ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ

Ασυμπτωτική συμπεριφορά συνήθων αριθμητικών συναρτήσεων με εφαρμογές στην θεωρία των αριθμών

Αθανασίου Γεώργιος
Διπλωματική Εργασία
50347186

Επιβλέπων Καθηγητής: Παπαδόπουλος Περικλής
Καθηγητής Πα.Δ.Α.

Εξεταστική Επιτροπή: Χωριανόπουλος Χρήστος
Επίκουρος Καθηγητής Πα.Δ.Α.
Μετάφας Δημήτριος
Επίκουρος Καθηγητής Πα.Δ.Α.

9 Ιουλίου 2024

University of West Attica
Faculty of Engineering
Department of Electrical
and Electronics Engineering

Asymptotic expansion of arithmetic functions with application to analytic number theory

Athanasiou George
Diploma Thesis
50347186

Supervising Professor:	Papadopoulos Pericles
	Professor
Examination Committee:	Chorianopoulos Christos
	Assistant Professor
	Metafas Dimitrios
	Assistant Professor

July 9, 2024

Η Διπλωματική Εργασία έγινε αποδεκτή και βαθμολογήθηκε από την εξής τριμελή επιτροπή :

Παπαδόπουλος Περικλής, Καθηγητής Πα.Δ.Α.	Χωριανόπουλος Χρήστος, Επίκουρος Καθηγητής Πα.Δ.Α.	Μετάφας Δημήτριος, Επίκουρος Καθηγητής Πα.Δ.Α.
PERIKLIS PAPADOPOULOS Digitally signed by PERIKLIS PAPADOPOULOS Date: 2024.07.11 11:01:49 +03'00' (Υπογραφή)	ΧΡΗΣΤΟΣ ΧΩΡΙΑΝΟΠΟΥΛΟΣ Digitally signed by ΧΡΗΣΤΟΣ ΧΩΡΙΑΝΟΠΟΥΛΟΣ Date: 2024.07.11 10:34:12 +03'00' (Υπογραφή)	ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΜΕΤΑΦΑΣ Digitally signed by ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΜΕΤΑΦΑΣ Date: 2024.07.10 20:32:38 +03'00' (Υπογραφή)

ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο κάτωθι υπογεγραμμένος ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ ΓΕΩΡΓΙΟΣ του ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ, με αριθμό μητρώου 50347186, φοιτητής του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής της Σχολής Μηχανικών του Τμήματος Ηλεκτρολόγων και Ηλεκτρονικών Μηχανικών, δηλώνω υπεύθυνα ότι:

«Είμαι ο συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, οι όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε ακριβώς είτε παραφρασμένες, αναφέρονται στο σύνολό τους, με πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία έχει συγγραφεί από μένα αποκλειστικά και αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου, όσο και του Ιδρύματος. Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του τίτλου μου».

Ο Δηλών

Αθανασίου Γεώργιος

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, αναλύονται οι τρόποι υπολογισμού μερικών γνωστών αριθμητικών συναρτήσεων, καθώς και η προσέγγισή τους στο άπειρο. Με τους τρόπους αυτούς, θα επιλύσουμε μια πληθώρα προβλημάτων στην αναλυτική θεωρία των αριθμών, καθώς και την μελέτη συμπεριφοράς τους στο άπειρο. Στη συνέχεια, θα παραθέσουμε διάφορες συναρτήσεις σε MATLAB με σκοπό την οπτικοποίηση και την αριθμητική ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

Λέξεις-κλειδιά: Θεωρία των αριθμών, μιγαδική ανάλυση, θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων, πραγματική ανάλυση, ολοκληρώματα, αριθμητικές συναρτήσεις, σειρές, μετασχηματισμοί, πρώτοι αριθμοί.

Abstract

In this thesis, we are going to analyse with various techniques some of the most known arithmetic functions in analytic number theory. We are going also observe how these functions behave at infinity. After doing that, we are going to apply those results as a suggestion to solve some of the problems in analytic number theory. This report will be provided with some MATLAB functions and their corresponding graphs, as a tool to visualise and verify arithmetically our results.

Keywords: Number theory, complex analysis, residue theorem, real analysis, integrals, number functions, series, transforms, prime numbers.

Ευχαριστίες

Στον καθηγητή Π. Παπαδόπουλο και σε όσους με βοήθησαν για την περάτωση αυτής της εργασίας.

Ασυμπτωτική συμπεριφορά γνωστών αριθμητικών συναρτήσεων με εφαρμογές στην θεωρία των αριθμών

Αθανασίου Γεώργιος
ene47186@uniwa.gr

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Προαπαιτούμενες Γνώσεις

1.1 Μετασχηματισμοί

Οι μετασχηματισμοί με ολοκληρώματα έχουν χρησιμοποιηθεί με επιτυχία τους τελευταίους δύο αιώνες. Οι μετασχηματισμοί έχουν λύσει μια πληθώρα προβλημάτων στα εφαρμοσμένα μαθηματικά και σε κλάδους της θετικής επιστήμης, οι οποίοι έχουν ως κύρια ασχολία τις διαφορικές εξισώσεις. Οι πρωτοπόροι που ασχολήθηκαν με τους μετασχηματισμούς με ολοκληρώματα, είναι ο P.S. Laplace (1749-1827) και ο Joseph Fourier (1768-1830) με τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς που πήραν και τα ονόματά τους. Οι μετασχηματισμοί αυτοί, μας παρέχουν λύσεις στις διαφορικές και ολοκληρωτικές εξισώσεις. Σε αυτήν την ενότητα, θα δώσουμε μερικούς ορισμούς, καθώς και μερικές εξισώσεις που θα μας χρειαστούν στις παρακάτω ενότητες. Για περαιτέρω ανάγνωση και μελέτη επάνω στους μετασχηματισμούς, σας παραπέμπουμε στα βιβλία [9] και [8]. Κατά κύρια έννοια, οι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί έχουν την ακόλουθη γενική μορφή:

$$\mathscr{I}\{f(x)\} = F(k) = \int_a^b K(x,k)f(x)\,dx \tag{1.1}$$

Όπου $f(x)$ η συνάρτηση που θέλουμε να μετασχηματιστεί, $K(x,k)$ είναι ο πυρήνας του μετασχηματισμού, δηλαδή μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, που στέλνει την συνάρτηση $f(x)$ στην συνάρτηση $F(k)$, η οποία λέγεται εικόνα του μετασχηματισμού, με μεταβλητή μετασχηματισμού $k \in \mathbb{C}$. $\mathscr{I}$ λέγεται τελεστής του μετασχηματισμού. Οι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί, μπορούν να επεκταθούν και για περισσότερες μεταβλητές, αλλά ξεφεύγουν από τον σκοπό της εργασίας αυτής, οπότε σας παραπέμπουμε στο βιβλίο [9].

Μία προφανής ιδιότητα, λόγω της γραμμικότητας των ολοκληρωμάτων, είναι ότι και οι μετασχηματισμοί είναι γραμμικοί, δηλαδή:

$$\mathscr{I}\{af(x)+\beta g(x)\} = \int_a^b K(x,k)\{af(x)+\beta g(x)\}\,dx = a\mathscr{I}\{f(x)\}+\beta\mathscr{I}\{g(x)\} \tag{1.2}$$

όπου a και β τυχαίες σταθερές.

Εισάγουμε επίσης την έννοια του τελεστή του αντίστροφου μετασχηματισμού ($\mathscr{I}^{-1}$), ο οποίος ορίζεται ως:

$$\mathscr{I}^{-1}\{F(k)\} = f(x) \tag{1.3}$$

και έχει την ίδια γραμμική ιδιότητα, με άλλα λόγια:

$$\mathscr{I}^{-1}\{aF(k)+\beta G(k)\} = \mathscr{I}^{-1}\{a\mathscr{I}\{f(x)\}+\beta\mathscr{I}\{g(x)\}\} \tag{1.4}$$

ή:

$$\mathscr{I}^{-1}\{\mathscr{I}\{af(x)+\beta g(x)\}\} = af(x)+\beta g(x) = a\mathscr{I}^{-1}\{F(k))\}+\beta\mathscr{I}^{-1}\{G(k)\} \tag{1.5}$$

1.1.1 Fourier

Ορισμοί

Ορισμός 1.1.1 (Μετασχηματισμός Fourier)**.** Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ως μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης f ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης:

$$\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\ \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \tag{1.6}$$

με την προϋπόθεση ότι η $\hat{f}(\omega)$ υπάρχει στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$. Άλλοι συμβολισμοί του μετασχηματισμού Fourier είναι οι $\mathscr{F}\{f\}$ και $\mathscr{F}\{f(t)\}$.

Ορισμός 1.1.2 (Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier)**.** Έστω $\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ως αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $\hat{f}$ ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\ f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \tag{1.7}$$

με την προϋπόθεση ότι η $f(t)$ υπάρχει στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$. Άλλοι συμβολισμοί του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier είναι οι $\mathscr{F}^{-1}\{\hat{f}\}$ και $\mathscr{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\}$.

Να προσθέσουμε ότι, οι παραπάνω ορισμοί δεν είναι οι μοναδικοί για τον μετασχηματισμό και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier , μερικές φορές θα τους δείτε και ως εξής:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \tag{1.8}$$

για τον μετασχηματισμό Fourier και:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \tag{1.9}$$

για τον αντίστροφό του.

Βασικές Ιδιότητες

Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, $\hat{f}=\mathscr{F}\{f\}$ και $\hat{g}=\mathscr{F}\{g\}$ οι μετασχηματισμοί Fourier των f και g. Τότε, έχουμε τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Γραμμική ιδιότητα

$$\mathscr{F}\{af(t)+\beta g(t)\} = a\mathscr{F}\{f(t)\}+\beta\mathscr{F}\{g(t)\},\ \forall a,\beta\in\mathbb{C} \tag{1.10}$$

2. Συμμετρία
$$\mathscr{F}\{\hat{f}(t)\} = 2\pi f(-\omega) \tag{1.11}$$

3. Κλιμάκωση χρόνου
$$\mathscr{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right),\ a \neq 0 \tag{1.12}$$

4. Μετατόπιση χρόνου
$$\mathscr{F}\{f(t-t_0)\} = \hat{f}(\omega)e^{-i\omega t_0},\ t_0 \in \mathbb{R} \tag{1.13}$$

5. Μετατόπιση συχνότητας
$$\mathscr{F}\{e^{i\omega_0 t}f(t)\} = \hat{f}(\omega-\omega_0),\ \omega_0 \in \mathbb{R} \tag{1.14}$$

6. Παραγώγιση στον χρόνο
$$\mathscr{F}\{f^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n\hat{f}(\omega),\ n \in \mathbb{N} \tag{1.15}$$
με την προϋπόθεση ότι η f είναι n φορές παραγωγίσιμη και υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier αυτής.

7. Παραγώγιση στην συχνότητα
$$\mathscr{F}\{(-it)^n f(t)\} = \hat{f}^{(n)}(\omega),\ n \in \mathbb{N} \tag{1.16}$$
με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση $t^n f(t)$ συγκλίνει στο διάστημα ολοκλήρωσης.

8. Συζυγής συνάρτηση
$$\mathscr{F}\{\bar{f}(t)\} = \bar{\hat{f}}(-\omega), \tag{1.17}$$
όπου $\bar{f}$ ο συζυγής μιγαδικός αριθμός της συνάρτησης.

9. Θεώρημα συνέλιξης
Η συνέλιξη ορίζεται ως:
$$(f*g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau, \tag{1.18}$$
$$\mathscr{F}\{(f*g)(t)\} = \mathscr{F}\{f(t)\}\mathscr{F}\{g(t)\}. \tag{1.19}$$
και:
$$\mathscr{F}\{f(t)g(t)\} = \mathscr{F}\{f(t)\} * \mathscr{F}\{g(t)\} \tag{1.20}$$

Για την απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων, σας παραπέμπουμε στο εγχειρίδιο [8].

Χρήσιμες συναρτήσεις

Μερικές σημαντικές συναρτήσεις που θα μας απασχολήσουν παρακάτω είναι:

- Η συνάρτηση δέλτα του Dirac :

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0. \end{cases} \tag{1.21}$$

Μερικές από τις ιδιότητές της είναι:

$$\int_c^d \delta(t-a)f(t)\,dt = f(a),\ \forall a \in (c,d),\ \forall a,c,d \in \mathbb{R}, \tag{1.22}$$

$$\delta(t-a)f(t) = f(a)\delta(t-a), \tag{1.23}$$

και:

$$\mathscr{F}\{\delta(t)\} = 1 \tag{1.24}$$

- Η συνάρτηση κατωφλίου του Heaviside :

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases} \tag{1.25}$$

Ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Fourier είναι:

$$\mathscr{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}. \tag{1.26}$$

Ένας άλλος ορισμός της συνάρτησης Heaviside είναι:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases} \tag{1.27}$$

Ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Fourier είναι:

$$\mathscr{F}\{H(t)\} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon + i\omega}, \tag{1.28}$$

ο οποίος θα μας χρειαστεί αργότερα.
Η εξίσωση που συνδέει την συνάρτηση δέλτα του Dirac με την συνάρτηση κατωφλίου του Heaviside είναι:

$$\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx}. \tag{1.29}$$

- Η κανονικοποιημένη συνάρτηση sinc :

$$sinc(k) = \frac{\sin \pi k}{\pi k} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \in \mathbb{Z} - \{0\}. \end{cases} \tag{1.30}$$

Τρεις ιδιότητες της παραπάνω συνάρτησης είναι οι εξής:

$$\int_{-\infty}^{\infty} sinc(x)\,dx = 1, \tag{1.31}$$

$$\sum_{n=a}^{b} sinc(k-n)f(n) = f(k),\ \forall k \in \mathbb{Z} \cap [a,b] \tag{1.32}$$

και:

$$\mathscr{F}\{sinc(t)\} = H(\omega+\pi) - H(\omega-\pi). \tag{1.33}$$

1.1.2 Laplace

Ορισμοί

Ορισμός 1.1.3 (Μετασχηματισμός Laplace)**.** Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ως μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης f ορίζεται η συνάρτηση:

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt. \tag{1.34}$$

Ένας άλλος συμβολισμός είναι:

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}, \tag{1.35}$$

με την προϋπόθεση ότι η $\mathscr{L}\{f\}(s)$ υπάρχει στο μιγαδικό σύνολο D, δηλαδή:

$$D = \{s \in \mathbb{C} : |\mathscr{L}\{f\}(s)| < \infty\},$$

όπου $|z|$ η μιγαδική απόλυτη τιμή.

Ορισμός 1.1.4 (Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace)**.** Έστω $F = F(s) : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ως αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $F(s)$ ορίζεται το μιγαδικό ολοκλήρωμα της συνάρτησης:

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st}\,ds, \tag{1.36}$$

με την προϋπόθεση ότι η $f(t)$ υπάρχει στο $t \in [0, +\infty)$. Στο παραπάνω ολοκλήρωμα, ολοκληρώνουμε στο ημικύκλιο $D = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) < \sigma, \Im(s) \in (-\infty, +\infty)\}$, οπότε το άλλο μέρος του ημικυκλίου το αγνοούμε, λαμβάνοντας υπόψη ότι η $F(s)e^{st}$ συγκλίνει για $\Re(s) \to -\infty$ και $t \in [0, +\infty)$ και μας μένει η κατακόρυφη γραμμή $\{\Re(s) = \sigma, \Im(s) \in (-\infty, +\infty)\}$. Για τον υπολογισμό των αντίστροφων μετασχηματισμών που αναφέρονται, θα μας χρειαστούν τεχνικές μιγαδικής ολοκλήρωσης, όπως το Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων και το Θεώρημα του Cauchy, όπου θα συζητηθούν στην ενότητα 1.3.

Βασικές Ιδιότητες

Έστω $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, $F(s) = \mathscr{L}\{f\}$ και $G(s) = \mathscr{L}\{g\}$ οι μετασχηματισμοί Laplace των f και g. Τότε, έχουμε τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Γραμμική ιδιότητα

$$\mathscr{L}\{af(t) + \beta g(t)\} = a\mathscr{L}\{f(t)\} + \beta\mathscr{L}\{g(t)\},\ \forall a, \beta \in \mathbb{C}, \tag{1.37}$$

2. Κλιμάκωση χρόνου

$$\mathscr{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),\ a \neq 0. \tag{1.38}$$

3. Μετατόπιση χρόνου

$$\mathscr{L}\{u(t - t_0)f(t - t_0)\} = F(s)e^{-st_0},\ t_0 \in \mathbb{R}. \tag{1.39}$$

4. Μετατόπιση συχνότητας
$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a),\ a \in \mathbb{C}. \tag{1.40}$$

5. Παραγώγιση στον χρόνο
$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0),\ n \in \mathbb{N} \tag{1.41}$$
με την προϋπόθεση ότι η f είναι n φορές παραγωγίσιμη και υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace αυτής.

6. Παραγώγιση στην συχνότητα
$$\mathscr{L}\{(-t)^n f(t)\} = F^{(n)}(s),\ n \in \mathbb{N} \tag{1.42}$$
με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση $t^n f(t)$ συγκλίνει στο διάστημα ολοκλήρωσης.

7. Θεώρημα συνέλιξης
Η συνέλιξη εδώ ορίζεται ως:
$$(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau, \tag{1.43}$$
$$\mathscr{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s). \tag{1.44}$$
και:
$$\mathscr{L}\{f(t)g(t)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(\sigma)G(s-\sigma)\, d\sigma. \tag{1.45}$$

Για την απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων, σας παραπέμπουμε στο εγχειρίδιο [8] και [9].

Μετασχηματισμός Laplace χρήσιμων συναρτήσεων

Οι ιδιότητες των παρακάτω συναρτήσεων αναφέρονται στην υποενότητα 1.1.1.

- Η συνάρτηση δέλτα του Dirac :
$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1. \tag{1.46}$$

- Η συνάρτηση κατωφλίου του Heaviside u(t) : Ο μετασχηματισμός Laplace είναι:
$$\mathscr{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s},\ \Re(s) > 0. \tag{1.47}$$

- Ο μετασχηματισμός Laplace της $H(t)$ είναι:
$$\mathscr{L}\{H(t)\} = \frac{1}{s},\ \Re(s) > 0. \tag{1.48}$$

- Ο μετασχηματισμός Laplace της κανονικοποιημένης συνάρτησης sinc είναι:
$$\mathscr{L}\{sinc(t)\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{s}{\pi}\right), \tag{1.49}$$
όπου arctan(x) η αντίστροφη συνάρτηση της εφαπτομένης, δηλαδή $x = \tan(\partial)$, $-\pi/2 < \partial < \pi/2$.

1.1.3 Mellin

Ορισμοί

Ορισμός 1.1.5 (Μετασχηματισμός Mellin)**.** Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ως μετασχηματισμός Mellin της συνάρτησης f ορίζεται η συνάρτηση:

$$\mathscr{M}\{f\}(s) = \bar{f}(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}\, dx. \tag{1.50}$$

Ένας άλλος συμβολισμός είναι:

$$\bar{f}(s) = \mathscr{M}\{f(x)\}, \tag{1.51}$$

με την προϋπόθεση ότι η $\mathscr{M}\{f\}(s)$ υπάρχει στο μιγαδικό σύνολο D, δηλαδή:

$$D = \{s \in \mathbb{C} : |\mathscr{M}\{f\}(s)| < \infty\},$$

όπου $|z|$ η μιγαδική απόλυτη τιμή.

Ορισμός 1.1.6 (Αντίστροφος μετασχηματισμός Mellin)**.** Έστω $\bar{f} = \bar{f}(s) : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ως αντίστροφος μετασχηματισμός Mellin της συνάρτησης $\bar{f}(s)$ ορίζεται το μιγαδικό ολοκλήρωμα της συνάρτησης:

$$\mathscr{M}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(s)x^{-s}\, ds, \tag{1.52}$$

με την προϋπόθεση ότι η $f(x)$ υπάρχει στο $x \in [0, +\infty)$. Στο παραπάνω ολοκλήρωμα, ολοκληρώνουμε στο ημικύκλιο $D = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) < \sigma, \Im(s) \in (-\infty, +\infty)\}$, οπότε το μέρος του ημικυκλίου το αγνοούμε, λαμβάνοντας υπόψη ότι η $\bar{f}(s)x^{-s}$ συγκλίνει για $\Re(s) \to -\infty$ και $x \in [0, +\infty)$ και μας μένει η κατακόρυφη γραμμή $\{\Re(s) = \sigma, \Im(s) \in (-\infty, +\infty)\}$. Για τον υπολογισμό των αντίστροφων μετασχηματισμών που αναφέρονται, θα μας χρειαστούν τεχνικές μιγαδικής ολοκλήρωσης, όπως το Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων και το Θεώρημα του Cauchy, όπως θα συζητηθούν στην ενότητα 1.3.

Βασικές Ιδιότητες

Έστω $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, $\bar{f}(s) = \mathscr{M}\{f\}$ και $\bar{g}(s) = \mathscr{M}\{g\}$ οι μετασχηματισμοί Mellin των f και g. Τότε, έχουμε τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Γραμμική ιδιότητα

$$\mathscr{M}\{af(t) + \beta g(t)\} = a\mathscr{M}\{f(t)\} + \beta\mathscr{M}\{g(t)\},\ \forall a, \beta \in \mathbb{C}. \tag{1.53}$$

2. Κλιμάκωση μεταβλητής

$$\mathscr{M}\{f(ax)\} = a^{-s}\bar{f}(s),\ a > 0. \tag{1.54}$$

3. Μετατόπιση μιγαδικής μεταβλητής

$$\mathscr{M}\{x^a f(x)\} = \bar{f}(s + a),\ a \in \mathbb{C}. \tag{1.55}$$

4. Παραγώγιση στην πραγματική μεταβλητή

$$\mathscr{M}\{f^{(n)}(x)\} = (-1)^n \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)} \bar{f}(s-n),\ n \in \mathbb{N}, \tag{1.56}$$

με την προϋπόθεση ότι η f είναι n φορές παραγωγίσιμη και υπάρχει ο μετασχηματισμός Mellin αυτής. Επίσης, η συνάρτηση $x^{s-r-1} f^{(r)}(x) = 0$ για $x \to 0$ και $r = 0, 1, 2, ..., (n-1)$.

5. Παραγώγιση στην μιγαδική μεταβλητή

$$\mathscr{M}\{(\log(x))^n f(x)\} = \bar{f}^{(n)}(s),\ n \in \mathbb{N}, \tag{1.57}$$

με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση $(\log(x))^n f(x)$ συγκλίνει στο διάστημα ολοκλήρωσης.

6. Θεώρημα συνέλιξης
Η συνέλιξη εδώ ορίζεται ως:

$$(f * g)(x) := \int_0^\infty f(\xi) g\left(\frac{x}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi}, \tag{1.58}$$

$$\mathscr{M}\{(f * g)(x)\} = \bar{f}(s)\bar{g}(s). \tag{1.59}$$

και:

$$\mathscr{M}\{f(x)g(x)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{f}(\sigma)\bar{g}(s-\sigma)\, d\sigma. \tag{1.60}$$

Για την απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων, σας παραπέμπουμε στο εγχειρίδιο [8] και [9].

Μετασχηματισμός Mellin χρήσιμων συναρτήσεων

Οι ιδιότητες των παρακάτω συναρτήσεων αναφέρονται στην υποενότητα 1.1.1.

- Η συνάρτηση δέλτα του Dirac :

$$\mathscr{M}\{\delta(x-a)\} = a^{s-1},\ a > 0. \tag{1.61}$$

- Ο μετασχηματισμός Mellin της συνάρτησης κατωφλίου $H(x)$ είναι:

$$\mathscr{M}\{H(a-x)\} = \frac{a^s}{s},\ \Re(s) > 0. \tag{1.62}$$

- Ο μετασχηματισμός Mellin της συνάρτησης e^{-x} είναι:

$$\mathscr{M}\{e^{-x}\} = \Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1), \tag{1.63}$$

όπου $\Gamma(s)$ η συνάρτηση Γάμμα [4].
Με την παραπάνω εξίσωση, παίρνουμε:

$$Res(\Gamma(s); -k) = \frac{(-1)^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, 3, ... \tag{1.64}$$

Για την απόδειξη της παραπάνω εξίσωσης, σας παραπέμπουμε στο βιβλίο [4].

- Ο μετασχηματισμός Mellin της συνάρτησης e^{-ikx} είναι:

$$\mathscr{M}\{e^{-ikx}\} = \frac{\Gamma(s)}{(ik)^s}, \tag{1.65}$$

  που στην ουσία είναι ένας συνδυασμός των εξισώσεων 1.63 και 1.54.

- Με την εξίσωση 1.65 παίρνουμε τους εξής μετασχηματισμούς:

$$\mathscr{M}\{cos(kx)\} = \frac{\Gamma(s)}{k^s} cos\left(\frac{\pi s}{2}\right), \tag{1.66}$$

  και:

$$\mathscr{M}\{sin(kx)\} = \frac{\Gamma(s)}{k^s} sin\left(\frac{\pi s}{2}\right). \tag{1.67}$$

1.1.4 Ζήτα

Ορισμός 1.1.7 (Αμφίπλευρος μετασχηματισμός Ζήτα)**.** Έστω $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ως αμφίπλευρος μετασχηματισμός Ζήτα της ακολουθίας $x(n)$ ορίζεται η απειροσειρά:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}. \tag{1.68}$$

Ορισμός 1.1.8 (Μονόπλευρος μετασχηματισμός Ζήτα)**.** Έστω $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ως μονόπλευρος μετασχηματισμός Ζήτα της ακολουθίας $x(n)$ ορίζεται η απειροσειρά:

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}, \tag{1.69}$$

όπου είναι μια ειδική περίπτωση του αμφίπλευρου μετασχηματισμού Ζήτα, ιδίως αν λάβουμε υπόψη ότι ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Ζήτα της ακολουθίας $x(n)$ είναι ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός Ζήτα της ακολουθίας $x(n)u(n)$, όπου $u(n)$ είναι η διακριτή συνάρτηση κατωφλίου, που θα συζητηθεί παρακάτω.

Ορισμός 1.1.9 (Περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Ζήτα)**.** Εδώ, παραθέτουμε μια πληθώρα συνθηκών για την μεταβλητή z, οι οποίες πρέπει να τηρηθούν για να υπάρχει ο μετασχηματισμός Ζήτα.

- Αν η ακολουθία $x(n)$ είναι μηδέν για κάθε $n < n_0$, τότε η Περιοχή Σύγκλισης είναι η εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου στο μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή $|z| > a$. Το ίδιο ισχύει και για τον μονόπλευρο μετασχηματισμό Ζήτα.
- Αν η ακολουθία $x(n)$ είναι μηδέν για κάθε $n > n_0$, τότε η Περιοχή Σύγκλισης είναι η εσωτερική επιφάνεια ενός κύκλου στο μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή $|z| < b$.
- Αν η ακολουθία $x(n)$ είναι αμφίπλευρη, τότε η Περιοχή Σύγκλισης είναι η δακτυλιοειδής επιφάνεια πάνω στο μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή $a < |z| < b$, όπου μπορεί να είναι $a = 0$ ή $b = +\infty$.
- Αν η ακολουθία $x(n)$ είναι πεπερασμένης διάρκειας, δηλαδή $x(n) \neq 0$, $n \in [n_1 : n_2]$, τότε η περιοχή σύγκλισης είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο, εκτός από τα σημεία $z = 0$ αν $n_2 > 0$ και $z = +\infty$ αν $n_1 < 0$.

- Αν ο μετασχηματισμός Ζήτα μίας ακολουθίας είναι ρητή συνάρτηση του z της μορφής:
$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)},$$
τότε οι ρίζες του αριθμητή καλούνται μηδενικά (zeros) της και οι ρίζες του παρονομαστή καλούνται πόλοι (poles) της $X(z)$. Προφανώς, στην περίπτωση αυτή, η Περιοχή Σύγκλισης δεν περιλαμβάνει τους πόλους.

Ορισμός 1.1.10 (Αντίστροφος μετασχηματισμός Ζήτα)**.** Έστω $X : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{Z}$ ο μετασχηματισμός Ζήτα της ακολουθίας $x(n)$. Ως αντίστροφος μετασχηματισμός Ζήτα της συνάρτησης $X(z)$ ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z) z^{n-1}\, dz, \tag{1.70}$$

με την προϋπόθεση ότι η καμπύλη C περικλείει το μιγαδικό επίπεδο στο πεδίο σύγκλισης του $X(z)$. Για τον υπολογισμό των αντίστροφων μετασχηματισμών που αναφέρονται, θα μας χρειαστούν τεχνικές μιγαδικής ολοκλήρωσης, όπως το Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων και το Θεώρημα του Cauchy, όπως θα συζητηθούν στην ενότητα 1.3.

Βασικές Ιδιότητες

Έστω $x, y : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών, $X(z)$ και $Y(z)$ οι μετασχηματισμοί Ζήτα των x και y. Τότε, έχουμε τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Γραμμική ιδιότητα
   Αν $x_1(n) \to X_1(z)$ και $x_2(n) \to X_2(z)$ τότε:
   $$y(n) = a x_1(n) + \beta x_2(n),\ \forall a, \beta \in \mathbb{C}, \tag{1.71}$$
   εφαρμόζοντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Ζήτα:
   $$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a x_1(n) + \beta x_2(n)] z^{-n}. \tag{1.72}$$
   Από την γραμμικότητα της άθροισης και την επιμεριστική ιδιότητα:
   $$Y(z) = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) z^{-n} + \beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) z^{-n}, \tag{1.73}$$
   ή:
   $$Y(z) = a X_1(z) + \beta X_2(z),\ \forall a, \beta \in \mathbb{C}. \tag{1.74}$$
   Να σημειώσουμε ότι, το πεδίο σύγκλισης της $Y(z)$ είναι η τομή των πεδίων σύγκλισης των $X_1(z)$ και $X_2(z)$.

2. Μετατόπιση ακολουθίας
   $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - n_0) z^{-n}, \tag{1.75}$$
   που με αλλαγή μεταβλητής, γίνεται:
   $$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n-n_0} = z^{-n_0} X(z). \tag{1.76}$$

Το πεδίο σύγκλισης είναι το ίδιο με την $X(z)$ εκτός για $z = 0,\ n_0 > 0$ ή $z = +\infty,\ n_0 < 0$.

3. Μετατόπιση μιγαδικής μεταβλητής:
Αν $y(n) = a^n x(n)$ τότε:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n},\ a \in \mathbb{C}. \tag{1.77}$$

Με αλλαγή της μεταβλητής z σε $a\zeta$ έχουμε:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n)(a\zeta)^{-n}, \tag{1.78}$$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\zeta^{-n} = X(\zeta) = X(a^{-1}z). \tag{1.79}$$

Το πεδίο σύγκλισης της $Y(z)$ είναι το ίδιο με της $X(z)$ πολλαπλασιασμένη με την απόλυτη τιμή της $|a|$.

4. Αναδίπλωση:
Αν $y(n) = x(-n)$, τότε:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)\zeta^{-n}. \tag{1.80}$$

Με την αντικατάσταση $-n \to n$, έχουμε:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\zeta^{n} = X(z^{-1}). \tag{1.81}$$

5. Θεώρημα συνέλιξης:
Η συνέλιξη εδώ ορίζεται ως:

$$y(n) = (x_1 * x_2)(n) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m), \tag{1.82}$$

$$Y(z) = X_1(z)X_2(z). \tag{1.83}$$

Το πεδίο σύγκλισης της $Y(z)$ είναι η τομή των πεδίων σύγκλισης των $X_1(z)$ και $X_2(z)$. Αν $y(n) = x_1(n)x_2(n)$ τότε:

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C X_1(w)X_2\left(\frac{z}{w}\right)\frac{dw}{w}, \tag{1.84}$$

όπου η καμπύλη C περικλείει την τομή των πεδίων σύγκλισης των $X_1(w)$ και $X_2\left(\frac{z}{w}\right)$.

6. Θεώρημα τελικής τιμής

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z). \tag{1.85}$$

Για την απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων, σας παραπέμπουμε στο εγχειρίδιο [9].

Χρήσιμες συναρτήσεις

- Η διακριτή συνάρτηση δέλτα του Dirac :

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0. \end{cases} \tag{1.86}$$

  Από εδώ και πέρα, η διακριτή συνάρτηση δέλτα του Dirac θα συμβολίζεται ως $\mathbb{1}_0(n)$ προς αποφυγή σύγχυσης.
  Ο μετασχηματισμός Ζήτα της διακριτής συνάρτησης δέλτα του Dirac είναι:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = z^0 = 1. \tag{1.87}$$

- Η διακριτή συνάρτηση κατωφλίου $u(n)$ ορίζεται ως:

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0. \end{cases} \tag{1.88}$$

  Ο μετασχηματισμός Ζήτα της συνάρτησης κατωφλίου $u(n)$ είναι:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) z^{-n} = \frac{z}{z-1}, \ |z| > 1. \tag{1.89}$$

  Η παραπάνω εξίσωση είναι το γνωστό άθροισμα της Γεωμετρικής προόδου με λόγο z^{-1}.

- Ο μετασχηματισμός Ζήτα της ακολουθίας $nu(n)$ είναι:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} nu(n) z^{-n} = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z}{(z-1)^2}, \ |z| > 1. \tag{1.90}$$

- Ο μετασχηματισμός Ζήτα της ακολουθίας $u(n)\frac{1}{n!}$ είναι:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{u(n)}{n!} z^{-n} = e^{\frac{1}{z}}, \ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{1.91}$$

1.2 Σειρές

Οι σειρές αποτελούν σημαντικό εργαλείο στην Μαθηματική Ανάλυση και παίζουν σημαντικό ρόλο στον προσεγγιστικό υπολογισμό συναρτήσεων, λύνοντας μια πληθώρα προβλημάτων όπως στις διαφορικές εξισώσεις, στις εξισώσεις διαφορών, καθώς και στην αριθμητική προσέγγιση τιμών. Σε αυτήν την ενότητα, θα ασχοληθούμε με τρία είδη σειρών, οι οποίες έχουν άμεση σχέση με τα προβλήματα που θα μας απασχολήσουν στα επόμενα κεφάλαια. Οι σειρές συνήθως έχουν την εξής γενική μορφή:

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n g_n(x). \tag{1.92}$$

Όπου a_n είναι σταθερές οι οποίες ορίζονται από τις συναρτήσεις $f_N(x)$ και $g_n(x)$. Η συνάρτηση $f_N(x)$ είναι η συνάρτηση που προσεγγίζεται και η $g_n(x)$ είναι μια ακολουθία συναρτήσεων, με τις οποίες το παραπάνω άθροισμα προσεγγίζει την $f(x)$ καθώς το N τείνει στο άπειρο.

1.2.1 Fourier

Οι σειρές Fourier, μας δίνουν ένα διακριτό άθροισμα από εκθετικές ή τριγωνομετρικές σειρές με συγκεκριμένες συχνότητες. Η συνάρτηση αυτή που θέλουμε να επεκτείνουμε σε σειρές Fourier είναι περιοδική.

Ορισμός 1.2.1 (Περιοδική συνάρτηση)**.** Εάν μια συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο T, τότε ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$f(x) = f(x+T) = f(x+nT),\ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{1.93}$$

Επίσης, μία μη-περιοδική συνάρτηση g μπορεί να περιοριστεί σε περιοδική συνάρτηση με περίοδο T, g_T, μέσω της σχέσης:

$$g_T(x) = g\left(T\left\{\frac{x}{T}\right\}\right). \tag{1.94}$$

Με $\left\{\frac{x}{T}\right\}$ να είναι το κλασματικό μέρος του $\frac{x}{T}$.

Ορισμός 1.2.2 (Συντελεστές Εκθετικής Σειράς Fourier)**.** Εάν η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$ και έστω το μήκος L όπου $L = b - a$, τότε οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier ορίζονται με το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)e^{-2\pi inx/L}\,dx,\ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{1.95}$$

Ορισμός 1.2.3 (Εκθετική Σειρά Fourier)**.** Η εκθετική σειρά Fourier της f ορίζεται από το άθροισμα:

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{2\pi inx/L}, \tag{1.96}$$

το οποίο για $N \to \infty$ τείνει προς την $f(x)$. Η πρόταση αυτή συμβολίζεται ως:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi inx/L}. \tag{1.97}$$

Η 1.97 είναι ο επίσημος ορισμός της σειράς Fourier. Ο παραπάνω ορισμός στηρίζεται στην εξίσωση:

$$\frac{1}{L}\int_a^b e^{-2\pi inx/L}e^{2\pi ikx/L}\,dx = \delta_{k,n},\ \forall k, n \in \mathbb{Z}, \tag{1.98}$$

όπου $\delta_{k,n}$ το δέλτα του Kronecker, με την ακόλουθη ιδιότητα:

$$\delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n. \end{cases} \tag{1.99}$$

Ορισμός 1.2.4 (Τριγωνομετρική Σειρά Fourier)**.** Η τριγωνομετρική σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης f με περίοδο L στο διάστημα $0 \leq x \leq L$ ορίζεται από το άθροισμα:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\right]. \tag{1.100}$$

Ορισμός 1.2.5 (Συντελεστές Τριγωνομετρικής Σειράς Fourier)**.** Παρακάτω δίνονται οι συντελεστές της τριγωνομετρικής σειράς Fourier, (a_n, b_n):

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\, dx, \tag{1.101}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx, \tag{1.102}$$

και:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx. \tag{1.103}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις στηρίζονται στις ακόλουθες σχέσεις ορθοκανονικότητας:

$$\frac{2}{L}\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) dx = 0,\ \forall m, n \in \mathbb{Z}, \tag{1.104}$$

$$\frac{2}{L}\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) dx = \delta_{n,m},\ \forall m, n \in \mathbb{Z}, \tag{1.105}$$

και:

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) dx = \delta_{n,m},\ \forall m, n \in \mathbb{Z}, \tag{1.106}$$

όπου $\delta_{n,m}$ το δέλτα του Kronecker. Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να υπολογιστούν με τις γνωστές τριγωνομετρικές ιδιότητες και λαμβάνοντας υπόψη την περιοδικότητα των συναρτήσεων του ημίτονου ($\sin x = \sin(x + 2\pi)$) και του συνημίτονου ($\cos x = \cos(x + 2\pi)$). Για περαιτέρω μελέτη, παρακαλούμε ο αναγνώστης να απευθυνθεί στα βιβλία [5] και [11].

1.2.2 Dirichlet

Μία σειρά Dirichlet, είναι μια οποιαδήποτε σειρά της μορφής:

$$D(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \tag{1.107}$$

όπου $s \in \mathbb{C}$ μια μιγαδική μεταβλητή και $f(n)$ μία ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Ο παραπάνω ορισμός είναι μια ειδική περίπτωση των γενικευμένων σειρών Dirichlet [7].

Θεώρημα 1.2.1 (Συνέλιξη Σειρών Dirichlet)**.** Έστω $D(f, s) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)k^{-s}$ και $D(g, s) = \sum_{m=1}^{\infty} g(m)m^{-s}$ δύο σειρές Dirichlet που συγκλίνουν απόλυτα. Τότε:

$$D(f, s)D(g, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{m|n} f(m)g(n/m)}{n^s}, \tag{1.108}$$

με απόλυτη σύγκλιση. Η παραπάνω σχέση, αποδεικνύεται εύκολα με απλή αλλαγή μεταβλητών, δηλαδή $km = n \in \mathbb{N}$ άρα $k|n$ ή $m|n$.

Θεώρημα 1.2.2 (Παραγωντικός τύπος Euler)**.** Έστω $\chi : \mathbb{N}^{+} \to \mathbb{Z}$ ένας χαρακτήρας με την ιδιότητα $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$, τότε ο παραγωντικός τύπος Euler ορίζεται ως:

$$D(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}. \tag{1.109}$$

Η παραπάνω εξίσωση, έχει εφαρμογή στην απόδειξη του θεωρήματος πρώτων αριθμών, για παραπάνω λεπτομέρειες ως προς την απόδειξή του, ο αναγνώστης μπορεί να παραπεμφθεί στο βιβλίο [2].

Θεώρημα 1.2.3 (Σειρές Dirichlet ως μετασχηματισμός Mellin)**.** Έστω f μια αριθμητική συνάρτηση, η $S_x[f]$ ορίζεται ως:

$$S_x[f] = \begin{cases} \sum_{n \leq x} f(n) & x \geq 1 \\ 0 & 0 < x < 1, \end{cases} \tag{1.110}$$

τότε η σειρά Dirichlet ορίζεται ως μετασχηματισμός Mellin από τη εξίσωση:

$$D(f, s) = s \int_1^{\infty} \frac{S_x[f]}{x^{s+1}}\, dx, \;\; \Re(s) > \sigma_0 \tag{1.111}$$

όπου σ_0 η τετμημένη σύγκλισης της $D(f, s)$.

Θεώρημα 1.2.4 (Τετμημένη σύγκλισης της σειράς Dirichlet)**.** Η τετμημένη σύγκλισης της $D(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ είναι ο πραγματικός αριθμός $\sigma_c \in \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- αν $\Re(s) > \sigma_c$ τότε η $D(f, s)$ συγκλίνει,
- αν $\Re(s) < \sigma_c$ τότε η $D(f, s)$ αποκλίνει.

Αν η σειρά Dirichlet $D(f, s)$ έχει τετμημένη σύγκλισης σ_c και ορίζοντας τα αθροίσματα $s_n = f(1) + \ldots + f(n)$ και $r_n = f(n+1) + f(n+2) + \ldots$, τότε:

- αν $\sum f(n)$ αποκλίνει, τότε $0 \leq \sigma_c = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log |s_n|}{\log n}$.
- αν $\sum f(n)$ συγκλίνει, τότε $0 \geq \sigma_c = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log |r_n|}{\log n}$.

Θεώρημα 1.2.5 (Τετμημένη απόλυτης σύγκλισης της σειράς Dirichlet)**.** Η τετμημένη απόλυτης σύγκλισης της $D(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ είναι ο πραγματικός αριθμός $\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + 1$ με τον ακόλουθο ορισμό:

$$\sigma_a = \inf\left\{\rho : \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)n^{-s}| < \infty, \; \Re(s) = \rho\right\} = \inf\left\{\rho : \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)n^{-s}| < \infty, \; \Re(s) \geq \rho\right\}, \tag{1.112}$$

Αν η σειρά Dirichlet $D(f, s)$ έχει τετμημένη απόλυτης σύγκλισης σ_a και ορίζοντας τα αθροίσματα $s'_n = |f(1)| + \ldots + |f(n)|$ και $r'_n = |f(n+1)| + |f(n+2)| + \ldots$, τότε:

- αν $\sum |f(n)|$ αποκλίνει, τότε $\sigma_a = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log |s'_n|}{\log n} \geq 0$.
- αν $\sum |f(n)|$ συγκλίνει, τότε $\sigma_a = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log |r'_n|}{\log n} \leq 0$.

Για την απόδειξη των παραπάνω θεωρημάτων, ο αναγνώστης μπορεί να απευθυνθεί στο βιβλίο [7].

Σειρές Dirichlet που θα χρειαστούμε:

Η πιο γνωστή συνάρτηση είναι η συνάρτηση ζήτα που ορίζεται ως:

$$\zeta(s) = D(1,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \ \Re(s) > \sigma_c = \sigma_a = 1. \tag{1.113}$$

Ο παραγωντικός τύπος Euler είναι:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}. \tag{1.114}$$

Η ανάστροφη συνάρτηση ζήτα ορίζεται ως:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = D(\mu, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \ \Re(s) > \sigma_c = \sigma_a = 1, \tag{1.115}$$

όπου $\mu(m)$ η συνάρτηση Möbius [3]. Μία στοιχειώδης ιδιότητα της συνάρτησης αυτής είναι η εξής:

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\omega(n)} & p^2 \nmid n, \forall p \in \mathbb{P}, \\ 1 & n = 1, \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{1.116}$$

όπου $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$ η συνάρτηση μέτρησης πρώτων παραγόντων, χωρίς να συμπεριλαμβάνουμε τις δυνάμεις τους. Και:

$$\delta_{n,1} = \sum_{d|n} \mu(d). \tag{1.117}$$

Ο παραγοντικός τύπος Euler είναι:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} 1 - p^{-s}. \tag{1.118}$$

Το τετράγωνο της συνάρτησης ζήτα δίνεται από την εξίσωση:

$$\zeta^2(s) = D(d,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k|n} 1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}, \ \Re(s) > \sigma_c = \sigma_a = 1, \tag{1.119}$$

όπου $d(n) = \sum_{k|n} 1$ η συνάρτηση μέτρησης διαιρετών.
Η λογαριθμική παράγωγος της συνάρτησης ζήτα γράφεται ως:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \tag{1.120}$$

όπου $\Lambda(n)$ η συνάρτηση Von Mangoldt [3]. Μία στοιχειώδης ιδιότητα της συνάρτησης αυτής είναι η εξής:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} log(p) & n = p^r, p \in \mathbb{P}, r \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{αλλιώς}. \end{cases} \tag{1.121}$$

Ο λογάριθμος της συνάρτησης ζήτα είναι η εξής:

$$log(\zeta(s)) = \int_s^\infty \left(-\frac{\zeta'(t)}{\zeta(t)}\right) dt = \sum_{n=2}^\infty \frac{\Lambda(n)}{log(n)}\frac{1}{n^s}. \tag{1.122}$$

Η σειρά Dirichlet πρώτων αριθμών ορίζεται ακολούθως:

$$P(s) = D(\chi_{\mathbb{P}}, s) = \sum_{n\geq 1} \frac{\chi_{\mathbb{P}}(n)}{n^s} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s}, \tag{1.123}$$

όπου $\chi_{\mathbb{P}}(n)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση πρώτων αριθμών ($\mathbb{P}$) και δίνεται με τον εξής ορισμό:

$$\chi_{\mathbb{P}}(n) = \begin{cases} 1 & n \in \mathbb{P} \\ 0 & n \notin \mathbb{P}. \end{cases} \tag{1.124}$$

Σύμφωνα με την αναφορά [2] η συνάρτηση $P(s)$ συνδέεται με την συνάρτηση $\zeta(s)$ ως ακολούθως:

$$P(s) = \sum_{m=1}^\infty \frac{\mu(m)log(\zeta(ms))}{m}. \tag{1.125}$$

Μία άλλη συνάρτηση είναι η εξής:

$$\frac{1}{m^s}\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mathbb{1}_{m|n}}{n^s}, \tag{1.126}$$

όπου $\mathbb{1}_{m|n}$ η συνάρτηση δείκτης διαιρέτη:

$$\mathbb{1}_{m|n} = \begin{cases} 1 & m|n \\ 0 & m \nmid n. \end{cases} \tag{1.127}$$

1.2.3 Taylor

Οι σειρές Taylor είναι μια προσέγγιση των συναρτήσεων μέσω πολυωνύμου άπειρης τάξης, με συντελεστές την παράγωγο της συνάρτησης στο σημείο ανάπτυξης της σειράς αυτής. Μία άλλη περίπτωση είναι η πολυωνυμική ανάπτυξη της συνάρτησης και με αρνητικούς εκθέτες, που λέγονται σειρές Laurent.

Ορισμός 1.2.6 (Σειρά Taylor)**.** Η σειρά Taylor της $f(x) \in C^\infty$ γύρω από το x_0 ορίζεται από την ακόλουθη δυναμοσειρά:

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{1.128}$$

Το υπόλοιπο της σειράς Taylor ορίζεται από τις σχέσεις:

$$f(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_k(x), \tag{1.129}$$

όπου $R_k(x)$ το υπόλοιπο της σειράς Taylor και:

$$R_k(x) = \frac{1}{k!}\int_0^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\, dt. \tag{1.130}$$

Η σειρά 1.128 ισχύει αν και μόνο αν:

$$\lim_{k\to\infty} R_k(x) = 0. \tag{1.131}$$

Ορισμός 1.2.7 (Σύγκλιση δυναμοσειρών)**.** Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ και R η ακτίνα σύγκλισής της. Τότε:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \tag{1.132}$$

ή με έναν άλλο ορισμό:

$$L' = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}, \tag{1.133}$$

τότε:

$$R = \frac{1}{L} \tag{1.134}$$

και:

$$R' = \frac{1}{L'}. \tag{1.135}$$

- Αν $L = 0$ ή $L' = 0$, τότε $R \to +\infty$ και $R' \to +\infty$ η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Αν $L \to +\infty$ ή $L' \to +\infty$, τότε $R = 0$ και $R' = 0$ η δυναμοσειρά αποκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$.
- Αν $L = l \in \mathbb{R}$ ή $L' = l' \in \mathbb{R}$, τότε $R = 1/l$ και $R' = 1/l'$ η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ ή $x \in (x_0 - R', x_0 + R')$.

Χρήσιμες δυναμοσειρές

Εδώ, παραθέτουμε μερικές δυναμοσειρές που θα μας χρειαστούν στην συνέχεια.

- Η δυναμοσειρά για την εκθετική συνάρτηση:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.136}$$

- Η δυναμοσειρά για την συνάρτηση του ημίτονου:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.137}$$

- Η δυναμοσειρά για την συνάρτηση του συνημίτονου:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.138}$$

- Η δυναμοσειρά για την γεωμετρική πρόοδο άπειρων όρων:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ \forall |x| < 1. \tag{1.139}$$

- Η δυναμοσειρά για το διωνυμικό θεώρημα:

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+1-n)} \frac{x^n}{n!},\ \forall |x| < 1,\ \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}. \tag{1.140}$$

- Η δυναμοσειρά για το διωνυμικό θεώρημα για $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{a} \frac{a!}{(a-n)!} \frac{x^n}{n!},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1.141}$$

1.3 Μιγαδικές Μεταβλητές

Οι μιγαδικοί αριθμοί, είναι μια αλγεβρική επέκταση των πραγματικών αριθμών, οι οποίοι εισάγουν την μικρότερη επέκταση του σώματος των πραγματικών αριθμών, έτσι ώστε πάνω στο σώμα των μιγαδικών αριθμών, να επιλυθεί κάθε είδους πολυωνυμική εξίσωση. Οι μιγαδικοί αριθμοί, απεικονίζονται στο $\mathbb{R}^2$ καθώς το σύνολο τους, $\mathbb{C}$, είναι ισόμορφο με αυτό.

Ορισμός 1.3.1 (Φανταστική μονάδα)**.** Η φανταστική μονάδα i ορίζεται ως η λύση της εξίσωσης $x^2+1=0$, δηλαδή $i=\sqrt{-1}$. Με βάση την φανταστική μονάδα, κάθε μιγαδικός αριθμός z μπορεί να εκφραστεί ως $z=a+bi$ με $a,b\in\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.3.2 (Πραγματικό μέρος, φανταστικό μέρος και συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού)**.** Το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού $z=a+bi$ συμβολίζεται με $\Re(z)$ και ορίζεται ως $\Re(z)=a$. Το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού $z=a+bi$ συμβολίζεται με $\Im(z)$ και ορίζεται ως $\Im(z)=b$. Ο συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού $z=a+bi$ συμβολίζεται με $\bar{z}$ και ορίζεται ως $\bar{z}=a-bi$. Το πραγματικό μέρος, το φανταστικό μέρος και ο συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού συνδέονται από τις σχέσεις:

$$\Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2},\ \Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}. \tag{1.142}$$

Ορισμός 1.3.3 (Πράξεις μεταξύ μιγαδικών αριθμών)**.** Έστω δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1=a_1+ib_1$ και $z_2=a_2+ib_2$ και $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Τότε:

$$c_1z_1+c_2z_2=(c_1a_1+c_2a_2)+i(c_1b_1+c_2b_2) \tag{1.143}$$

και:

$$z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+b_1a_2) \tag{1.144}$$

επιπλέον:

$$\frac{1}{z_1}=\frac{a_1}{a_1^2+b_1^2}-i\frac{b_1}{a_1^2+b_1^2}. \tag{1.145}$$

Ορισμός 1.3.4 (Απόλυτη τιμή μιγαδικού αριθμού και πολική μορφή)**.** Έστω $z=a+ib$ ένας μιγαδικός αριθμός, η απόλυτη τιμή ορίζεται ως $|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$. Η πολική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού δίνεται ως $z=|z|e^{iArg(z)}$. Όπου $Arg(z)=\vartheta=\arctan(b/a)$ η γωνία του μιγαδικού αριθμού. Σύμφωνα με τον τύπο του Euler, ισχύει η εξίσωση $e^{i\vartheta}=\cos\vartheta+i\sin\vartheta$.

Ορισμός 1.3.5 (Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση μιγαδικού αριθμού)**.** Η εκθετική συνάρτηση ενός μιγαδικού αριθμού, που συμβολίζεται με $\exp z=e^z$ αναλύεται σε πραγματικό και φανταστικό μέρος ως ακολούθως $e^z=e^{a+bi}=e^a\cos b+ie^a\sin b$. Ο λογάριθμος ενός μιγαδικού αριθμού, που συμβολίζεται με $\log z$ ορίζεται ως η αντίστροφος συνάρτηση της εκθετικής και αναλύεται σε πραγματικό και φανταστικό μέρος ως ακολούθως $\log z=\log|z|+iArg(z)$. Όπου $-\pi<Arg(z)\leq\pi$, έτσι ώστε ο κάθε μιγαδικός αριθμός στο επίπεδο να ορίζεται με μία μοναδική γωνία. Να σημειώσουμε ότι, η εκθετική συνάρτηση ενός φανταστικού αριθμού έχει περίοδο 2π, δηλαδή $e^{i(\vartheta+2\pi)}=e^{i\vartheta}$, για αυτόν τον λόγο, η γωνία του μιγαδικού αριθμού $Arg(z)$ περιορίζεται στο διάστημα $(-\pi,\pi]$ ή $[0,2\pi)$.

1.3.1 Μιγαδικές Συναρτήσεις

Με τον όρο της μιγαδικής συνάρτησης, εννοούμε μια συνάρτηση $f(z)$ με μεταβλητή $z = x + iy,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Αυτή η συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί ως μία συνάρτηση με δύο πραγματικές μεταβλητές $x, y \in \mathbb{R}$, με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση των δύο μεταβλητών μπορεί να εκφραστεί ως σειρά Laurent της μιγαδικής μεταβλητής $z = x + iy$.

Ορισμός 1.3.6 (Αναλυτικές συναρτήσεις και εξισώσεις Cauchy-Riemann)**.** Αναλυτικές λέγονται οι συναρτήσεις, οι οποίες μπορούν να παραγωγίζονται ανεξαρτήτως από την γειτονιά με την οποία πλησιάζουμε το σημείο το οποίο παραγωγίζουμε. Υπό μορφή εξισώσεων γράφουμε:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Το παραπάνω όριο πρέπει να υπάρχει, ανεξαρτήτως από το πως το h πλησιάζει το 0 στο μιγαδικό επίπεδο. Ως συνέπεια, έχουμε τις εξισώσεις Cauchy-Riemann. Οι εξισώσεις Cauchy-Riemann εκφράζονται ως το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων μερικών παραγώγων:

$$f_y = i f_x, \tag{1.146}$$

όπου f_x και f_y οι μερικές παράγωγοι ως προς x και y αντίστοιχα.

Ορισμός 1.3.7 (Αντίστροφη συνάρτηση και η παράγωγός της)**.** Αν ορίσουμε δύο σύνολα S και T και ότι η f είναι $1-1$ στο S με $f(S) = T$. Η g είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f στο T αν $f(g(z)) = z$ για $z \in T$. Όταν ορίζουμε την αντίστροφο μιας συνάρτησης σε ένα σημείο, τότε η αντίστροφη συνάρτηση ορίζεται σε μια γειτονιά του σημείου. Για την παράγωγο της αντίστροφης συνάρτησης, έχουμε την ακόλουθη πρόταση:
Αν g είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f στο z_0 και η g είναι συνεχής σε αυτό το σημείο. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $g(z_0)$ και έχει παράγωγο την $f'(g(z_0))$, τότε η g είναι διαφορίσιμη στο z_0 και:

$$g'(z_0) = \frac{1}{f'(g(z_0))}. \tag{1.147}$$

Ορισμός 1.3.8 (Ολοκλήρωμα πάνω σε καμπύλη)**.** Έστω C μια ομαλή καμπύλη, που δίνεται από την $z(t)$ με $t \in [a, b],\ \forall a, b \in \mathbb{R}$ και ας υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο της $z(t)$. Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του f πάνω στη C ορίζεται ως:

$$\int_C f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt}\, dt. \tag{1.148}$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, εκτός από τα σημεία της καμπύλης, εξαρτάται επίσης από την φορά ολοκλήρωσης.

Παρακάτω παραθέτουμε λίγες από τις ιδιότητες του επικαμπύλιου ολοκληρώματος:

Έστω C μια ομαλή καμπύλη και $-C$ η ίδια καμπύλη με αντίθετη φορά, ας υποθέσουμε ότι f και g είναι συνεχείς στο C και a ένας οποιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός. Τότε:

$$\begin{aligned} \int_{-C} f(z)\, dz &= -\int_C f(z)\, dz, \\ \int_C af(z)\, dz &= a\int_C f(z)\, dz \qquad a \in \mathbb{C}, \\ \int_C [f(z) + g(z)]\, dz &= \int_C f(z)\, dz + \int_C g(z)\, dz. \end{aligned} \tag{1.149}$$

Ορισμός 1.3.9 (Κλειστή καμπύλη)**.** Μια καμπύλη C θεωρείται κλειστή όταν τα τελικά και αρχικά σημεία συμπίπτουν. Δηλαδή αν μια ομαλή κλειστή καμπύλη C περιγράφεται από την $z(t)$ για $t \in [a, b]$, τότε $z(a) = z(b)$.

Θεώρημα 1.3.1 (Θεώρημα κλειστής καμπύλης)**.** Εάν η f είναι μια ολόμορφη (αναλυτική) συνάρτηση σε όλο το $\mathbb{C}$ και C μια λεία κλειστή καμπύλη, τότε:

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Λήμμα 1.3.1. Ας υποθέσουμε ότι μια κλειστή καμπύλη C περιέχει το σημείο a, τότε:

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

Θεώρημα 1.3.2. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αναλυτική σε ένα χωρίο D, το οποίο περιέχει το σημείο a και αν Γ είναι το σύνορο του χωρίου D, τότε:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = 0.$$

Με βάση το παραπάνω θεώρημα και το προηγούμενο λήμμα, έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1.3.3 (Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy)**.** Αν υποθέσουμε ότι η f είναι αναλυτική σε ένα χωρίο D, το οποίο περιέχει το σημείο a και αν C είναι το σύνορο του χωρίου D, τότε:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz. \tag{1.150}$$

Ο παραπάνω τύπος γενικεύεται και για πολλαπλότητες ως εξής:

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz. \tag{1.151}$$

Ορισμός 1.3.10 (Σειρές Laurent)**.** Αν μια συνάρτηση f αναλύεται σε σειρές Laurent γύρω από το z_0, τότε η συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί με το ακόλουθο άθροισμα:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \tag{1.152}$$

το οποίο συγκλίνει στο δακτύλιο:

$$D = \{z : R_1 < |z-z_0| < R_2\}.$$

Όπου:

$$R_2 = 1/\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}$$

$$R_1 = 1/\limsup_{k\to\infty} |a_{-k}|^{1/k}.$$

Οι συντελεστές της σειράς Laurent γύρω από το z_0 της συνάρτησης f δίνεται από την σχέση:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz, \tag{1.153}$$

όπου C μια καμπύλη που περικλείει το χωρίο σύγκλισης.

Θεώρημα 1.3.4 (Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων)**.** Όταν μια συνάρτηση f έχει μεμονωμένη ασυνέχεια στο z_0 και γ μια κλειστή καμπύλη, η οποία περικλείει μια γειτονιά του z_0 και αναλύεται σε σειρές Laurent γύρω από το z_0, τότε:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i Res(f; z_0). \tag{1.154}$$

Αν η συνάρτηση f έχει μεμονωμένες ασυνέχειες στα σημεία $z_k,\ k = 1, 2, 3, ..., n$ και γ μια κλειστή καμπύλη, η οποία περικλείει τις γειτονιές των $z_k,\ k = 1, 2, 3, ..., n$ και αναλύεται σε σειρές Laurent γύρω από τα σημεία αυτά, τότε το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων γενικεύεται στην εξίσωση:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f; z_k). \tag{1.155}$$

Ο υπολογισμός των ολοκληρωτικών υπολοίπων δίνεται υπό την μορφή ορίου:

$$Res(f; z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

και όταν ο πόλος στο z_0 είναι της τάξης του k:

$$Res(f; z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)].$$

Λήμμα 1.3.2. Έστω ότι μια συνάρτηση f έχει ρίζες στα σημεία $z_k,\ k = 1, 2, 3, ..., n$ και πόλους στα σημεία $p_k,\ k = 1, 2, 3, ..., m$. Έστω επίσης μια αναλυτική συνάρτηση g και γ μια κλειστή καμπύλη, η οποία περικλείει τις γειτονιές των $z_k,\ k = 1, 2, 3, ..., n$ και $p_k,\ k = 1, 2, 3, ..., m$, τότε το παρακάτω ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως:

$$\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} g(z_k) - 2\pi i \sum_{k=1}^{m} g(p_k). \tag{1.156}$$

Για περισσότερα πάνω στην μιγαδική ανάλυση και την απόδειξη των θεωρημάτων, ο αναγνώστης μπορεί να παραπεμφθεί στο βιβλίο [4].

1.4 Ασυμπτωτική Συμπεριφορά

Σε αυτήν την ενότητα, θα ασχοληθούμε με τις βασικές έννοιες της ασυμπτωτικής ανάλυσης. Ο αναγνώστης για παραπάνω πληροφορίες πάνω σε αυτό το θέμα, παραπέμπεται στο βιβλίο [12].

Ορισμός 1.4.1 (Μεγάλο O μιας συνάρτησης)**.** Αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι μεγάλο O της $g(x)$, καθώς $x \to x_0$, τότε υπάρχει μια σταθερά $M > 0$ έτσι ώστε:

$$|f(x)| \leq Mg(x), \ x \to x_0 \tag{1.157}$$

για κάθε x με $0 < |x - x_0| < \delta$, για κάποιο $\delta > 0$. Για λόγους συντομίας, γράφουμε:

$$f(x) = O(g(x)), \ x \to x_0. \tag{1.158}$$

Μερικές από τις βασικές ιδιότητες του μεγάλου O, καθώς $n \to \infty$ είναι:

$$\begin{gathered} f(n) = O(f(n)), \\ c\,O(f(n)) = O(f(n)) \qquad\qquad c \in \mathbb{R}, \\ O(f(n)) + O(f(n)) = O(f(n)), \\ O(O(f(n))) = O(f(n)), \\ O(f(n))O(g(n)) = O(f(n)g(n)). \end{gathered} \tag{1.159}$$

Ορισμός 1.4.2 (Ασυμπτωτική ισότητα δυο συναρτήσεων)**.** Ορίζουμε ότι μια συνάρτηση $f(x)$ είναι ασυμπτωτικά ίση με μια συνάρτηση $g(x)$ καθώς $x \to \infty$ ή $x \to x_0$, όταν:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{1.160}$$

ή:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{1.161}$$

Για λόγους συντομίας, γράφουμε:

$$f(x) \sim g(x), \ x \to \infty \text{ ή } x_0 \in \mathbb{R}. \tag{1.162}$$

Μερικές από τις βασικές ιδιότητες της ασυμπτωτικής ισότητας $\sim$, καθώς είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται σε διάστημα που περιέχει το άπειρο, είναι:

$$\begin{gathered} f(x) \sim f(x), \\ f(x) \sim g(x) \Rightarrow g(x) \sim f(x), \\ f(x) \sim g(x), \ g(x) \sim h(x) \Rightarrow f(x) \sim h(x). \end{gathered} \tag{1.163}$$

Ορισμός 1.4.3 (Μικρό o μιας συνάρτησης)**.** Αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι μικρό o της $g(x)$, καθώς $x \to x_0$ ή $x \to \infty$, όταν:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{1.164}$$

ή:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{1.165}$$

Για λόγους συντομίας, γράφουμε:

$$f(x) = o(g(x)), \ x \to \infty \ or \, x_0 \in \mathbb{R} \tag{1.166}$$

Εφαρμογή που θα μας χρειαστεί:

Λήμμα 1.4.1 (Λήμμα Riemann - Lebesgue)**.** Εάν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα (a, b) εκτός από πεπερασμένο αριθμό σημείων, τότε:

$$\int_a^b f(t)e^{ixt}\,dt = o(1),\ x \to \infty, \tag{1.167}$$

με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει καθώς το x τείνει στο άπειρο.

Με τη βοήθεια του Λήμματος Riemann - Lebesgue και εάν $f \in C^1[a, b]$, τότε:

$$\int_a^b f(t)e^{ixt}\,dt \sim \frac{i}{x}[e^{iax}f(a) - e^{ibx}f(b)] + o\left(\frac{1}{x}\right),\ x \to \infty. \tag{1.168}$$

Η παραπάνω εξίσωση, μπορεί να αποδειχτεί με κατά μέρους ολοκλήρωση.

1.5 Θεωρία Μέτρου

Η θεωρία του μέτρου γενικεύει τόσο τις γεωμετρικές έννοιες (μήκος, εμβαδόν, όγκος, κλπ) όσο και πιο αφηρημένες έννοιες, όπως μάζα, πιθανότητα ενός γεγονότος κ.ά.. Για παραπάνω μελέτη πάνω στην θεωρία του μέτρου ο αναγνώστης μπορεί να παραπεμφθεί στο βιβλίο [10]. Σε αυτήν την ενότητα δίνουμε ορισμένα θεωρήματα και μερικά παραδείγματα μέτρων που θα μας χρειαστούν.

Θεώρημα 1.5.1 (Μετρήσιμα σύνολα)**.** Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο E περιέχεται στο σύνολο Ω. Το σύνολο E είναι μετρήσιμο αν υπάρχει μία ακολουθία κλειστών συνόλων F_k που περιέχονται στο E και μια ακολουθία ανοικτών συνόλων Ω_k που περιέχουν το σύνολο E, έτσι ώστε:

$$\mu(\Omega_k - F_k) \to 0,\ k \to \infty.$$

Να σημειώσουμε ότι αν F είναι ένα σύνολο κλειστών συνόλων μέσα στο E και Ω είναι ένα σύνολο ανοικτών συνόλων που περιέχουν το σύνολο E, αν το σύνολο E είναι μετρήσιμο, τότε:

$$\mu(E) = \sup_{F \subseteq E} \mu(F) = \inf_{E \subseteq \Omega} \mu(\Omega).$$

Θεώρημα 1.5.2. Αν δύο μετρήσιμα σύνολα E_1 και E_2, τότε:

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1 \cap E_2).$$

Άρα η ένωση δύο μετρήσιμων συνόλων είναι ένα μετρήσιμο σύνολο.

Να σημειώσουμε ότι το μηδενικό μέτρο είναι μετρήσιμο, δηλαδή το μέτρο $\mu(E) = 0$ είναι μετρήσιμο.

Θεώρημα 1.5.3. Έστω ένα φραγμένο σύνολο Ω και μια ακολουθία από μετρήσιμα διαχωρισμένα σύνολα $\{E_k\}_{k=1}^n$, τότε η ένωση των συνόλων $E = \cup_{k=1}^n E_k$ είναι μετρήσιμη και:

$$\mu(E) = \sum_{k=1}^n \mu(E_k).$$

Μετρήσιμες συναρτήσεις

Για τα παρακάτω, ορίζουμε το ακόλουθο μέτρο στο σύνολο Ω:

$$\mu(\Omega) = \int_\Omega f\,dx.$$

Ορισμός 1.5.1. Έστω ένα φραγμένο ανοικτό σύνολο Ω και f μια συνάρτηση που ορίζεται στο σύνολο αυτό. Τότε η συνάρτηση f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία από μετρήσιμα κλειστά σύνολα F_k όπου η συνάρτηση είναι συνεχής, τότε:

$$\mu(\Omega) - \mu(F_k) \le \epsilon,\ \forall \epsilon > 0.$$

Θεώρημα 1.5.4 (Θεώρημα σύγκλισης του Lebesgue)**.** Αν μια ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων f_k η οποία συγκλίνει σε όλο το ανοικτό σύνολο Ω στην συνάρτηση f. Αν η ακολουθία συναρτήσεων είναι φραγμένες κατά απόλυτη τιμή από μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση από πάνω, δηλαδή $|f_k| \le g$ τότε ισχύει το όριο:

$$\int_\Omega f\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k\,dx.$$

Θεώρημα 1.5.5 (Θεώρημα του Fubini)**.** Αν δύο σύνολα $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ και $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ είναι μετρήσιμα κατά Lebesgue και ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο σύνολο $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Τότε για σχεδόν κάθε $x \in \Omega_1$, η συνάρτηση $\int_{\Omega_1} f(x,y)\,dx$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue στο Ω_2 και η συνάρτηση $\int_{\Omega_2} f(x,y)\,dy$ είναι ολοκληρώσιμη στο Ω_1, τότε:

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f(x,y)\,dy\,dx.$$

1.5.1 Ολοκληρώματα Riemann-Stieltjes

Θεώρημα 1.5.6 (Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes)**.** Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής και F αύξουσα στο διάστημα I. Τότε:

$$\int_I g(x)\,dF(x) = \lim_{max_{1\le i\le n}|x_i - x_{i-1}|\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(F(x_i) - F(x_{i-1})).$$

Όπου $(x_0 < x_1 < \ldots < x_n) \in I$ είναι ένας διαμερισμός του I και ξ_i είναι αυθαίρετα σημεία στο $[x_{i-1}, x_i)$.

Θεώρημα 1.5.7. Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση F είναι μονότονη και πραγματική στο διάστημα I. Και αν υποθέσουμε ότι η h είναι βηματική και με πραγματικές τιμές στο διάστημα I, έτσι ώστε:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(t_i \in I_i)c_i,$$

με $I_i = (a_i, b_i)$ είναι ένας διαμερισμός του συνόλου I τότε το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes γράφεται ως:

$$\int_I h(x)\,dF(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(F(b_i) - F(a_i)).$$

Λήμμα 1.5.1. Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση F είναι βηματική και αύξουσα στο διάστημα I, έτσι ώστε:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i u(t - t_i),$$

με $(t_0 < t_1 < \ldots < t_n) \in I$ και $a_i \geq 0$. Τότε, αν η g είναι συνεχής:

$$\int_I g(x)\, dF(x) = \sum_{i=1}^{n} g(t_i) a_i.$$

Για περισσότερα πάνω στα ολοκληρώματα Riemann-Stieltjes, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο [6].

1.5.2 Παραδείγματα μέτρων

Ορισμός 1.5.2 (Μέτρο Lebesgue). Ορίζουμε το μέτρο Lebesgue ενός συνόλου Ω με το ακόλουθο ολοκλήρωμα:

$$\mu(\Omega) = \int_\Omega dx.$$

Ορισμός 1.5.3 (Μέτρο Dirac). Ας υποθέσουμε ότι $(X, \mathscr{A})$ είναι ένας οποιοδήποτε μετρήσιμος χώρος και $x \in X$ ένα σημείο. Τότε $\delta_x : \mathscr{A} \to \{0, 1\}$ ορίζεται για το σύνολο $\Omega \in \mathscr{A}$ ως:

$$\delta_x(\Omega) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases} \tag{1.169}$$

είναι ένα μέτρο. Λέγεται μέτρο δέλτα του Dirac ή μοναδιαίας μάζας στο σημείο x. Το μέτρο δέλτα του Dirac έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

$$\int_B d\delta_x(y) = \int_B \delta(x - y)\, dx,$$

όπου $\delta(x - y)$ είναι η συνάρτηση δέλτα του Dirac.

Ορισμός 1.5.4 (Μέτρο μέτρησης). Ας υποθέσουμε ότι $(X, \mathscr{A})$ είναι ένας μετρήσιμος χώρος. Τότε:

$$|\Omega| = \begin{cases} N(\Omega) & N(\Omega) < \infty \\ +\infty & N(\Omega) = \infty, \end{cases} \tag{1.170}$$

είναι ένα μέτρο. Λέγεται μέτρο μέτρησης. Με $N(\Omega)$ το μέγεθος του συνόλου $\Omega \in \mathscr{A}$.

1.5.3 Ιδιότητες χαρακτηριστικών συναρτήσεων

Ορισμός 1.5.5 (Χαρακτηριστική συνάρτηση). Η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου Ω, $\mathbb{1}_\Omega(x)$ είναι μια συνάρτηση με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\mathbb{1}_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases} \tag{1.171}$$

και:

$$\int_B \mathbb{1}_\Omega(x)\, dx = \int_{B \cap \Omega} dx.$$

Επίσης, έχουμε τις ακόλουθες ιδιότητες:

Έστω A και B δύο σύνολα τότε:

$$\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$$

και:

$$\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x).$$

Τελεστής κανονικοποίησης της συνάρτησης δέλτα

Ένας τελεστής που θα μας χρειαστεί είναι ο τελεστής $\hat{h}$, ο τελεστής αυτός είναι γραμμικός και έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\hat{h}(af(x) + bg(x)) = a\hat{h}(f(x)) + b\hat{h}(g(x)),\ \forall a, b \in \mathbb{C} \tag{1.172}$$

και:

$$\int_B f(x)\, dx = \int_B d\hat{h}(f(x)). \tag{1.173}$$

Η τελευταία ιδιότητα, μας δείχνει ότι ο τελετής $\hat{h}$ απεικονίζει την συνάρτηση $f(x)$ στο αντίστοιχο μέτρο της. Ας πάρουμε ως παράδειγμα την συνάρτηση δέλτα του Dirac, βάσει της παραπάνω ιδιότητας έχουμε:

$$\int_B \delta(x - x')\, dx = \int_B d\hat{h}(\delta(x - x')). \tag{1.174}$$

Οπότε το μέτρο που ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση είναι το μέτρο του Dirac, δηλαδή:

$$\hat{h}(\delta(x - x')) = \delta_{\{x'\}}(x), \tag{1.175}$$

με:

$$\delta_{\{x'\}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{x'\} \\ 0 & x \notin \{x'\}. \end{cases} \tag{1.176}$$

Όπου $\{x'\}$ το σύνολο που έχει ως μόνο στοιχείο το x'. Ακόμα ένα παράδειγμα, είναι να βρούμε την συνάρτηση την οποία όταν αθροίζεται, βγάζει μια γνωστή συνάρτηση. Δηλαδή:

$$S_x[f] = \sum_{n\leq x} f(n), \tag{1.177}$$

με $S_x[f]$ μια γνωστή συνάρτηση και $f(n)$ η συνάρτηση που θέλουμε να βρούμε. Αν παραγωγίσουμε την συνάρτηση $S_x[f]$, εύκολα φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι:

$$\frac{dS_x[f]}{dx} = \sum_{a\leq n\leq b} f(n)\delta(x - n). \tag{1.178}$$

Όπου, αν χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή $\hat{h}$ καταλήγουμε στο ότι:

$$f(x)\mathbb{1}_{[a,b]}(x) = \hat{h}(\frac{dS_x[f]}{dx}),\ x \in \mathbb{Z}. \tag{1.179}$$

1.6 Τεχνικές Άθροισης

Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιάσουμε μερικές τεχνικές άθροισης, καθώς και την α-συμπτωτική συμπεριφορά των αθροισμάτων για αρκετά μεγάλο άνω άκρο. Αυτές οι τεχνικές άθροισης περιλαμβάνουν τη μέθοδο μερικής άθροισης του Abel και τη φόρμουλα άθροισης των Euler-Maclaurin.

1.6.1 Μέθοδος μερικής άθροισης του Abel

Έστω $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών και $f(t)$ μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση στο $[y, x]$, αν θέσουμε:

$$A(t) = \sum_{n \le t} a_n,$$

τότε:

$$\sum_{y<n\le x} a_n f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\,dt. \tag{1.180}$$

Άθροιση κατά μέρη

Μία περίπτωση διακριτής μέθοδος μερικής άθροισης του Abel, είναι η εξής:

Έστω $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ δύο ακολουθίες μιγαδικών αριθμών. Τότε:

$$\sum_{k=m}^{n} g_k(f_{k+1} - f_k) = g_n f_{n+1} - g_m f_m - \sum_{k=m+1}^{n} f_k(g_k - g_{k-1}). \tag{1.181}$$

1.6.2 Αριθμοί και πολυώνυμα Bernoulli

Στον παρόν κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με τους αριθμούς και τα πολυώνυμα Bernoulli, καθώς θα μας χρειαστούν για την φόρμουλα άθροισης των Euler-Maclaurin.

Αριθμοί Bernoulli

Για τους αριθμούς Bernoulli, ορίζεται ο ακόλουθος αναδρομικός τύπος:

$$B_0 = 1,$$

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_k.$$

Ένας άλλος ορισμός των αριθμών Bernoulli, είναι μέσω της ακόλουθης γεννήτριας συνάρτησης:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}.$$

Πολυώνυμα Bernoulli

Για τα πολυώνυμα Bernoulli, ορίζεται ο ακόλουθος αναδρομικός τύπος:

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} t^k.$$

Ένας άλλος ορισμός των πολυωνύμων Bernoulli, είναι μέσω της ακόλουθης γεννήτριας συνάρτησης:

$$\frac{xe^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) \frac{x^k}{k!}.$$

1.6.3 Φόρμουλα άθροισης των Euler-Maclaurin

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζουμε τη φόρμουλα άθροισης των Euler-Maclaurin την οποία απέδειξε το 1736 ο Leonard Euler για να υπολογίσει σειρές, καθώς και ο Colin Maclaurin την απέδειξε ανεξάρτητα το 1742, για να υπολογίσει ολοκληρώματα.

Θεώρημα 1.6.1 (Φόρμουλα άθροισης των Euler-Maclaurin)**.** Έστω μια συνάρτηση $f(t)$ ορισμένη στο διάστημα $[y, x]$ για $y, x \in \mathbb{R}$, με συνεχή παράγωγο σε αυτό. Τότε:

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = \int_y^x f(t)\, dt + \int_y^x \{t\} f'(t)\, dt - f(x)\{x\} + f(y)\{y\}. \tag{1.182}$$

Θεώρημα 1.6.2 (Γενικευμένη φόρμουλα άθροισης Euler-Maclaurin)**.** Με βάση τις ιδιότητες των αριθμών και πολυωνύμων Bernoulli, με κατά παράγοντες ολοκλήρωση έχουμε την ακόλουθη φόρμουλα:

$$\sum_{j=a}^{b} f(j) = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)] + \int_a^b f(t)\, dt + \sum_{s=1}^{m} (-1)^{s+1} \frac{B_{s+1}}{(s+1)!} (f^{(s)}(b) - f^{(s)}(a)) + R_m(a, b) \tag{1.183}$$

με:

$$R_m(a, b) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \int_a^b B_{m+1}(t) f^{(m+1)}(t)\, dt.$$

Όπου a, b, m θετικοί ακέραιοι, $a < b$, και $f(t)$ ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$ και $m + 1$ φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό, καθώς και η $f^{(m+1)}(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Σύμφωνα με την φόρμουλα άθροισης Euler-Maclaurin, ο πρωτεύων όρος στο ασυμπτωτικό της άθροισμα εξαρτάται από την συμπεσιφορά του αθροίσματος. Δηλαδή:

$$\sum_{j=1}^{N} f(j) \sim \int_1^N f(t)\, dt,$$

εάν:

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(j) = \infty$$

και:

$$\sum_{j=1}^{N} f(j) \sim C.$$

Επίσης, εάν:

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(j) < \infty,$$

όπου:

$$C = \lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{2}f(0) + \sum_{s=1}^{m}(-1)^s\frac{B_{s+1}}{(s+1)!}f^{(s)}(0) + \frac{(-1)^m}{(m+1)!}\int_0^{\infty} B_{m+1}(\{t\})f^{(m+1)}(t)\,dt\right].$$

Για αποδείξεις των θεωρημάτων και για περισσότερες ιδιότητες των πολυωνύμων και των αριθμών Bernoulli αναγνώστης μπορεί να απευθυνθεί στο βιβλίο [12].

1.7 Θεώρημα Πρώτων Αριθμών

Το θεώρημα πρώτων αριθμών, περιγράφει την ασυμπτωτική κατανομή των πρώτων αριθμών ανάμεσα στους θετικούς ακέραιους αριθμούς. Το θεώρημα έχει αποδειχτεί από τους Jacques Hadamard και Charles Jean de la Vallée Poussin, χρησιμοποιώντας τις ιδέες του Bernhard Riemann και τις ιδιότητες της συνάρτησης ζήτα στο μιγαδικό επίπεδο. Για να περιγράψουν την κατανομή των πρώτων αριθμών, πρώτος ο Gauss εισήγαγε την έννοια της συνάρτησης μέτρησης πρώτων αριθμών, $\pi(x)$, που μετράει τους πρώτους αριθμούς μικρότερους ή ίσους του x. Η εμπειρική προσέγγιση του Gauss για την συνάρτηση $\pi(x)$ είναι:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{log(x)},\ x \to \infty. \tag{1.184}$$

Αργότερα, οι Jacques Hadamard και Charles Jean de la Vallée Poussin χρησιμοποίησαν τις εργασίες του Bernhard Riemann για να φτάσουν στην παρακάτω προσέγγιση:

$$\pi(x) \sim Li(x) = \int_2^x \frac{1}{log(t)}\,dt,\ x \to \infty. \tag{1.185}$$

Για την απόδειξη των παραπάνω προσεγγίσεων της συνάρτησης $\pi(x)$, ο αναγνώστης μπορεί να απευθυνθεί στο βιβλίο [2], καθώς ξεφεύγει από τον σκοπό της εργασίας.

Κεφάλαιο 2

Τεχνικές Αντιστροφής Σειρών Dirichlet

Με τον όρο αντιστροφή των σειρών Dirichlet, εννοούμε την εύρεση της συνάρτησης την οποία έχει ως γεννήτορα η σειρά αυτή. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με αυτό το πρόβλημα, το οποίο έχει απασχολήσει αρκετούς μαθηματικούς όπως ο Lagrange, ο Perron, κ.λ.π, καθώς και θα εισάγουμε προσεγγιστικούς υπολογισμούς. Οι σειρές αυτές είχαν εισηγηθεί πρώτα από τον J.P.G.L. Dirichlet και παίζουν σημαντικό ρόλο στην αναλυτική θεωρία των αριθμών, επειδή έχουν στενή σχέση με τους πρώτους αριθμούς και το θεώρημα των πρώτων αριθμών. Ο πρώτος που βρήκε την σχέση αυτή ήταν ο Euler, με την πολλαπλασιαστική σχέση της συνάρτησης ζήτα. Αργότερα ο Riemann χρησιμοποίησε την σχέση αυτή για να αποδείξει το θεώρημα των πρώτων αριθμών. Σε όλη την διάρκεια αυτής της εργασίας, οι σειρές Dirichlet θα ορίζονται ως εξής :

$$D(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}. \tag{2.1}$$

Όπου $f(n)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση, που θέλουμε με διάφορες τεχνικές, να βρεθεί.

2.1 Ήδη Υπάρχουσες Τεχνικές

Μία γνωστή τεχνική αντιστροφής είναι υπό την μορφή ορίου, όπως δίνεται παρακάτω :

$$f(k) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} k^{\sigma+it} D(f,\sigma+it)\,dt \tag{2.2}$$

ή, με αλλαγή μεταβλητών:

$$f(k) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2iT} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} k^{s} D(f,s)\,ds. \tag{2.3}$$

Όπου $\sigma > \sigma_0$, με το $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ να είναι η τετμημένη σύγκλισης των σειρών Dirichlet $D(f,s)$ και $k \in \mathbb{N}$ ένας φυσικός αριθμός. Οι παραπάνω εξισώσεις, θα χρησιμοποιηθούν για πιο αυστηρές και ακριβείς προσεγγίσεις στα προβλήματα που θα ασχοληθούμε παρακάτω. Για την απόδειξη των εξισώσεων 2.2 και 2.3, σας παραπέμπουμε στο βιβλίο

[1]. Να προσθέσουμε ότι, οι εξισώσεις 2.2 και 2.3, μπορούν να θεωρηθούν ως μία μορφή αντιστροφής Mellin ή, μία περίπτωση αντιστροφής Fourier και αποδίδονται στον Perron. Μία άλλη τεχνική, είναι να μετατρέψουμε τις σειρές Dirichlet σε φραγμένο άθροισμα της γεννήτριας συνάρτησης, δηλαδή :

$$F(k) = \sum_{1 \leq n \leq k} f(n) \tag{2.4}$$

ή, μέσω μιγαδικής ολοκλήρωσης:

$$F(k) = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{k^s}{s} D(f, s) \frac{ds}{2\pi i}. \tag{2.5}$$

Οπότε, σύμφωνα με τις [1] και [3] παίρνουμε την συνάρτηση $f(k)$ ως εξής:

$$f(k) = F(k) - F(k-1), \tag{2.6}$$

όπου, σύμφωνα με την 2.5 έχουμε:

$$f(k) = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{k^s - (k-1)^s}{s} D(f, s) \frac{ds}{2\pi i}. \tag{2.7}$$

Οι άλλες γνωστές τεχνικές αντιστροφής δεν θα αναφερθούν σε αυτήν την εργασία, καθώς ξεφεύγουν από τον σκοπό της, οπότε ο αναγνώστης μπορεί να παραπεμφθεί σε σχετικά βιβλία.

2.2 Τεχνικές αντιστροφής με ολοκληρώματα

2.2.1 Αντιστροφή μέσω κατασκευής πυρήνων

Σε αυτήν την υποενότητα, θα κατασκευάσουμε ολοκληρωτικούς πυρήνες (kernels), έτσι ώστε μέσω ολοκλήρωσης, να βρούμε την γεννήτρια συνάρτηση ($f(n)$) των σειρών Dirichlet ($D(f, s)$). Για να επιτευχθεί αυτό, κατασκευάζουμε τους ολοκληρωτικούς πυρήνες ($K(x, s)$) τέτοιοι ώστε:

$$f(x) = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} K(x, s) D(f, s) \frac{ds}{2\pi i}. \tag{2.8}$$

Ένα παράδειγμα τέτοιου πυρήνα ορίζεται από την 2.7:

$$K(k, s) = \frac{k^s - (k-1)^s}{s}, \tag{2.9}$$

ο οποίος θα μας απασχολήσει αργότερα για να κάνουμε προσεγγίσεις στο άπειρο. Η 2.9 μπορεί να οριστεί από το ακόλουθο μιγαδικό ολοκλήρωμα:

$$K(k, s) = \frac{1}{s} \oint_C \frac{z^s}{(z-k)(z-k+1)} \frac{dz}{2\pi i}. \tag{2.10}$$

Όπου C είναι μια οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη, που περικλείει τους πόλους $\{k, k-1\}$, αλλά όχι το μηδέν και εκεί που δεν ορίζεται η z^s. Από την 2.10 μπορεί να οριστεί ο εξής τελεστής:

$$\hat{H}F(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{d^n F(z)}{dz^n}|_{z=k}. \tag{2.11}$$

Η παραπάνω εξίσωση, είναι ένας συνδυασμός του θεωρήματος του Cauchy και του αθροίσματος της γεωμετρικής προόδου. Ένας περιορισμός του τελεστή αυτού, είναι ότι η συνάρτηση που εφαρμόζουμε τον τελεστή πρέπει να είναι ¨λεία¨, δηλαδή να είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη, με άλλα λόγια η συνάρτηση πρέπει να είναι C^∞.

Για $F(z) = z^s$, το $K(k, s)$ γίνεται:

$$K(k, s) = \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{\Gamma(s+1)k^{s-n}}{\Gamma(s+1-n)}. \tag{2.12}$$

Η παραπάνω εξίσωση, μπορεί να αποδειχτεί παίρνοντας την εξίσωση 2.9 και εφαρμόζοντας το διωνυμικό θεώρημα.

Για τους παρακάτω πυρήνες ολοκλήρωσης θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της συνάρτησης δέλτα του Dirac και του παρακάτω ολοκληρώματος:

$$\delta(x-a) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{x^{s-1}}{a^s} \frac{ds}{2\pi i}. \tag{2.13}$$

Ας πάρουμε την εξίσωση:

$$f(x) \sum_{n=1}^{\infty} \delta(x-n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{s-1} D(f, s)\, ds. \tag{2.14}$$

Για να πάρουμε την συνάρτηση $f(k)$, ένας τρόπος είναι να μετατρέψουμε την παραπάνω εξίσωση ως εξής:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\delta(x-n) \to \sum_{n=1}^{\infty} f(n) sinc(k-n) = f(k). \tag{2.15}$$

Για να επιτευχθεί αυτό, χρησιμοποιούμε την εξής συνέλιξη:

$$f(k) = \int_0^\infty sinc(k-x) \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\delta(x-n)\, dx \tag{2.16}$$

ή:

$$f(k) = \int_0^\infty sinc(k-x) \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{s-1} D(f, s)\, ds\, dx. \tag{2.17}$$

Αλλάζοντας την σειρά ολοκλήρωσης, παίρνουμε τον εξής ολοκληρωτικό πυρήνα:

$$K(k, s) = \int_0^\infty sinc(k-x) x^{s-1}\, dx. \tag{2.18}$$

Μια άλλη τεχνική κατασκευής ολοκληρωτικού πυρήνα, είναι να μετατρέψουμε τις σειρές Dirichlet σε σειρές Fourier ή σειρά Laurent με μιγαδική μεταβλητή z. Αυτό επιτυγχάνεται με την ίδια τεχνική που χρησιμοποιούμε για να πάρουμε τον ολοκληρωτικό πυρήνα 2.18, δηλαδή:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) e^{-in\vartheta} = \int_0^\infty e^{-ix\vartheta} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{s-1} D(f, s)\, ds\, dx. \tag{2.19}$$

Αλλάζοντας την σειρά ολοκλήρωσης και την εξίσωση 1.65 έχουμε:

$$\int_0^{\infty} e^{-ix\vartheta} x^{s-1}\, dx = \frac{\Gamma(s)}{(i\vartheta)^s}. \tag{2.20}$$

Μπορούμε επίσης, να χωρίσουμε την σειρά αυτή σε ημιτονικές και συνημιτονικές σειρές ως εξής:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) cos(n\vartheta) = \int_0^{\infty} cos(\partial x) \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{s-1} D(f, s)\, ds\, dx, \tag{2.21}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) sin(n\vartheta) = \int_0^{\infty} sin(\partial x) \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{s-1} D(f, s)\, ds\, dx. \tag{2.22}$$

Όπου με ίδια βήματα και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις 1.66 και 1.67 έχουμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\int_0^{\infty} cos(\partial x) x^{s-1}\, dx = \frac{\Gamma(s)}{\partial^s} cos\left(\frac{\pi s}{2}\right), \tag{2.23}$$

$$\int_0^{\infty} sin(\partial x) x^{s-1}\, dx = \frac{\Gamma(s)}{\partial^s} sin\left(\frac{\pi s}{2}\right). \tag{2.24}$$

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα αντιστροφής των σειρών Fourier έχουμε τους εξής ολοκληρωτικούς πυρήνες:

$$K(k, s) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\vartheta} \frac{\Gamma(s)}{(i\vartheta)^s} \frac{d\vartheta}{2\pi},\ \Re(s) > 0, \tag{2.25}$$

$$K(k, s) = \int_{-\pi}^{\pi} cos(k\vartheta) \frac{\Gamma(s)}{\partial^s} cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \frac{d\vartheta}{2\pi},\ \Re(s) > 0, \tag{2.26}$$

και:

$$K(k, s) = \int_{-\pi}^{\pi} sin(k\vartheta) \frac{\Gamma(s)}{\partial^s} sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \frac{d\vartheta}{2\pi},\ \Re(s) > 0. \tag{2.27}$$

Για την περίπτωση των σειρών με μεταβλητή z εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο με τις σειρές Fourier, δηλαδή:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) z^{-n} = \int_0^{\infty} z^{-x} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{s-1} D(f, s)\, ds\, dx. \tag{2.28}$$

Αλλάζοντας την φορά ολοκλήρωσης, μας δίνει:

$$\int_0^{\infty} e^{-x log(z)} x^{s-1}\, dx = \frac{\Gamma(s)}{(log(z))^s}. \tag{2.29}$$

Έτσι, σύμφωνα με την αντιστροφή του μετασχηματισμού Ζήτα, λαμβάνουμε τον παρακάτω ολοκληρωτικό πυρήνα:

$$K(k, s) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{k-1} \frac{\Gamma(s)}{(log(z))^s}\, dz. \tag{2.30}$$

Όπου η κλειστή καμπύλη C περικλείει το πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης $\frac{\Gamma(s)}{(log(z))^s}$.

Να σημειωθεί εδώ, ότι στους προαναφερθέντες ολοκληρωτικούς πυρήνες, περιοριζόμαστε για $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή για τους φυσικούς αριθμούς.

2.2.2 Με σύμμορφη απεικόνιση

Μία άλλη τεχνική αντιστροφής των σειρών Dirichlet, είναι με την βοήθεια της σύμμορφης απεικόνισης. Για αρχή, παίρνουμε ως αναφορά το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$f(x)\sum_{n=1}^{\infty}\delta(x-n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}x^{s-1}D(f,s)\,ds. \tag{2.31}$$

Μετά, θεωρώντας ότι η $D(f,s)$ είναι μερομορφική συνάρτηση, διαχωρίζουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-2\pi iT}^{\sigma+2\pi iT}x^{s-1}D(f,s)\,ds=\lim_{T\to\infty}\sum_{n=-T}^{T-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma+2\pi in}^{\sigma+2\pi i(n+1)}x^{s-1}D(f,s)\,ds. \tag{2.32}$$

Ύστερα, χρησιμοποιούμε την εξής σύμμορφη απεικόνιση:

$$\exp:\mathbb{C}\to(0,+\infty)\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Όπου exp είναι η γνωστή εκθετική συνάρτηση με αντίστροφο log, $\mathbb{C}$ είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών, $\mathbb{R}$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, $2\pi\mathbb{Z}$ είναι το σύνολο των ακέραιων αριθμών πολλαπλασιασμένοι με 2π και $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών με τα ακέραια πολλαπλάσια του 2π να είναι ίσα με μηδέν. Οπότε με αυτήν την συνάρτηση, έχουμε το παρακάτω ολοκλήρωμα :

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{n=-T}^{T-1}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=e^{\sigma}}\frac{x^{\log(z)-1}}{z}D(f,\log(z))\,dz, \tag{2.33}$$

ή:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{2T}{2\pi i}\oint_{|z|=e^{\sigma}}\frac{x^{\log(z)-1}}{z}D(f,\log(z))\,dz. \tag{2.34}$$

Γυρίζοντας στην ισότητα 2.32, έχουμε:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{2T}{2\pi i}\oint_{|z|=e^{\sigma}}\frac{x^{\log(z)-1}}{z}D(f,\log(z))\,dz=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-2\pi iT}^{\sigma+2\pi iT}x^{s-1}D(f,s)\,ds. \tag{2.35}$$

Διαιρώντας με $2T$ και πολλαπλασιάζοντας με x, μας δίνει το παρακάτω αποτέλεσμα:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=e^{\sigma}}\frac{x^{\log(z)}}{z}D(f,\log(z))\,dz=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4\pi iT}\int_{\sigma-2\pi iT}^{\sigma+2\pi iT}x^{s}D(f,s)\,ds. \tag{2.36}$$

Το οποίο, με αλλαγή μεταβλητών, είναι ίσο με:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=e^{\sigma}}\frac{x^{\log(z)}}{z}D(f,\log(z))\,dz=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2iN}\int_{\sigma-iN}^{\sigma+iN}x^{s}D(f,s)\,ds. \tag{2.37}$$

Έτσι, από την 2.3 βγάζουμε το συμπέρασμα ότι:

$$f(k)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=e^{\sigma}}\frac{k^{\log(z)}}{z}D(f,\log(z))\,dz. \tag{2.38}$$

Που, μπορεί να επεκταθεί στο ολοκλήρωμα:

$$f(k)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{k^{\log(z)}}{z}D(f,\log(z))\,dz. \tag{2.39}$$

Όπου C είναι οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη, στην οποία ο λογάριθμος ($\log(z)$) μπορεί να οριστεί (branch cut integral).

Μια άλλη απόδειξη είναι η εξής:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{k^{\log(z)}}{z} D(f,\log(z))\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{k^{\log(z)}}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^{\log(z)}}\,dz. \tag{2.40}$$

Βγάζοντας έξω το σύμβολο της άθροισης και αλλάζοντας τις βάσεις των εκθετικών, έχουμε:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{k^{\log(z)}}{z} D(f,\log(z))\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\oint_C z^{\log\frac{k}{n}-1}\,dz. \tag{2.41}$$

Τώρα, εξετάζουμε το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$I_{k,n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{\log\frac{k}{n}-1}\,dz. \tag{2.42}$$

Για $k = n$, το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος $I_{k,n}$ είναι προφανές και είναι ίσο με 1. Για $k \neq n$, χωρίζουμε τη συνάρτηση $\log(\frac{k}{n})$ σε:

$$\log\left(\frac{k}{n}\right) = \left\lfloor \log\left(\frac{k}{n}\right)\right\rfloor + \left\{\log\left(\frac{k}{n}\right)\right\},$$

όπου $\left\lfloor \log\left(\frac{k}{n}\right)\right\rfloor$ το ακέραιο μέρος του και $\left\{\log\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$ το κλασματικό του μέρος και $0 \leq \left\{\log\left(\frac{k}{n}\right)\right\} < 1$. Για $\left\{\log\left(\frac{k}{n}\right)\right\} = 0$ το ολοκλήρωμα $I_{k,n}$ είναι μηδέν. Σύμφωνα με το βιβλίο [9], το ολοκλήρωμα $I_{k,n}$ μπορεί να ερμηνευτεί με την γενικευμένη έννοια του ολοκληρώματος και της παραγώγου ως:

$$D^{a} f(z) = \frac{\Gamma(a+1)}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-z)^{a+1}}\,dz, \tag{2.43}$$

για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Μερικές από τις ιδιότητές της είναι:

$$D^{a}D^{b} f(z) = D^{a+b} f(z)$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$
και:

$$D^{-a} f(z) = I^{a} f(z),$$

όπου I^{a} είναι η αντιστροφή της παραγώγου, δηλαδή το ολοκλήρωμα.

Οπότε, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, το ολοκλήρωμα $I_{k,n}$ γίνεται:

$$\Gamma\left(-\log\left(\frac{k}{n}\right)+1\right) I_{k,n} = I^{\left\{\log\left(\frac{k}{n}\right)\right\}} I^{\left\lfloor\log\left(\frac{k}{n}\right)\right\rfloor}(1)\Big|_{z=0}. \tag{2.44}$$

Για $k < n$ η 2.44 γίνεται:

$$\Gamma\left(-\log\left(\frac{k}{n}\right)+1\right) I_{k,n} = I^{\left\{\log\left(\frac{k}{n}\right)\right\}} D^{\left\lfloor\log\left(\frac{n}{k}\right)\right\rfloor}(1)\Big|_{z=0}. \tag{2.45}$$

Και επειδή η $\left\lfloor \log\left(\frac{n}{k}\right)\right\rfloor \in \mathbb{N}$, το ολοκλήρωμα $I_{k,n}$ γίνεται μηδέν.

Για την περίπτωση $n < k$, παίρνουμε τον ορισμό των Riemann και Liouville για το ολοκλήρωμα γενικής τάξης (βλέπε [9]), δηλαδή:

$$I^{\{\log(\frac{k}{n})\}} I^{\lfloor \log(\frac{k}{n}) \rfloor}(1)|_{z=0} = I^{\log(\frac{k}{n})}(1)|_{z=0}. \tag{2.46}$$

Οπότε:

$$I^{\{\log(\frac{k}{n})\}} I^{\lfloor \log(\frac{k}{n}) \rfloor}(1)|_{z=0} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\log\left(\frac{k}{n}\right)+1\right)} z^{\log(\frac{k}{n})}|_{z=0} = 0. \tag{2.47}$$

Άρα το ολοκλήρωμα $I_{k,n}$ παίρνει την συμπτυγμένη μορφή:

$$I_{k,n} = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n. \end{cases} \tag{2.48}$$

Με τα παραπάνω αποτελέσματα 2.41 και 2.48 αποδείξαμε την 2.39.

2.3 Μετατροπή σειρών Dirichlet σε άλλες σειρές

Σε αυτήν την ενότητα, θα μετατρέψουμε τις σειρές Dirichlet σε άλλες σειρές, χρησιμοποιώντας αθροίσματα και κυρίως σειρές Taylor. Σε αυτήν την ενότητα, θα εκμεταλλευτούμε τις εξισώσεις για τους ολοκληρωτικούς πυρήνες στην υποενότητα 2.2.1. Για αρχή, εκμεταλλευόμαστε τις εξισώσεις 2.19 και 2.20, παίρνοντας το εξής ολοκλήρωμα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) e^{-in\vartheta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(s)}{(i\vartheta)^s} D(f,s)\, ds. \tag{2.49}$$

Ύστερα, χρησιμοποιούμε το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων για τη συνάρτηση Γάμμα, όπως αναφέρεται στην εξίσωση 1.64, έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) e^{-in\vartheta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} D(f,-k)(i\vartheta)^k. \tag{2.50}$$

Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει αυτήν την εξίσωση, παίρνοντας την σειρά Taylor για την εκθετική συνάρτηση και αλλάζοντας την σειρά άθροισης. Ο περιορισμός εδώ, είναι ότι η $D(f,-k)$ πρέπει να ορίζεται, τουλάχιστον στην αναλυτική συνέχιση της $D(f,s)$. Αν δεν ορίζεται, τότε μπορούμε να ανατρέξουμε στην ολοκληρωτική εξίσωση 2.49 και με διάφορα τεχνάσματα από την μιγαδική ανάλυση να βρούμε μια πιο έγκυρη εξίσωση. Αυτή η τεχνική δεν θα μας απασχολήσει, καθώς ξεφεύγει από τους σκοπούς της εργασίας μας. Μια άλλη τεχνική, είναι να την αναλύσουμε σε τριγωνομετρικές σειρές όπως θα αναφέρουμε παρακάτω. Η τεχνική αυτή, αντιμετωπίζει το πρόβλημα της ασυνέχειας για περιττούς ή για ζυγούς ακέραιους αριθμούς. Κάπου εδώ, θα αναφέρουμε τις τεχνικές για να εξάγουμε τις τριγωνομετρικές σειρές των αριθμητικών συναρτήσεων. Εργαζόμαστε αναλόγως όπως για την εκθετική σειρά :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) cos(n\vartheta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(s)}{\vartheta^s} cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) D(f,s)\, ds. \tag{2.51}$$

Τώρα, χρησιμοποιούμε τους πόλους της συνάρτησης γάμμα για να έχουμε την παρακάτω σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) cos(n\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) D(f,-k)\vartheta^k. \tag{2.52}$$

Ή, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της συνάρτησης $cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)$ έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) cos(n\partial) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} D(f, -2k)\partial^{2k}. \tag{2.53}$$

Παρόμοιο τρόπο, χρησιμοποιούμε και για της ημιτονικές σειρές ως ακολούθως:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) sin(n\partial) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) D(f, -k)\partial^{k}. \tag{2.54}$$

Ή, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της συνάρτησης $sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$ έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) sin(n\partial) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} D(f, -(2k+1))\partial^{2k+1}. \tag{2.55}$$

Για τις σειρές Ζήτα, εργαζόμαστε όπως προηγουμένως:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) z^{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(s)}{(log(z))^s} D(f, s)\, ds. \tag{2.56}$$

Με τον ίδιο τρόπο, λαμβάνουμε την ακόλουθη σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} D(f, -k)(log(z))^{k}. \tag{2.57}$$

Για όλες τις παραπάνω σειρές, μπορούν να επαληθευτούν, αν τις αναλύσουμε σε σειρές Taylor και αλλάζοντας την σειρά άθροισης. Επιπλέον, όλες οι παραπάνω σειρές πρέπει να ακολουθούν τις συνθήκες σύγκλισης.

2.3.1 Αντιστροφή των παραπάνω σειρών

Η αντιστροφή των σειρών, γίνεται με τους γνωστούς τρόπους που αναφέρονται στο κεφάλαιο 1.

2.4 Προσεγγίσεις Στο Άπειρο

Σε αυτήν την ενότητα, θα παρατηρήσουμε πως συμπεριφέρονται στο άπειρο οι ολοκληρωτικοί πυρήνες, με άλλα λόγια θα προσεγγίσουμε τους ολοκληρωτικούς πυρήνες $K(k, s)$ για $k \to +\infty$. Για αρχή, παίρνουμε τον ακόλουθο ολοκληρωτικό πυρήνα:

$$K(k, s) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\partial} \frac{\Gamma(s)}{(i\partial)^s} \frac{d\partial}{2\pi}. \tag{2.58}$$

Ο οποίος για $k \to +\infty$ και εκμεταλλεύοντας την εξίσωση 1.168 του λήμματος Riemann-Lebesgue από το βιβλίο [12] μας δίνει:

$$K(k, s) \sim \frac{\Gamma(s)}{\pi^{s+1} k} sin\left(k\pi - s\frac{\pi}{2}\right). \tag{2.59}$$

Όσο για τον ολοκληρωτικό πυρήνα:

$$K(k,s) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{k-1}\frac{\Gamma(s)}{(log(z))^s}\,dz, \tag{2.60}$$

εδώ εκμεταλλευόμαστε το θεώρημα τελικής τιμής για τον μετασχηματισμό Ζήτα 1.85, δηλαδή:

$$K(k,s) \sim \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\Gamma(s)}{(log(z))^s}. \tag{2.61}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου (ή τον κανόνα l'Hopital), έχουμε:

$$K(k,s) \sim \frac{\Gamma(s)}{s(log(z))^{s-1}}\; z \to 1. \tag{2.62}$$

Τέλος, ο ακόλουθος ολοκληρωτικός πυρήνας:

$$K(k,s) = \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\frac{\Gamma(s+1)k^{s-n}}{\Gamma(s+1-n)}, \tag{2.63}$$

προσεγγίζεται στο άπειρο ακολούθως:

$$K(k,s) \sim k^{s-1}, \tag{2.64}$$

καθώς οι εκθέτες της μεταβλητής k ακολουθούν φθίνουσα πορεία, οπότε το προσεγγίζουμε με τον πρώτο όρο του αθροίσματος. Με το παραπάνω αποτέλεσμα, θα ασχοληθούμε για μια πληθώρα εφαρμογών, καθώς είναι η πιο απλή προσέγγιση για την αντιστροφή των σειρών Dirichlet .

2.5 Εφαρμογές

Σε αυτήν την ενότητα, θα εφαρμόσουμε τις προαναφερθέντες τεχνικές, καθώς και τις ασυμπτωτικές προσεγγίσεις των αριθμητικών συναρτήσεων στο άπειρο. Πρώτα από όλα, θα αναφέρουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.5.1 (Θεώρημα ασυμπτωτικής ισότητας)**.** Αν ένα άθροισμα προσεγγίζεται από μια μονότονη παραγωγίσιμη συνάρτηση $f \in C^1$, τότε η παράγωγος της συνάρτησης αυτής είναι η προσέγγιση της ακολουθίας που αθροίζεται.

Απόδειξη. Έστω το άθροισμα:

$$S_x = \sum_{n\leq x} a_n \tag{2.65}$$

και υποθέτουμε ότι το άθροισμα S_x προσεγγίζεται στο άπειρο από την συνάρτηση $f(x)$, δηλαδή:

$$S_x = \sum_{n\leq x} a_n \sim f(x),\; x\to\infty. \tag{2.66}$$

Τότε η ακολουθία a_n προσεγγίζεται ως:

$$a_k \sim \frac{df(x)}{dx}|_{x=k},\; k\to\infty. \tag{2.67}$$

Για να φτάσουμε σε αυτό το συμπέρασμα, χρησιμοποιούμε την εξίσωση 2.5:

$$S_x = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{x^s}{s} D(a,s) \frac{ds}{2\pi i} \sim f(x), \tag{2.68}$$

όπου:

$$D(a,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}. \tag{2.69}$$

Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό πυρήνα από την εξίσωση 2.64, μας δίνει:

$$a_k \sim \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} k^{s-1} D(a,s) \frac{ds}{2\pi i} = \frac{dS_x}{dx}|_{x=k} \sim \frac{df(x)}{dx}|_{x=k},\ k \to \infty. \tag{2.70}$$

□

Εάν η συνάρτηση $f(x)$ έχει πεπερασμένες ή μετρήσιμες άπειρες ασυνέχειες, εφ' όσον η συνάρτηση $f(x)$ αναλύεται σε άθροισμα βηματικών συναρτήσεων, τότε η παράγωγος των βηματικών συναρτήσεων αντικαθίστανται με το συνεχές ανάλογο του δέλτα του Kronecker, δηλαδή:

$$\delta(x-a) \to \mathbb{1}_0(x-a). \tag{2.71}$$

Αν η συνάρτηση $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη, τότε η ακολουθία μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$a_k \sim \frac{S_k}{k} \sim \frac{f(k)}{k},\ k \to \infty. \tag{2.72}$$

Η προσέγγιση αυτή, μπορεί να θεωρηθεί ως μια περίπτωση του κανόνα l'Hopital, με την προϋπόθεση ότι $f(k) \to \infty$ καθώς $k \to \infty$. Να σημειωθεί ότι, η προσεγγιστική συνάρτηση δεν είναι μοναδική για οποιαδήποτε αριθμητική συνάρτηση.

Μια χρήσιμη εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος, που θα χρειαστούμε στην συνέχεια, είναι η παρακάτω:
Ας λάβουμε υπόψη την ακόλουθη εξίσωση για την συνάρτηση ζήτα:

$$\zeta(s) = D(1,s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\,dx. \tag{2.73}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης των σειρών Dirichlet , δηλαδή:

$$D(f,s)D(g,s) = D(f*g,s), \tag{2.74}$$

όπου:

$$f*g = \sum_{k|n} f(k) g\left(\frac{n}{k}\right). \tag{2.75}$$

Αντικαθιστώντας την $g\left(\frac{n}{k}\right)$ με τη μονάδα:

$$\zeta(s)D(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k|n} f(k)}{n^s}. \tag{2.76}$$

Ας χρησιμοποιήσουμε το προαναφερθέν θεώρημα:

$$\sum_{k|n} f(k) \sim \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} n^{s-1}\zeta(s)D(f,s)\frac{ds}{2\pi i}. \tag{2.77}$$

Σε συνδυασμό με την εξίσωση 2.73 και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων:

$$\sum_{k|n} f(k) \sim \sum_{m=1}^{n} \frac{f(m)}{m},\ n \to \infty. \tag{2.78}$$

Προς διευκόλυνση των υπολογισμών, θέτουμε το κλασματικό μέρος του x, $\{x\}$, ίσον με μηδέν, καθ' ότι θεωρείται αμελητέα ποσότητα και μπορεί να αγνοηθεί.

Με την αντικατάσταση της $f(k)$ με το δέλτα του Kronecker, $\delta_{k,j}$ λαμβάνουμε την προσέγγιση της συνάρτησης-δείκτη διαιρετότητας $\mathbb{1}_{k|n}$:

$$\sum_{k|n} \delta_{k,j} \sim \sum_{m=1}^{n} \frac{\delta_{m,j}}{m},\ n \to \infty, \tag{2.79}$$

ή:

$$\mathbb{1}_{k|n} \sim \frac{u(n-k)}{k},\ n \to \infty, \tag{2.80}$$

όπου:

$$\mathbb{1}_{k|n} = \begin{cases} 1 & k|n \\ 0 & k \nmid n. \end{cases} \tag{2.81}$$

Χαρακτηριστική συνάρτηση πρώτων αριθμών

Η χαρακτηριστική συνάρτηση πρώτων αριθμών ορίζεται:

$$\chi_{\mathbb{P}}(n) = \begin{cases} 1 & n \in \mathbb{P} \\ 0 & n \notin \mathbb{P}. \end{cases} \tag{2.82}$$

Όπου $\mathbb{P}$ το σύνολο των πρώτων αριθμών. Μέσω αυτής της συνάρτησης, μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση μέτρησης πρώτων αριθμών ως εξής:

$$\pi(x) = \sum_{1 \le n \le x} \chi_{\mathbb{P}}(n). \tag{2.83}$$

Σύμφωνα με το βιβλίο [2], το θεώρημα πρώτων αριθμών ισχυρίζεται ότι:

$$\pi(x) \sim \int_{2}^{x} \frac{1}{log(t)}\, dt. \tag{2.84}$$

Εφ' όσον το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι μονότονο, εφαρμόζουμε το θεώρημα ασυμπτωτικής ισότητας και παίρνουμε την εξής προσέγγιση για την χαρακτηριστική συνάρτηση πρώτων αριθμών:

$$\chi_{\mathbb{P}}(n) \sim \frac{u(n-2)}{log(n)},\ n \to \infty. \tag{2.85}$$

Συνάρτηση πρώτων αριθμών

Μία άλλη εφαρμογή των σειρών Dirichlet, είναι να βρούμε ένα τρόπο υπολογισμού της αντίστροφης συνάρτησης μέτρησης πρώτων αριθμών, με άλλα λόγια θέλουμε να βρούμε μια συνάρτηση που υπολογίζει τον n-ιοστό πρώτο αριθμό για $n \in \mathbb{N}$. Αρχικά, θεωρούμε την εξής σειρά Dirichlet:

$$D(\pi^{-1}, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{-1}(n)}{n^s}. \tag{2.86}$$

Όπου $\pi^{-1}(n)$ η αντίστροφη συνάρτηση πρώτων αριθμών, που συμβολίζεται αλλιώς και p_n και είναι ο n-ιοστός πρώτος αριθμός. Μία εναλλακτική έκφρασης της παραπάνω σειράς είναι η παρακάτω:

$$D(\pi^{-1}, s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{p}{\pi(p)^s}, \tag{2.87}$$

με $\mathbb{P}$ το σύνολο των πρώτων αριθμών και $\pi(n)$ είναι η συνάρτηση μέτρησης πρώτων αριθμών. Η ολοκλήρωση κατά Stieltjes με μέτρο την συνάρτηση μέτρησης πρώτων αριθμών μας δίνει:

$$D(\pi^{-1}, s) = \int_2^\infty \frac{t}{\pi(t)^s} \frac{d\pi(t)}{dt}\, dt. \tag{2.88}$$

Με κατά μέρος ολοκλήρωση, έχουμε την παρακάτω εξίσωση:

$$D(\pi^{-1}, s) = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-1} \int_{2+\epsilon}^\infty \frac{1}{\pi(t)^{s-1}}\, dt, \ \forall \epsilon \in (0, 1). \tag{2.89}$$

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της αντιστροφής των σειρών Dirichlet, παίρνουμε:

$$\pi^{-1}(k) \sim \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} k^{s-1} D(\pi^{-1}, s)\, ds. \tag{2.90}$$

Δηλαδή:

$$\pi^{-1}(k) = 2u(k-1) + \int_{2+\epsilon}^\infty u(k - \pi(t))\, dt, \ \forall \epsilon \in (0, 1). \tag{2.91}$$

Όπου, σε μορφή σειράς γίνεται:

$$\pi^{-1}(k) = 2u(k-1) + \sum_{n=2}^\infty u(k - \pi(n) - 1). \tag{2.92}$$

Η $\pi^{-1}(k)$ μπορεί να γραφτεί με τη βοήθεια της συνάρτησης κενών μεταξύ των πρώτων αριθμών, δηλαδή με την βοήθεια της $g_k = \pi^{-1}(k+1) - \pi^{-1}(k)$ η εξίσωση 2.89 γίνεται:

$$D(\pi^{-1}, s) = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-1} \sum_{n=1}^\infty \int_{p_n+\epsilon}^{p_{n+1}+\epsilon} \frac{1}{(n+1)^{s-1}}\, dt, \ \forall \epsilon \in (0, 1), \tag{2.93}$$

ή:

$$D(\pi^{-1}, s) = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-1} \sum_{n=1}^\infty \frac{g_n}{(n+1)^{s-1}}. \tag{2.94}$$

Ή χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της αντιστροφής των σειρών Dirichlet :

$$\pi^{-1}(k) = 2u(k-1) + \sum_{n=1}^\infty g_n u(k - n - 1). \tag{2.95}$$

Συνάρτηση κενών μεταξύ πρώτων αριθμών

Με βάση τις προηγούμενες εξισώσεις, η συνάρτηση κενών πρώτων αριθμών δίνεται από την εξίσωση:

$$g_k = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{1}_0(k - \pi(n)) \sim \frac{d\pi^{-1}(x+1)}{dx}|_{x=k}. \tag{2.96}$$

Συνάρτηση μέτρησης πρώτων παραγόντων

Η συνάρτηση μέτρησης πρώτων παραγόντων, είναι μια συνάρτηση που μετράει πόσοι πρώτοι αριθμοί $p \in \mathbb{P}$ διαιρούν τον αριθμό n τουλάχιστον μία φορά. Η συνάρτηση αυτή ορίζεται από το άθροισμα:

$$\omega(n) = \sum_{k|n} \chi_{\mathbb{P}}(k). \tag{2.97}$$

Με τις προσεγγίσεις που βρήκαμε σε αυτήν την υποενότητα, για $n \to \infty$ μας δίνει την εξίσωση:

$$\omega(n) \sim \sum_{m=1}^{n} \frac{\chi_{\mathbb{P}}(m)}{m} \sim \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{mlog(m)},\ n \to \infty. \tag{2.98}$$

Συνάρτηση μέτρησης διαιρετών

Η συνάρτηση μέτρησης διαιρετών, μας δίνει τον αριθμό όλων τον πιθανών διαιρετών ενός φυσικού αριθμού n. Η συνάρτηση μέτρησης διαιρετών, ορίζεται από το παρακάτω άθροισμα:

$$d(n) = \sum_{k|n} 1. \tag{2.99}$$

Η οποία προσεγγίζεται από το αρμονικό άθροισμα H_n, δηλαδή:

$$d(n) \sim \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} = H_n,\ n \to \infty. \tag{2.100}$$

Μία άλλη προσέγγιση, είναι να πάρουμε το εξής άθροισμα:

$$\sigma(x) = \sum_{n \leq x} d(n). \tag{2.101}$$

Η οποία συνάρτηση $\sigma(x)$ προσεγγίζεται σύμφωνα με το βιβλίο [3] ως:

$$\sigma(x) \sim xlog(x) + (2\gamma - 1)x. \tag{2.102}$$

Από εκεί βλέπουμε ότι η συνάρτηση είναι μονότονη, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα ασυμπτωτικής ισότητας για το $d(n)$:

$$d(n) \sim log(n) + 2\gamma,\ n \to \infty, \tag{2.103}$$

όπου γ η σταθερά Euler-Mascheroni.

Κεφάλαιο 3

Πρώτοι Αριθμοί

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με την κατανομή των πρώτων αριθμών. Επίσης, θα εισάγουμε συναρτήσεις, οι οποίες θα μας δίνουν πληροφορίες για την κατανομή των πρώτων αριθμών, καθώς και κάποιες προσεγγίσεις των συναρτήσεων αυτών στο άπειρο. Στη συνέχεια, θα προτείνουμε τις συναρτήσεις αυτές, καθώς και την στενή σχέση που έχουν οι πρώτοι αριθμοί με τις ρίζες της συνάρτησης ζήτα και την υπόθεση Riemann .

3.1 Προβλήματα Πρώτων Αριθμών

3.1.1 Συνάρτηση-δείκτης πρώτων αριθμών

Η συνάρτηση-δείκτης πρώτων αριθμών μας δείχνει αν ένας φυσικός αριθμός n είναι πρώτος αριθμός, δηλαδή $n \in \mathbb{P}$. Η συνάρτηση-δείκτης πρώτων αριθμών ορίζεται ως:

$$\chi_{\mathbb{P}}(n) = \begin{cases} 1 & n \in \mathbb{P} \\ 0 & n \notin \mathbb{P}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Ένας τρόπος υπολογισμού της συνάρτησης αυτής είναι με το εξής ολοκλήρωμα:

$$\chi_{\mathbb{P}}(n) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2iT} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} n^s P(s)\, ds. \tag{3.2}$$

Όπου:

$$P(s) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s}. \tag{3.3}$$

Ή, σε μορφή σειράς Dirichlet:

$$P(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{\chi_{\mathbb{P}}(n)}{n^s}. \tag{3.4}$$

Σύμφωνα με την αναφορά [2] η συνάρτηση $P(s)$ συνδέεται με την συνάρτηση $\zeta(s)$ ακολούθως:

$$P(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m) log(\zeta(ms))}{m}. \tag{3.5}$$

Όπου $\mu(m)$ η συνάρτηση Möbius, για περισσότερες ιδιότητες της συνάρτησης αυτής, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο βιβλίο [3] για περαιτέρω μελέτη. Μία στοιχειώδης ιδιότητα της συνάρτησης αυτής είναι η εξής:

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\omega(n)} & p^2 \nmid n, \forall p \in \mathbb{P}, \\ 1 & n = 1, \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{3.6}$$

και:

$$\delta_{n,1} = \sum_{d|n} \mu(d). \tag{3.7}$$

Ο συνδυασμός των 3.2 και 3.5 και με αλλαγές μεταβλητών, μας δίνει το παρακάτω αποτέλεσμα:

$$\chi_{\mathbb{P}}(n) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2iT} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} n^{\frac{s}{m}} log(\zeta(s))\, ds. \tag{3.8}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση:

$$log(\zeta(s)) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{log(n)} \frac{1}{n^s}, \tag{3.9}$$

όπου $\Lambda(n)$ η συνάρτηση Von Mangoldt, για περισσότερες ιδιότητες της συνάρτησης αυτής, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο βιβλίο [3] για περαιτέρω μελέτη. Μία στοιχειώδης ιδιότητα της συνάρτησης αυτής είναι η εξής:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} log(p) & n = p^r, p \in \mathbb{P}, r \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{3.10}$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση $\chi_{\mathbb{P}}(n)$ με το εξής άθροισμα:

$$\chi_{\mathbb{P}}(n) = \sum_{n=k^m} \frac{\Lambda(k)}{log(k)} \frac{\mu(m)}{m}. \tag{3.11}$$

Ή αλλιώς:

$$\chi_{\mathbb{P}}(n) = \frac{1}{log(n)} \sum_{n=k^m} \Lambda(k)\mu(m). \tag{3.12}$$

Ο τρόπος υπολογισμού της εξίσωσης 3.12 είναι η εξής:

Εφ' όσον για $n \neq p^r$ τότε $\Lambda(k) = 0$ άρα:

$$\chi_{\mathbb{P}}(p^r) = \frac{1}{log(p^r)} \sum_{p^r=k^m} \Lambda(k)\mu(m). \tag{3.13}$$

Όλοι οι πιθανοί φυσικοί αριθμοί που ικανοποιούν την εξίσωση $p^r = k^m$ είναι οι $k = p^{r/d}$ και $m = d$ με $d|r$ με βάση αυτά, καταλήγουμε:

$$\chi_{\mathbb{P}}(p^r) = \frac{1}{rlog(p)} \sum_{d|r} \Lambda(p^{r/d})\mu(d). \tag{3.14}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της $\Lambda(p^{r/d}) = log(p)$, καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\chi_{\mathbb{P}}(p^r) = \frac{1}{r} \sum_{d|r} \mu(d). \tag{3.15}$$

Και χρησιμοποιώντας την εξίσωση 3.7, έχουμε την παρακάτω εξίσωση:

$$\chi_{\mathbb{P}}(p^r) = \frac{1}{r}\delta_{r,1}. \tag{3.16}$$

Οπότε $\chi_{\mathbb{P}}(p^r) = 0$ για $r \neq 1$ και $\chi_{\mathbb{P}}(p) = 1$ για $p \in \mathbb{P}$.

Αλλάζοντας την φορά άθροισης και χρησιμοποιώντας την σειρά Taylor για την εκθετική συνάρτηση γίνεται η παρακάτω μετατροπή:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} n^{\frac{s}{m}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{log(n)^k}{k!\zeta(k+1)} s^k. \tag{3.17}$$

Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα 3.2 και την παραπάνω εξίσωση λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\chi_{\mathbb{P}}(n) = \frac{1}{log(n)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \Lambda(m) \frac{log(n)^k}{k!\zeta(k+1)} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2iT} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \frac{s^k}{m^s}\, ds. \tag{3.18}$$

Ορίζοντας την ακόλουθη σειρά Dirichlet :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \tag{3.19}$$

λαμβάνουμε την εξής ισότητα:

$$\chi_{\mathbb{P}}(n) = \frac{1}{log(n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{log(n)^k}{k!\zeta(k+1)} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2iT} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} s^k \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds. \tag{3.20}$$

Χρησιμοποιώντας το όριο $\inf_{n\in\mathbb{Z}^+} \zeta(n+1) = 1$ και την σειρά Taylor για την εκθετική συνάρτηση έχουμε την εξής ανισότητα:

$$0 \leq \chi_{\mathbb{P}}(n) \leq \frac{\Lambda(n)}{log(n)}. \tag{3.21}$$

Με ανώτατο όριο:

$$\limsup_{n\to\infty} \chi_{\mathbb{P}}(n) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\Lambda(n)}{log(n)} = 1. \tag{3.22}$$

3.1.2 Συνάρτηση μέτρησης ζευγών πρώτων αριθμών

Το πρόβλημα που θα λύσουμε εδώ, είναι να φτιάξουμε μια συνάρτηση η οποία μετράει ζεύγη πρώτων αριθμών με δεδομένο κενό μεταξύ των ζευγών g. Δηλαδή, θέλουμε να βρούμε πόσα ζεύγη πρώτων αριθμών ικανοποιούν την εξίσωση $p - q = g$ με $p, q \in \mathbb{P}$. Θα ξεκινήσουμε, κατασκευάζοντας την συνάρτηση-δείκτη που ικανοποιεί την εξίσωση $p - q = g$. Η λογική είναι η ακόλουθη:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{E}}(n) = \mathbb{1}_{\mathbb{P}}(n)\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(n-g). \tag{3.23}$$

Όπου $\mathbb{E} = \{n \in \mathbb{P}\} \cap \{n - g \in \mathbb{P}\}$. για να πάρουμε την δεξιά πλευρά της παραπάνω ισότητας, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα των συναρτήσεων-δεικτών στην θεωρία του μέτρου.

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $\chi_{\mathbb{P}}(n)$ για το $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(n)$ έχουμε τον εναλλακτικό συμβολισμό:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{B}}(n) = \chi_{\mathbb{P}}(n)\chi_{\mathbb{P}}(n-g). \tag{3.24}$$

Η συνάρτηση που θέλουμε να κατασκευάσουμε, την συμβολίζουμε με $\pi_g(x)$ και την ορίζουμε με το άθροισμα:

$$\pi_g(x) = \sum_{n\leq x} \chi_{\mathbb{P}}(n)\chi_{\mathbb{P}}(n-g). \tag{3.25}$$

Την παραπάνω συνάρτηση την ονομάζουμε συνάρτηση μέτρησης ζευγών πρώτων αριθμών με δεδομένο κενό g. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα 3.21 εύκολα καταλήγουμε στην παρακάτω ανισότητα:

$$\pi_g(x) \leq \sum_{2+g\leq n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{log(n)}\frac{\Lambda(n-g)}{log(n-g)}. \tag{3.26}$$

Για την ασυμτωτική προσέγγιση της αναφερόμενης συνάρτησης, θα την αναβάλουμε για την ενότητα ¨Προσεγγίσεις¨ του ίδιου κεφαλαίου.

3.1.3 Συνάρτηση μέτρησης ζευγών πρώτων αριθμών που υπακούν στην υπόθεση Goldbach

Ένα άλλο πρόβλημα που θα μας απασχολήσει πάνω στους πρώτους αριθμούς, είναι να φτιάξουμε μια συνάρτηση η οποία μετράει ζεύγη πρώτων αριθμών που υπακούν στην υπόθεση Goldbach. Η υπόθεση Goldbach ισχυρίζεται ότι υπάρχουν πάντα πρώτοι αριθμοί $p, q \in \mathbb{P}$ οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $p + q = 2m$ με $m \in \mathbb{N},\ m \geq 3$. Για να το λύσουμε, θα κατασκευάσουμε την συνάρτηση η οποία μετράει τα ζεύγη πρώτων αριθμών που ικανοποιούν την εξίσωση $p + q = 2m$ με $p, q \in \mathbb{P}$. Θα ξεκινήσουμε, κατασκευάζοντας την συνάρτηση-δείκτη που ικανοποιεί την εξίσωση $p + q = 2m$. Η λογική είναι η ακόλουθη:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{U}}(n) = \mathbb{1}_{\mathbb{P}}(n)\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(2m-n), \tag{3.27}$$

όπου $\mathbb{U} = \{n \in \mathbb{P}\} \cap \{2m-n \in \mathbb{P}\}$. Για να πάρουμε την δεξιά πλευρά της παραπάνω ισότητας, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα των συναρτήσεων-δεικτών στην θεωρία του μέτρου. Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $\chi_{\mathbb{P}}(n)$ για το $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(n)$ έχουμε τον εναλλακτικό συμβολισμό:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{U}}(n) = \chi_{\mathbb{P}}(n)\chi_{\mathbb{P}}(2m-n). \tag{3.28}$$

Η συνάρτηση που θέλουμε να κατασκευάσουμε, την συμβολίζουμε με $G_2(x)$ και την ορίζουμε με το άθροισμα:

$$G_2(m) = \sum_{2\leq n} \chi_{\mathbb{P}}(n)\chi_{\mathbb{P}}(2m-n). \tag{3.29}$$

Την παραπάνω συνάρτηση την ονομάζουμε συνάρτηση μέτρησης ζευγών πρώτων αριθμών που υπακούν στην υπόθεση Goldbach. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα 3.21 εύκολα καταλήγουμε στην παρακάτω ανισότητα:

$$G_2(m) \leq \sum_{2\leq n} \frac{\Lambda(n)}{log(n)}\frac{\Lambda(2m-n)}{log(2m-n)}. \tag{3.30}$$

Για την ασυμτωτική προσέγγιση της αναφερόμενης συνάρτησης, θα την αναβάλουμε για την ενότητα ¨Προσεγγίσεις¨ του ίδιου κεφαλαίου. Για να ισχύει η υπόθεση Goldbach, πρέπει $G_2(m) > 0,\ \forall m \geq 3$.

3.1.4 Συνάρτηση μέτρησης πολλαπλοτήτων πρώτων αριθμών

Με τον όρο πολλαπλότητα των πρώτων αριθμών, εννοούμε ένα διάνυσμα με πρώτους αριθμούς, με τα αντίστοιχα κενά μεταξύ της πρώτης διανυσματικής συνιστώσας και των υπόλοιπων διανυσματικών συνιστωσών να είναι ένα διάνυσμα, που συμβολίζεται με $\vec{g} = (0, g_1, g_2, ..., g_{k-1})$. Αν υποθέσουμε το διάνυσμα πρώτων αριθμών $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_k) \in \mathbb{P}^k$ τότε όλοι οι πρώτοι αριθμοί στο διάνυσμα ικανοποιούν την εξίσωση: $p_n - p_1 = g_{n-1}$, $\forall n = 1, 2, 3, ..., k$ με $g_0 = 0$. Η διαδικασία είναι η ίδια με την διαδικασία μέτρησης ζευγών πρώτων αριθμών, καθώς αυτή η ενότητα είναι μια γενίκευση του προβλήματος αυτού. Δηλαδή, κατασκευάζουμε την συνάρτηση-δείκτη ως εξής:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{T}}(n) = \chi_{\mathbb{P}}(n) \prod_{i=1}^{k-1} \chi_{\mathbb{P}}(n - g_i). \tag{3.31}$$

Όπου:

$$\mathbb{T} = \{n \in \mathbb{P}\} \bigcap_{i=1}^{k-1} \{n - g_i \in \mathbb{P}\}$$

Η παραπάνω εξίσωση, μπορεί να αποδειχτεί με απλή επαγωγική μέθοδο. Με τον ίδιο τρόπο, όπως στις προηγούμενες ενότητες παίρνουμε την παρακάτω συνάρτηση μέτρησης πολλαπλοτήτων πρώτων αριθμών ($\pi_{(g_1,g_2,...,g_{k-1})}(x)$):

$$\pi_{(g_1,g_2,...,g_{k-1})}(x) = \sum_{n \leq x} \chi_{\mathbb{P}}(n) \prod_{i=1}^{k-1} \chi_{\mathbb{P}}(n - g_i). \tag{3.32}$$

Επίσης, με επαγωγική μέθοδο, έχουμε την παρακάτω ανισότητα:

$$\pi_{(g_1,g_2,...,g_{k-1})}(x) \leq \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{log(n)} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\Lambda(n - g_i)}{log(n - g_i)}. \tag{3.33}$$

Στην επόμενη ενότητα, θα ασχοληθούμε με την ασυμπτωτική συμπεριφορά της παραπάνω συνάρτησης.

3.1.5 Συνάρτηση κενών μεταξύ πρώτων αριθμών

Η συνάρτηση κενών μεταξύ πρώτων αριθμών, όπως αναφέρεται και στο κεφάλαιο 2, ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών πρώτων αριθμών, που σε μορφή εξισώσεων περιγράφεται ως $g_n = p_{n+1} - p_n = \pi^{-1}(n+1) - \pi^{-1}(n)$ όπου g_n η συνάρτηση κενών μεταξύ πρώτων αριθμών. Η εξίσωση που συνδέει την συνάρτηση g_n με την συνάρτηση μέτρησης πρώτων αριθμών $\pi(n)$ είναι:

$$g_k = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_0(k - \pi(n)) \sim \frac{d\pi^{-1}(x+1)}{dx}|_{x=k}. \tag{3.34}$$

Όπου, σύμφωνα με το θεώρημα πρώτων αριθμών:

$$\pi(n) \sim Li(n) = \int_2^n \frac{1}{log(t)}\, dt. \tag{3.35}$$

Η αντίστροφη συνάρτηση μέτρησης πρώτων αριθμών προσεγγίζεται ως:

$$\pi^{-1}(n) \sim Li^{-1}(n). \tag{3.36}$$

Οπότε η συνάρτηση κενών μεταξύ πρώτων αριθμών λαμβάνει την ασυμπτωτική μορφή:

$$g_k \sim \frac{dLi^{-1}(x+1)}{dx}|_{x=k}. \tag{3.37}$$

Η παραπάνω εξίσωση, θα μας χρειαστεί για την ενότητα προσεγγίσεις αυτού του κεφαλαίου.

3.2 Προσεγγίσεις

3.2.1 Ασυμπτωτική προσέγγιση της συνάρτησης von Mangoldt

Σύμφωνα με το θεώρημα ασυμπτωτικής ισότητας έχουμε:

$$\Lambda(k) \sim \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} k^{s-1} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{ds}{2\pi i},\ k \to \infty. \tag{3.38}$$

Όπου η συνάρτηση $\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)$ εκφράζεται με το άθροισμα των πόλων και την αφαίρεση των ριζών της συνάρτησης ζήτα, σύμφωνα με το βιβλίο [2]. Οπότε με το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων:

$$\Lambda(k) \sim u(k-2) - \sum_{\zeta(p)=0} k^{p-1},\ k \to \infty. \tag{3.39}$$

Επειδή για τις ρίζες της συνάρτησης ζήτα, το πραγματικό μέρος των ριζών είναι μικρότερο της μονάδας, δηλαδή $\Re(p) < 1,\ \zeta(p) = 0$[2], συμπεραίνουμε ότι:

$$\Lambda(k) \sim u(k-2),\ k \to \infty. \tag{3.40}$$

3.2.2 Ασυμπτωτική προσέγγιση της συνάρτησης μέτρησης ζευγών πρώτων αριθμών

Σύμφωνα με την ανισότητα 3.26 έχουμε την παρακάτω ασυμπτωτική προσέγγιση:

$$\pi_g(x) \sim \sum_{2+g\leq n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{log(n)} \frac{\Lambda(n-g)}{log(n-g)}. \tag{3.41}$$

Αν λάβουμε υπόψη τα λεγόμενα της προηγούμενης υποενότητας, καταλήγουμε:

$$\pi_g(x) \sim \sum_{2+g\leq n\leq x} \frac{u(n-2)}{log(n)} \frac{u(n-g-2)}{log(n-g)} \tag{3.42}$$

ή:

$$\pi_g(x) \sim \sum_{2+g\leq n\leq x} \frac{1}{log(n)} \frac{1}{log(n-g)}. \tag{3.43}$$

Επειδή το παραπάνω άθροισμα αποκλίνει, σύμφωνα με την προσέγγιση κατά Euler-Maclaurin παίρνουμε το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$\pi_g(x) \sim \int_{2+g}^{x} \frac{1}{log(t)} \frac{1}{log(t-g)}\, dt, \tag{3.44}$$

όπως θα δούμε και στα προγράμματα MATLAB, η παραπάνω προσέγγιση αποκλίνει για περιττό g. Από τις ιδιότητες των πρώτων αριθμών, το περιττό κενό g ισχύει για το πολύ ένα ζεύγος πρώτων αριθμών, και το ζεύγος αυτό είναι το $(2, 2+g)$, καθώς όλοι οι πρώτοι αριθμοί είναι περιττοί εκτός του 2. Με βάση αυτά, η συνάρτηση $\pi_g(x)$ παίρνει την ακόλουθη μορφή για περιττά κενά:

$$\pi_g(x) = \chi_{\mathbb{P}}(2+g)u(x-2-g), \; g \in 2\mathbb{N}+1. \tag{3.45}$$

3.2.3 Ασυμπτωτική προσέγγιση της συνάρτησης μέτρησης ζευγών πρώτων αριθμών που υπακούν στην υπόθεση Goldbach

Σύμφωνα με την ανισότητα 3.30 έχουμε την παρακάτω ασυμπτωτική προσέγγιση:

$$G_2(m) \sim \sum_{2 \le n} \frac{\Lambda(n)}{log(n)} \frac{\Lambda(2m-n)}{log(2m-n)}. \tag{3.46}$$

Αν λάβουμε υπόψη τα λεγόμενα της προηγούμενης υποενότητας, καταλήγουμε:

$$G_2(m) \sim \sum_{2 \le n} \frac{u(n-2)}{log(n)} \frac{u(2m-2-n)}{log(2m-n)} \tag{3.47}$$

ή:

$$G_2(m) \sim \sum_{n=2}^{2m-2} \frac{1}{log(n)} \frac{1}{log(2m-n)}. \tag{3.48}$$

Επειδή το παραπάνω άθροισμα αποκλίνει για $m \to \infty$, σύμφωνα με την προσέγγιση κατά Euler-Maclaurin παίρνουμε το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$G_2(m) \sim \int_2^{2m-2} \frac{1}{log(t)} \frac{1}{log(2m-t)} \, dt. \tag{3.49}$$

3.2.4 Ασυμπτωτική προσέγγιση της συνάρτησης μέτρησης πολλαπλοτήτων πρώτων αριθμών

Σύμφωνα με την ανισότητα 3.33 έχουμε την παρακάτω ασυμπτωτική προσέγγιση:

$$\pi_{(g_1, g_2, \ldots, g_{k-1})}(x) \sim \sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{log(n)} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\Lambda(n-g_i)}{log(n-g_i)}. \tag{3.50}$$

Αν λάβουμε υπόψη τα λεγόμενα της προηγούμενης υποενότητας, καταλήγουμε:

$$\pi_{(g_1, g_2, \ldots, g_{k-1})}(x) \sim \sum_{n \le x} \frac{u(n-2)}{log(n)} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{u(n-g_i-2)}{log(n-g_i)} \tag{3.51}$$

ή:

$$\pi_{(g_1, g_2, \ldots, g_{k-1})}(x) \sim \sum_{2+g_{k-1} \le n \le x} \frac{1}{log(n)} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{log(n-g_i)}. \tag{3.52}$$

Επειδή το παραπάνω άθροισμα αποκλίνει, σύμφωνα με την προσέγγιση κατά Euler-Maclaurin παίρνουμε το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$\pi_{(g_1, g_2, \ldots, g_{k-1})}(x) \sim \int_{2+g_{k-1}}^{x} \frac{1}{log(t)} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{log(t-g_i)} \, dt. \tag{3.53}$$

3.2.5 Ασυμπτωτική προσέγγιση της συνάρτησης κενών μεταξύ πρώτων αριθμών

Σύμφωνα με την ασυμπτωτική ισότητα 3.37 έχουμε την παρακάτω ασυμπτωτική προσέγγιση:

$$g_k \sim \frac{dLi^{-1}(x+1)}{dx}|_{x=k} \sim \frac{dLi^{-1}(x)}{dx}|_{x=k},\ k \to \infty. \tag{3.54}$$

Αν λάβουμε υπόψη τον τύπο για την παράγωγο της αντίστροφης συνάρτησης, έχουμε:

$$g_k \sim \frac{dy}{dLi(y)}|_{y=Li^{-1}(k)} \tag{3.55}$$

ή:

$$g_k \sim log(y)|_{y=Li^{-1}(k)}. \tag{3.56}$$

Αν λάβουμε υπόψη την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dLi^{-1}(x)}{dx} = log\left(\int \frac{dLi^{-1}(x)}{dx}\, dx\right), \tag{3.57}$$

με την μετονομασία $t = dLi^{-1}(x)/dx$ έχουμε την ακόλουθη λύση:

$$\int_a^t \frac{e^u}{u}\, du = x + c_1. \tag{3.58}$$

Με $t \sim g_k$ έχουμε:

$$\int_a^{g_k} \frac{e^u}{u}\, du \sim k + c_1. \tag{3.59}$$

Με τις αρχικές συνθήκες καταλήγουμε:

$$\int_1^{g_k} \frac{e^u}{u}\, du \sim k. \tag{3.60}$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα, θα μας χρησιμεύσει για την προσέγγιση της συνάρτησης κενών μεταξύ πρώτων αριθμών για τον κώδικα Matlab.

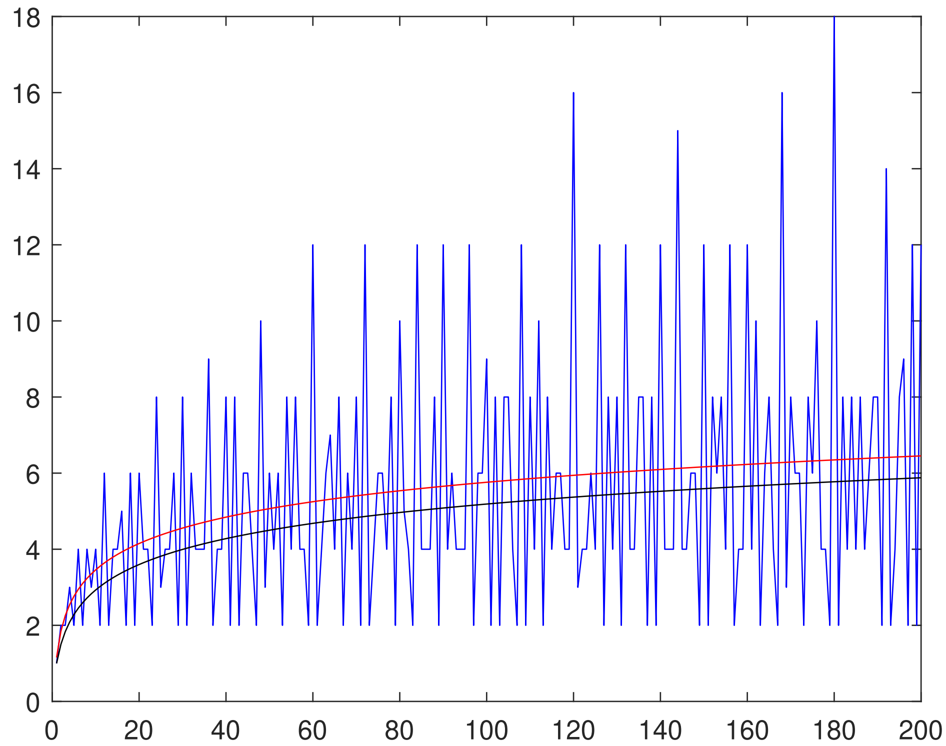
Παράρτημα Α΄

Προγράμματα σε MATLAB

Στο παράρτημα αυτό, θα παραθέσουμε μερικά προγράμματα σε MATLAB, καθώς και κάποια γραφήματα για την οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων, έτσι ώστε να επιβεβαιωθούν τα αποτελέσματα που βρήκαμε στα προηγούμενα κεφάλαια.

Στο παρακάτω πρόγραμμα, δίνουμε την συνάρτηση μέτρησης διαιρετών $d(n)$, καθώς και τις προσεγγίσεις της όπως βρήκαμε στο κεφάλαιο 2. Εδώ, το d είναι η πραγματική τιμή της $d(n)$, ενώ $app1$ και $app2$ είναι οι προσεγγίσεις της με την λογαριθμική συνάρτηση και την αρμονική σειρά αντίστοιχα.

```
% divisor counting function
% d is the real value
% app1 is the approximation from the derivative
% app2 is the harmonic series approximation
function [d,app1,app2]=divaprtest(m)
x=1:m;
t=1./x;
% euler-mascheroni constant
g=vpa(eulergamma);
for k=1:m
app1(k)=log(k)+2*g;
% Harmonic sum up to k
app2(k)=sum(t(1:k));
% calculating the real value
y=divisors(k);
d(k)=size(y,2);
end
% plotting the graphs for comparison
plot(x,d,'b');
hold on
plot(x,app1,'r');
hold on
plot(x,app2,'k');
end
```



Σχήμα Α΄.1: Γράφημα της συνάρτησης μέτρησης διαιρετών και οι προσεγγίσεις της. Το d είναι η πραγματική τιμή (μπλε), η $app1$ είναι η προσέγγιση με την λογαριθμική συνάρτηση (κόκκινο) και η $app2$ είναι η προσέγγιση της με τις αρμονικές σειρές (μαύρο).

Στο παρακάτω πρόγραμμα, δίνουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση πρώτων αριθμών $\chi_{\mathbb{P}}(n)$, καθώς και την προσέγγιση της όπως βρήκαμε στο κεφάλαιο 3. Εδώ, το i είναι η πραγματική τιμή της $\chi_{\mathbb{P}}(n)$, ενώ o είναι η προσέγγιση της με την συνάρτηση von Mangoldt, σύμφωνα με την ανισότητα 3.21.

```
% calculating and approximating the prime characteristic
   function
function [o,i]=chip_(n)
% constructing the von Mangoldt function
f=factor(n);
if f(1)==f(length(f))
    o=log(f(1));
else
    o=0;
end
 % approximation
o=o./log(n);
% real value (i)
i=isprime(n);
end
```

Στο παρακάτω πρόγραμμα, δίνουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση πρώτων αριθμών $\chi_{\mathbb{P}}(n)$, όπως βρήκαμε στο κεφάλαιο 3. Εδώ, το o είναι η τιμή της $\chi_{\mathbb{P}}(n)$, σύμφωνα με την ισότητα 3.12.

```
function o=chipnew(n) % Prime characteristic function
o=0; % initialization
for k=2:n
    for m=1:floor(log(n)/log(k))
        if k^m==n
            o=o+(moebiusmu(m).*mangoldt(k));% sum of mu(m)*
               Lambda(k)
        else
            o=o+0;
        end
    end
end
o=o./log(n);% final result
end
```

Το παρακάτω πρόγραμμα, δεν είναι δικής μας δημιουργίας, αλλά μας χρειάζεται για τα προγράμματα που παραθέτουμε σε αυτό το παράρτημα. Το πρόγραμμα αυτό, μας δίνει τον τρόπο υπολογισμού της συνάρτησης Möbius. Η συνάρτηση αυτή είναι μέσα στο toolbox του MATLAB.

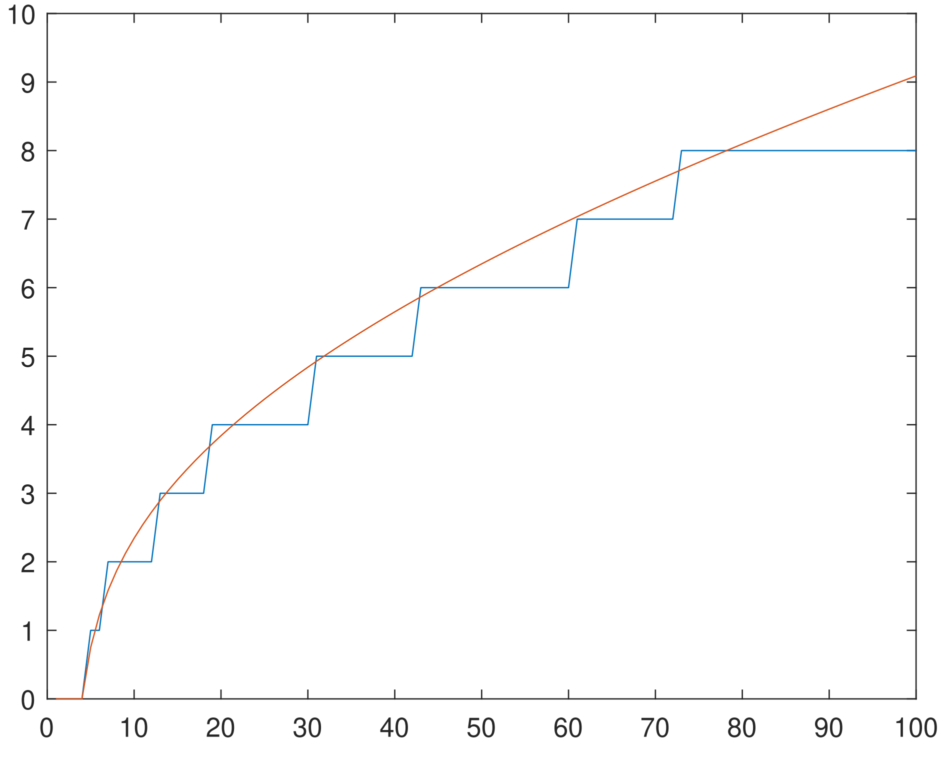
```
function u = moebiusmu(n)
if numel(n)~=1, error('MATLAB:moebiusmu:NonScalarInput','N must be a scalar.'); end
if (n < 1) || (floor(n) ~= n)
  error('MATLAB:moebiusmu:InputNotPosIntGrZero', 'N must be a positive integer greater than 0.');
end
p = factor(n);
N = hist([0 p],max(p)+1);
r = sum(N(2:end) > 1);

if (n == 1)
    u = 1;
elseif (r > 0)
    u = 0;
else
    k = sum(N(2:end) > 0);
    u = (-1)^k;
end
```

Το παρακάτω πρόγραμμα, δεν είναι δικής μας δημιουργίας, αλλά μας χρειάζεται για τα προγράμματα που παραθέτουμε σε αυτό το παράρτημα. Το πρόγραμμα αυτό, μας δίνει τον τρόπο υπολογισμού της συνάρτησης von Mangoldt. Το πρόγραμμα αυτό όπως και άλλα, βρίσκονται στην ιστοσελίδα `https://www.dhushara.com/DarkHeart/RH2/toolbox.htm`.

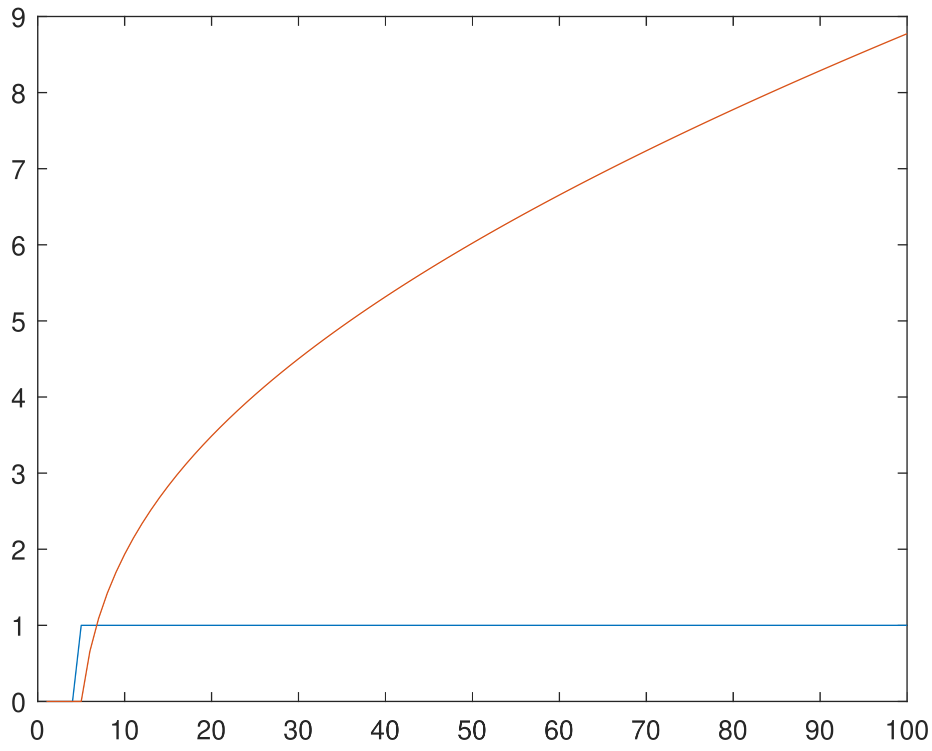
```
function o=mangoldt(n)
%von Mangoldt function
%o=log(p) if n=p^k or 0 elsewhere
f=factor(n);
if f(1)==f(length(f))
    o=log(f(1));
else
    o=0;
end
```

Στο παρακάτω πρόγραμμα, δίνουμε την συνάρτηση μέτρησης ζευγών πρώτων αριθμών $\pi_g(x)$ με κενό g, καθώς και την προσέγγιση της όπως βρήκαμε στο κεφάλαιο 3. Εδώ, το y είναι η πραγματική τιμή της $\pi_g(x)$, ενώ *int* είναι η προσέγγιση της σύμφωνα με την ασυμπτωτική ισότητα 3.44.

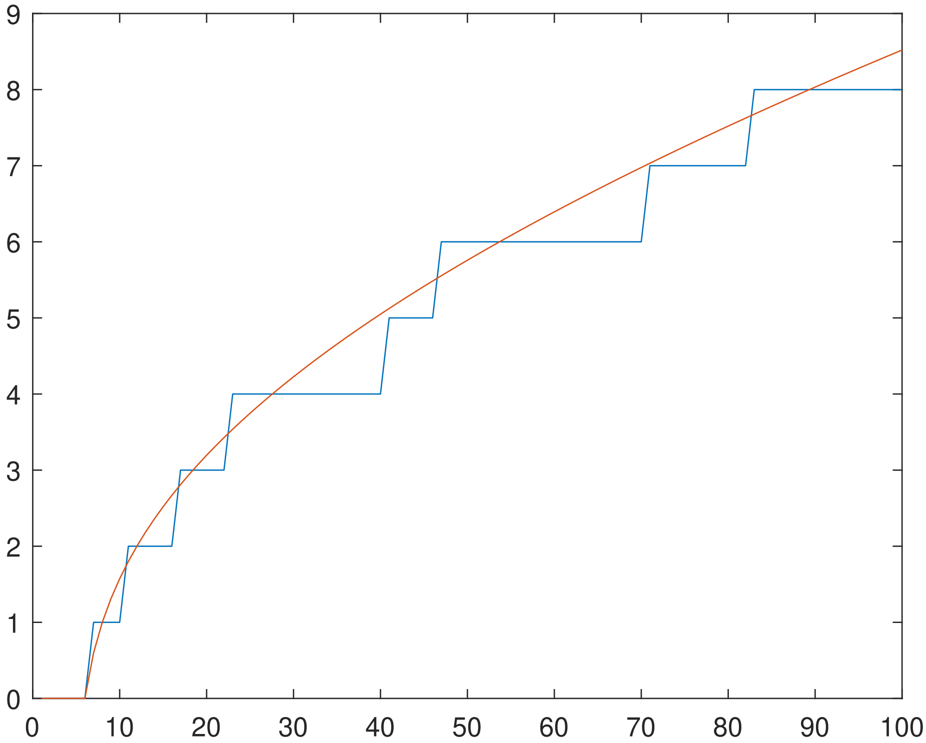
```
 % prime number pair counting function with gap g
function [y,int]=pi_g(x,g)
% y is the real prime pair counter
% int is the approximation at infinity
fun = @(t) 1./(log(t).*log(t-g)); % integrated function
% calculating the actual prime pairs
for k=2:floor(x)
p=primes(k);
q=isprime(max(p-g,0));
y(k)=sum(q);
% calculating the approximation
if k>=2+g
int(k) = integral(fun,2+g,k);
else
  int(k)=0;
end
end
% plotting the two functions
% r is the x axis
r=1:floor(x);
plot(r,y);
hold on
plot(r,int);
end
```



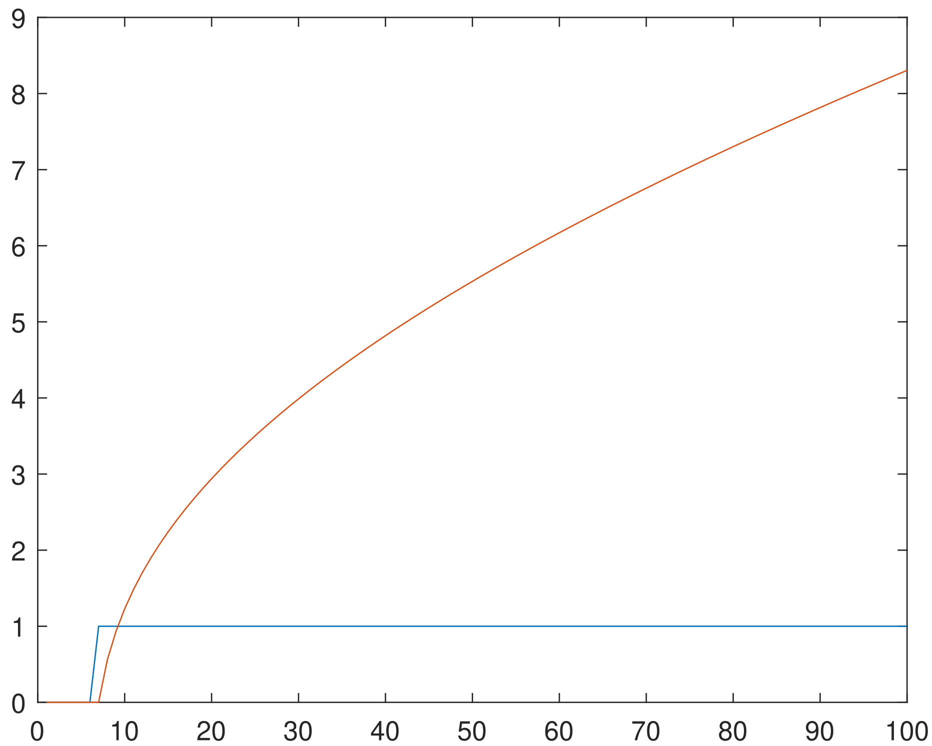
Σχήμα Α΄.2: Γράφημα της συνάρτησης μέτρησης ζευγών πρώτων αριθμών με κενό $g = 2$ και $x = 100$. Το μπλε γράφημα είναι η πραγματική του τιμή και το κόκκινο γράφημα είναι η προσέγγιση μέσω του ολοκληρώματος 3.44.



Σχήμα Α΄.3: Γράφημα της συνάρτησης μέτρησης ζευγών πρώτων αριθμών με κενό $g = 3$ και $x = 100$. Το μπλε γράφημα είναι η πραγματική του τιμή και το κόκκινο γράφημα είναι η προσέγγιση μέσω του ολοκληρώματος 3.44.



Σχήμα Α΄.4: Γράφημα της συνάρτησης μέτρησης ζευγών πρώτων αριθμών με κενό $g = 4$ και $x = 100$. Το μπλε γράφημα είναι η πραγματική του τιμή και το κόκκινο γράφημα είναι η προσέγγιση μέσω του ολοκληρώματος 3.44.

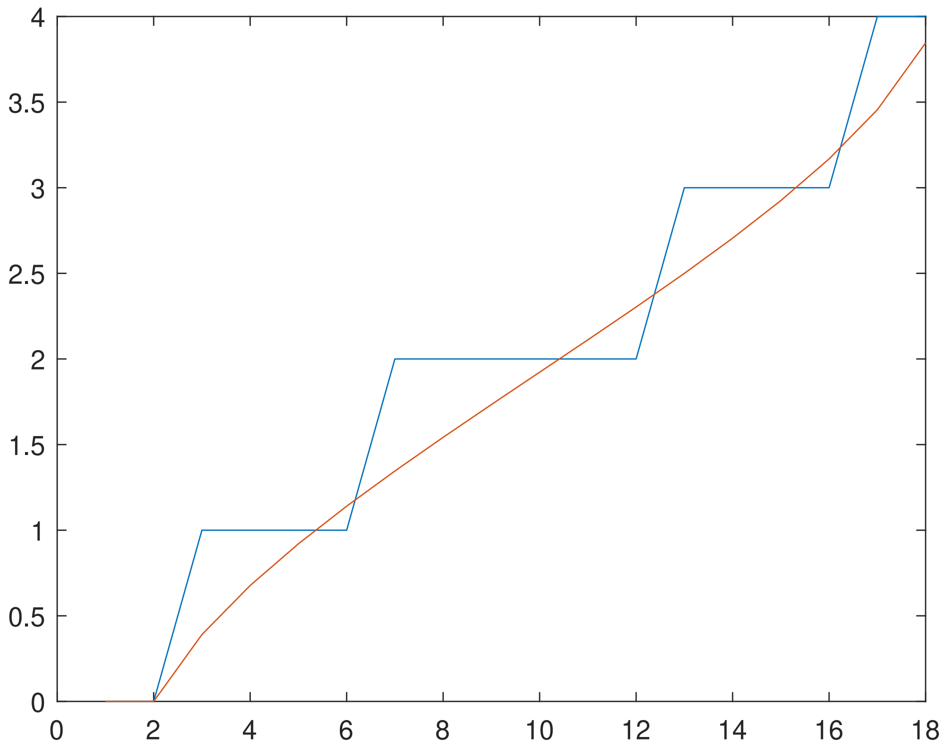


Σχήμα Α΄.5: Γράφημα της συνάρτησης μέτρησης ζευγών πρώτων αριθμών με κενό $g = 5$ και $x = 100$. Το μπλε γράφημα είναι η πραγματική του τιμή και το κόκκινο γράφημα είναι η προσέγγιση μέσω του ολοκληρώματος 3.44.

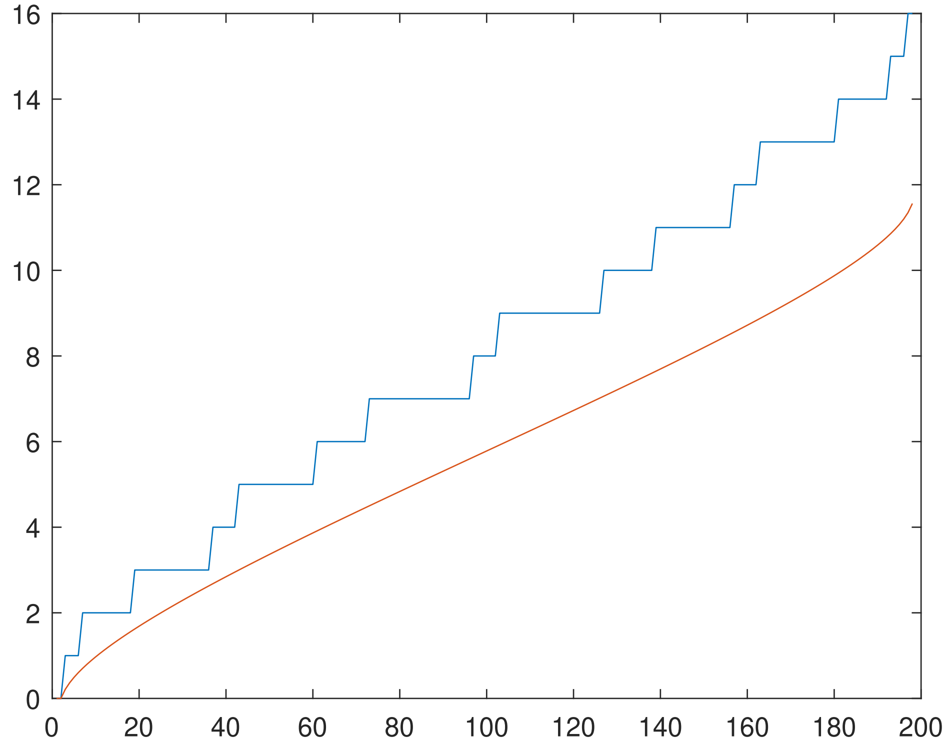
Όπως βλέπουμε, η προσέγγιση (κόκκινο γράφημα) αποκλίνει για περιττό κενό g, οπότε η προσέγγιση αυτή δεν είναι η βέλτιστη για αυτήν την περίπτωση. Η διόρθωση για την περίπτωση του περιττού κενού g δίνεται από την εξίσωση 3.45.

Στο παρακάτω πρόγραμμα, δίνουμε την συνάρτηση μέτρησης ζευγών πρώτων αριθμών που υπακούν στην υπόθεση Goldbach $G_2(m)$, καθώς και την προσέγγιση του όπως βρήκαμε στο κεφάλαιο 3. Εδώ, το y είναι η πραγματική τιμή της $G_2(m)$, ενώ *int* είναι η προσέγγιση της σύμφωνα με την ασυμπτωτική ισότητα 3.49.

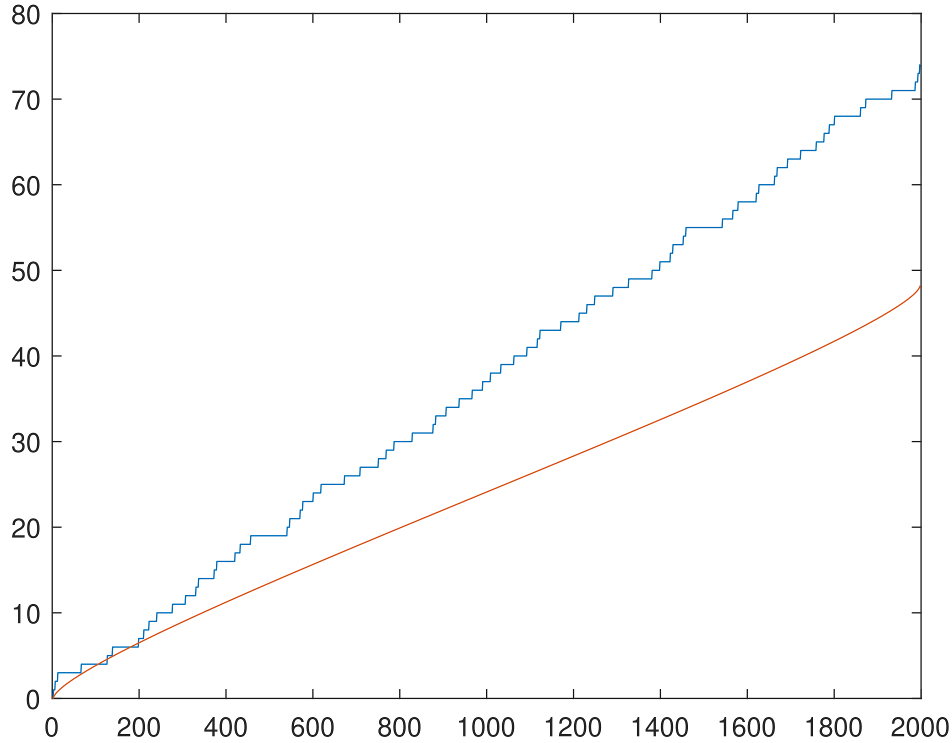
```
% prime pair counting function that add up to 2*m
function [y,int]=gbachc(m)
% integrating function
fun = @(t) 1./(log(t).*log(2*m-t));
% real number of prime pairs (y)
for k=2:(2*m-2)
p=primes(k);
q=isprime(max(2*m-p,0));
y(k)=sum(q);
% calculating the approximation (int)
if k>=2
int(k) = integral(fun,2,k);
else
  int(k)=0;
end
end
% plotting for comparison
% r is the x-axis
r=1:2*m-2;
plot(r,y);
hold on
plot(r,int);
end
```



Σχήμα Α΄.6: Γράφημα της συνάρτησης μέτρησης ζευγών πρώτων αριθμών που υπακούν στην υπόθεση Goldbach με $m = 10$. Το μπλε γράφημα είναι η πραγματική του τιμή και το κόκκινο γράφημα είναι η προσέγγιση μέσω του ολοκληρώματος 3.49.



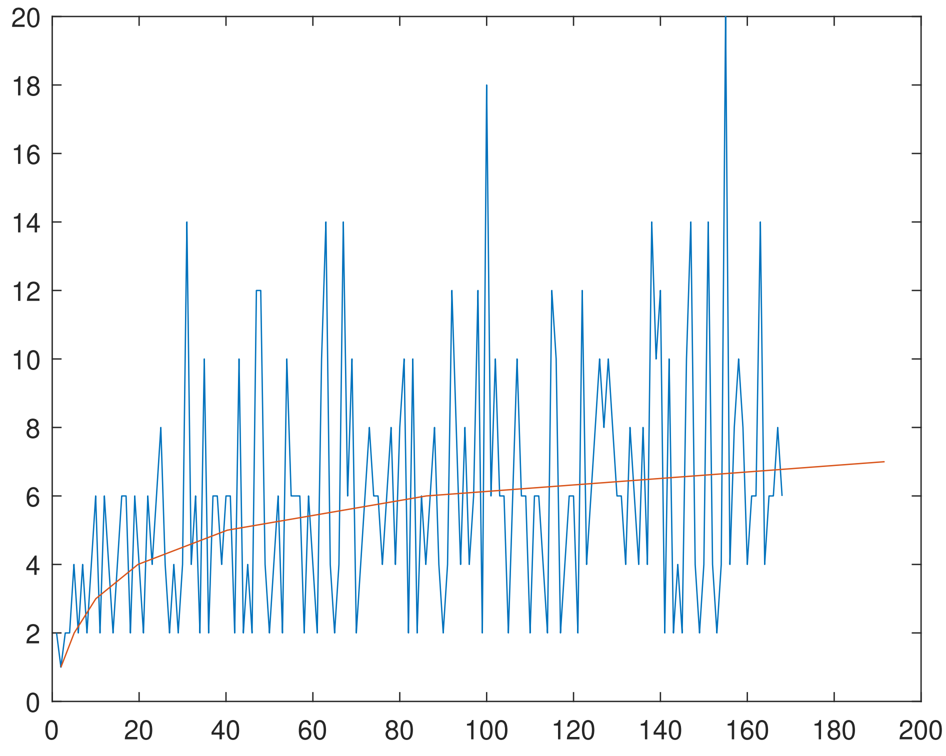
Σχήμα Α΄.7: Γράφημα της συνάρτησης μέτρησης ζευγών πρώτων αριθμών που υπακούν στην υπόθεση Goldbach με $m = 100$. Το μπλε γράφημα είναι η πραγματική του τιμή και το κόκκινο γράφημα είναι η προσέγγιση μέσω του ολοκληρώματος 3.49.



Σχήμα Α΄.8: Γράφημα της συνάρτησης μέτρησης ζευγών πρώτων αριθμών που υπακούν στην υπόθεση Goldbach με $m = 1000$. Το μπλε γράφημα είναι η πραγματική του τιμή και το κόκκινο γράφημα είναι η προσέγγιση μέσω του ολοκληρώματος 3.49.

Στο παρακάτω πρόγραμμα, δίνουμε την συνάρτηση κενών μεταξύ πρώτων αριθμών $g_k = p_{k+1} - p_k$, καθώς και την προσέγγιση της όπως βρήκαμε στο κεφάλαιο 3. Εδώ, το g είναι η πραγματική τιμή της g_k, ενώ *int* είναι η προσέγγιση της σύμφωνα με την ασυμπτωτική ισότητα 3.60. Εδώ, δεν αντιστρέφουμε αριθμητικά το εκθετικό ολοκλήρωμα 3.60, αλλά χρησιμοποιούμε το τέχνασμα με την αλλαγή των αξόνων από $x - y$ σε $y - x$ για να σχεδιάσουμε την προσέγγιση.

```
% prime gap function
% g is the real prime difference function
% int is the exponential integral that needs to be inverted
function [g,int]=pgaps(x)
% filling the two vectors with prime numbers
p=primes(x+1);
d=size(p,2);
q=[0 primes(p(d-1))];
% prime gap vector
g=p-q;
% constructing the x-axis
k=1:d;
% the integrated function
fun = @(t) exp(t)./(t);
int=0;
i=1;
% calculating the integral
while int+2<d
int(i)= integral(fun,1,i);
i=i+1;
end
% plotting the approximation with the real value
% we use the trick of swapping the axes to plot the
   approximation
int=int+2;
s=size(int,2);
l=1:s;
plot(k,g);
hold on
plot(int,l);
end
```



Σχήμα Α΄.9: Γράφημα της συνάρτησης κενού μεταξύ πρώτων αριθμών με $x = 200$. Το μπλε γράφημα είναι η πραγματική του τιμή και το κόκκινο γράφημα είναι η προσέγγιση μέσω του αντίστροφου του εκθετικού ολοκληρώματος 3.60.

Παράρτημα Β΄

Συμπεράσματα και παρατηρήσεις

Μερικές από τις τεχνικές που χρησιμοποιούμε για να αντιστρέψουμε τις σειρές Dirichlet μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για άλλου είδους σειρές. Όσον αφορά για την τεχνική με την σύμμορφη απεικόνιση, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στο πεδίο ορισμού όπου η συνάρτηση ολοκληρώνεται. Η τεχνική της σύμμορφης απεικόνισης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον μετασχηματισμό Laplace όσο και για τον μετασχηματισμό Fourier, κάνοντας ορισμένες παραλλαγές, οπότε ο αναγνώστης να επιβεβαιώσει την τεχνική αυτή με τους μετασχηματισμούς αυτούς. Για την απόδειξη από την άλλη μεριά, που χρησιμοποιήσαμε την κλασματική παράγωγο, δεν χρησιμοποιούμε την κλασσική παράγωγο Riemann-Liouville, αλλά την παραγώγιση κατά Caputo. Το θεώρημα ασυμπτωτικής ισότητας ισχύει και για άλλου είδους σειρών. Όπως παρατηρούμε στα γραφήματα, φαίνεται ότι το γράφημα προσέγγισης από το θεώρημα ασυμπτωτικής ισότητας είναι σαν ένα είδος μέσης τιμής. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί, αν πάρουμε το διαφορικό θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $(N-1,N), N \to \infty$, δηλαδή:

$$f'(\xi) = \frac{f(N) - f(N-1)}{N-(N-1)}, \xi \in (N-1,N).$$

Επειδή $N \to \infty$, μπορούμε να πούμε ότι $\xi \approx N$, οπότε:

$$f'(N) \sim f(N) - f(N-1).$$

Επιπλέον, το θεώρημα ασυμπτωτικής ισότητας λύνει το πρόβλημα των ασυνεχειών τύπου $f(N) - f(N-1) = \infty - \infty$ για $f(N) \to \infty, N \to \infty$.

Τα ανώτερα όρια από τις ανισότητες για τις συναρτήσεις με τους πρώτους αριθμούς, χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις von Mangoldt μπορούν να διαψεύσουν μερικές υποθέσεις που έχουν δημιουργηθεί για τους πρώτους αριθμούς, ιδίως αν το ανώτερο όριο είναι πεπερασμένο. Μερικές από τις προσεγγίσεις πάνω στις συναρτήσεις για τους πρώτους αριθμούς ξεφεύγουν από την πραγματική τιμή, υποθέτουμε ότι στα σφάλματα αυτά παίζουν μεγάλο ρόλο οι μη τετριμμένες ρίζες της συνάρτησης ζήτα και η υπόθεση Riemann. Ο σκοπός αυτής της εργασίας δεν ήταν να υπολογίσουμε τα σφάλματα αυτά, αλλά να δείξουμε έναν τρόπο υπολογισμού για να επιβεβαιώσουμε ή να διαψεύσουμε ορισμένα προβλήματα πάνω στην θεωρία των αριθμών.

Σημειογραφία

$\arctan(x)$ Η αντίστροφη συνάρτηση της εφαπτομένης

$\chi_{\mathbb{P}}(n)$ Συνάρτηση-δείκτης πρώτου αριθμού

$\cos(x), \sin(x)$ Η συνάρτηση του συνημίτονου και του ημίτονου της x

$\delta(x)$ Η συνάρτηση δέλτα του Dirac

$\delta_{n,k}$ Δέλτα του Kronecker

$\exp(x) = e^x$ Η εκθετική συνάρτηση της x

$\Gamma(s)$ Η συνάρτηση Γάμμα

$\gamma = 0.577...$ Η σταθερά Euler-Mascheroni

$$\gamma := \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - log(N)\right)$$

$\hat{f}$ Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης f

$\Lambda(n)$ Συνάρτηση von Mangoldt

$\lfloor x \rfloor$ Ο μεγαλύτερος ακέραιος μικρότερος του x ή το ακέραιο μέρος του x

$\log(x) = \ln(x)$ Η συνάρτηση του φυσικού λογαρίθμου της x

$\mathbb{C}$ Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών

$\mathbb{N}$ Το σύνολο των φυσικών αριθμών

$\mathbb{P}$ Το σύνολο των πρώτων αριθμών

$\mathbb{R}$ Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

$\mathbb{Z}$ Το σύνολο των ακέραιων αριθμών

$\mathbb{1}_A$ Συνάρτηση-δείκτης ενός συνόλου A

$\mu(n)$ Συνάρτηση του Möbius

$\oint$ Το ολοκλήρωμα κλειστής καμπύλης

$\omega(n)$ Συνάρτηση μέτρησης πρώτων παραγόντων του n

ω Η γωνιακή συχνότητα του μετασχηματισμού Fourier

$\pi(x)$ Συνάρτηση μέτρησης πρώτων αριθμών μικρότερων του x

$\pi = 3.14\ldots$ Η σταθερά του κύκλου πι

$\pi^{-1}(n) = p_n$ Συνάρτηση n-οστού πρώτου αριθμού, αντίστροφη συνάρτηση μέτρησης πρώτων αριθμών

$\Re(s), \Im(s)$ Το πραγματικό και φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού s

$\tan(x)$ Η συνάρτηση της εφαπτομένης της x

$\zeta(s)$ Η συνάρτηση ζήτα του Riemann

$\{x\}$ Το κλασματικό μέρος του x, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

$A \cap B$ Τομή των συνόλων A και B

$A \cup B$ Ένωση των συνόλων A και B

$Arg(z)$ Όρισμα του μιγαδικού αριθμού z

$B_k, B_k(t)$ Αριθμός Bernoulli και πολυώνυμο Bernoulli αντίστοιχα

$C^N[a, b]$ Το σύνολο των N-παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο διάστημα $[a, b]$

C^N Το σύνολο των N-παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$d(n)$ Συνάρτηση μέτρησης διαιρετών του n

D Το σύνολο σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace και Mellin

$e = 2.71\ldots$ Η σταθερά του Euler

$f * g$ Η συνέλιξη μεταξύ των συναρτήσεων f και g

$f', f^{(n)}$ Οι παράγωγοι της συνάρτησης f

$f(x) \sim g(x)$ Η f είναι ασυμπτωτικά ίση με την g, δηλαδή

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

g_n Συνάρτηση n-οστού κενού μεταξύ πρώτων αριθμών $g_n = p_{n+1} - p_n$

$H(x)$ Η συμμετρική συνάρτηση κατωφλίου του Heaviside

$i = \sqrt{-1}$ Η φανταστική μονάδα

$Li^{-1}(n)$ Αντίστροφη συνάρτηση του λογαριθμικού ολοκληρώματος $Li(x) = \int_2^x \frac{1}{log(t)}\, dt$

$n \mid k,\ n \nmid k$ Το n διαιρεί το k με υπόλοιπο 0, το n δεν διαιρεί το k αντίστοιχα

$P(s)$ Συνάρτηση Dirichlet πρώτων αριθμών

$Res(f(z); z_0)$ Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0

s Η μιγαδική συχνότητα του μετασχηματισμού Laplace

$u(x)$ Η συνάρτηση κατωφλίου του Heaviside

Βιβλιογραφία

[1] T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*. Springer Science & Business Media, 1998.

[2] H. M. Edwards, *Riemann's zeta function*. Courier Corporation, 2001, vol. 58.

[3] U. Murty, *Problems in analytic number theory*. Springer Science & Business Media, 2007, vol. 206.

[4] J. Bak, D. J. Newman, and D. J. Newman, *Complex analysis*. Springer, 2010, vol. 8.

[5] E. M. Stein and R. Shakarchi, *Fourier analysis: an introduction*. Princeton University Press, 2011, vol. 1.

[6] D. Anevski, "Riemann-stieltjes integrals", *Lecture Notes*, 2012.

[7] J. E. McCarthy, "Dirichlet series", 2014.

[8] N. Tsitsas, *Applied Mathematics [Undergraduate textbook]*. Kallipos, Open Academic Publications, 2015. DOI: `http://hdl.handle.net/11419/1131`.

[9] L. Debnath and D. Bhatta, *Integral transforms and their applications*. Chapman and Hall/CRC, 2016.

[10] R. L. Schilling, *Measures, integrals and martingales*. Cambridge University Press, 2017.

[11] D. Morin, *Series on waves*, 2021.

[12] A. Doumas, *Elements of asymptotic analysis [Undergraduate textbook]*. Kallipos, Open Academic Publications, 2022. DOI: `http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-38`.