχήμα 43: Οι αποκρίσεις των ταχυτήτων του βραχίονα με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 1



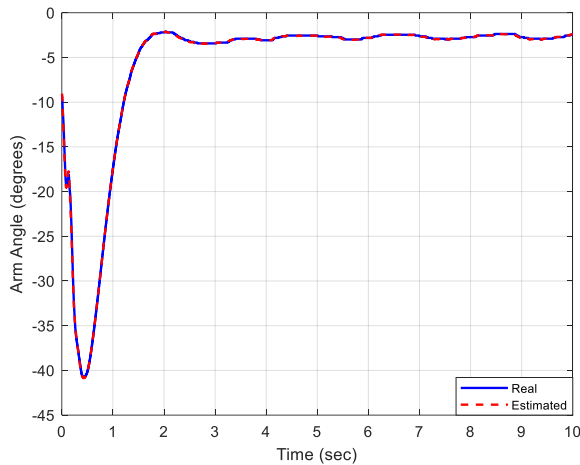
Σχήμα 44: Οι αποκρίσεις των ταχυτήτων του εκκρεμούς με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 1



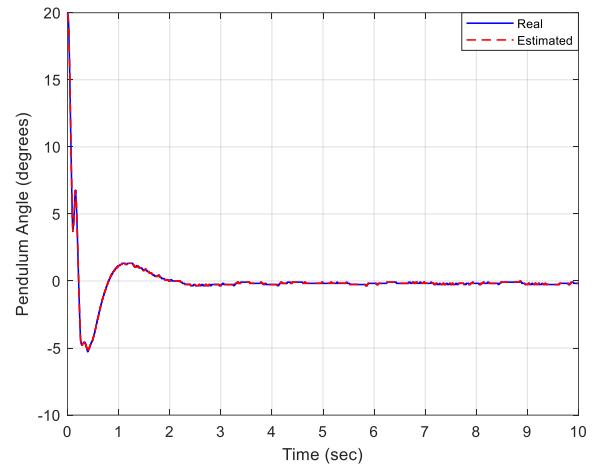
Σχήμα 45: Το σήμα του σερβοκινητήρα με τη χρήση του LQR-Observer ελεγκτή για την περίπτωση 1

Στα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούνται ταλαντώσεις τόσο στη γωνία του βραχίονα όσο και στη γωνία του εκκρεμούς παρά το γεγονός ότι το σύστημα ισορροπεί σε μια περιοχή του σημείου ισορροπίας. Αυτό οφείλεται στη χαμηλή τιμή που έχει επιλεγεί για το στοιχείο q_{11} του πίνακα Q που αντιστοιχεί στην ποινικοποίηση της γωνίας του βραχίονα. Όπως φαίνεται στο επόμενο πείραμα, αυξάνοντας αυτή την τιμή, η συνολική δυναμική απόκριση του συστήματος βελτιώνεται αισθητά.

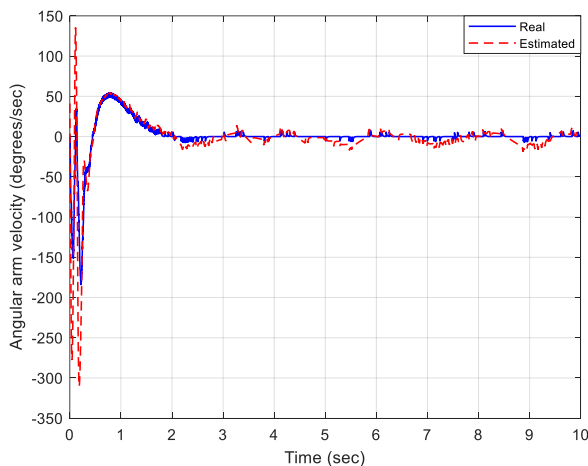
Περίπτωση 2.i:



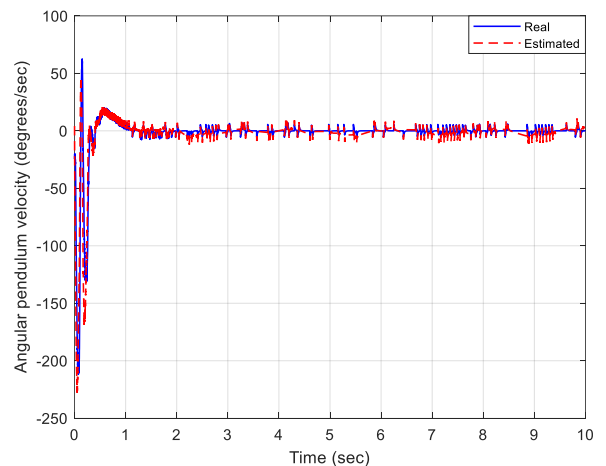
Σχήμα 46: Οι αποκρίσεις της θέσης του βραχίονα με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 2.i



Σχήμα 47: Οι αποκρίσεις της θέσης του εκκρεμούς με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 2.i

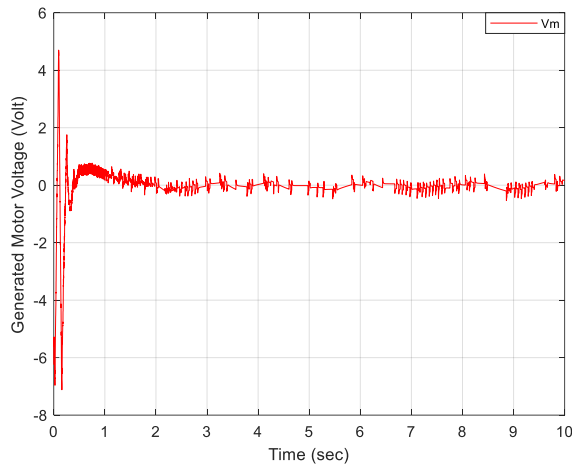


Σχήμα 48: Οι αποκρίσεις των ταχυτήτων του βραχίονα με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 2.i



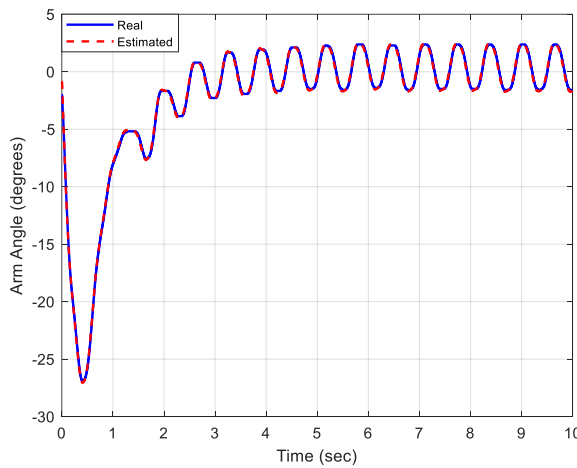
Σχήμα 49: Οι αποκρίσεις των ταχυτήτων του εκκρεμούς με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 2.i

Όπως βλέπουμε από τα παραπάνω διαγράμματα, η αύξηση της τιμής του στοιχείου q_{11} του πίνακα Q που αντιστοιχεί στη γωνία του βραχίονα, οδηγεί σε μεγάλη βελτίωση της δυναμικής απόκρισης του συστήματος καθώς όλες οι καταστάσεις σταθεροποιούνται σχεδόν στο απόλυτο μηδέν. Προκειμένου να φανεί η σημασία της επιλογής της τιμής για την παράμετρο P_L πραγματοποιήθηκε ένα πείραμα μειώνοντας την τιμή της από 20 σε 10. Αυτό σημαίνει ότι οι πόλοι του παρατηρητή θα βρίσκονται πλέον πιο κοντά στους πόλους του ελεγκτή, με συνέπεια τη μείωση της ταχύτητας σύγκλισης των εκτιμήσεων του παρατηρητή στις πραγματικές τιμές των καταστάσεων.

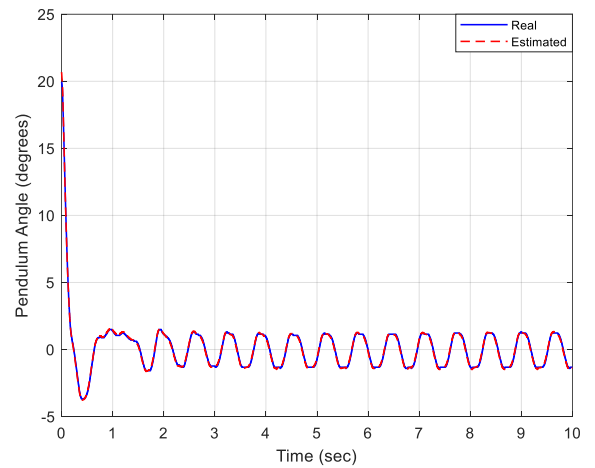


Σχήμα 50: Το σήμα του σερβοκινητήρα με τη χρήση του LQR-ObsERVER ελεγκτή για την περίπτωση 2.i

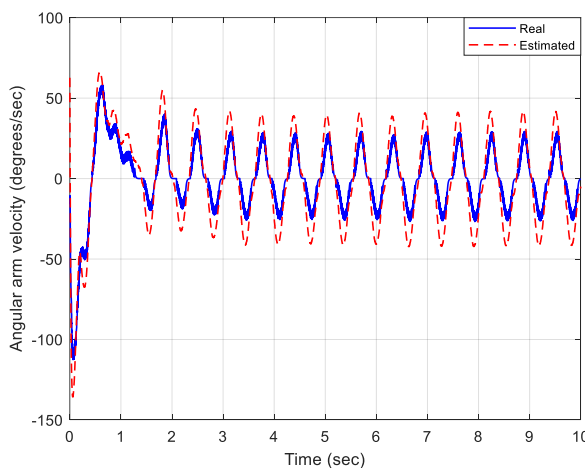
Περίπτωση 2.ii:



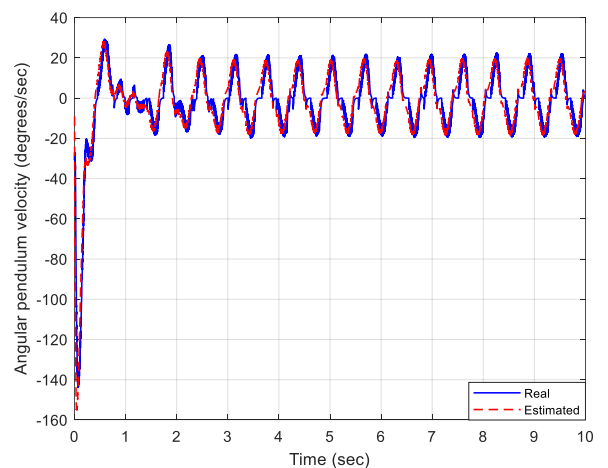
Σχήμα 51: Οι αποκρίσεις της θέσης του βραχίονα με τον ελεγκτή LQR-ObsERVER για την περίπτωση 2.ii



Σχήμα 52: Οι αποκρίσεις της θέσης του εκκρεμούς με τον ελεγκτή LQR-ObsERVER για την περίπτωση 2.ii

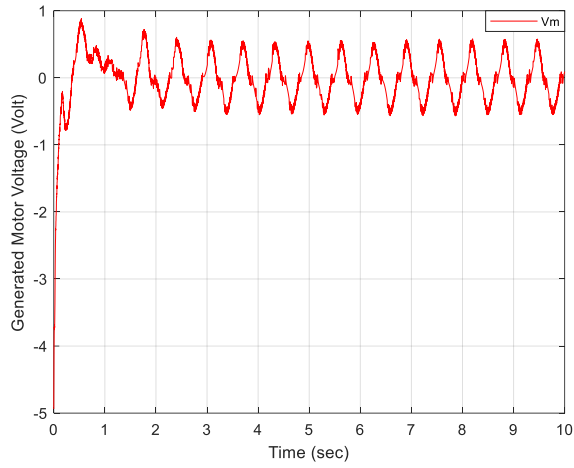


Σχήμα 53: Οι αποκρίσεις των ταχυτήτων του βραχίονα με τον ελεγκτή LQR-ObsERVER για την περίπτωση 2.ii



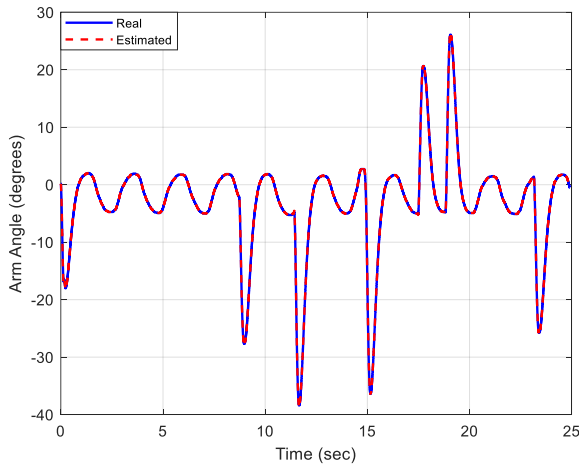
Σχήμα 54: Οι αποκρίσεις των ταχυτήτων του εκκρεμούς με τον ελεγκτή LQR-ObsERVER για την περίπτωση 2.ii

Παρατηρούμε ότι με την μείωση της ενίσχυσης του παρατηρητή, και σε σύγκριση και με την περίπτωση 2.i, έχουμε χειρότερες αποκρίσεις με ταλαντώσεις. Αυτό επιβεβαιώνει το γεγονός ότι η επιλογή της παραμέτρου P_L επηρεάζει σημαντικά την απόκριση του συστήματος.

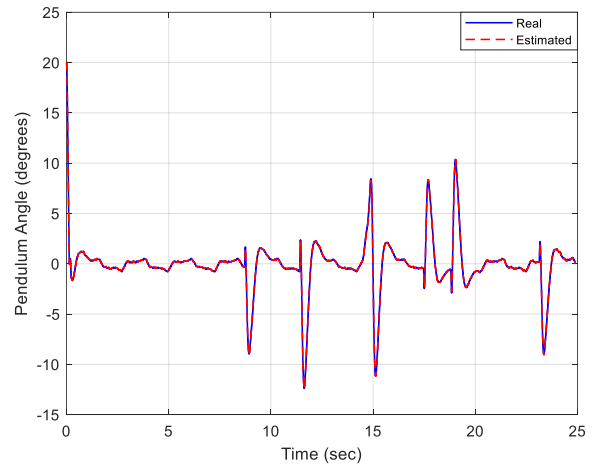


Σχήμα 55: Το σήμα του σερβοκινητήρα με τη χρήση του LQR-Observer ελεγκτή για την περίπτωση 2.ii

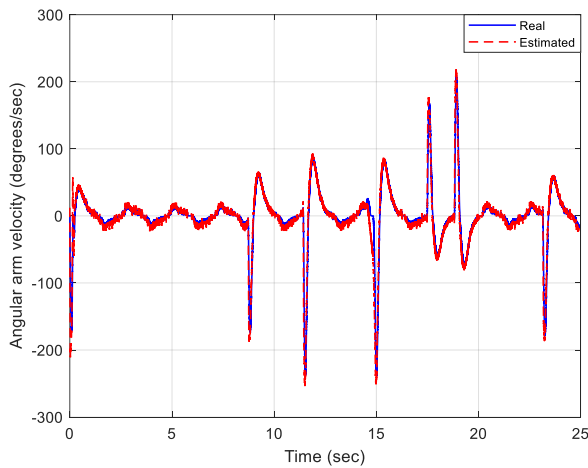
Περίπτωση 3:



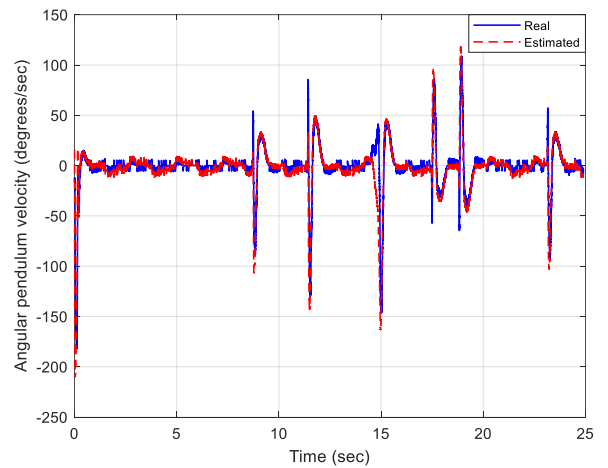
Σχήμα 56: Οι αποκρίσεις της θέσης του βραχίονα με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 3



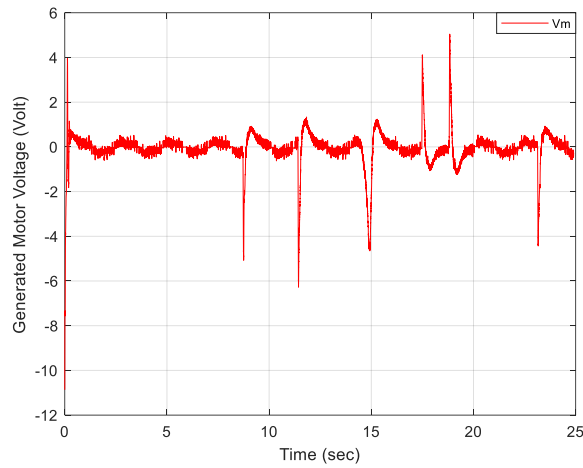
Σχήμα 57: Οι αποκρίσεις της θέσης του εκκρεμούς με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 3



Σχήμα 58: Οι αποκρίσεις των ταχυτήτων του βραχίονα με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 3



Σχήμα 59: Οι αποκρίσεις των ταχυτήτων του εκκρεμούς με τον ελεγκτή LQR-Observer για την περίπτωση 3



Σχήμα 60: Το σήμα του σερβοκινητήρα με τη χρήση του LQR-Observer ελεγκτή για την περίπτωση 3

Όπως και με την περίπτωση 3 του LQR ακόμα και με παρουσία εξωτερικών διαταραχών, βλέπουμε ότι υπάρχει ευρωστία και ο έλεγχος είναι ιδιαίτερα επιτυχημένος.

6.3 Εφαρμογή του swing-up controller

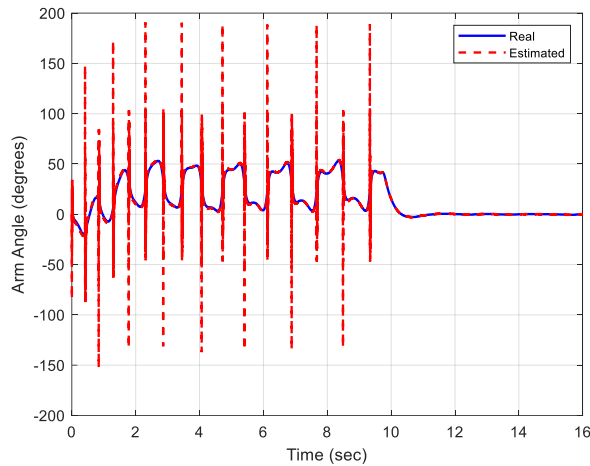
Παρακάτω απεικονίζεται ο πίνακας τιμών των πειραμάτων που πραγματοποιήθηκαν με τη χρήση του ελεγκτή ανύψωσης.

Περιπτώσεις	Βάρη Καταστάσεων Q του LQR				Βάρη R σήματος εισόδου	Πολλαπλασιαστικός παράγοντας πόλων παρατηρητή σε σύγκριση με τους πόλους του ελεγκτή P_L	Ενίσχυση ελεγκτή ανύψωσης k	Μέγιστη επιτάχυνση $sat_{U_{max}}$
	Q ₁₁	Q ₂₂	Q ₃₃	Q ₄₄				
1	10	10	1	5	5	20	3	11.5
2	10	10	1	5	5	20	5	15

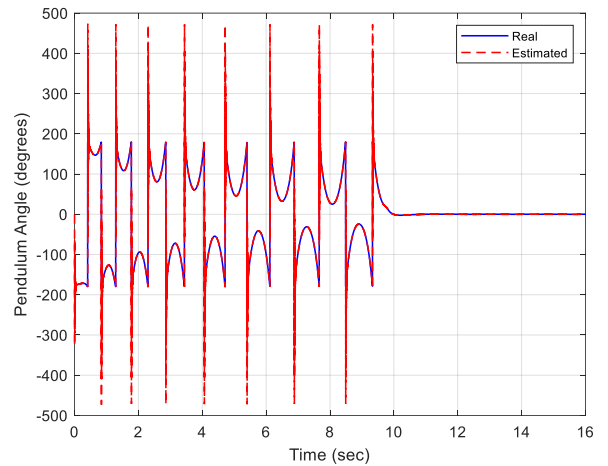
Πίνακας 3: Πίνακας τιμών των πειραματικών αποτελεσμάτων του συστήματος με τη χρήση του ελεγκτή ανύψωσης (Swing Up- LQR- Observer)

Πριν προβληθούν τα παρακάτω διαγράμματα, αξίζει να σημειωθεί ότι και για τις 2 περιπτώσεις πειραμάτων, παρατηρήθηκαν κυματώσεις στις αποκρίσεις των εκτιμώμενων καταστάσεων στο στάδιο της ανύψωσης. Αυτό είναι πολύ φυσικό να συμβαίνει αν κάποιος φέρει στο νου του ότι ο παρατηρητής έχει σχεδιαστεί με το γραμμικό μοντέλο του συστήματος. Συνεπώς, οι εκτιμήσεις του παρατηρητή, δεν μπορούν να ακολουθήσουν τις πραγματικές καταστάσεις του συστήματος όταν γίνεται ο έλεγχος ανύψωσης, αφού ο ελεγκτής ανύψωσης είναι ένας μη γραμμικός ελεγκτής. Επιπλέον, από όλα τα πειράματα που διεξάχθηκαν στην πραγματική διάταξη, παρατηρήθηκε ότι ακόμα και αν η ράβδος δεν σταθεροποιηθεί και πέσει, ο ελεγκτής ανύψωσης ξαναδίνει την απαιτούμενη ενέργεια και το επαναφέρει στην κατακόρυφα προς τα πάνω θέση ισορροπίας.

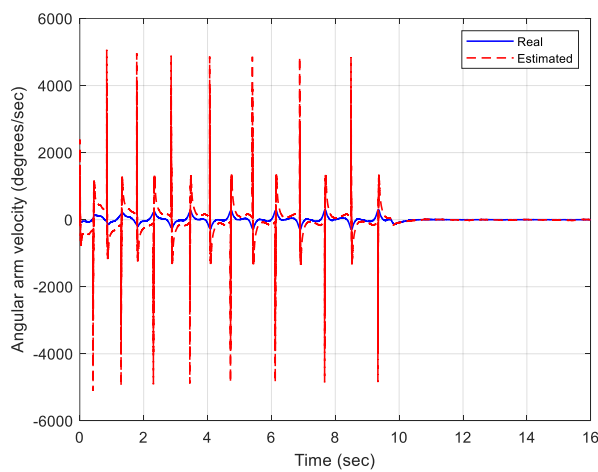
1^η Περίπτωση:



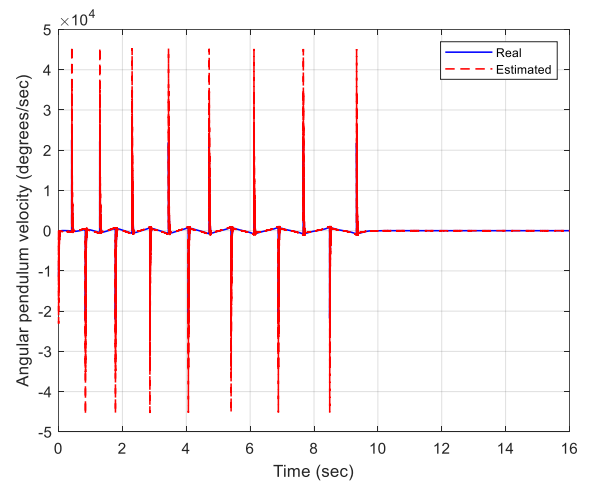
Σχήμα 61: Η απόκριση της θέσης του βραχίονα με τον Swing Up-LQR-Observer για την περίπτωση 1



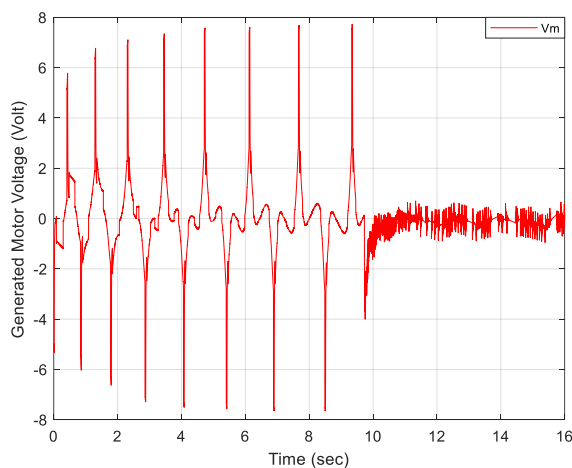
Σχήμα 62: Η απόκριση της θέσης του εκκρεμούς με τον Swing Up-LQR-Observer για την περίπτωση 1



Σχήμα 63: Η απόκριση της γωνιακής ταχύτητας του βραχίονα με τον Swing Up-LQR-Observer για την περίπτωση 1

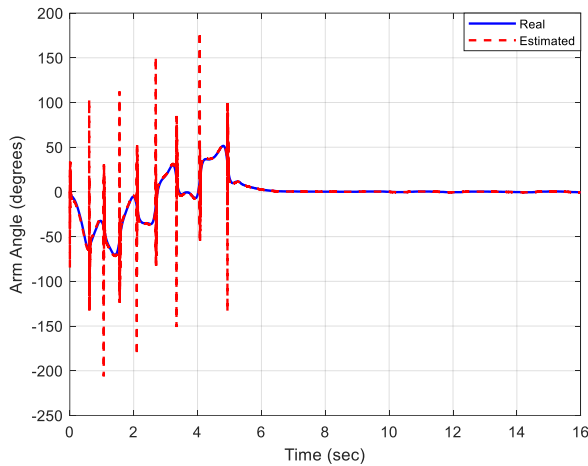


Σχήμα 64: Η απόκριση της γωνιακής ταχύτητας του εκκρεμούς με τον Swing Up-LQR-Observer για την περίπτωση 1

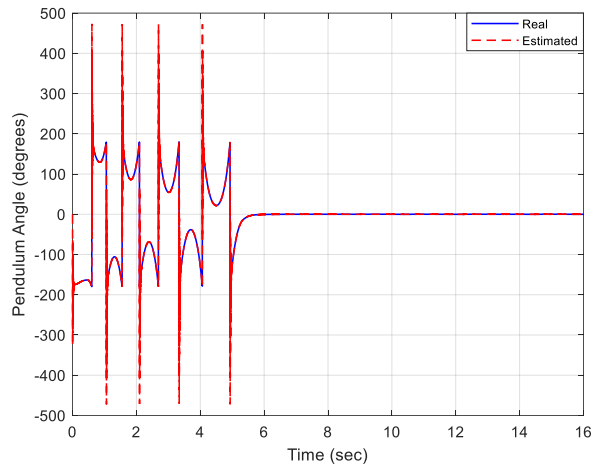


Σχήμα 65: Το σήμα του σερβοκινητήρα με τη χρήση του Swing Up-LQR-Observer για την περίπτωση 1. Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε ότι ο ελεγκτής ανύψωσης δίνει την απαιτούμενη ενέργεια που χρειάζεται ώστε το σύστημα να σταθεροποιηθεί στο προς τα πάνω σημείο ισορροπίας.

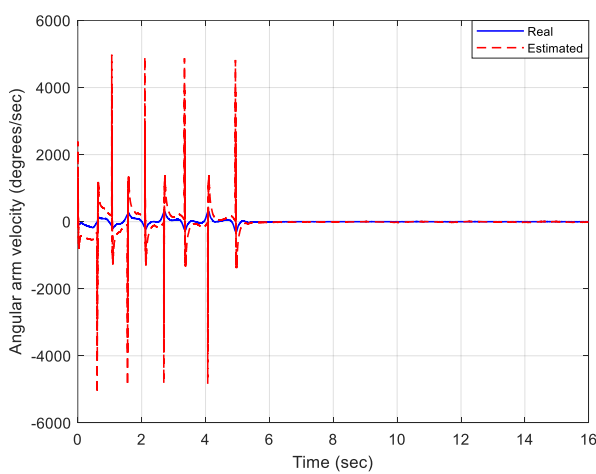
2^η Περίπτωση:



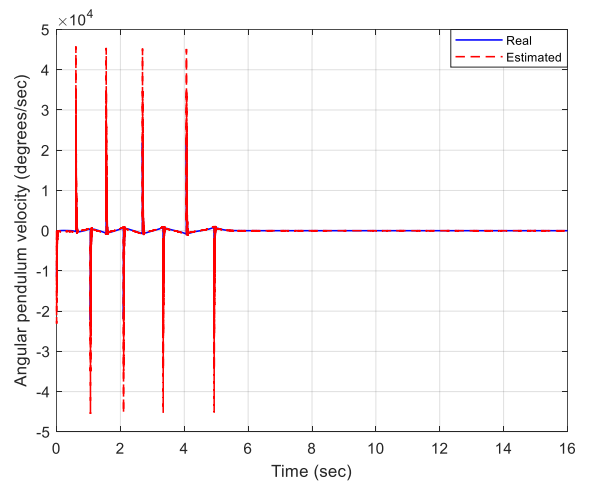
Σχήμα 66: Η απόκριση της θέσης του βραχίονα με τον Swing Up-LQR-Observer για την περίπτωση 2



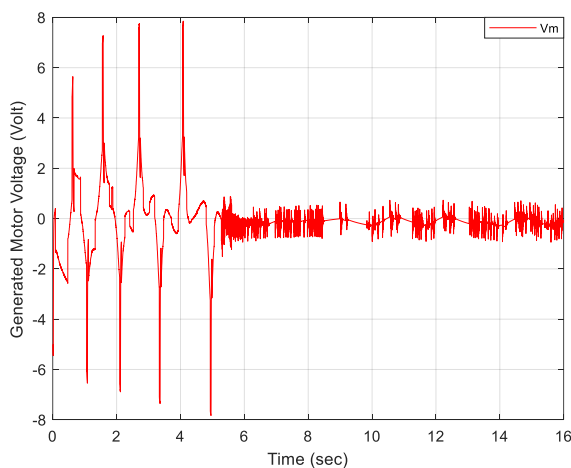
Σχήμα 67: Η απόκριση της θέσης του εκκρεμούς με τον Swing Up-LQR-Observer για την περίπτωση 2



Σχήμα 68: Η απόκριση της γωνιακής ταχύτητας του βραχίονα με τον Swing Up-LQR-Observer για την περίπτωση 2



Σχήμα 69: Η απόκριση της γωνιακής ταχύτητας του εκκρεμούς με τον Swing Up-LQR-Observer για την περίπτωση 2



Σχήμα 70: Το σήμα του σερβοκινητήρα με τη χρήση του Swing Up-LQR-Observer για την περίπτωση 2

Η διαφορά που παρατηρείται στο χρόνο που απαιτείται για την ολική σταθεροποίηση του συστήματος οφείλεται στην αύξηση της ενίσχυσης k , η οποία καθιστά τον ελεγκτή πιο επιθετικό. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα την εφαρμογή αυξημένης ενέργειας ελέγχου στο σύστημα αυξάνοντας με αυτόν τον τρόπο την επιτάχυνση του, δηλαδή τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του βραχίονα και του εκκρεμούς.

6.4 Συζήτηση προσομοιώσεων και πειραματικών αποτελεσμάτων

Μεταξύ των προσομοιώσεων και των πειραματικών αποτελεσμάτων των ελεγκτών ανάδρασης κατάστασης παρατηρήθηκαν αποκλίσεις. Αυτό εξηγείται στο γεγονός ότι το μαθηματικό μοντέλο ενός συστήματος δεν μπορεί να αντικαταστήσει πλήρως το μοντέλο του φυσικού συστήματος καθώς πάντα θα υπάρχουν αβεβαιότητες όπως είναι για παράδειγμα η εμφάνιση εξωτερικών διαταραχών στο σύστημα. Ωστόσο, η θεωρία που μελετήθηκε για τους σχεδιασμένους ελεγκτές επιβεβαιώθηκε και μάλιστα σε ικανοποιητικό βαθμό. Κατά την πραγματοποίηση των πειραμάτων παρατηρήθηκε ότι η επιλογή της αρχικής θέσης ισορροπίας του εκκρεμούς δεν έχει σημασία, διότι οι ελεγκτές μας χρησιμοποιούν το γραμμικοποιημένο μοντέλο του συστήματος μας. Αυτό σημαίνει ότι τα κέρδη των ελεγκτών θα εξαρτώνται μόνο από τα βάρη των πινάκων Q και R και όχι από την αρχική συνθήκη της γωνίας του εκκρεμούς. Επιλέγοντας τα κατάλληλα βάρη, ακόμα και όταν προσπαθήσαμε να εισάγουμε διαταραχές στο σύστημα, ακουμπώντας την ράβδο του εκκρεμούς με απότομο τρόπο, οι ελεγκτές ανάδρασης κατάστασης δεν αποτύγχαναν να σταθεροποιήσουν το εκκρεμές στην κατακόρυφα προς τα πάνω θέση ισορροπίας. Όσον αφορά τον παρατηρητή, θεωρήθηκε ότι όλες οι αρχικές καταστάσεις του ισούνται με το μηδέν επειδή δεν υπάρχει τρόπος να είναι για αυτόν γνωστές από την αρχή. Όμως, σύμφωνα με την [39], δεν είναι απαραίτητο να επιλέγονται πάντα ως μηδενικές οι αρχικές συνθήκες ενός παρατηρητή, και μάλιστα είναι δυνατόν να υπολογιστούν οι βέλτιστες αρχικές συνθήκες οι οποίες επηρεάζουν θετικά τις εκτιμήσεις του παρατηρητή. Η διαφορά απόδοσης των ελεγκτών LQR και LQR-Observer ήταν εμφανής, αφού με τη χρήση του παρατηρητή και για μεγαλύτερα κέρδη υπήρξε ακόμα καλύτερη σταθεροποίηση του συστήματος. Κλείνοντας, ο ελεγκτής ανύψωσης είναι ένας μη γραμμικός ενεργειακός ελεγκτής με τον οποίο επιτυγχάνεται η ολική σταθεροποίηση του συστήματος μας. Ο ενεργειακός έλεγχος του συστήματος και κατά συνέπεια η ολική σταθεροποίηση του εξαρτάται σημαντικά από την μέγιστη επιτάχυνση του συστήματος.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σκοπός της διπλωματικής αυτής εργασίας ήταν να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα ανύψωσης και σταθεροποίησης του περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς πρακτικά, εφαρμόζοντας δηλαδή τις μεθοδολογίες ελέγχου που μελετήθηκαν στο πραγματικό περιστροφικό εκκρεμές της εταιρείας Quanser. Αρχικά, προσομοιώθηκε η δυναμική συμπεριφορά του περιστροφικού ανάστροφου εκκρεμούς χωρίς έλεγχο. Αφού υπολογίστηκαν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος, διαμορφώθηκε το γραμμικό του μοντέλο στο χώρο κατάστασης, το οποίο χρησιμοποιήθηκε για τη σχεδίαση του ελεγκτή LQR. Στη συνέχεια σχεδιάστηκε ένας παρατηρητής πλήρους τάξης, ο οποίος χρησιμοποιήθηκε σε συνδυασμό με τον ελεγκτή ανάδρασης LQR. Παρατηρήθηκε από τις προσομοιώσεις, αλλά και από τα πραγματικά πειράματα που πραγματοποιήθηκαν στο περιστροφικό ανάστροφο εκκρεμές, ότι οι αποκρίσεις των καταστάσεων του συστήματος, όταν χρησιμοποιήθηκε το σχήμα ελέγχου LQR-Observer, ήταν καλύτερες σε σχέση με αυτές όπου εφαρμόστηκε ο ελεγκτής LQR χωρίς τη χρήση του παρατηρητή. Για λόγους σύγκρισης σχεδιάστηκε και ο ελεγκτής PID, με τον οποίο όμως ήταν δυνατός ο έλεγχος μόνο μιας κατάστασης του συστήματος. Αυτό σημαίνει ότι ο ελεγκτής LQR είναι όχι μόνο πιο αποδοτικός, αλλά και πιο χρήσιμος από τον ελεγκτή PID, αφού μπορεί να υλοποιηθεί εύκολα και να ελέγχει όλες τις καταστάσεις του συστήματος ικανοποιητικά, αν έχει ρυθμιστεί καταλλήλως. Επιπρόσθετα, υλοποιήθηκε και ένας μη γραμμικός ελεγκτής για την ανύψωση του εκκρεμούς, ο ελεγκτής ανύψωσης. Η λειτουργία του ελεγκτή αυτού βασίζεται στη μηχανική ενέργεια του συστήματος και τη μέγιστη επιτάχυνση του. Για όλα τα πειράματα που πραγματοποιήθηκαν, τα αποτελέσματα που προέκυψαν ήταν κοντά με όσα προβλέπει η θεωρία.

Σαν συνέχεια της εργασίας αυτής, υπάρχουν πολλά περιθώρια μελλοντικής έρευνας. Ενδεικτικά, για την ανύψωση και τη σταθεροποίηση του εκκρεμούς θα μπορούσαν να εφαρμοστούν:

- ένας γραμμικός ή μη γραμμικός προβλεπτικός ελεγκτής (MPC-NMPC)
- ένας ελεγκτής σχεδιασμένος με τη μεθοδολογία ελέγχου backstepping
- μη γραμμικός έλεγχος ολίσθησης επί επιφάνειας (sliding mode control, SMC)
- έλεγχος με τη χρήση νευρωνικών δικτύων ακτινικής συνάρτησης βάσης (radial basis function, RBF)

Βιβλιογραφία – Αναφορές - Διαδικτυακές Πηγές

1. Kalogeropoulos, I., A. Alexandridis, H. Sarimveis, “Economic Oriented Dynamic Matrix Control of Wastewater Treatment Plants”, *Journal of Process Control*, 118 (2022) 202–217. <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2022.08.006>
2. Kapnopoulos, A., A. Alexandridis, “A cooperative particle swarm optimization approach for tuning an MPC-based quadrotor trajectory tracking scheme”, *Aerospace Science and Technology*, 127C (2022) 107725. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2022.107725>
3. Papadimitrakis, M., A. Alexandridis, “Active vehicle suspension control using road preview model predictive control and radial basis function networks”, *Applied Soft Computing*, 120C (2022), 108646. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2022.108646>
4. Papadimitrakis, M. M. Stogiannos, H. Sarimveis, A. Alexandridis, “Multi-ship control and collision avoidance using MPC and RBF-based trajectory predictions”, *Sensors*, 21(21) (2021) 6959. <https://doi.org/10.3390/s21216959>
5. Alexandridis, A., H. Sarimveis, K. Ninos, “RBF network training using a non-symmetric partition of the input space – Application to an MPC configuration”, *Advances in Engineering Software*, 42(10) (2011), pp. 830-837. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2011.05.026>
6. Alexandridis, A., H. Sarimveis, “A nonlinear adaptive MPC framework based on self-correcting RBF network models”, *AIChE Journal*, 51 (2005), pp. 2495-2506. <https://doi.org/10.1002/aic.10505>
7. Kapnopoulos, A., C. Kazakidis, Alex Alexandridis “Quadrotor trajectory tracking based on backstepping control and radial basis function neural networks”, *Results in Control and Optimization*, 14 (2024) 10335. <https://doi.org/10.1016/j.rico.2023.100335>
8. Alexandridis, A., M. Stogiannos, A. Kyriou, H. Sarimveis, “An offset-free neural controller based on approximating the inverse process dynamics” *Journal of Process Control*, 23(7) (2013), pp. 968–979. <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2013.04.008>
9. Alexandridis, A., M. Stogiannos, N. Papaioannou, E. Zois, H. Sarimveis, “An Inverse Neural Controller Based on the Applicability Domain of RBF Network Models”, *Sensors*, 18(1) (2018), 315. <https://doi.org/10.3390/s18010315>
10. Alexandridis, A.P., C.I. Siettos, H.K. Sarimveis, A.G. Boudouvis, G.V. Bafas, “Modeling of nonlinear process dynamics using Kohonen’s Neural Networks, Fuzzy Systems and Chebyshev Series”, *Computers and Chemical Engineering*, 26 (2002), pp. 479–486. [https://doi.org/10.1016/S1570-7946\(01\)80007-9](https://doi.org/10.1016/S1570-7946(01)80007-9)
11. Karamichailidou, D., A. Alexandridis, G. Anagnostopoulos, G. Syriopoulos, O. Sekkas, “Modeling biogas production from anaerobic wastewater treatment plants using radial basis function networks and differential evolution”, *Computers and Chemical Engineering*, 157C (2022), 107629. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2021.107629>
12. Karamichailidou, D., S. Koletsios, A. Alexandridis, “An RBF online learning scheme for non-stationary environments based on fuzzy means and Givens rotations”, *Neurocomputing*, 501C (2022) 370-386. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2022.06.016>
13. K. Furuta, M. Yamakita and S. Kobayashi, "Swing up control of inverted pendulum," *Proceedings IECON '91: 1991 International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation*, Kobe, Japan, 1991, pp. 2193-2198 vol.3, doi: [10.1109/IECON.1991.239008](https://doi.org/10.1109/IECON.1991.239008).
14. Seman, P., Rohal'-Ilkiv, B., Juh'as, M. & Salaj, M. (2013). Swinging up the Furuta Pendulum and its Stabilization Via Model Predictive Control. *Journal of Electrical Engineering*, 64(3) 152-158. <https://doi.org/10.2478/jee-2013-0022>
15. M. Askari, H. A. F. Mohamed, M. Moghavvemi and S. S. Yang, "Model predictive control of an inverted pendulum," 2009 International Conference for Technical Postgraduates

- (TECHPOS), Kuala Lumpur, Malaysia, 2009, pp. 1-4.
<https://doi.org/10.1109/TECHPOS.2009.5412069>
16. Jung , S., and Wen , J. T. (December 3, 2004). "Nonlinear Model Predictive Control for the Swing-Up of a Rotary Inverted Pendulum ." ASME. J. Dyn. Sys., Meas., Control. September 2004; 126(3): 666–673. <https://doi.org/10.1115/1.1789541>
 17. Abdullah M, Amin AA, Iqbal S, Mahmood-ul-Hasan K. Swing up and stabilization control of rotary inverted pendulum based on energy balance, fuzzy logic, and LQR controllers. Measurement and Control. 2021;54(9-10):1356-1370.
<https://doi.org/10.1177/00202940211035406>
 18. Neelakandan, T., subash, S. S., Shanthakumar, S., Sudalaimani, P., & Muniraj*, R. (2020). Rotary Inverted Pendulum Control using Fuzzy Logic Controller. In International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (Vol. 9, Issue 5, pp. 1461–1464). Blue Eyes Intelligence Engineering and Sciences Engineering and Sciences Publication - BEIESP.
<https://doi.org/10.35940/ijitee.e2865.039520>
 19. Akhtaruzzaman, M., & Shafie, A. A. (2010, August). Modeling and control of a rotary inverted pendulum using various methods, comparative assessment and result analysis. In *2010 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation* (pp. 1342-1347). IEEE. <https://doi.org/10.1109/ICMA.2010.5589450>
 20. Mojtaba Ahmadih Khanesar, Mohammad Teshnehlab and Mahdi Aliyari Shoorehdeli, "Sliding mode control of Rotary Inverted Pendulum," 2007 Mediterranean Conference on Control & Automation, Athens, Greece, 2007, pp. 1-6, doi: [10.1109/MED.2007.4433653](https://doi.org/10.1109/MED.2007.4433653).
 21. Chawla, I., Singla, A. Real-Time Stabilization Control of a Rotary Inverted Pendulum Using LQR-Based Sliding Mode Controller. Arab J Sci Eng 46, 2589–2596 (2021).
<https://doi.org/10.1007/s13369-020-05161-7>
 22. H. V. Nghi et al., "A LQR-based Neural-network Controller for Fast Stabilizing Rotary Inverted Pendulum," 2021 International Conference on System Science and Engineering (ICSSE), Ho Chi Minh City, Vietnam, 2021, pp. 19-22, doi: [10.1109/ICSSE52999.2021.9537940](https://doi.org/10.1109/ICSSE52999.2021.9537940).
 23. Pramanik, S., Anwar, S.: Robust controller design for rotary inverted pendulum using H-infinite and μ -synthesis techniques. J. Eng. 2022, 249–260 (2022).
<https://doi.org/10.1049/tje2.12078>
 24. Stogiannos, M., A. Alexandridis, H. Sarimveis, “Model predictive control for systems with fast dynamics using inverse neural models”, ISA Transactions, 72 (2018), Pages 161-177.
<https://doi.org/10.1016/j.isatra.2017.09.016>
 25. Jadlovský,S. & Sarnovský,J.(2013).Modelling of Classical and Rotary Inverted Pendulum Systems – A Generalized Approach. Journal of Electrical Engineering,64(1) 12-19.
<https://doi.org/10.2478/jee-2013-0002>
 26. Silik Y, Yaman U. Control of Rotary Inverted Pendulum by Using On–Off Type of Cold Gas Thrusters. Actuators. 2020; 9(4):95. <https://doi.org/10.3390/act9040095>
 27. J. Apkarian, Lévis M., Gurocak H. (2012). *Student Workbook:Inverted Pendulum Experiment for LabVIEW Users*. Quanser Inc.
 28. Mathew, N. J., Rao, K. K., & Sivakumaran, N. (2013). Swing up and stabilization control of a rotary inverted pendulum. *IFAC Proceedings Volumes*, 46(32), 654-659.
<https://doi.org/10.3182/20131218-3-IN-2045.00128>
 29. Roberto Zanashi:
http://www.dii.unimo.it/~zanasi/didattica/Teoria_dei_Sistemi/Luc_TDS_ING_2016_Linearization_of_Nonlinear_Systems.pdf
 30. Brunton, S. L., & Kutz, J. N. (2019). Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control. Cambridge: Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/9781108380690>

31. Katsuhiko, O. (2009). *Modern control engineering*. Editorial Félix Varela.
32. Radisavljevic-Gajic, V. (2014, April). Linear observers design and implementation. In *Proceedings of the 2014 zone 1 conference of the American society for engineering education* (pp. 1-6). IEEE. <https://doi.org/10.1109/ASEEZone1.2014.6820636>
33. Lungu, M. (2012, October). The estimation of an aircraft motions by using the Bass-Gura full-order observer. In *2012 International Conference on Applied and Theoretical Electricity (ICATE)* (pp. 1-5). IEEE. <https://doi.org/10.1109/ICATE.2012.6403455>
34. J. Apkarian, Lévis M., Gurocak H. (2011). *User Manual:SRV02 Rotary Servo Base Unit*. Quanser Inc.
35. Åström, KJ, & Furuta, K. (2000). Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica* , 36 (2), 287-295. [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(99\)00140-5](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(99)00140-5)
36. Μαλατέστας, Π. Β. (2017). *Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου, 2^η Έκδοση*. Θεσσαλονίκη: Τζιόλα.
37. Βελώνη, Α.Ν. και Κανδρής, Δ. Κ. (2017). *Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου*. Θεσσαλονίκη: Τζιόλα.
38. Dorf, R.C. & Bishop R.H. (2017). *Modern control systems, 13th Edition*. Hoboken: Pearson
39. Johnson, C. D. (1988). Optimal initial conditions for full-order observers. *International journal of Control*, 48(3), 857-864. <https://doi.org/10.1080/00207178808906222>