



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΙΤΛΟΣ: Μελέτη της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς ενισχυμένων ελασμάτων και πρισματικών φορέων με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων

ΠΡΟΦΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

A.M. : NA 13087



**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΘΕΟΔΟΥΛΙΔΗΣ, ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
Π.Δ.Α.**

ΑΘΗΝΑ, 2021

ΑΘΗΝΑ, 2021



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική εργασία

«Μελέτη της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς ενισχυμένων ελασμάτων και πρισματικών φορέων με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων»

Συγγραφέας

Πρόφης Βασίλειος (Α.Μ. 51113087)

Επιβλέπων

Θεοδουλίδης Αλέξανδρος

Επίκουρος Καθηγητής ΠΑ.Δ.Α

Ημερομηνία εξέτασης

14/10/2021

Εξεταστική επιτροπή

Θεοδουλίδης Αλέξανδρος

Επίκουρος Καθηγητής

ΠΑ.Δ.Α

Πολίτης Κωνσταντίνος

Καθηγητής

ΠΑ.Δ.Α

Μητσούδης Δημήτριος

Αναπληρωτής Καθηγητής

ΠΑ.Δ.Α

ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο κάτωθι υπογεγραμμένος Βασίλειος Πρόφης του Βασιλείου, με αριθμό μητρώου 51113087

φοιτητής του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής της Σχολής Μηχανικών του Τμήματος Ναυπηγών Μηχανικών, δηλώνω υπεύθυνα ότι:

«Είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια στην οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, οι όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε ακριβώς είτε παραφρασμένες, αναφέρονται στο σύνολό τους, με πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, στον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία έχει συγγραφεί από μένα αποκλειστικά και αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου, όσο και του Ιδρύματος.

Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του διπλώματός μου» .

Ο Δηλών/



Πρόφης Βασίλειος

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου , Θεοδουλίδη Αλέξανδρο, ο οποίος παρά τις δυσκολίες που αντιμετώπισα σε όλη τη χρονική περίοδο για να εκπονήσω την διπλωματική μου εργασία, ήταν εκεί για εμένα για να με διδάξει και να με καθοδηγήσει σοφά. Ευχαριστώ, επίσης την οικογένειά μου και τους φίλους για την πολύτιμη ψυχολογική στήριξη και την αγαπημένη μου Ειρήνη για τον χρόνο και την βοήθεια που παρείχε με σημειώσεις και άρθρα αλλά και όλους του καθηγητές που με δίδαξαν σε όλη την φοιτητική μου σταδιοδρομία.

Πίνακας Περιεχομένων

| | |
|--|-----|
| 1.Εισαγωγή | 6 |
| 2. Το φαινόμενο του λυγισμού..... | 7 |
| 2.1 Τύπος του Euler για διαρθρωτά υποστυλώματα..... | 8 |
| 2.2 Επέκταση του τύπου Euler σε υποστυλώματα με άλλες συνθήκες στήριξης..... | 12 |
| 2.3 Έκκεντρη φόρτιση : τύπος της τέμνουσας (secant formula) | 16 |
| 2.4 Σχεδιασμός βραχύκορμων υποστυλωμάτων..... | 20 |
| 2.5 Ελαστικός Λυγισμός ορθοτροπικών ελασμάτων..... | 22 |
| 3. Μη γραμμική ανάλυση | 31 |
| 3.1 Βασικές προϋποθέσεις γραμμικής συμπεριφοράς | 31 |
| 3.2 Μη γραμμικότητα υλικού | 34 |
| 3.3 Θεωρίες αστοχίας των υλικών | 35 |
| 4. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων..... | 38 |
| 4.1 Στοιχεία θεωρίας Ελαστικότητας..... | 48 |
| 4.2 Ενεργειακή θεώρηση – Αρχή Δυνατών Έργων | 53 |
| 4.3 Συνάρτηση μετατόπισης | 55 |
| 4.4 Παραμορφώσεις και τάσεις στοιχείου | 60 |
| 4.5 Εφαρμογή της Μεθόδου των Πεπερασμένων στοιχείων στο πρόβλημα του λυγισμού | 63 |
| 4.6 Ελαστοπλαστική ανάλυση | 65 |
| 5. Περιγραφή των υπό μελέτη μοντέλων..... | 67 |
| 5.1 Συνθήκες στήριξης περιμετρικά του ελάσματος | 70 |
| 5.2 Περιγραφή μοντέλων | 72 |
| 6. Θεωρητικός υπολογισμός του κρίσιμου φορτίου λυγισμού για τύπο κολόνας (Column beam buckling calculation)..... | 81 |
| 7. Αριθμητική διερεύνηση των ενισχυτικών με χρήση προγράμματος H/Y ANSYS workbench ... | 86 |
| 7.1 Γραμμική απεικόνιση των αποτελεσμάτων γραμμικού λυγισμού..... | 88 |
| 7.1.1 Μη-γραμμικός λυγισμός..... | 94 |
| 7.2 Σύγκριση αποτελεσμάτων..... | 106 |
| 7.3 Συμπεράσματα - Παρατηρήσεις | 109 |
| 8. Βιβλιογραφία | 110 |

1.Εισαγωγή

Η επιστήμη της Αντοχής των Υλικών βρίσκει εφαρμογή σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών της καθημερινότητά μας. Ασχολείται κυρίως με προβλήματα που έχουν ως στόχο την ανάλυση δυνάμεων των κατασκευών και μηχανισμών που υπόκεινται σε αξονικά ή έκκεντρα φορτία (θλιπτικά και εφελκυστικά) , κατανεμημένες φορτίσεις (βάρος μεταλλικής κατασκευής) καθώς και δυναμικές και κρουστικές φορτίσεις.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται λόγος για το φαινόμενο του λυγισμού πρισματικών φορέων και δε ναυπηγικών ενισχυτικών που χρησιμοποιούνται στη ναυπηγική βιομηχανία στην εσωτερική διαρρύθμιση της μεταλλικής κατασκευής του πλοίου. Το φορτίο υποβλήθηκε κάθετα στη διατομή και ιδανικά , στο κέντρο (βάρους) της και μελετήθηκε η ικανότητά της να φέρει εις πέρας την επιβαλλόμενη φόρτιση μέχρις ότου το ενισχυτικό να λυγίσει, δηλαδή να καμφθεί απότομα γύρω από τον πιο αδύναμο κεντροβραρικό άξονα. Με τον όρο κολώνα ή υποστύλωμα θα αναφερόμαστε στους φορείς που υπόκεινται σε λυγισμό.

Το φαινόμενο αυτό συναντάται κυρίως σε ενισχυτικά – κολόνες που έχουν συνήθως μεγάλο μήκος σε σχέση με τις υπόλοιπες διαστάσεις τους και υπακούουν κατά κόρον στον τύπο του Euler για διαρθρωτά υποστυλώματα από όπου υπολογίζεται και το κρίσιμο φορτίο λυγισμού κατά Euler. Πέραν από αυτό, υπό την επίδραση ενός αξονικού θλιπτικού φορτίου , η κολώνα (ή ενισχυτικό) αστοχεί μαζί με το συνεργαζόμενο έλασμα και επέρχεται κατάρρευση.

Με τη χρήση του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων ANSYS 16.0 θα μοντελοποιήσουμε τρεις τύπους ενισχυτικών και θα επιλύσουμε το πρόβλημα για τα κρίσιμα φορτία ώστε να δούμε πιο από τα τρία είναι πιο ανθεκτικό, αλλά και το πώς μπορούν να διαταχθούν στο εσωτερικό του πλοίου για να προσδώσουν τη βέλτιστη αντοχή στο πλοίο.

2. Το φαινόμενο του λυγισμού

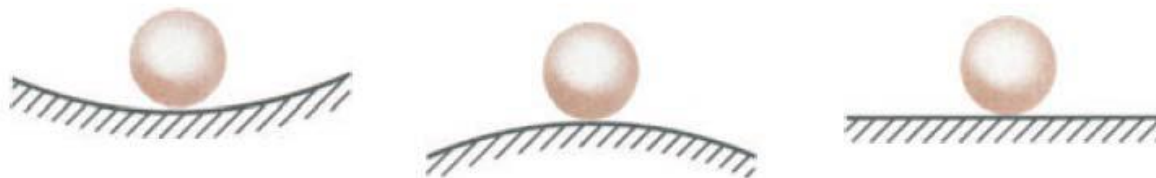
Στο κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε με την ευστάθεια της κατασκευής, δηλαδή, με την ικανότητάς της να φέρει ένα δεδομένο φορτίο χωρίς να υφίσταται κάποια απότομη μεταβολή στη δομή της. Θα αναφερθούμε, αρχικά σε απλούς στύλους – κολώνες (πρισματικών φορέων) τύπου Euler και στο πως συμπεριφέρονται σε αξονικά θλιπτικά φορτία.

Οι φορτίσεις που φέρουν τα στοιχεία της μεταλλικής κατασκευής των πλοίων μπορούν να προκαλέσουν αστοχία και παραμορφώσεις διαφόρων ειδών. Κατά τα αρχικά στάδια φόρτισης τα στοιχεία της κατασκευής υποβάλλονται σε καμπτική φόρτιση. Εάν η φόρτιση ασκείται κάθετα στην επιφάνεια του φορέα τότε προκαλούνται μετατοπίσεις και συναφή εσωτερικά εντατικά πεδία τα μεγέθη των οποίων είναι ευθέως ανάλογα προς το μέγεθος της φόρτισης, στη γραμμική ελαστική περιοχή. Αν όμως η φόρτιση ασκείται στην κύρια αξονική διεύθυνση, για να προκληθούν μετατοπίσεις θα πρέπει:

- Το κέντρο εφαρμογής του φορτίου να μη συμπίπτει με τον κεντροβαρικό άξονα της διατομής ή
- Η κατασκευή να έχει αρχικές γεωμετρικές ατέλειες (αρχικό βέλος κάμψης y_0).

Όπως γίνεται εμφανές στις πραγματικές κατασκευές ικανοποιούνται και οι δύο παραπάνω συνθήκες. Επομένως, με την αποφόρτιση μιας αξονικής θλιπτικής δύναμης η οποία θα προκαλέσει κάμψη του φορέα, θα επανακτήσει την αρχική του μορφή. Αν το φορτίο συνεχίσει να επιβάλλεται, κάποια στιγμή θα παρατηρηθεί μια ξαφνική μετατόπιση του φορέα ως προς έναν από τους κεντροβαρικούς άξονες συμμετρίας του (συνήθως τον πιο αδύναμο). Το φαινόμενο αυτό καλείται λυγισμός, το δε φορτίο που τον προκαλεί είναι χαρακτηριστικό της γεωμετρίας του φορέα ή της κατασκευής (υποστύλωμα, ενισχυτικό, συνεργαζόμενο έλασμα με ενισχυτικό), των συνθηκών έδρασης – στήριξης και το υλικό (μέτρο ελαστικότητας E , λόγος Poisson ν , τάση διαρροής σ_y).

Το φαινόμενο του λυγισμού περιγράφεται καλύτερα με την ενεργειακή θεώρηση της απόκρισης των κατασκευών. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε μια σφαίρα να ανταποκρίνεται σε τρεις καταστάσεις φόρτισης ως προς την ισορροπία της.



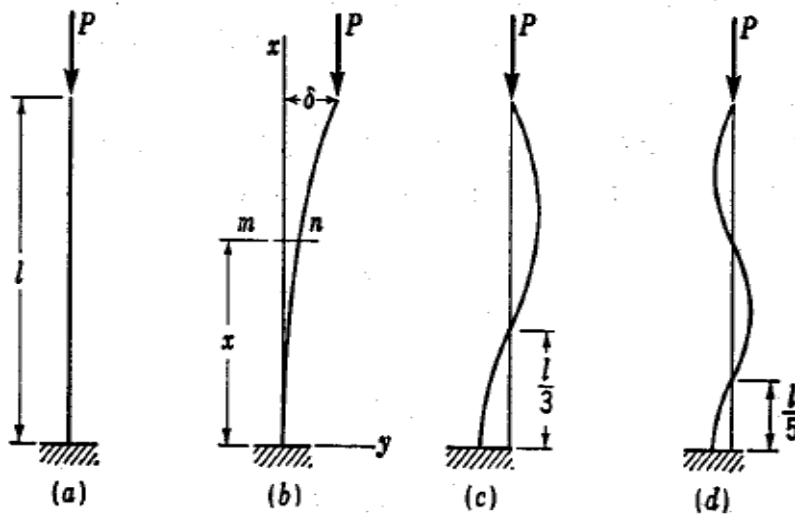
Εικόνα 1: Θέσεις ισορροπίας συστημάτων

Στην πρώτη κατάσταση (a) ισορροπία παρέχεται τέτοια ποσότητα δυναμικής ενέργειας από εξωτερικές φορτίσεις που δεν έχουμε μόνιμες παραμορφώσεις, οι οποίες, όταν σταματήσουν να επιδρούν το

σύστημα επανέρχεται στην αρχική θέση ισορροπίας του (**stable equilibrium**) . Τέτοιες περιπτώσεις θεωρούνται οι καμπτικές φορτίσεις οι οποίες προκαλούν μικρές μετατοπίσεις. Η δεύτερη περίπτωση (b) αντιστοιχεί στην περίπτωση φόρτισης, όπου η παραμικρή δύναμη θα προκαλέσει μετατόπιση ή παραμόρφωση της κατασκευής , έχει δηλαδή αρχικές μετατοπίσεις και ατέλειες. Με την απομάκρυνση του φορτίου το σύστημα δεν επανέρχεται στην αρχική θέση ισορροπίας του αλλά σε μια καινούργια , μετά από το πέρασ κάποιων μικρών ταλαντώσεων. Η κατάσταση αυτή ονομάζεται **unstable equilibrium** .

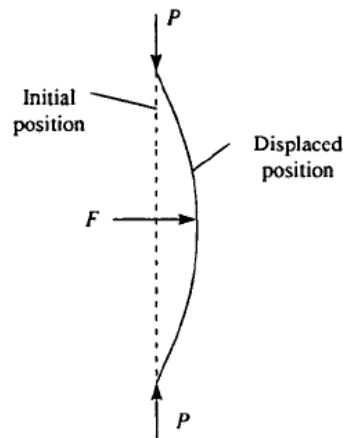
2.1 Τύπος του Euler για διαρθρωτά υποστυλώματα

Η μαθηματική προσέγγιση στο πρόβλημα ξεκίνησε τον 18ο αιώνα από τον Euler, ο οποίος πρότεινε μια σχέση για τον προσδιορισμό του κρίσιμου φορτίου ελαστικού λυγισμού . Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα υποστύλωμα όπως φαίνεται στην **Εικόνα 2** το οποίο είναι τέλεια όρθιο (χωρίς αρχικές καμπυλότητες) και του ασκείται ένα θλιπτικό φορτίο ακριβώς στην κάθετη διεύθυνση και το ένα του άκρο είναι πακτωμένο στο έδαφος και το άλλο ελεύθερο και υποβάλλεται σε ένα θλιπτικό φορτίο **P** .



Εικόνα 2: Μορφές λυγισμού υποστυλώματος

Το υποστύλωμα θεωρείται ότι είναι τέλεια ελαστικό και οι τάσεις δεν υπερβαίνουν το όριο αναλογίας. Αν το φορτίο είναι μικρότερο από το κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} , ο στύλος παραμένει ευθύς και υφίσταται μόνο αξονική θλίψη και συνεπώς βρίσκεται σε σταθερή ισορροπία . Αν το **P** αυξηθεί σημαντικά, τότε το υποστύλωμα φθάνει σε μια κατάσταση ασταθούς ισορροπίας με την παραμικρή κάθετη δύναμη θα προκαλέσει παραμόρφωση ακόμα και όταν η δύναμη παραληφθεί. Τότε ορίζεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού ή κρίσιμο φορτίο κατά Euler το οποίο είναι επαρκές ώστε να κρατήσει το στύλο σε μια ελαφρώς λυγισμένη μορφή. Οι παραπάνω περιπτώσεις συνοψίζονται ως εξής:



- $P < P_{cr}$: Μετά την απομάκρυνση του φορτίου F ο φορέας θα επανέλθει στην αρχική του κατάσταση .
- $P = P_{cr}$: Μετά την απομάκρυνση του φορτίου F ο φορέας θα παραμείνει στη θέση που πήρε λόγω του F .
- $P > P_{cr}$: Ο φορέας θα καταρρεύσει λόγω λυγισμού.

Έτσι , λοιπόν , σε μια διατομή $m-n$ η καμπτική ροπή είναι:

$$M = - P(\delta-y)$$

Και η διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής είναι της μορφής :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{M}{EI} \Rightarrow EI \frac{d^2y}{dx^2} = P(\delta-y)$$

Αφού το πάνω όριο είναι «ελεύθερο», είναι προφανές ότι ο λυγισμός θα λάβει μέρος στο επίπεδο με τη μικρότερη ακαμψία (EI – άρα και γύρω από τον πιο αδύναμο άξονα συμμετρίας). Θέτοντας

$$k^2 = \frac{P}{EI}$$

Παίρνουμε τη μορφή

$$\frac{d^2y}{dx^2} = + k^2 y = k^2 \delta$$

Η εξίσωση είναι μια γραμμική, μη – ομογενής διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές και η γενική της λύση είναι :

$$y = A \cos kx + B \sin kx + \delta$$

Οι σταθερές A και B προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες με ολοκλήρωση :

$$y = \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{για } x = 0$$

και έχουμε ότι : $A = -\delta$, $B = 0$ με $y = \delta (1 - \cos kx)$

Ενώ στο άνω άκρο απαιτεί ότι

$$y = \delta \quad \text{για } x = l$$

που ικανοποιείται είτε $\delta = 0$ είτε $\cos kl = 0$. Αν $\delta = 0$ τότε δεν έχουμε βέλος κάμψης και άρα ούτε λυγισμό. Αν $\cos kl = 0$ τότε θα πρέπει να έχουμε τη συσχέτιση :

$$kl = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$$

όπου $n = 1, 2, 3, \dots$. Αυτή η εξίσωση καθορίζει τι τιμές του k για τις οποίες οι μορφές λυγισμού υπάρχουν. Η μικρότερη τιμή kl είναι για $n = 1$. Τότε η αναμενόμενη τιμή του φορτίου P θα είναι το μικρότερο κρίσιμο φορτίου ώστε να μείνει ο φορέας οριακά ευθύς:

$$kl = l \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{\pi}{2}$$

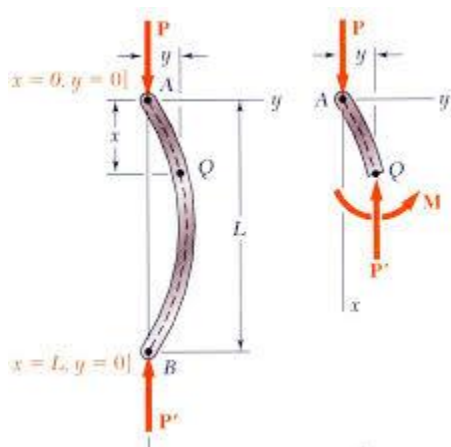
δηλαδή

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

Για τα υπόλοιπα ακέραια πολλαπλάσια του $n = 2, 3, \dots$ λαμβάνουμε και τα αντίστοιχα φορτία λυγισμού

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{4l^2}, \quad P_{cr} = \frac{9\pi^2 EI}{4l^2}$$

Στην περίπτωση αμφιέριστου φορέα η διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής και από την ισορροπία του σώματος παίρνουμε ότι :



Εικόνα 3 Ισορροπία δυνάμεων

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} - \frac{P}{EI} y \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = 0$$

Η γενική λύση αυτή τη φορά είναι για $\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0$

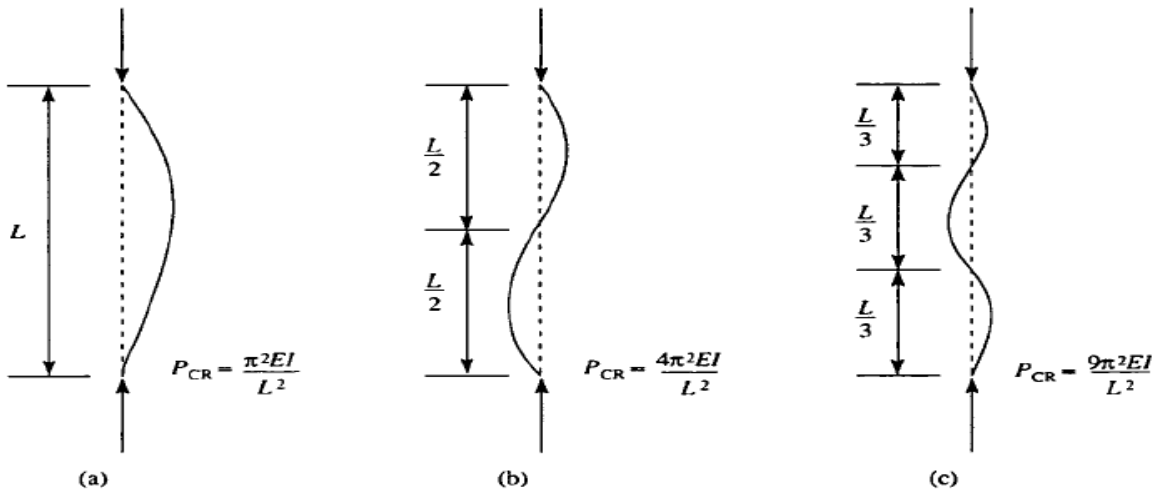
$$y = A \cos kx + B \sin kx$$

με $A \sin kl = 0$ και με μικρότερη τιμή την $n = 1$, όπου δηλαδή

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{Le^2}$$

Όπου :

- L_e είναι το ισοδύναμο μήκος (effective length) ενός υποστυλώματος , δηλαδή , το μήκος του διαρθρωτού υποστύλωματος που φέρει το ίδιο κρίσιμο φορτίο σε [m]
- E το μέτρο ελαστικότητας του υλικού ή Young's moduls σε [Pa]
- I η ροπή αδράνειας της εγκάρσιας διατομής σε [mm⁴]



Εικόνα 4 : Μορφές λυγισμού για ακέραια πολλαπλάσια του n

Παρατηρούμε ότι , για κάθε νέα τιμή του n προστίθεται ένα επιπλέον ημικόμμα. Η τιμή της τάσης που αντιστοιχεί στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού ονομάζεται κρίσιμη τάση (critical stress) και συμβολίζεται σ_{cr} . Αν θέσουμε για $I = A r^2$, όπου A το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής και r η ακτίνα αδράνειας του, έχουμε

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E I r^2}{A L^2} \Rightarrow$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_e}{r}\right)^2}$$

Η ποσότητα L_e/r ονομάζεται λόγος λυγηρότητας (slenderness ratio) του υποστυλώματος. Είναι φανερό ότι θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η ελάχιστη τιμή της ακτίνας αδράνειας r για τον υπολογισμό του λόγου λυγηρότητας και της κρίσιμης τάσης σε ένα υποστύλωμα. Η σχέση αυτή δείχνει ότι η κρίσιμη τάση είναι ανάλογη του μέτρου ελαστικότητας του υλικού και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου του λόγου λυγηρότητας.

2.2 Επέκταση του τύπου Euler σε υποστυλώματα με άλλες συνθήκες στήριξης

Ο τύπος του Euler επεκτείνεται και σε άλλες συνθήκες στήριξης (αρχικές συνθήκες) ενός υποστυλώματος εκ των οποίων είναι και εκείνη με το ένα άκρο πακτωμένο (fixed) και το άλλο αρθρωμένο (hinged).

Μια εναλλακτική μέθοδος υπολογισμού του βέλους κάμψης λόγω κάθετου κατανεμημένου φορτίου q και μια αξονικής θλιπτικής δύναμης P γράφεται, σύμφωνα με τη θεωρία κάμψης δοκών

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = q$$

Αλλά υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει κατανεμημένο φορτίο και ότι

$$k^2 = \frac{P}{EI}$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

καταλήγουμε

Της οποίας η γενική λύση είναι

$$y = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D$$

Εύκολα αποδεικνύεται από ολοκλήρωση της εξίσωσης και με τις αρχικές συνθήκες για τα σημεία στήριξης της κάθε περίπτωσης, βρίσκονται οι συντελεστές A, B, C και D .

Ωστόσο η λύση της μπορεί να βρεθεί και από την στατική ισορροπία. Από την εικ. 5 έχουμε ότι η καμπτική ροπή δίνεται ως

$$M(x) = P_{cr} y + F(L - x)$$

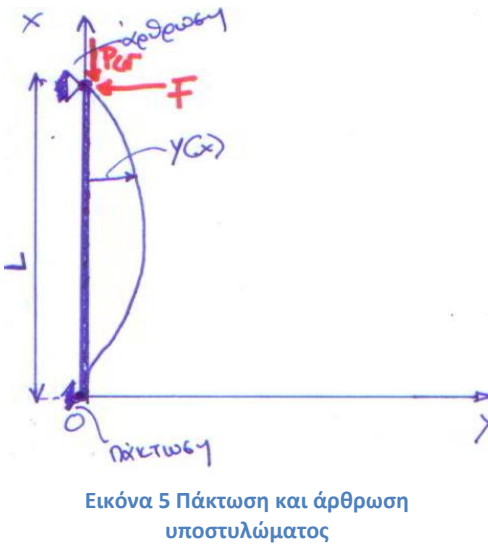
Η εξίσωση της ελαστικής γραμμής είναι τότε

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M(x)}{EI} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{P_{cr}}{EI} y - \frac{F}{EI} (L - x) \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P_{cr}}{EI} y = - \frac{F}{EI} (L - x)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι μια γραμμική μη-ομογενής διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές. Για την επίλυσή της θα ανατρέξουμε στους έτοιμους τύπους των διαφορικών εξισώσεων και των γενικών τους λύσεων. Βρίσκουμε έτσι δύο μιγαδικές λύσεις (ιδιοδιανύσματα) με

$$m^2 = \frac{P_{cr}}{EI} \Rightarrow m = \pm ik, \text{ όπου } k^2 = \frac{P}{EI}$$

Η γενική λύση που διέπει τη δοσμένη διαφορική εξίσωση παίρνει τη μορφή



Εικόνα 5 Πάκτωση και άρθρωση υποστυλώματος

$$y(x) = e^{Px} (B \cos kx + A \sin kx) + \frac{e^{Px} \sin kx}{k} \int e^{-Px} \frac{F}{EI} (L-x) \cos kx \, dx - \frac{e^{Px} \cos kx}{k} \int e^{-Px} \frac{F}{EI} (L-x) \sin kx \, dx$$

Εδώ $P = 0$ και έτσι αφού αντικαταστήσουμε και ολοκληρώσουμε θα έχουμε τα ακόλουθα

$$\int \cos kx \, dx = \frac{\sin kx}{k} \quad \int x \cos kx \, dx = \frac{x \sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2}$$

$$\int \sin kx \, dx = -\frac{\cos kx}{k} \quad \int x \sin kx \, dx = -\frac{x \cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2}$$

Με αντικατάσταση των ολοκληρωμάτων στην αρχική σχέση προκύπτει για το βέλος κάμψης

$$y(x) = B \cos kx + A \sin kx + \frac{FL}{k^2 EI} - \frac{Fx}{k^2 EI} \Rightarrow y(x) = B \cos kx + A \sin kx + \frac{F(L-x)}{\frac{P_{cr}}{EI}} \Rightarrow$$

$$y(x) = B \cos kx + A \sin kx + \frac{F(L-x)}{P_{cr}}$$

Εφαρμόζουμε τις οριακές (αρχικές) συνθήκες της στήριξης για τον υπολογισμό των άγνωστων σταθερών συντελεστών

$$a) \quad y(0) = 0 \Rightarrow B = -\frac{FL}{P_{cr}}$$

$$b) \quad y(L) = 0 \Rightarrow A = \frac{FL}{P_{cr} \tan kl}$$

$$c) \quad \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{FL}{P_{cr}} \left[\frac{kL}{\tan kl} - 1 \right] = 0 \Rightarrow kl = \tan kl$$

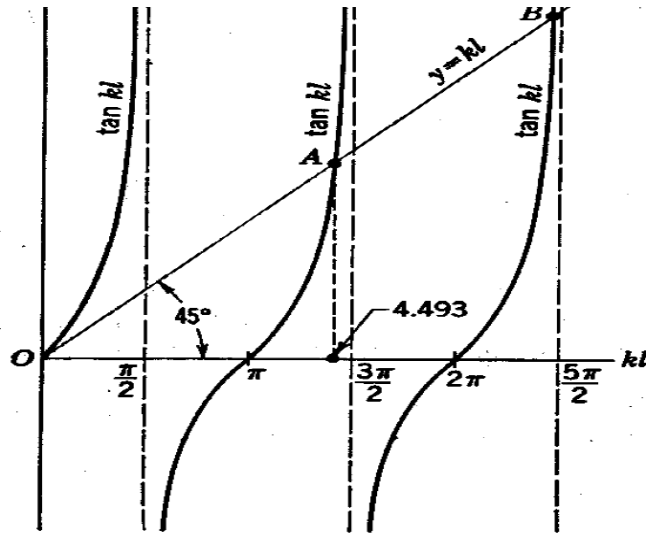
Η τελευταία είναι μια υπερβατική εξίσωση και η λύση της βρίσκεται με τη μέθοδο δοκιμή και σφάλματος (trial and error) ή με γραφικό τρόπο. Όπως είναι αντιληπτό οι καμπύλες αυτές είναι ασυμπτωτικές με τις κάθετες γραμμές για $kl = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}$ και ούτω καθεξής, αφού για αυτές τις τιμές kl η εφαπτομένη τείνει στο άπειρο. Με τη γραφική μέθοδο τα σημεία τομής της ασύμπτωτης με την ευθεία $y = kl$ είναι οι ρίζες της kl άρα και οι ιδιοτιμές (eigenvalues). Η μικρότερη από αυτές τις τιμές είναι

$$kl = 4.493$$

Άρα έχουμε

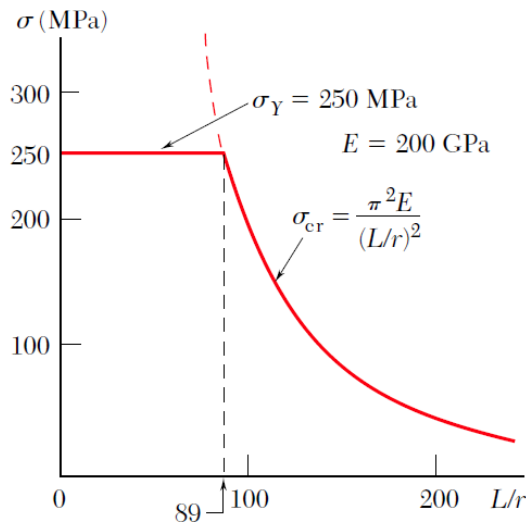
$$k_1 L = 4.493 \Rightarrow \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}} = \frac{4.493}{L} \Rightarrow P_{cr} = \frac{4.493^2}{L^2} EI \Rightarrow$$

$$P_{cr} = \frac{2.042\pi^2}{L^2} EI \quad \mu\epsilon \quad k = 2.042$$



Εικόνα 6 Λύση της $\tan kl = kl$ με τις πρώτες δύο ιδιοτιμές στα A και B

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για διαφορετικές καταστάσεις στήριξης (αρχικές συνθήκες) από τον τύπο του Euler παίρνουμε διαφορετική τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Φαίνεται ότι η λιγότερη επίπονη κατάσταση είναι όταν και τα δύο άκρα είναι πακτωμένα, όπου το ισοδύναμο μήκος L_e είναι το μισό του κανονικού. Από αυτό συνεπάγεται επίσης ότι το κρίσιμο φορτίο εξαρτάται από το μήκος L και εν τέλει από τον ισοδύναμο βαθμό λυγηρότητας (effective slenderness ratio) L_e/r . Για παράδειγμα, υποστυλώματα κατασκευασμένα από ναυπηγικό χάλυβα με μέτρο ελαστικότητας $E = 200 \text{ GPa}$ και τάση διαρροής $\sigma_Y = 250 \text{ MPa}$, η κρίσιμη τάση είναι ανάλογη του E και είναι κοντά με τη θεωρία του Euler.



Εικόνα 7 Σχεδίαση κρίσιμης τάσης

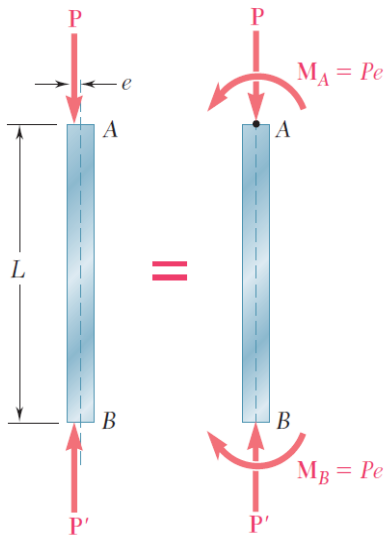
Όπως είναι φανερό και από το παραπάνω σχήμα, για τιμές της σ_{cr} πάνω από τη τάση διαρροής, δεν υπάρχει λόγος να ληφθούν υπόψη, επειδή το υποστυλωμα θα διαρρεύσει σε θλίψη και θα πάψει να είναι ελαστικό πριν καν προλάβει να λυγίσει.

| DIFFERENTIAL EQUATION | SOLUTION |
|--|---|
| <p>18.6</p> $y F(xy) dx + x G(xy) dy = 0$ | $\ln x = \int \frac{G(v) dv}{v\{G(v) - F(v)\}} + c$ <p>where $v = xy$. If $G(v) = F(v)$, the solution is $xy = c$.</p> |
| <p>18.7 Linear, homogeneous second order equation</p> $\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0$ <p>a, b are real constants.</p> | <p>Let m_1, m_2 be the roots of $m^2 + am + b = 0$. Then there are 3 cases.</p> <p>Case 1. m_1, m_2 real and distinct:</p> $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$ <p>Case 2. m_1, m_2 real and equal:</p> $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}$ <p>Case 3. $m_1 = p + qi, m_2 = p - qi$:</p> $y = e^{px}(c_1 \cos qx + c_2 \sin qx)$ <p>where $p = -a/2, q = \sqrt{b - a^2/4}$.</p> |
| <p>18.8 Linear, nonhomogeneous second order equation</p> $\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = R(x)$ <p>a, b are real constants.</p> | <p>There are 3 cases corresponding to those of entry 18.7 above.</p> <p>Case 1.</p> $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \frac{e^{m_1 x}}{m_1 - m_2} \int e^{-m_1 x} R(x) dx + \frac{e^{m_2 x}}{m_2 - m_1} \int e^{-m_2 x} R(x) dx$ <p>Case 2.</p> $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + x e^{m_1 x} \int e^{-m_1 x} R(x) dx - e^{m_1 x} \int x e^{-m_1 x} R(x) dx$ <p>Case 3.</p> $y = e^{px}(c_1 \cos qx + c_2 \sin qx) + \frac{e^{px} \sin qx}{q} \int e^{-px} R(x) \cos qx dx - \frac{e^{px} \cos qx}{q} \int e^{-px} R(x) \sin qx dx$ |
| <p>18.9 Euler or Cauchy equation</p> $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + ax \frac{dy}{dx} + by = S(x)$ | <p>Putting $x = e^t$, the equation becomes</p> $\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1) \frac{dy}{dt} + by = S(e^t)$ <p>and can then be solved as in entries 18.7 and 18.8 above.</p> |

Εικόνα 8 Γενικές λύσεις διαφορικών εξισώσεων

2.3 Έκκεντρη φόρτιση : τύπος της τέμνουσας (secant formula)

Σε αυτή την περίπτωση φόρτισης θα αναφερθούμε στην κατάσταση φόρτισης ενός υποστυλώματος όπως συμβαίνει στην πραγματικότητα, όπου το φορτίο δεν είναι σχεδόν ποτέ τέλεια κεντραρισμένο με την διεύθυνση του κάθετου άξονα συμμετρίας. Υπάρχει, δηλαδή μια μικρή εκκεντρότητα e που με τη δράση του αξονικού θλιπτικού φορτίου P θα ασκήσει μια ροπή κάμψης $M_A = Pe$.



Το πρόβλημα του λυγισμού τώρα έχει να πραγματευθεί το πόσο επιτρέπεται να καμφθεί το συγκεκριμένο υποστύλωμα υπό το αυξανόμενο φορτίο, αν η επιτρεπόμενη τάση δεν πρέπει να ξεπεραστεί και αν το βέλος κάμψης y_{\max} δεν πρέπει να γίνει υπερβολικό.

Από τη στατική ισορροπία ενός σημείου του υποστυλώματος σε ένα σημείο Q έπεται ότι

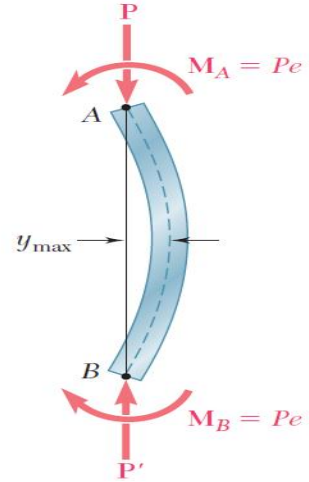
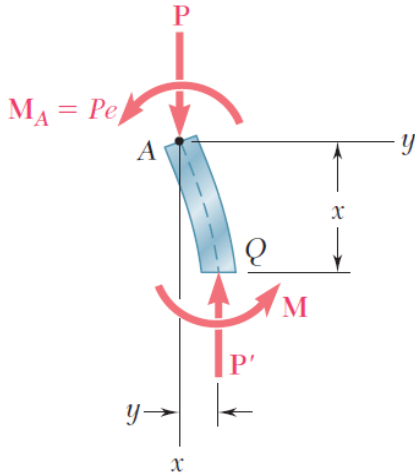
$$M = -Py - M_A = -Py - Pe$$

Και η εξίσωση της ελαστικής γραμμής λαμβάνεται ως

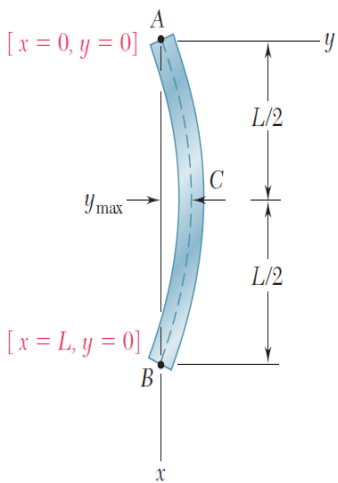
$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2 y = p^2 e$$

Η γενική λύση της είναι

$$y = A \sin kx + B \cos kx - e$$



Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες στα άκρα του υποστυλώματος βρίσκουμε για τις σταθερές A και B τα εξής



Για $x = 0, y = 0 \Rightarrow B = e$

Για $x = L, y = 0 \Rightarrow A \sin kL = e(1 - \cos kL)$

Όμως $\sin kL = 2 \sin \frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2}$

Και $1 - \cos kL = 2 \sin^2 \frac{kL}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} A \sin kL = e(1 - \cos kL) \\ \sin kL = 2 \sin \frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2} \\ 1 - \cos kL = 2 \sin^2 \frac{kL}{2} \end{array} \right\} A = e \tan \frac{kL}{2}$$

Αντικαθιστώντας τα A και B γράφουμε την εξίσωση της ελαστικής γραμμής έχουμε ότι

$$y = e \left(\tan \frac{kL}{2} \sin kx + \cos kx - 1 \right)$$

Η τιμή του μέγιστου βέλους κάμψης βρίσκεται στη θέση $x = L/2$ και υπολογίζεται από τη σχέση

$$y_{\max} = e \left(\sec \frac{kL}{2} - 1 \right)$$

Τελικά, επειδή $k^2 = P / EI$ λαμβάνουμε την τελική μορφή του

$$y_{\max} = e \left[\sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right]$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το y_{\max} απειρίζεται όταν

$$\sqrt{\frac{P}{EI} \frac{L}{2}} = \frac{\pi}{2} \implies P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Ωστόσο στην πραγματικότητα το βέλος κάμψης δεν απειρίζεται, αλλά γίνεται απαράδεκτα μεγάλο και γι' αυτό δεν θα πρέπει να επιτραπεί στο \mathbf{P} να φτάσει την κρίσιμη τιμή, δηλαδή

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

η οποία είναι η τιμή για ένα κεντρικό φορτίο κατά Euler.

Μια εναλλακτική μορφή του βέλους κάμψης είναι και η ακόλουθη

$$y_{max} = e \left(\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} - 1 \right)$$

Η μέγιστη τάση σ_{max} προκύπτει στη διατομή του υποστυλώματος όπου η καμπτική ροπή είναι μέγιστη, δηλαδή, στην εγκάρσια διατομή που διέρχεται από το μέσον C και μπορεί να υπολογιστεί αθροίζοντας τις ορθές τάσεις που οφείλονται στην αξονική δύναμη και στο καμπτικό ζεύγος που ασκούνται στη διατομή αυτή. Έχουμε ότι

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{max}c}{I}$$

Από το διάγραμμα του ελεύθερου σώματος για το τμήμα AC βρίσκουμε ότι

$$M_{max} = Py_{max} + M_A = P(y_{max} + e)$$

Με αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση και ενθυμούμενοι ότι $I = A r^2$, τελικά παίρνουμε ότι

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI} \frac{L}{2}} \right) \right]$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{ec}{r^2} \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right)$$

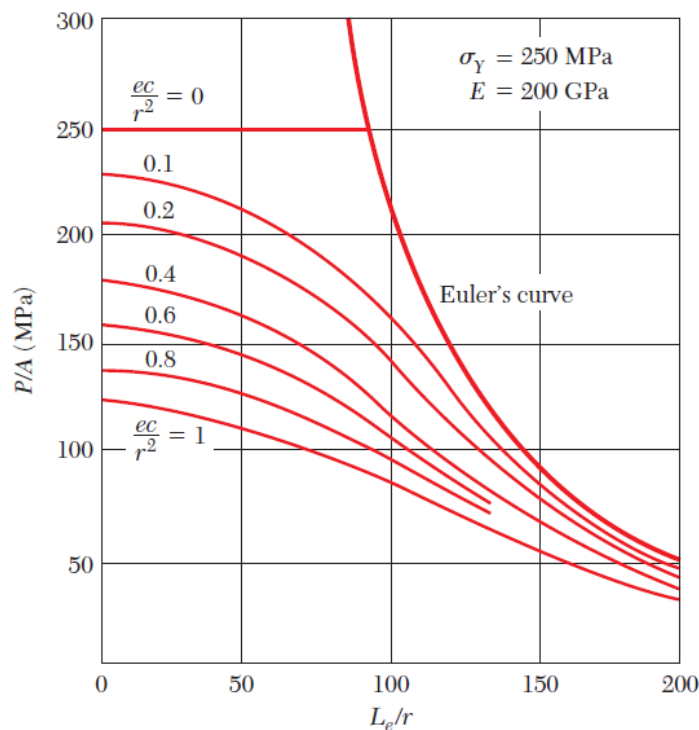
Ή εναλλακτικά

Η τελευταία εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιαδήποτε συνθήκη στήριξης των άκρων του υποστυλώματος, όσο χρησιμοποιείται η κατάλληλη τιμή για το κρίσιμο φορτίο. Όπως γίνεται αντιληπτό η σ_{\max} δε μεταβάλλεται γραμμικά με το φορτίο \mathbf{P} και άρα δεν εφαρμόζεται η αρχή της επαλληλίας. Έτσι, λοιπόν υπολογίζουμε πρώτα το συνιστάμενο φορτίο και μετά γίνεται προσδιορισμός της τάσης. Αν λύσουμε ως προς P/A , γράφουμε

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{\max}}{1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EA}} \frac{L_e}{r}\right)}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι γνωστή ως τύπος της τέμνουσας (secant formula) και ορίζει τη δύναμη ανά μονάδα εμβαδού, P/A , η οποία προκαλεί μια καθορισμένη μέγιστη τάση σ_{\max} σε ένα υποστύλωμα δεδομένης ισοδύναμης λυγηρότητας, L_e/r για μια δεδομένη τιμή του λόγου ec/r^2 , όπου e είναι η εκκεντρότητα του εφαρμοσμένου φορτίου. Παρατηρούμε, επίσης ότι η ο όρος P/A εμφανίζεται και στα δύο μέλη αυτής της υπερβατικής εξίσωσης, οπότε θα πρέπει να γίνουν δοκιμές (trial and error) προκειμένου να βρούμε εκείνη την τιμή P/A που να επαληθεύει τον τύπο της τέμνουσας.

Από τη σχέση της τέμνουσας μπορεί να προκύψουν διαγράμματα σαν τα ακόλουθα, τα οποία για δεδομένο υποστύλωμα και δεδομένη εκκεντρότητα μας δίνουν την τιμή P/A , η οποία προκαλεί τάσεις ίσες με το όριο διαρροής.

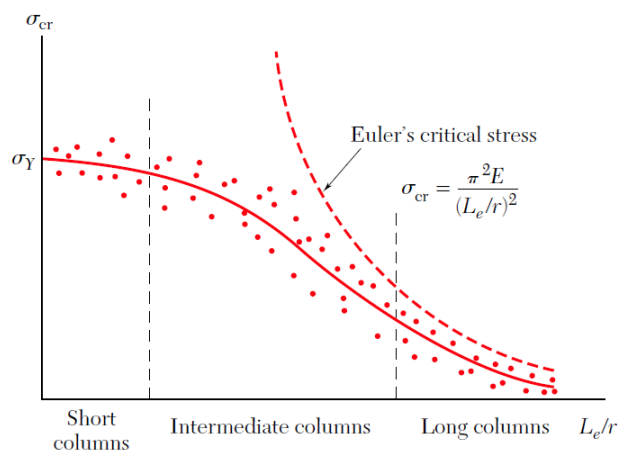


Εικόνα 9 Φορτίο ανά μονάδα εμβαδού P/A , στο οποίο παρατηρείται διαρροή

Παρατηρούμε ότι για υψίκορμα υποστυλώματα η εκκεντρότητα του θλιπτικού φορτίου επηρεάζει ελάχιστα την αστοχία του υποστυλώματος και τα αποτελέσματα συγκλίνουν στη σχέση του Euler . Για μικρότερο λόγο λυγηρότητας θα πρέπει να καταφύγουμε σε άλλη σχέση υπολογισμού της κρίσιμης τάσης και του κρίσιμου φορτίου λυγισμού.

2.4 Σχεδιασμός βραχύκορμων υποστυλωμάτων

Σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσει υποθέσαμε ότι οι τάσεις παραμένουν κάτω από το όριο αναλογίας και ότι το υποστυλώμα ήταν αρχικά ένα ευθύγραμμο ομογενές πρίσμα. Τα πραγματικά υποστυλώματα απέχουν πολύ από την εξιδανίκευση και στην πράξη ο σχεδιασμός τους του βασίζεται σε εμπειρικούς τύπους που αντανακλούν αποτελέσματα πολυάριθμων εργαστηριακών δοκιμών. Αν και υπάρχει σημαντική διασπορά στα αποτελέσματα των πειραμάτων, μπορούν να παρατηρηθούν περιοχές που αντιστοιχούν σε τρεις τύπους αστοχίας.



Εικόνα 10 Αποτελέσματα πειραματικών δοκιμών για χαλύβδινα υποστυλώματα

Για επιμήκη υποστυλώματα , όπου το L_e/r είναι μεγάλο η αστοχία προβλέπεται με καλή προσέγγιση από τον τύπο του Euler και η κρίσιμη τάση παρατηρείται ότι εξαρτάται από το μέτρο ελαστικότητας E , αλλά όχι από

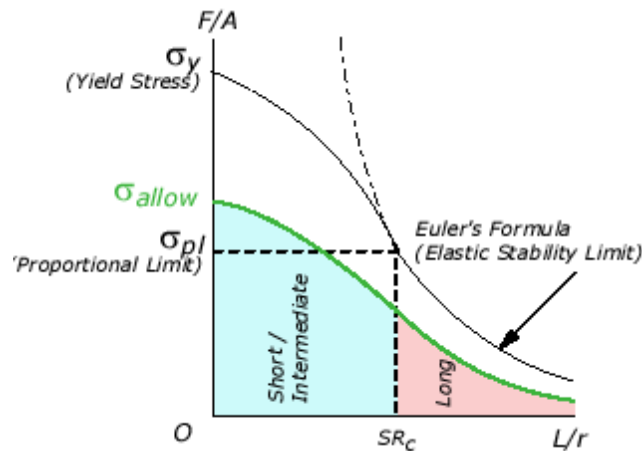
την τάση διαρροής σ_Y . Για πολύ κοντά υποστυλώματα υπό θλίψη η αστοχία προκύπτει στο όριο διαρροής, ενώ για μεσαία υποστυλώματα η αστοχία εξαρτάται και από τα δύο (E , σ_Y).

Κατά τον τελευταίο αιώνα έγινε μεγάλη πρόοδος στην ανάπτυξη της επιστήμης της μηχανικής υποστυλωμάτων (Timoshenko, Johnson). Ως αποτέλεσμα ήταν η ανάπτυξη και βελτίωση σχέσεων που να περιγράφουν με πιο μεγάλη λεπτομέρεια τα κρίσιμα φορτία λυγισμού και τις κρίσιμες τάσεις για κάθε λόγο λυγηρότητας L/r . Δεν είναι πάντοτε εφικτό να χρησιμοποιηθεί αποκλειστικά ένας τύπος υπολογισμού του λόγου λυγηρότητας. Ο κάθε ένας είναι κατάλληλος για τον αντίστοιχο τύπο και λόγο L/r του κάθε υποστυλώματος.

Μια μέθοδος για να αποφανθούμε αν ένα υποστυλώμα είναι κοντό, μεσαίο ή επίμηκες είναι με τον υπολογισμό της κρίσιμης τιμής του λόγου λυγηρότητας SR_{cr} , ο οποίος υπολογίζεται ως

$$SR_{cr} = \pi \sqrt{\frac{2E}{\sigma_Y}}$$

Συνήθως λαμβάνεται $\sigma_{pr} = \sigma_Y/2$



Εικόνα 11 Διαχωρισμός του λόγου L/r εκτιμώνται το SR_{cr}

Αν ο λόγος $L/r < SR_{cr}$ τότε για τον υπολογισμό της κρίσιμης τάσης λυγισμού χρησιμοποιείται η σχέση του **Johnson** κατά την οποία

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \sigma_Y \left[1 - \frac{\left(\frac{L_e}{r}\right)^2}{2(SR_{cr})^2} \right]$$

όπου

- A : η επιφάνεια της διατομής ,
- L_e : το ισοδύναμο μήκος του φορέα και
- P_{cr} : το κρίσιμο φορτίο λυγισμού

Κατά τον σχεδιασμό των υποστυλωμάτων έναντι λυγισμού, συνήθως λαμβάνονται υπόψη και ορισμένοι συντελεστές ασφαλείας (safety factors) από ημιεμπειρικούς τύπους για ξεχωριστό μήκος υποστυλώματος.

Έτσι έχουμε τους συνιστώμενους συντελεστές ασφαλείας

A) κοντά υποστυλώματα

B) Επιμήκη υποστυλώματα

$$\text{SafetyFactor: } SF = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\left(\frac{L_{\text{eff}}}{r}\right)}{SR_c} - \frac{1}{8} \cdot \frac{\left(\frac{L_{\text{eff}}}{r}\right)^3}{SR_c^3}$$

$$\sigma_{\text{allow}} = \frac{1}{SF} \cdot \left[\sigma_y - \sigma_{pl} \cdot \frac{\left(\frac{L_{\text{eff}}}{r}\right)^2}{SR_c^2} \right]$$

$$\text{SafetyFactor: } SF = \frac{23}{12}$$

$$\sigma_{\text{allow}} = \frac{1}{SF} \cdot \left[\sigma_{pl} \cdot \frac{SR_c^2}{\left(\frac{L_{\text{eff}}}{r}\right)^2} \right]$$

2.5 Ελαστικός Λυγισμός ορθοτροπικών ελασμάτων

Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε στη θεωρία λυγισμού ως κολώνα και το πώς λυγίζει ανάλογα με τους τρόπους στήριξης. Στη ναυπηγική, η χρήση κολωνών (υποστυλωμάτων) είναι πολύ διαδεδομένη στα πλοία καθ' όσον χρησιμοποιούνται για την μείωση του ανυποστήρικτου μήκους δοκών και για τη μεταφορά/διανομή κατακόρυφων φορτίων. Τα υποστυλώματα δέχονται θλιπτικά φορτία και πρέπει να ελέγχονται για λυγισμό (ειδικά αυτά που έχουν μεγάλο μήκος). Πέρα από τις κολόνες στη ναυπηγική ευρεία χρήση βρίσκουν και τα ενισχυτικά και τα ελάσματα ή και ο συνδυασμός μεταξύ τους. Τα ελάσματα παίζουν καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση του εξωτερικού σκελετού του πλοίου.

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της απόκρισης των ορθογώνιων ελασμάτων της μεταλλικής κατασκευής του πλοίου σε θλιπτικές φορτίσεις και το πώς θα προβλέψουμε τις μέγιστες επιτρεπόμενες φορτίσεις που μπορεί να παραλάβει η κατασκευή πριν αυτή καταρρεύσει.

Όταν δρουν θλιπτικές φορτίσεις το επαγόμενο βέλος κάμψης παραμένει μηδενικό στην προλυγισμική περιοχή. Όταν το φορτίο που φέρει το έλασμα γίνει ίσο με το φορτίο λυγισμού, παρατηρείται σημαντική αύξηση του βέλους κάμψης. Υπάρχουν περιπτώσεις που όταν δρουν και καμπτικές φορτίσεις ή κατανεμημένα φορτία (κάθετα στο έλασμα) σε όλη την έκτασή τους ή σε κάποια σημεία, τότε το βέλος κάμψης αυξάνεται σταδιακά και ανάλογα του μεγέθους της φόρτισης. Τότε το πρόβλημα που μελετάται είναι πεδιακό. Όταν δρουν θλιπτικές φορτίσεις το πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως προσδιορισμού ιδιοτιμών (eigenvalue case), κατά το οποίο λαμβάνει χώρα η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης που διέπει το πρόβλημα. Οι τιμές που επαληθεύουν την διαφορική εξίσωση ονομάζονται ιδιοτιμές ενώ οι λύσεις που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές αυτές ονομάζονται ιδιοδιανύσματα (eigenvectors). Σε προβλήματα όπως αυτά, μας ενδιαφέρει η μικρότερη λύση (ιδιοτιμή), καθώς η κατασκευή θα αστοχήσει σε αυτή, δίχως να μπορεί να παραλάβει υψηλότερες φορτίσεις.

Στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής ανάλυσης, υιοθετούμε τις κάτωθι παραδοχές:

- I. Πριν τη φόρτιση η πλάκα είναι απολύτως επίπεδη (χωρίς αρχικές ατέλειες) και τα θλιπτικά φορτία δρουν στο μέσο της πλάκας.
- II. Θεωρούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις της γραμμικής ελαστικότητας και ότι πριν την έναρξη του λυγισμού δεν υπάρχουν παραμορφώσεις.
- III. Τα ασκούμενα φορτία δεν μεταβάλλονται καθώς η πλάκα παραμορφώνεται.
- IV. Η κάμψη της πλάκας προσεγγίζεται από τη θεωρία του Kirchhoff.

Η εξίσωση που περιγράφει την απόκριση ορθογώνιων ελασμάτων υπό μονοαξονική θλιπτική φόρτιση μπορεί να προκύψει από τη γενικευμένη εξίσωση που περιγράφει τη συμπεριφορά των ελασμάτων υπό την επίδραση ομοεπίπεδων δυνάμεων (χωρίς το κάθετο φορτίο P στην πλάκα)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Από την παραπάνω σχέση τα N_x , N_y και N_{xy} είναι οι εσωτερικές ομοεπίπεδες δυνάμεις που αναπτύσσονται στην πλάκα ως αποτέλεσμα των εξωτερικών δυνάμεων. Η παραπάνω εξίσωση είναι μια ομογενής διαφορική εξίσωση που περιλαμβάνει την εξαρτημένη μεταβλητή $w(x,y)$ στο αριστερό μέρος, που είναι το βέλος κάμψης με μεταβλητούς συντελεστές και εκφράζει την απόκριση της κατασκευής. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι μια πρώτη λύση είναι η τετριμμένη για $w(x,y) = 0$. Μεγαλύτερη σημασία έχουν, όμως οι μη τετριμμένες λύσεις για διάφορες τιμές των παραμέτρων της εξίσωσης οι οποίες μας δείχνουν πως συμπεριφέρεται η γεωμετρία του ελάσματος σε διάφορες φορτίσεις.

Με αντικατάσταση των N_x , N_y και N_{xy} :

$$N_x = -\lambda \bar{N}_x, \quad N_y = -\lambda \bar{N}_y, \quad N_{xy} = -\lambda \bar{N}_{xy}$$

Και έτσι η προηγούμενη διαφορική εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\nabla^4 w + \frac{\lambda}{D} \left(\bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0$$



Οι διάφορες σταθερές προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες στήριξης. Για να επιτύχουμε την εύρεση των μη τετριμμένων λύσεων θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να ισούται με μηδέν, όπου και θα προκύψουν οι διακριτές τιμές λ_i ώστε να βρεθούν οι ιδιοτιμές. Αυτό θα γίνει πιο αντιληπτό στην περίπτωση μια ορθογωνικής πλάκας διαστάσεων $a \times b \times t$ η οποία υπόκειται σε ομοαξονική θλιπτική φόρτιση $q(x)$.

Όσο η θλιπτική δύναμη $q(x)$ δεν ξεπερνά το όριο αναλογίας του υλικού (χαλύβδινο έλασμα εδώ), η πλάκα βρίσκεται κάτω από σταθερή θλίψη. Όταν η $q(x)$ ξεπεράσει το όριο αυτό, οι πλαστικές παραμορφώσεις θα πρωταγωνιστούν και θα εμφανισθούν μετατοπίσεις κάθετα στην πλάκα. Αυτές οι κάθετες μετατοπίσεις σηματοδοτούν την έναρξη του λυγισμού.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει ότι

$$N_x = -q_x \quad N_y = N_{xy} = 0$$

που το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει θλιπτική τάση.

Έτσι με αντικατάσταση έχουμε

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Η λύση αυτής της εξίσωσης προϋποθέτει την ύπαρξη ενός βέλους κάμψης. Θα καταφύγουμε στη χρήση τριγωνομετρικών σειρών Fourier. Αν υποθέσουμε ότι το έλασμα λυγίζει με m ημικύματα στη διαμήκη κατεύθυνση και ένα ημικύμα στην εγκάρσια κατεύθυνση τότε το βέλος κάμψης εκφράζεται ως

$$w(x,y) = f(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Με απλή έδραση σε όλες τις πλευρές, η λύση γράφεται

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Με αντικατάσταση παίρνουμε

$$\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - q_x \pi^2 \frac{m^2}{a^2} = 0, \quad \Longrightarrow \quad q_x = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb} \right)^2$$

για $m = 1, 2, 3, \dots$ και $n = 1, 2, 3, \dots$

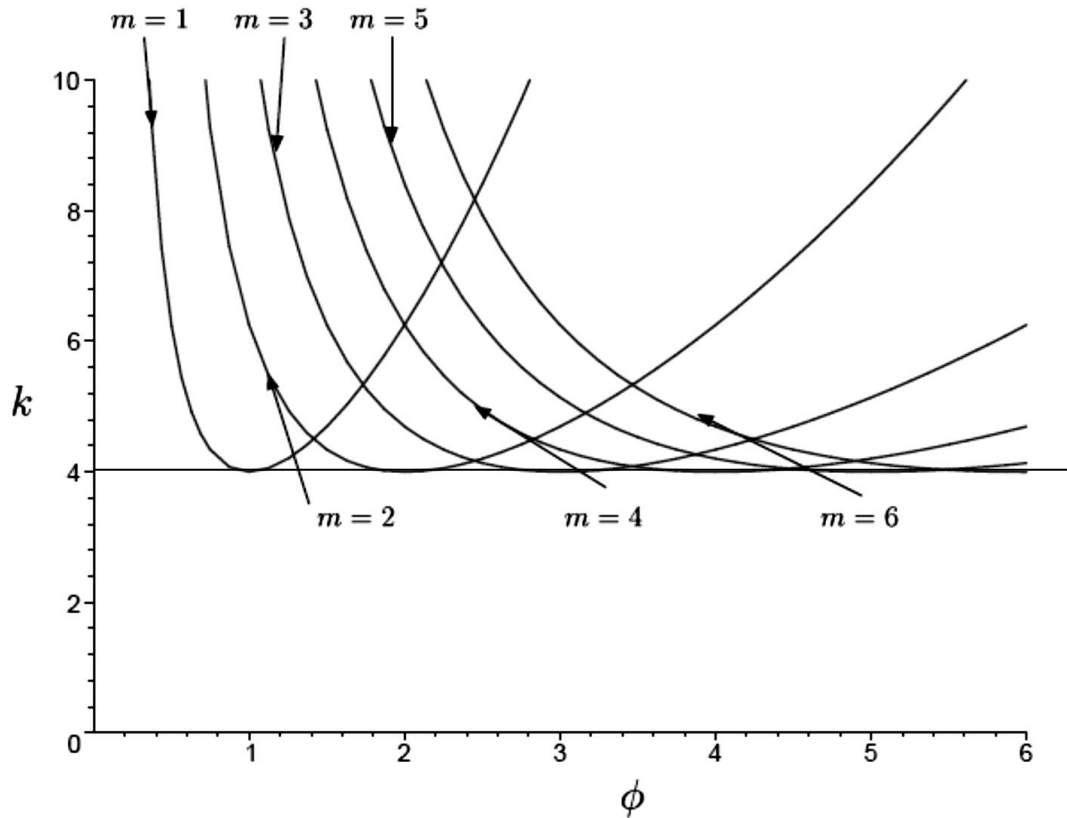
Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι παίρνει την ελάχιστη τιμή της για $n = 1$ οπότε

$$Q(x) = k \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad \text{όπου } k = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2$$

Αν παραγωγίσουμε ως προς m

$$\frac{dK}{dm} = 2 \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right) \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{m^2 b} \right) = 0, \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{a}{b}.$$

Καταλαβαίνουμε ότι ο συντελεστής k οποίος καλείται συντελεστής λυγισμού εξαρτάται άμεσα από το λόγο πλευρών του ελάσματος.



Εικόνα 13 Τιμές του συντελεστή k για διάφορες τιμές του λόγου $\phi = a/b$

Η ελάχιστη τιμή της παραμέτρου k είναι 4, οπότε

$$\min q_x = q_{x,cr} = \frac{4\pi^2 D}{b^2}$$

Άρα η κρίσιμη τάση λυγισμού για μονοαξονική θλιπτική δύναμη γράφεται

$$\sigma_{x,cr} = \frac{N_{x,cr}}{h} = \frac{q_{x,cr}}{h} = \frac{4\pi^2 D}{b^2 h} = \frac{\pi^2 E}{3(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2$$

Η παραπάνω σχέση αποδείχθηκε από τον Bryan το 1891. Για κάποια τιμή του λόγου πλευρών του ελάσματος, φέρουμε ευθεία κάθετη στον οριζόντιο άξονα, η ευθεία αυτή θα τέμνει τις καμπύλες που αντιστοιχούν στις λύσεις για διάφορες τιμές του αριθμού ημικυμάτων. Η ελάχιστη τιμή του συντελεστή k για κάθε τιμή του λόγου a/b , μας δίνει τη χαρακτηριστική μορφή της λυγισμένης πλάκας (buckling mode).

Διαφορετικές μορφές του m επίσης περιγράφουν δυνατές μορφές λυγισμού, οι οποίες όμως σχετίζονται με μεγαλύτερα k δηλαδή μεγαλύτερα φορτία λυγισμού. Ο k λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του, 4, μόνο για ακέραιες τιμές του λόγου a/b . Αντιληπτό γίνεται επίσης ότι για ελάσματα με ακέραιο λόγο πλευρών η τιμή του m γίνεται ίση με εκείνη του k . Το έλασμα υποδιαιρείται, εν τέλει σε ένα αριθμό κοιλοτήτων ίσο με τον λόγο πλευρών του. Τα παραπάνω ισχύουν και για την πρόβλεψη τάσης ελαστικού λυγισμού.

Για άλλες περιπτώσεις, όπου έχουμε πολύ πλατιά ελάσματα με το a/b να τείνει στο 0 ο συντελεστής k παίρνει τη μορφή

$$k = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \quad \Longrightarrow \quad k = m^2 \frac{b^2}{a^2} \quad \Longrightarrow \quad k_{\min} = \frac{b^2}{a^2} \quad \Longrightarrow$$

$$q_{x,cr} = \frac{\pi^2 D}{a^2}$$

Η κρίσιμη τάση λυγισμού για απλά εδρασμένες πλευρές δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2$$

Η εξίσωση λυγισμού στην περίπτωση ορθοτροπικών ελασμάτων γράφεται στη μορφή

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

που D_x , D_y και H οι κατευθυντικές δυσκαμψίες.

Αν υποθέσουμε απλή έδραση κατά μήκος όλων των πλευρών, ισχύουν οι ακόλουθες οριακές συνθήκες

$$w = 0 \Big|_{\substack{x=0,a \\ y=0,b}}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \Big|_{x=0,a}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \Big|_{y=0,b}$$

Οι λύσεις λαμβάνονται από τη σειρά Fourier

$$w = w_{11} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Οι οποίες ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες επί των πλευρών. Αντικαθιστώντας την τελευταία στην γενική εξίσωση για ορθοτροπικά ελάσματα

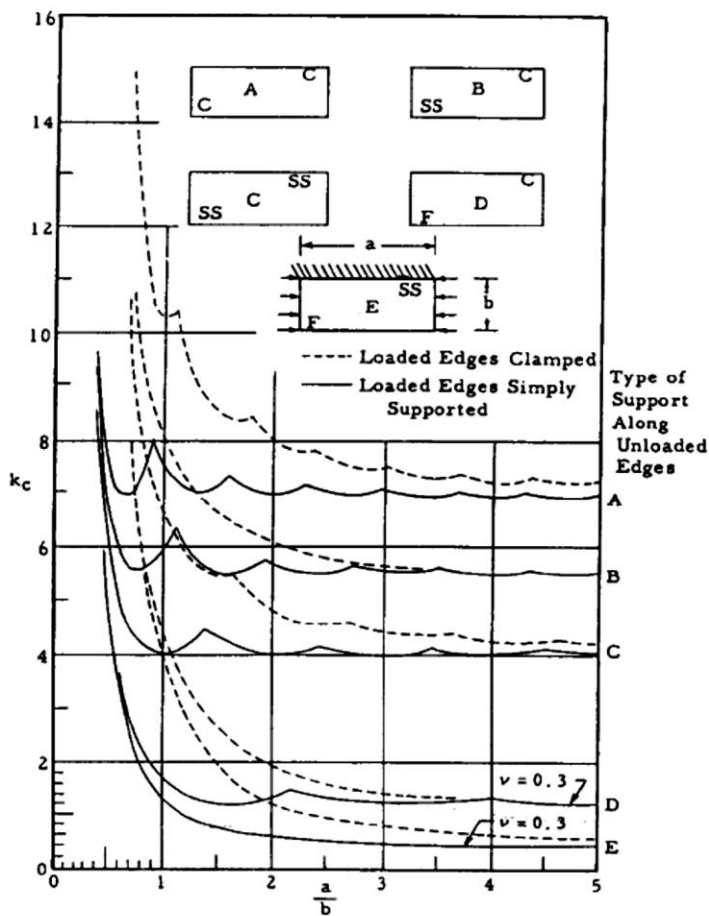
$$q_x = \frac{\pi^2 \sqrt{D_x D_y}}{b^2} \left[\sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \left(\frac{mb}{a} \right)^2 + \frac{2H}{\sqrt{D_x D_y}} n^2 + \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \left(\frac{a}{mb} \right)^2 \right]$$

Η ελάχιστη τιμή του φορτίου q_x προκύπτει για $n=1$. Για επίμηκες έλασμα ($a \gg b$) η έκφραση για το φορτίο γράφεται στη μορφή

$$q_{x,cr} = \frac{2\pi^2 \sqrt{D_x D_y}}{b^2} \left(1 + \frac{H}{\sqrt{D_x D_y}} \right)$$

Για πεπερασμένες τιμές του λόγου a/b ο αριθμός ημικυμάτων m έχουμε:

$$\begin{aligned} m=1 & \implies 0 < \frac{a}{b} < \sqrt[4]{4 \frac{D_x}{D_y}}, \\ m=2 & \implies \sqrt[4]{4 \frac{D_x}{D_y}} < \frac{a}{b} < \sqrt[4]{36 \frac{D_x}{D_y}}, \\ m=3 & \implies \sqrt[4]{36 \frac{D_x}{D_y}} < \frac{a}{b} < \sqrt[4]{144 \frac{D_x}{D_y}}. \end{aligned}$$



Εικόνα14 Συντελεστές θλιπτικού λυγισμού για διάφορες περιπτώσεις στήριξης συναρτήσει του λόγου πλευρών

Παρατηρούμε ότι ο λυγισμός ελασμάτων μεγάλου πλάτους εξαρτάται από το a - την μεγαλύτερη σε μήκος πλευρά - και όχι από το b που είναι η κοντή πλευρά που φέρει το ασκούμενο θλιπτικό φορτίο.

Η ελαστική συμπεριφορά ενός υλικού υποτίθεται (λαμβάνεται υπόψη) ακόμη και μετά το λυγισμό και επομένως κατά την αφαίρεση του φορτίου, το λυγισμένο μέλος θα επιστρέψει στο αρχικό του μη παραμορφωμένο σχήμα.

Για όσο διάστημα οι αποφορτισμένες άκρες της πλάκας παραμένουν ανέπαφες, η μόνη επίδραση του λυγισμού θα είναι μια ορατή παραμόρφωση της επιφάνειας της πλάκας και μια αύξηση του φαινόμενου ρυθμού της συνολικής καταπόνησης της πλάκας έναντι της τάσης (ϵ - σ).

Γενικά, τα ναυπηγικά ελάσματα αστοχούν με ανελαστικό λυγισμό. Αυτό καθιστά το πρόβλημα σχεδιασμού της μεταλλικής κατασκευής ακόμα πιο δύσκολο. Γι'αυτό καταφεύγουμε στη χρήση αριθμητικών μεθόδων (προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων).

Ένα έλασμα μπορεί να παραλάβει φορτίο λίγο μετά τον λυγισμό, όσο ακόμα οι μεγάλες πλευρές παραμένουν απαραμόρφωτες, έχουν δηλαδή μεταλυγισμική αντοχή. Με την επιβολή μεγαλύτερων φορτίων τότε η πιθανότητα εμφάνισης πλαστικών περιοχών (πλαστικοποίηση του υλικού) αυξάνεται. Οι περιοχές αυτές εξαρτώνται από το μέγεθος της ισοδύναμης τάσης Von Mises και ως επί το πλείστον εμφανίζονται κατά μήκος των αφόρτιστων πλευρών.

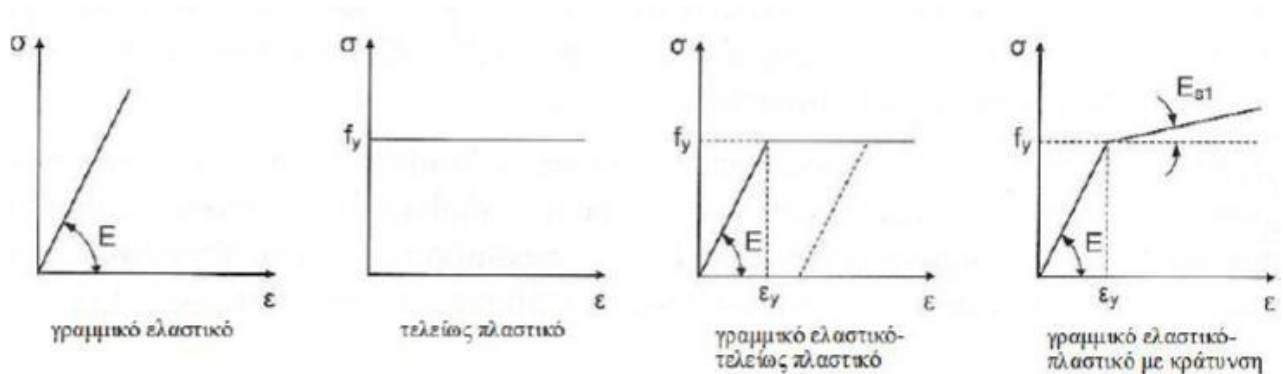
Στη μεταλυγισμική περιοχή προκύπτει ανακατανομή των ορθών τάσεων με διάχυση του φορτίου (ενέργειας) από το κέντρο προς τις στηριζόμενες αφόρτιστες πλευρές. Η ικανότητα παραλαβής φορτίου στη μεταλυγισμική περιοχή εκφράζεται με το ισοδύναμο πλάτος ελάσματος σε θλίψη b_e .

3. Μη γραμμική ανάλυση

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στις βασικές έννοιες που διέπουν την γραμμική θεωρία ελαστικότητας, τη βάση της μηχανικής συμπεριφοράς στα πρώτα στάδια φόρτισης ενός υλικού αλλά τις παραμορφώσεις που αναπτύσσονται λόγω αυξημένων τάσεων πέρα του ορίου που επιτρέπει η φύση του εκάστοτε υλικού για να μην διαρρεύσει και άρα να επέλθει πλαστικοποίηση. Η τελευταία, συνήθως επιφέρει μεγάλες παραμορφώσεις με κατάρρευση της κατασκευής στα κρίρια σημεία αδυναμίας της. Η θεωρία κάμψης αναφέρεται στην ελαστική συμπεριφορά του φορέα και βασίζεται στη θεωρία μικρών μετατοπίσεων. Η ελαστική ανάλυση μπορεί να εφαρμόζεται σε όλες τις περιπτώσεις διατομών, ανεξαρτήτως αν η αντοχή τους προσδιορίζεται με βάση την ελαστική ή πλαστική αντοχή τους. Αντιθέτως, η πλαστική ανάλυση δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε όλες τις περιπτώσεις και για να είναι δυνατή η εφαρμογή της πρέπει να πληρούνται κάποιες προϋποθέσεις.

3.1 Βασικές προϋποθέσεις γραμμικής συμπεριφοράς

Κατά την ελαστική ανάλυση, η ελαστική συμπεριφορά του φορέα και η σχέση τάσης-παραμόρφωσης του υλικού θεωρείται ότι είναι γραμμική για οποιαδήποτε στάθμη των τάσεων. Η παραμόρφωση είναι επομένως ανάλογη με την τάση, δηλαδή το υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά καθ'όλη τη φόρτιση.



Εικόνα 15 Λιάγραμμα τάσης - τροπής (παραμόρφωσης)

Κατά την ελαστική ανάλυση στατικώς ορισμένων φορέων, τα εντατικά μεγέθη προκύπτουν από τις εξισώσεις στατικής ισορροπίας, ενώ στους υπερστατικούς φορείς τα εντατικά μεγέθη πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες ισορροπίας και να προκαλούν μετακινήσεις που είναι συμβατές με την ελαστική συνέχεια του φορέα και τις συνθήκες στήριξης. Οι εξισώσεις ισορροπίας δεν επαρκούν για να προσδιοριστούν τα άγνωστα μεγέθη και πρέπει να συμπληρωθούν με απλές γεωμετρικές σχέσεις μεταξύ των μετακινήσεων του φορέα, οι οποίες ονομάζονται εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων και εξασφαλίζουν τη συμβατότητα των μετακινήσεων στην παραμορφωμένη κατάσταση.

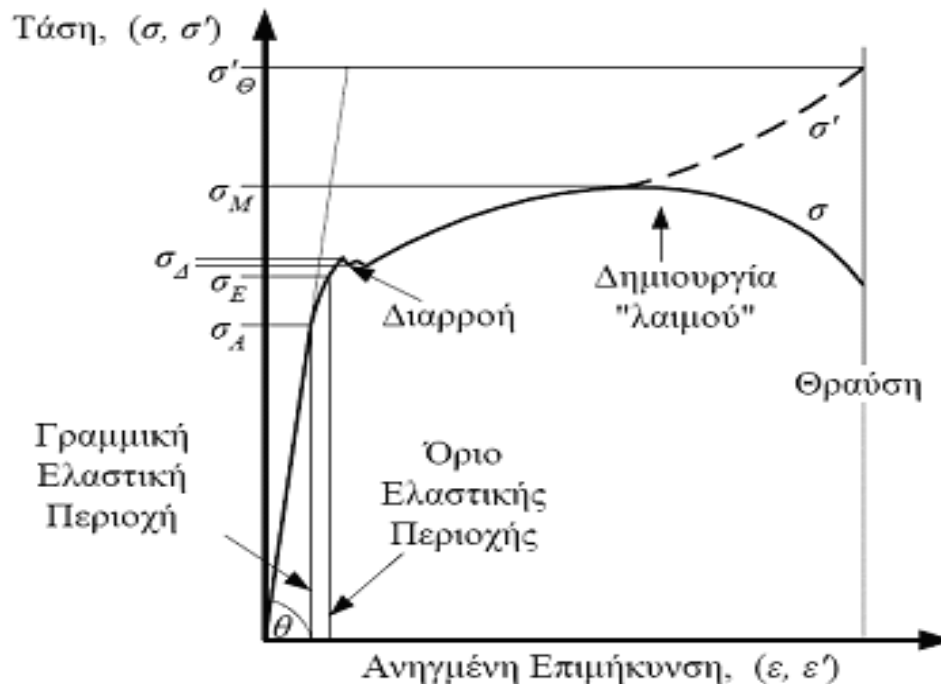
Για τον υπολογισμό των εντατικών και παραμορφωσιακών μεγεθών και των αντιδράσεων χρησιμοποιούνται κυρίως δύο γενικές μέθοδοι προσέγγισης. Η πρώτη είναι η μέθοδος των δυνάμεων, σύμφωνα με την οποία απελευθερώνονται κάποιοι κόμβοι του φορέα ώστε αυτός να μετατραπεί σε στατικά ορισμένο που ονομάζεται θεμελιώδης φορέας. Οι άγνωστες μεταβλητές είναι οι αναγκαίες δυνάμεις που θα επαναφέρουν τη συμβατότητα της γεωμετρίας. Επιλύεται ένα σύστημα εξισώσεων ίσων με τον αριθμό των άγνωστων δυνάμεων, ώστε η κατασκευή να γίνει στατικώς ορισμένη.

Η δεύτερη είναι η μέθοδος των μετακινήσεων, κατά την οποία επιβάλλονται δεσμεύσεις μετακινήσεων, ώστε να εμποδίζεται η μετακίνηση των κόμβων, και προσδιορίζονται οι απαιτούμενες δυνάμεις που προκαλούν τις δεσμεύσεις. Στη συνέχεια επιτρέπεται η μετακίνηση των κόμβων μέχρι να μηδενιστούν οι δυνάμεις. Οι άγνωστες μεταβλητές της μεθόδου είναι οι δυνατές κομβικές μετακινήσεις και στροφές. Ο αριθμός των δυνάμεων δεσμεύσεως που πρέπει να εφαρμοσθούν πρόσθετα στο φορέα, ισούται με τον αριθμό των δυνατών κομβικών μετακινήσεων, η δε ανάλυση απαιτεί και πάλι την επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων. Οι βασικές παραδοχές της γραμμικής ανάλυσης είναι δύο:

1. Το υλικό συμπεριφέρεται ως γραμμικά ελαστικό. Επομένως, οι παραμορφώσεις ϵ είναι ανάλογες των τάσεων σ . Η κλίση του διαγράμματος τάσεων – παραμορφώσεων είναι το μέτρο ελαστικότητας E που εκφράζει τη δυσκαμψία (stiffness) του κάθε υλικού, δηλαδή πόσο μεγάλη αντίσταση προβάλλει το υλικό σε παραμόρφωση υπό συγκεκριμένη τάση. Ισχύει, δηλαδή ο νόμος του Hooke, που συνδέει γραμμικά τις τάσεις με τις ανηγμένες παραμορφώσεις :

$$\sigma = E \epsilon$$

Η παραπάνω παραδοχή αναφέρεται, ουσιαστικά στην απαίτηση το επίπεδο φόρτισης να είναι χαμηλό. Η μέγιστη τιμή της τάσης για την οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο νόμος του Hooke για ένα δεδομένο υλικό είναι γνωστή ως όριο αναλογίας (proportional limit) αυτού του υλικού. Στην περίπτωση όλκιμων υλικών, τα οποία χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα να διαρρέουν όταν οι τάσεις υπερβούν την κρίσιμη τάση διαρροής σ_Y , οι παραμορφώσεις γίνονται μεγάλες σε σχέση με το μικρό επιβαλλόμενο φορτίο (θλιπτικό ή εφελκυστικό). Η θραύση σε αυτά τα υλικά γίνεται ομαλά και σχηματίζεται «λαιμός» (necking) και παίρνει σχήμα κωνικό, σχεδόν 45° με την αρχική επιφάνεια.



Εικόνα 16 Διάγραμμα ε-σ όλκιμου υλικού

2. Οι πραγματοποιούμενες μετατοπίσεις όλων των σημείων του φορέα είναι πολύ μικρές. Άρα η γεωμετρία του φορέα στην παραμορφωμένη κατάσταση μοιάζει πολύ με την αντίστοιχη απαραμόρφωτη.

Εφόσον ισχύουν αυτές οι δύο παραδοχές μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή της επαλληλίας, δηλαδή οι αναπτυσσόμενες τάσεις και μετατοπίσεις είναι γραμμικώς ανάλογες των επιβαλλόμενων φορτίσεων. Πολλές είναι οι περιπτώσεις όπου μία ή και οι δύο παραδοχές δεν ισχύουν. Αν καταρρίπτεται η πρώτη, τότε η συμπεριφορά χαρακτηρίζεται από μη γραμμικότητα υλικού. Αν καταρρίπτεται η δεύτερη, τότε η συμπεριφορά χαρακτηρίζεται από μη γραμμικότητα γεωμετρίας (αρχικές ατέλειες, παραμένουσες τάσεις). Αν καταρρίπτονται και οι δύο ταυτόχρονα τότε έχουμε ολική μη γραμμικότητα της κατασκευής – φορέα. Όπως και να έχει, από τη στιγμή που γίνει εμφανής η μη γραμμική συμπεριφορά παύει να ισχύει ο νόμος του Hooke και η ευθεία γραμμή ελαστικότητας στο διάγραμμα σ-ε και άρα η αρχή της επαλληλίας. Τότε θα πρέπει να καταφύγουμε σε πιο ειδικές αριθμητικές μεθόδους ανάλυσης.

3.2 Μη γραμμικότητα υλικού

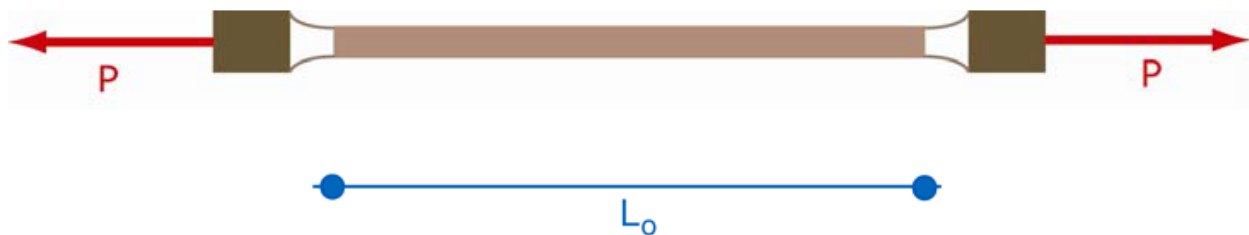
Είναι γνωστό ότι τα δομικά υλικά , όπως ο κοινός ναυπηγικός χάλυβας στη ναυπηγική βιομηχανία συμπεριφέρονται γραμμικά και ελαστικά για σχετικά μικρές τιμές των τάσεων και παραμορφώσεων που αναπτύσσονται υπό εξωτερική φόρτιση (δυναμική και στατική), ισχύει δηλαδή ο νόμος του Hooke . Μετά από κάποιος κρίσιμο σημείο φόρτισης, οι παραμορφώσεις αρχίζουν να μεγαλώνουν δυσανάλογα με την επιβαλλόμενη φόρτιση.

Στις μέρες μας, έχει πλέον γίνει απαραίτητη προϋπόθεση η μελέτη της κατασκευής και σε μη γραμμική απόκριση με την προσομοίωση της μετελαστικής και πλαστικής και συνεπώς μεταλυγισμικής συμπεριφοράς των φορέων και ελασμάτων στη ναυπηγική, σύμφωνα με τα κριτήρια του IACS και των Common structural Ruler (CSR).

Γενικά για το ναυπηγικό χάλυβα

Ο ναυπηγικός χάλυβας είναι ένα κράμα ενός μεταλλικού στοιχείου του σιδήρου, με ένα μη μεταλλικό στοιχείο, του άνθρακα το οποίο αποτελείται από μικροσκοπικούς κρυστάλλους. Οι ιδιότητές του αλλάζουν με την ποσοστιαία αναλογία του άνθρακα και με την προσθήκη κάποιων προσμίξεων , όπως πυριτίου , νικελίου, χρωμίου, χαλκού και άλλων.

Οι μηχανικές ιδιότητες των δομικών υλικών αφορούν τη συμπεριφορά τους σε εξωτερικά φορτία και εκφράζουν τον τρόπο αντίστασής τους σε αυτά. Η μηχανική συμπεριφορά τέτοιων υλικών μελετάται με τα πειράματα εφελκυσμού δοκιμίων από αυτό το υλικό, με το πέρας των οποίων λαμβάνεται το διάγραμμα τάσεων – παραμορφώσεων.



Εικόνα 17 Απεικόνιση εφελκυσμού δοκιμίου χάλυβα

Αν για παράδειγμα υποβάλουμε ένα δοκίμιο σε εφελκυστικές δυνάμεις P το δοκίμιο θα επιμηκυνθεί κατά ΔL , έχοντας αρχικό μήκος L_0 και εμβαδό εγκάρσιας διατομής A_0 . Λαμβάνουμε τότε ζεύγη τιμών $\sigma = P/A_0$ και παραμόρφωσης $\varepsilon = \Delta L/L_0$ με τα οποία χαράζεται η χαρακτηριστική καμπύλη τάσεων – παραμορφώσεων. Στην Εικόνα 17 φαίνεται ότι από το τμήμα ΑΕ αντιστοιχεί στην μη γραμμική ελαστική συμπεριφορά του υλικού, έχοντας ξεπεράσει το όριο αναλογίας. Το σημείο Ε είναι το ανώτερο όριο ελαστικότητας. Με την ελάχιστη παραπάνω φόρτιση προκαλούνται μόνιμες παραμορφώσεις. Τελικά το δοκίμιο

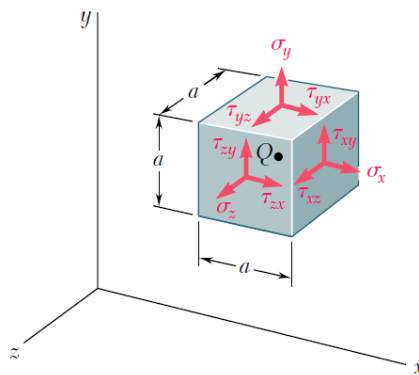
από το σημείο Δ μέχρι την τάση θραύσης συμπεριφέρεται μη γραμμικά και ανελαστικά με μέγιστη αντοχή την τάση στο σημείο Μ. Η ικανότητα του υλικού να υπόκειται σε μεγάλες πλαστικές παραμορφώσεις πριν τη θραύση καλείται ολκιμότητα και υπολογίζεται από τον λόγο

$$\varepsilon_{\theta} / \varepsilon_{\delta}$$

όπου ε_{δ} είναι η παραμόρφωση του δοκιμίου της στιγμής της διαρροής και ε_{θ} η παραμόρφωση της στιγμής της θραύσης. Οι δομικοί και ναυπηγικές χάλυβες χαρακτηρίζονται από μεγάλη ολκιμότητα, αφού η παραμόρφωση θραύσης έχει τιμή σχεδόν 20%, ενώ η παραμόρφωση λόγω διαρροής από 0.1% ως 0.2%. Η ιδιότητα αυτή αποτελεί σημαντικό πλεονέκτημα για το χάλυβα σαν δομικό στοιχείο της γάστρας και των ενισχυτικών του πλοίου, καθώς έχει την ικανότητα να απορροφά μεγάλα ποσά ενέργειας μετά τη διαρροή, αλλά πριν τη θραύση.

3.3 Θεωρίες αστοχίας των υλικών

Στη γενική περίπτωση, σε κάθε σημείο του φορέα που καταπονείται από κάποια εξωτερικά φορτία αναπτύσσεται μια τριαξονική εντατική κατάσταση. Η εντατική αυτή κατάσταση σε ένα τυχαίο σημείο του φορέα, όπως φαίνεται και από την Εικ.18 σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ και αποτελείται από τις ορθές τάσεις σ_x, σ_y και σ_z και από τις διατμητικές τάσεις $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}$ και τ_{xz} . Ο πρώτος δείκτης δηλώνει το επίπεδο επί του οποίου δρα η τάση (κάθετο στον αντίστοιχο άξονα) και ο δεύτερος τη διεύθυνσή της.



Εικόνα 18 Εντατική κατάσταση σε ένα τυχαίο σημείο του φορέα

Αν οι ορθές τάσεις σ_x, σ_y και σ_z είναι κύριες τάσεις, δηλαδή στη διεύθυνση κατά την οποία επενεργούν, οι διατμητικές τάσεις είναι μηδενικές, τότε συμβολίζονται ως σ_1, σ_2 και σ_3 . Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων στο χώρο του υλικού που επέρχεται αστοχία ονομάζεται *επιφάνεια αστοχίας*. Αν τα σημεία αυτά αναφέρονται σε οριακές εντατικές καταστάσεις που δημιουργούν διαρροή ή πλαστική παραμόρφωση, η σχηματιζόμενη

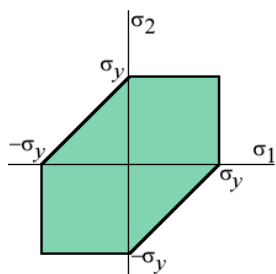
επιφάνεια καλείται επιφάνεια διαρροής, ενώ εάν αναφέρονται σε εντατικές καταστάσεις που δημιουργούν θραύση του υλικού λέγεται επιφάνεια θραύσης.

Η επιφάνεια αστοχίας χωρίζει το χώρο των τάσεων σε δύο περιοχές. Στην εσωτερική, όπου η συμπεριφορά του υλικού είναι ελαστική (για την επιφάνεια διαρροής), ή το υλικό δεν έχει υποστεί θραύση ακόμα και στην εξωτερική, όπου το υλικό συμπεριφέρεται πλαστικά ή έχει υποστεί θραύση.

Ως οριακή εντατική κατάσταση μπορεί να θεωρηθεί είτε η διαρροή σε όλκιμα υλικά, είτε η θραύση σε ψαθυρά υλικά. Οι οριακές αυτές καταστάσεις προσδιορίζονται εύκολα στην περίπτωση απλών εντατικών καταστάσεων, όπως του εφελκυσμού, της θλίψης ή της στρέψης. Για τέτοιες καταπονήσεις, στις οποίες η ένταση περιγράφεται από μόνο μια τιμή τάσης, όπως η ορθή τάση λόγω εφελκυσμού ή θλίψης ή της διατμητικής τάσης λόγω στρέψης, μπορεί να διατυπωθεί ένα τασικό κριτήριο έναρξης διαρροής, που αφορά τον έλεγχο υπέρβασης μιας οριακής τιμής της εφαρμοζόμενης τάσης.

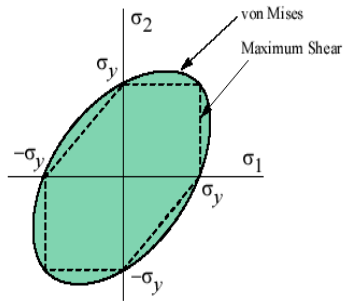
Στην περίπτωση που το υλικό υποβάλλεται σε σύνθετη καταπόνηση, δε μπορεί να θεωρηθεί ότι συμβαίνει αστοχία όταν μια απλή τάση, ορθή ή διατμητική, φθάσει την οριακή τιμή διαρροής ή θραύσης, διότι οι τάσεις αυτές αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Υπάρχουν διάφορες θεωρίες και αντίστοιχα κριτήρια αστοχίας που συσχετίζουν την αντοχή σε κάθε σημείο μιας κατασκευής υπό σύνθετη καταπόνηση, με την αντοχή ενός δοκιμίου από ίδιο υλικό που υποβάλλεται σε απλό εφελκυσμό ή θλίψη. Σύμφωνα με αυτά τα κριτήρια η πραγματική τριαξονική εντατική κατάσταση ανάγεται σε μια ισοδύναμη μονοαξονική εντατική κατάσταση, το ίδιο επικίνδυνη. Κάθε κριτήριο αστοχίας είναι ανεξάρτητο από το σύστημα αξόνων, δηλαδή η συνθήκη αστοχίας αποτελεί αναλλοίωτη συνάρτηση των κύριων τάσεων. Τα πιο γνωστά κριτήρια αστοχίας για όλκιμα υλικά είναι:

- Κριτήριο μέγιστης διατμητικής τάσης (Tresca), στο οποίο η διαρροή επέρχεται λόγω ολίσθησης κατά την διεύθυνση της μέγιστης διατμητικής τάσης και ισχύει η σχέση



$$|\sigma_1| \leq \sigma_y, |\sigma_2| \leq \sigma_y, \text{ and } |\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_y$$

- Και το κριτήριο στροφικής ενέργειας (Von Mises) σύμφωνα με το οποίο η διαρροή ενός όλκιμου υλικού που βρίσκεται υπό την επίδραση σύνθετης εντατικής κατάστασης αρχίζει, όταν η στροφική ενέργεια που αναπτύσσεται από αυτή την εντατική κατάσταση, γίνει ίση με την αντίστοιχη στροφική ενέργεια που αναπτύσσεται κατά τη διαρροή του υλικού από καθαρό εφελκυσμό. Ως στροφική ενέργεια ορίζεται εκείνη που οφείλεται σε αλλαγές μόνο του σχήματος του παραμορφώμενου σώματος και όχι του όγκου του.



$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 \leq \sigma_y^2$$

Επίπεδη εντατική κατάσταση

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2}$$

Η τελευταία σχέση γεωμετρικά παριστάνει έναν κύλινδρο, η παράπλευρη επιφάνεια του οποίου είναι η επιφάνεια διαρροής του κριτηρίου Von Mises, δηλαδή για συνδυασμό τάσεων που ανήκουν εκεί αρχίζει η διαρροή του υλικού. Το εσωτερικό του κυλίνδρου είναι η ασφαλής περιοχή, δηλαδή το υλικό παραμένει στην ελαστική περιοχή. Στην επίπεδη εντατική κατάσταση όπου οι ορθές κύριες τάσεις είναι μηδέν, η καμπύλη αυτή είναι μια έλλειψη, όπως στο σχήμα. Η έλλειψη Von Mises αποτελεί το γεωμετρικό τόπο των συνδυασμών τάσεων για τους οποίους αρχίζει η διαρροή του υλικού. Το εσωτερικό της έλλειψης, εν ολίγοις είναι η ασφαλής περιοχή, με τις δύο πρώτες εξισώσεις να επαληθεύουν τη γεωμετρία της.

4. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων

Ανάλυση κατασκευών – Εισαγωγή

Η λέξη “κατασκευή” έχει την ευρύτερη έννοια σε παντός είδους ελαστικές δομές που συναντιούνται σε όλους τους κλάδους της μηχανικής. Εκτός από την ελαστική δομή που είναι το βασικό τμήμα κάθε φέροντος οργανισμού ή του εξωσκελετού μια μηχανής, η ανάλυση μια κατασκευής μπορεί να περιλαμβάνει και πρόσθετα άλλα φυσικά φαινόμενα που εμφανίζονται μέσα ή γύρω από το κέλυφος των μηχανών ή των δομών του. Καμιά φορά τα φαινόμενα αυτά αντιδρούν με πολλαπλούς τρόπους με τη δομή με αποτέλεσμα να την αλλάζουν. Ο όρος “Ανάλυση Κατασκευών” αναφέρεται στην εύρεση της συμπεριφοράς μιας κατασκευής, υπό την επενέργεια των διάφορων φυσικών φαινομένων, με χρήση μαθηματικών μοντέλων που κατά κανόνα προσομοιώνονται στον ηλεκτρονικό υπολογιστή (H/Y). Για να αναλύσουμε την κατασκευή θα πρέπει να είναι γνωστά α) η γεωμετρία του σχήματος, β) ο τρόπος που στηρίζεται και γ) τα επιβαλλόμενα φορτία. Ο αριθμητικός υπολογισμός μηχανικών μεγεθών (όπως π.χ. ελαστική – πλαστική μετατόπιση, θερμοκρασία, πίεση, ταχύτητα ρευστού, δυναμικό κλπ) πραγματοποιείται με τη **Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων**, δηλαδή χωρίς την διενέργεια πειραμάτων και αποτελεί την «αιχμή του δόρατος» στην ανάλυση κατασκευών. Με τη χρήση αυτού του μοντέρνου και εύχρηστου πολυεργαλείου, ο μηχανικός είναι σε θέση να προσομοιώσει το πείραμα που θα γινόταν στην πραγματικότητα αρκετές φορές, αποφεύγοντας χρόνο και κόστος.

Οι αυξημένες απαιτήσεις των σύγχρονων κανονισμών καθιστούν αδύνατη την επίλυση φορέων με το χέρι χρησιμοποιώντας τις κλασικές μεθόδους ανάλυσης. Έτσι, ο σύγχρονος μελετητής μηχανικός χρησιμοποιεί σχεδόν αποκλειστικά για την ανάλυση ακόμη και των πιο απλών φορέων προγράμματα που βασίζονται στις μητρωϊκές μεθόδους ανάλυσης κατασκευών. Τα προγράμματα αυτά βασίζονται στα Πεπερασμένα Στοιχεία (ΠΣ) και αντιμετωπίζουν με ενιαίο τρόπο σύνθετα προβλήματα ανάλυσης φορέων.

Πιο συγκεκριμένα, η χρήση κατάλληλου λογισμικού παρέχει τη δυνατότητα υπολογισμού των μετατοπίσεων, μηχανικών τάσεων, θερμοκρασιών, ακουστικών πιέσεων, ταχυτήτων ρευστού κλπ. Που αναπτύσσονται μέσα στο υλικό – τον εσωτερικό χώρο του περιγράμματος μιας κατασκευής – ή ακόμη και του περιβάλλοντος χώρου του. Ο υπολογισμός πραγματοποιείται με την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν το αντίστοιχο φυσικό φαινόμενο ή ακόμα και τον συνδυασμό δύο ή περισσότερων συζευγμένων φαινομένων.

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα αναλύσουμε τον ελαστικό και μη γραμμικό λυγισμό πρισματικών φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ) και θα δούμε πως αυτός ο τρόπος επίλυσης υπερστατικών και σύνθετων προβλημάτων μας βοηθάει στην καλύτερη κατανόηση του πραγματικού κόσμου.

Ιστορική αναδρομή

Η βασική ιδέα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι η προσομοίωση της πραγματικής κατασκευής, που συνήθως είναι ένα συνεχές μέσο, με τη βοήθεια συστατικών-πεπερασμένων στοιχείων τα οποία συνδέονται σε πεπερασμένο πλήθος κόμβων. Μαθηματικά, η βασική ιδέα έγκειται στην αναδιατύπωση του συνεχούς προβλήματος στη λεγόμενη ασθενή ή μεταβολική μορφή και, στη συνέχεια, στην προσέγγιση της λύσης μέσω συναρτήσεων που ανήκουν σε έναν υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης (χώρος πεπερασμένων στοιχείων). Για τον σκοπό αυτό το αρχικό μας χωρίο διαμερίζεται σε ένα πεπερασμένο πλήθος μικρότερων χωρίων (στοιχεία), και για την προσέγγισή μας χρησιμοποιούμε συνήθως συναρτήσεις που είναι πολυώνυμικές σε κάθε στοιχείο. Αν και η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (Finite Element Method) – αυτή καθαυτή – πρωτοπαρουσιάστηκε περί το τέλος του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, παρόλο που η ανάπτυξη και η επιτυχία εξαρτήθηκε από τη διάδοση του ψηφιακού υπολογιστή, ωστόσο η ιδέα της τμηματικής προσέγγισης είναι πολύ παλιά. Ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε αυτές τις ιδέες για να προσδιορίσει τις επιφάνειες επίπεδων σχημάτων και όγκων στερεών. Όπως η γεωμετρία μιας κατασκευής μπορεί να προσεγγιστεί τμηματικά, έτσι και η λύση μια διαφορικής εξίσωσης μερικών παραγώγων που περιγράφει τη συμπεριφορά μιας κατασκευής μπορεί να προσεγγιστεί τμηματικά.

Η σύγχρονη χρήση των πεπερασμένων στοιχείων, δηλαδή της υποδιαίρεσης της κατασκευής σε μεγάλο πλήθος μικρών στοιχείων (πεπερασμένα στοιχεία), ξεκίνησε από τον τομέα της δομοστατικής (structural engineering). Πιθανώς οι πρώτες προσπάθειες έγιναν από τους Hrennikoff (1941) and McHenry (1943), οι οποίοι ανέπτυξαν αναλογίες μεταξύ πραγματικών διακριτών στοιχείων, για παράδειγμα ράβδους και δοκούς και των αντίστοιχων τμημάτων ενός συνεχούς στερεού. Για τη λύση προβλημάτων εκείνης της εποχής αναπτύχθηκαν μητρωϊκές μέθοδοι (χρήση πινάκων). Ο παράγοντας ανάπτυξης της τεχνολογίας των αυτοπρωοθούμενων πολεμικών αεροσκαφών οδήγησε στην ανάγκη ανάπτυξης ενός πιο απλοϊκού μαθηματικού υποβάθρου και ξεκίνησε η αναζήτηση για μια πιο αξιόπιστη προσέγγιση της βέλτιστης γεωμετρίας και των δυνάμεων που δρούσαν ανά πάσα στιγμή πάνω της.

Αργότερα, έγινε αντιληπτό ότι η έννοια της τμηματικά πολυωνυμικής προσέγγισης προσέφερε μία απλή και αποδοτική διαδικασία για την εφαρμογή της κλασικής μεθόδου των Rayleigh-Ritz. Από την οπτική γωνία της φυσικής, αυτό σήμαινε ότι προβλήματα εκτός της περιοχής των ελαστικών κατασκευών θα μπορούσαν να επιλυθούν με τη χρήση ήδη δοκιμασμένων λογισμικών για κατασκευές, αποδίδοντας την κατάλληλη έννοια των όρων στα αντίστοιχα μεταφορικά φαινόμενα. Αυτό ήταν ό,τι ακριβώς υλοποιήθηκε από τους Zienkiewicz and Cheung (1965) κατά την εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων στην επίλυση της εξίσωσης Poisson. Λίγα χρόνια μετά κάνουν την εμφάνισή τους δειλά δειλά τα πρώτα λογισμικά με τα πεπερασμένα στοιχεία, όπως τα ABAQUS, ANSYS, NASTRAN. Μετά τη δεκαετία του 1980 η μέθοδος διεισδύει και σε άλλους επιστημονικούς κλάδους, όπως μηχανική ρευστών, ηλεκτρομαγνητισμού και μετάδοση θερμότητας.

Σήμερα η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων έχει φτάσει σε πολύ εξελιγμένο επίπεδο ανάπτυξης, τόσο υψηλό έτσι ώστε να εφαρμόζεται σαν ρουτίνα σε μια ευρεία ποικιλία τομέων εφαρμογής. Παρόλη τη δυσκολία που τη συντρέχουν ως προς τη χρήση της μέσω των διάφορων εμπορικών λογισμικών, γίνεται μια προσπάθεια να δοθεί μεγαλύτερη έμφαση ο κώδικας να είναι πιο φιλικός στο χρήστη και στη βελτίωση του σχεδιαστικού περιβάλλοντος.

Έτσι γίνεται αντιληπτό για τις βασικές αρχές που διέπουν τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων.

- Η μέθοδος των ΠΣ είναι αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείται για την προσεγγιστική επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών.
- Τα προβλήματα συνοριακών τιμών καλούνται επίσης και πεδιακά προβλήματα, καθόσον αναζητείται μια άγνωστη συνάρτηση σε όλη την έκταση του πεδίου. Πεδίο είναι το χωρίο στο οποίο ενδιαφερόμαστε να λύσουμε το πρόβλημα (στερεό σώμα, ρευστό κλπ).
- Οι πεδιακές μεταβλητές είναι εξαρτημένες μεταβλητές που υπεισέρχονται στις προς επίλυση εξισώσεις.
- Οι οριακές συνθήκες είναι μαθηματικές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι πεδιακές μεταβλητές στα σύνορα του πεδίου.
- Στη μέθοδο των ΠΣ το πεδίο διακριτοποιείται σε πεπερασμένο αριθμό στοιχείων και η πεδιακή συνάρτηση εκφράζεται συναρτήσει των κομβικών τιμών των στοιχείων.
- Τα πεπερασμένα στοιχεία δεν πρέπει να συγχέονται με διαφορικά στοιχεία ($dx \times dy \times dz$).
- Οι κόμβοι είναι ειδικά σημεία του στοιχείου στα οποία υπολογίζεται η πεδιακή μεταβλητή.

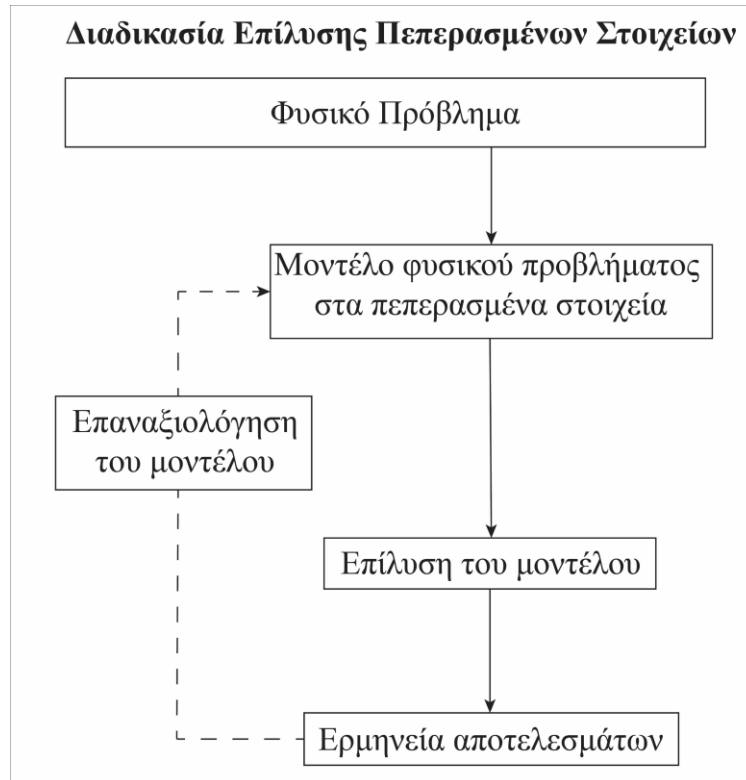
Επομένως η μέθοδος των ΠΣ εφαρμόζεται στα εξής τρία στάδια:

- I. Τη διακριτοποίηση του πεδίου, δηλαδή την προσέγγιση του πεδίου με πεπερασμένο αριθμό στοιχείων.
- II. Την κατάστρωση και επίλυση του συστήματος των εξισώσεων με αγνώστους τις κομβικές τιμές του άγνωστου πεδιακού μεγέθους
- III. Την επεξεργασία των αποτελεσμάτων και τον υπολογισμό διαφόρων μεγεθών, παράγωγων της βασικής πεδιακής μεταβλητής.

Γενική μελέτη προβλήματος ΠΣ

Στη γραμμική ανάλυση κατασκευών λαμβάνεται υπόψη ο νόμος του Hooke για τις απειροστές μικρές παραμορφώσεις και τις ελαστικές ιδιότητες των υλικών στην ελαστική περιοχή. Το πρόβλημα που δημιουργείται διατυπώνεται σε ένα πρόβλημα μελέτης για την διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας των ΠΣ, υπολογισμού των πινάκων του, τη μέθοδο επίλυσης των εξισώσεων και το πώς θα εκτελεσθεί η μέθοδος στον Η/Υ.

Για να περιγράψουμε το ευρύτερο πρόβλημα που έχουμε ως προς επίλυση ακολουθούμε μια πεπατημένη διαδικασία επίλυσης. Αρχικά περιγράφουμε και αναλύουμε το πρόβλημα το φυσικό πρόβλημα και δημιουργούμε ένα πρώτο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων για το φυσικό μας πρόβλημα. Έπειτα το επιλύουμε και εν τέλει αξιολογούμε τα αποτελέσματα που βρήκαμε για να αποφανθούμε αν συγκλίνουν με την πραγματικότητα ή όχι.



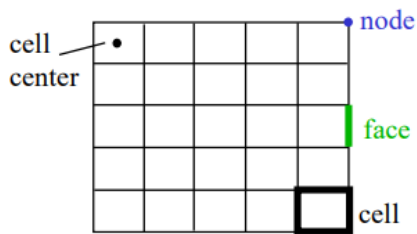
Τα αποτελέσματα που βρήκαμε εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τον τρόπο με τον οποίο δημιουργήθηκε το μοντέλο, δηλαδή τι είδους πεπερασμένα στοιχεία χρησιμοποιήσαμε, πόσο πυκνό θα είναι το πλέγμα (mesh) και τι επιλυτή (solver) επιλέξαμε για την καλύτερη σύγκλιση των λύσεων. Αφού γίνει η αξιολόγηση ίσως χρειαστεί να επαναπροσδιοριστεί το μοντέλο και η διαδικασία να επαναληφθεί έως ότου το μοντέλο προσφέρει μια επαρκή λύση στο υπό μελέτη πρόβλημα.

Η ανάλυση των συστημάτων που καλείται ο μηχανικός να μελετήσει διακρίνεται σε δύο ειδών:

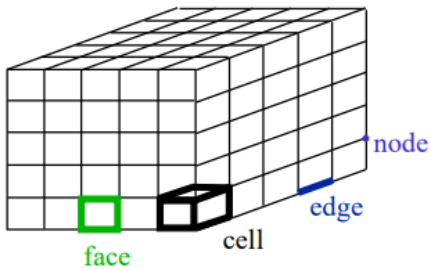
1. Τα συνεχή, όπου περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις και στα οποία η απόκριση περιγράφεται από μεταβλητές σε έναν άπειρο αριθμό σημείων.
2. Και τα διακριτά, όπου περιγράφονται από συστήματα αλγεβρικών εξισώσεων και στα οποία η απόκριση περιγράφεται από μεταβλητές σε ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων.

Ο στόχος είναι να υποβιβάσουμε το συνεχές πρόβλημα σε βαθμό διακριτού, να επιλύσουμε μόνο απλές αλγεβρικές εξισώσεις. Ο μηχανισμός αυτός αναλαμβάνεται από το εκάστοτε πρόγραμμα ΠΣ στους H/Y με την αντίστοιχη αριθμητική μέθοδο.

Για να μπορέσουμε να κατανοήσουμε καλύτερα τους όρους που χρησιμοποιούνται στα πεπερασμένα στοιχεία, παρατίθεται παρακάτω η βασική ορολογία, όπως φαίνεται στην εικόνα.



2D computational grid

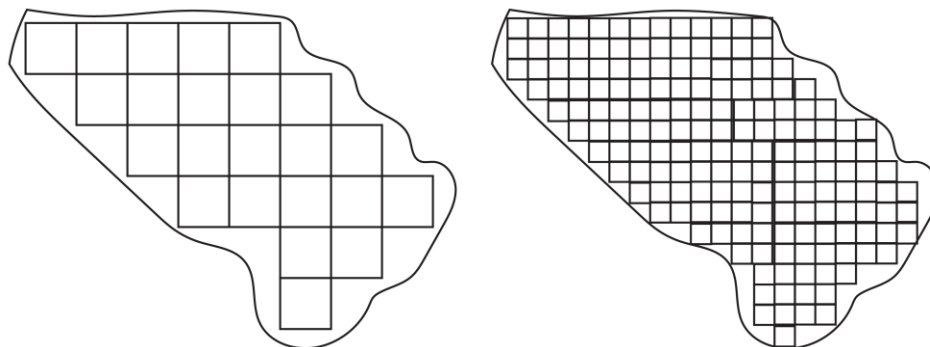


3D computational grid

Εικόνα19 Μορφολογία πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων

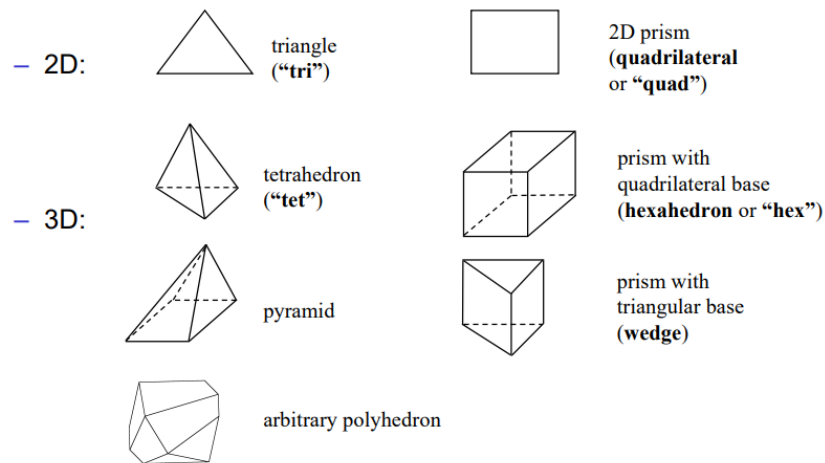
- **Κελί (cell)** : Βασική γεωμετρία στην οποία διασπάται η συνολική γεωμετρία.
- **Κόμβος (node)** : Σημείο του πλέγματος
- **Κέντρο κελιού (cell center)** : το κέντρο του κελιού
- **Ακμή (edge)** : όριο ενός προσώπου
- **Πρόσωπο (face)** : όριο ενός κελιού
- **Ζώνη (zone)** : μια ομάδα κόμβων, προσώπων ή κελιών
- **Τομέας (domain)** : ομάδα ζωνών

Ένας άλλος παράγοντας που επηρεάζει την επίλυση του προβλήματος είναι η διακριτοποίηση, η οποία αποτελεί μια διακριτή αναπαράσταση της γεωμετρίας και ομαδοποιεί τα στοιχεία σε συγκεκριμένες ζώνες ώστε να εφαρμοστούν οι συνοριακές συνθήκες.



Ωστόσο ακόμα σημαντικότερος είναι και ο ρόλος της πυκνότητας του πλέγματος, κατά την οποία το πλέγμα πυκνώνεται ή τα στοιχεία της (μείζονος) γύρω περιοχής υποδιαιρούνται σε πολύ μικρότερα για καλύτερη πληροφορία και ακριβέστερη λύση. Όσο πιο πολύ υποδιαιρούνται και πυκνώνονται τα στοιχεία, τόσο πιο πολύ πληροφορία και χρόνο επίλυσης παίρνουμε και άρα γίνεται αισθητή η ανάγκη για καλύτερο CPU και μνήμη RAM στον ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Προκειμένου να σχηματιστεί το πλέγμα, το πρόγραμμα προσφέρει διάφορες επιλογές ως προς το σχήμα τους ανάλογα με τον τύπο του προβλήματος και τις δυνατότητες του επιλυτή, αλλά και τις υπολογιστικές δυνατότητες του ηλεκτρονικού υπολογιστή που είναι εγκατεστημένο το πρόγραμμα. Κάποια από τα συνήθη σχήματα στοιχείων είναι τα παρακάτω:



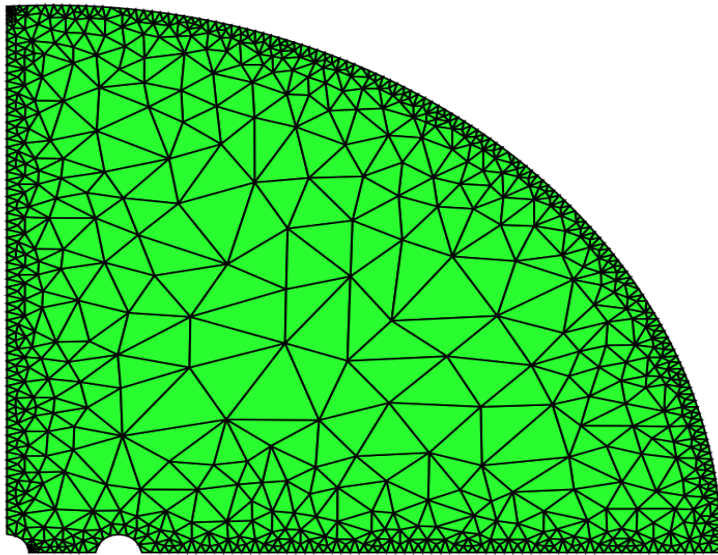
Εικόνα 20 Κατηγοριοποίηση του τρόπου διαμόρφωσης του πλέγματος με χρήση διαφορετικών μορφών πεπερασμένων στοιχείων.

Πιο συγκεκριμένα τα στοιχεία κατηγοριοποιούνται ανάλογα με το σχήμα τους ως :

- Tri mesh: η διακριτοποίηση στην οποία χρησιμοποιούνται μόνο τριγωνικά στοιχεία
- Quad mesh: διακριτοποίηση στην οποία χρησιμοποιούνται μόνο τετραγωνικά στοιχεία
- Hex mesh: Διακριτοποίηση με εξαεδρικά στοιχεία
- Tet mesh: Διακριτοποίηση με τετραεδρικά στοιχεία
- Polyhedral mesh: Δημιουργείται από αυθαίρετα πολύεδρα

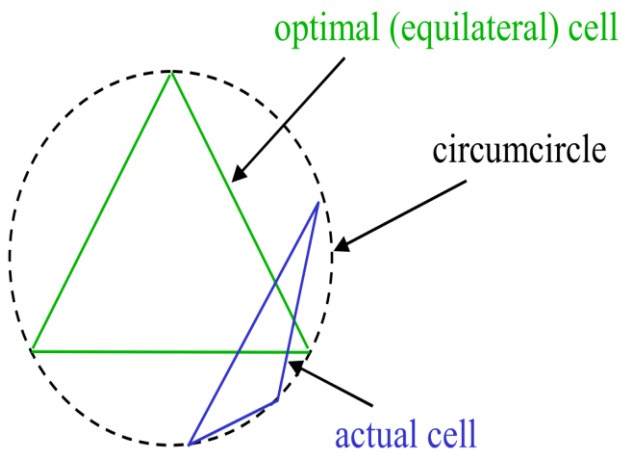
Όσον αφορά την ποιότητα της διακριτοποίησης, για τον ίδιο αριθμό στοιχείων όταν χρησιμοποιούνται τα εξάεδρα προσδίδεται μεγαλύτερη ακρίβεια στις λύσεις. Αύξηση της διακριτοποίησης συνεπάγεται αύξηση στην ακρίβεια της λύσης. Για να ελέγχουμε την ποιότητα της διακριτοποίησης καταφεύγουμε σε τρία κριτήρια:

- Στρέβλωση (*skewness*)
- Ομαλότητα (*smoothness*)
- Λόγος διαστάσεων (*aspect ratio*)



Εικόνα 21 Το πλέγμα πυκνώνεται στα άκρα ή σε μια περιοχή που ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε περισσότερο. Η μετάβαση από το αραιό στο πυκνό πλέγμα γίνεται ομαλά.

Η στρέβλωση εφαρμόζεται σε τρίγωνα και τετράεδρα και είναι ίση με :



$$\text{Skewness} = \frac{\text{optimal cell size} - \text{cell size}}{\text{optimal cell size}}$$

Εφαρμόζεται σε όλους τους τύπους στοιχείων:

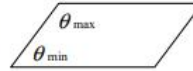
Equiangle skewness

- Common measure of quality is based on equiangle skew.
- Definition of equiangle skew:

$$\max \left[\frac{\theta_{\max} - \theta_c}{180 - \theta_c}, \frac{\theta_c - \theta_{\min}}{\theta_c} \right]$$

where:

- θ_{\max} = largest angle in face or cell.
- θ_{\min} = smallest angle in face or cell.
- θ_c = angle for equiangular face or cell.
 - e.g., 60 for triangle, 90 for square.



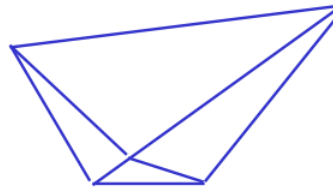
- Range of skewness:



Ως προς την ομαλότητα προσέχουμε η αλλαγή μεγέθους του στοιχείου να μην είναι μεγάλη ή αν είναι να γίνει κλιμακωτά και ομοιόμορφα.



smooth change
in cell size



large jump in
cell size

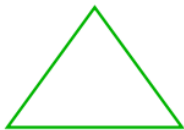
Ο λόγος διαστάσεων ή όγκου είναι ο λόγος του της μεγάλης πλευράς προς το μήκος της μικρής πλευράς. Με ιδανικότερη τιμή την 1, δηλαδή να γίνεται διακριτοποίηση με τετράγωνα και ισόπλευρα τρίγωνα.



aspect ratio = 1



high-aspect-ratio quad



aspect ratio = 1

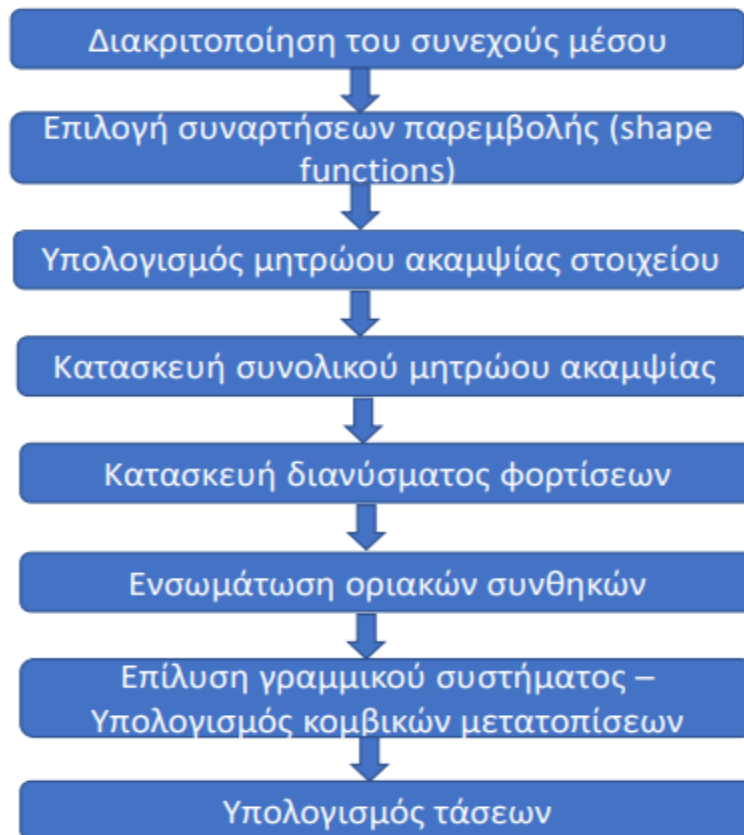


high-aspect-ratio triangle

Στα πρώτα στάδια της προσομοίωσης καθορίζονται τα υλικά από τα οποία είναι κατασκευασμένο το αντικείμενο ή η κατασκευή που πρόκειται να μελετηθεί. Για τον καθορισμό των υλικών οι βασικές παράμετροι που απαιτούνται είναι:

- a) Μέτρο ελαστικότητας του υλικού E .
- b) Πυκνότητα υλικού από την οποία μπορεί το λογισμικό να καθορίσει τη μάζα των δομικών στοιχείων του αντικειμένου.
- c) Ειδικό βάρος του υλικού (λαμβάνεται ίσο με την πυκνότητα επί την τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας).
- d) Λόγος Poisson, ν .
- e) Συντελεστής θερμικής διαστολής (ενεργοποιείται μόνο σε περίπτωση που ως φορτίσεις έχουμε θερμοκρασιακές μεταβολές).

Αν μπορούσαμε να συνοψίσουμε σε ένα διάγραμμα ροής τα βασικά βήματα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων θα έμοιαζε όπως το ακόλουθο:



Εικόνα 22 Διάγραμμα ροής επίλυσης με τα βασικά βήματα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων

Άρα, λοιπόν έχουμε συνοπτικά για το κάθε βήμα

1. Διακριτοποίηση του συνεχούς μέσου

- Το συνεχές μέσο υποδιαιρείται με νοητές γραμμές ή επιφάνειες σε πεπερασμένο αριθμό στοιχείων, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους μέσω των κόμβων. Τα στοιχεία μπορεί να είναι άνισα ή και διαφορετικού σχήματος.

2. Επιλογή συναρτήσεων παρεμβολής (shape functions)

- Ορίζονται κατάλληλες συναρτήσεις μέσω των οποίων εκφράζεται η μετατόπιση οποιουδήποτε εσωτερικού σημείου του στοιχείου, συναρτήσει των κομβικών του μετατοπίσεων. Οι συναρτήσεις αυτές μπορεί να είναι γραμμικές ή ανώτερης τάξης (συνήθως πολυωνυμικές). Η γεωμετρία του στοιχείου μπορεί επίσης να εκφρασθεί συναρτήσει των ίδιων συναρτήσεων σχήματος (ισοπαραμετρικά στοιχεία)

3. Κατασκευή μητρώου ακαμψίας στοιχείου

- Με χρήση ενεργειακών θεωρημάτων (συνήθως της Αρχής των Δυνατών έργων) κατασκευάζεται το μητρώο ακαμψίας του κάθε στοιχείου). Για την κατασκευή των μητρών ακαμψίας των στοιχείων συχνά χρησιμοποιείται ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων.

4. Κατασκευή του συνολικού μητρώου ακαμψίας

- Μετά τον υπολογισμό των επιμέρους μητρών ακαμψίας, κατασκευάζεται το συνολικό μητρώο ακαμψίας με συνάθροιση ανά κόμβο των επιμέρους μητρών. Στη φάση αυτή χρησιμοποιείται το γενικό σύστημα συντεταγμένων. Το συνολικό μητρώο ακαμψίας είναι συμμετρικό.

5. Κατασκευή διάνυσματος φορτίσεων

- Τα ασκούμενα φορτία σε κάθε στοιχείο ανάγονται σε κομβικές φορτίσεις και τοποθετούνται με κατάλληλη σειρά στο διάνυσμα των φορτίσεων.

6. Υλοποίηση οριακών συνθηκών

- Οι οριακές συνθήκες ικανοποιούνται μέσω της κατασκευής του συνολικού μητρώου ακαμψίας. Υπάρχουν διάφορες τεχνικές για να υλοποιηθεί η ενσωμάτωση των οριακών συνθηκών στο συνολικό μητρώο ακαμψίας (π.χ. Ελάττωση των διαστάσεων του πίνακα). Χωρίς τη χρήση των οριακών συνθηκών το μητρώο είναι ιδιόμορφο (singular) και δεν μπορεί να αντιστραφεί.

7. Επίλυση του γραμμικού συστήματος των εξισώσεων

- Από την επίλυση του γραμμικού συστήματος (με αντιστροφή του μητρώου ακαμψίας) προσδιορίζονται οι άγνωστες μετατοπίσεις των κόμβων

8. Υπολογισμός των τάσεων – παραμορφώσεων

- Μετά τον υπολογισμό των κομβικών μετατοπίσεων υπολογίζονται οι συνιστώσες των τάσεων και των παραμορφώσεων σε διάφορες κατευθύνσεις.

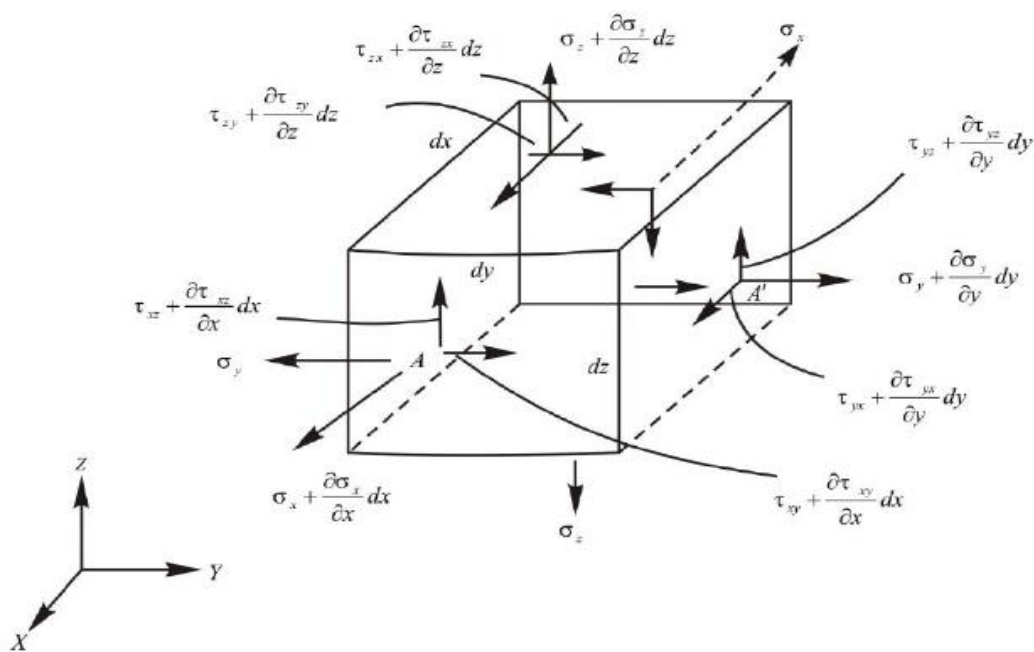
4.1 Στοιχεία θεωρίας Ελαστικότητας

Τάσεις

Σε κάθε σημείο μίας τρισδιάστατης ελαστικής κατασκευής ή δομής που ορίζεται σε ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $O(x,y,z)$, η εντατική κατάσταση παριστάνεται με τη βοήθεια ενός φυσικού μεγέθους που καλείται τανυστής τάσεων και εκφράζεται συνήθως με μητρωϊκό τρόπο, με τη βοήθεια ενός πίνακα T , 3×3 όπως:

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Για κάθε όρο σ_{ij} ή τ_{ij} , ο πρώτος δείκτης υποδηλώνει τον κάθετο άξονα στο επίπεδο αναφοράς της τάσης, ενώ ο δεύτερος τον άξονα ως προς τον οποίο η τάση είναι παράλληλη.



Εικόνα 23 Διατμητικές και ορθές τάσεις που αναπτύσσονται σε στοιχείο ισότροπου υλικού κατά την εντατική κατάσταση

Στην περίπτωση ομογενούς και ισότροπου υλικού, το μητρώο T είναι συμμετρικό ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$), οπότε είναι άσκοπο να εργαζόμαστε με εννέα όρους, διότι στην ουσία μόνο έξι χρειάζονται. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση του διανύσματος σ

$$\{\sigma\} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T$$

Από τις εξισώσεις ισορροπίας για ομογενές ιστροπικό υλικό έχουμε ότι:

$$\sum F_x = 0 \implies \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz + F_{\Omega x} dx dy dz = 0$$

$$\sum M_x = 0; \sum M_y = 0 \text{ and } \sum M_z = 0; \implies \tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

Και η τελική μορφή των εξισώσεων ισορροπίας είναι

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -F_{\Omega x}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -F_{\Omega y}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -F_{\Omega z}$$

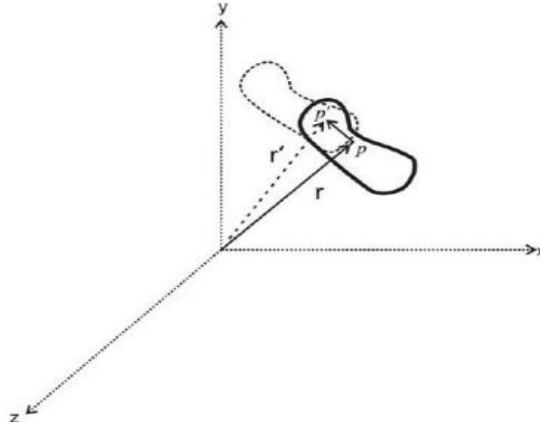
Παραμορφώσεις

Θεωρούμε σώμα το οποίο παραμορφώνεται λόγω της άσκησης σε αυτό διαφόρων φορτίσεων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ένα σημείο P(x,y,z) να μετατοπισθεί στη θέση P'(x',y',z') για την οποία ισχύει:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u} \quad \mathbf{y}' = \mathbf{y} + \mathbf{v} \quad \mathbf{z}' = \mathbf{z} + \mathbf{w}$$

Το διάνυσμα d(u, v, w) είναι το διάνυσμα της γραμμικής μετατόπισης (displacement) και οι αντίστοιχες παραμορφώσεις (strains) γράφονται

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$



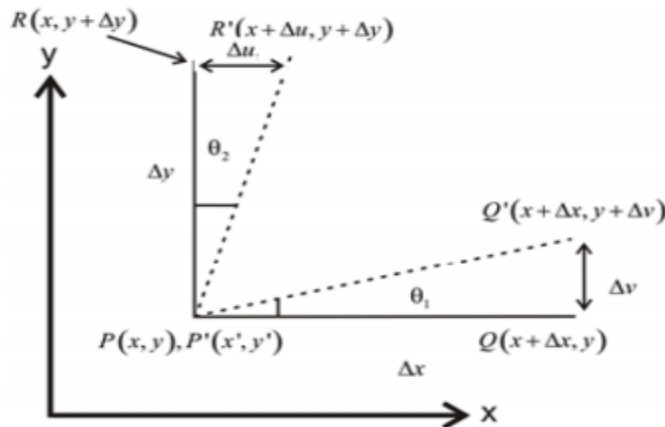
Στο ίδιο σώμα θεωρούμε τα σημεία P, Q και R τα οποία μετά την παραμόρφωση μετατοπίζονται στις θέσεις P', Q' και R' αντίστοιχα (θεωρούμε μικρές μετατοπίσεις).

Άρα, οι γωνιακές (διατμητικές) παραμορφώσεις που παριστάνουν τις μεταβολές ορθών γωνιών στα τρία επίπεδα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$



Στην περίπτωση μεγάλων μετατοπίσεων οι ανωτέρω σχέσεις γράφονται στη μορφή εξίσωσης Green –Lagrange:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \left[\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

Τότε το διάνυσμα των παραμορφώσεων γράφεται ως:

$$\{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]$$

Σύμφωνα με τον νόμο του Hooke οι τάσεις για την περίπτωση ενός γραμμικού, ελαστικού, ανισότροπου και ομογενούς υλικού συσχετίζονται με τις παραμορφώσεις μέσω των σχέσεων:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & C_{26} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{61} & C_{62} & \cdot & \cdot & \cdot & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad \text{ή ισοδύναμα:} \quad \{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$$

Στην περίπτωση ορθοτοπικού υλικού οι ανωτέρω σχέσεις γράφονται στη μορφή συμμετρικού πίνακα ως προς την κύρια διαγώνιο:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & & & & & \\ & C_{22} & & & & \\ & & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

Symmetry

Στην περίπτωση ιστροπικού υλικού οι ανωτέρω σχέσεις γράφονται:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \bar{E} \begin{bmatrix} (1-\mu) & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\mu) & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\mu) & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ & \text{Symmetry} & & & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

Τα προβλήματα που εντάσσονται στην επίπεδη εντατική κατάσταση έχουν τη μια διάσταση πολύ μικρότερη από τις άλλες δύο (έστω την Oz) (π.χ. έλασμα). Στην περίπτωση αυτή οι συνιστώσες των τάσεων σ_z , τ_{zx} , τ_{zy} μηδενίζονται και οι σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων γράφονται στη μορφή:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{ή αντίστροφα:} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Ενώ στην περίπτωση επιμήκων σωμάτων στα οποία η μία διάσταση (έστω Oz) είναι πολύ μεγαλύτερη από τις υπόλοιπες τότε ισχύει $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$.

Οι σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων για ισότροπο υλικό στην περίπτωση αυτή γράφονται:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{ή αντίστροφα:} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{(1+\mu)}{E} \begin{bmatrix} (1-\mu) & -\mu & 0 \\ -\mu & (1-\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

4.2 Ενεργειακή Θεώρηση – Αρχή Δυνατών Έργων

Η ΑΔΕ είναι ένα πολύτιμο εργαλείο της Μηχανικής για την επίλυση προβλημάτων στατικής. Μεταξύ άλλων χρησιμοποιείται και για την παραγωγή των βασικών εξισώσεων στη μέθοδο των ΠΣ. Ο όρος «δυνατό έργο» σημαίνει το έργο που παράγουν πραγματικές δυνάμεις κατά την πραγματοποίηση υποτιθέμενων (δυνατών) μετατοπίσεων οι οποίες θα πρέπει να είναι συμβατές με τις επιβαλλόμενες οριακές συνθήκες. Όταν σε ένα σημειακό σώμα ασκούνται διάφορες δυνάμεις και το σώμα ισορροπεί, τότε το συνολικό έργο των δυνάμεων αυτών κατά τη διάρκεια οποιασδήποτε υποθετικής (δυνατής) μετατόπισης είναι μηδενικό, εφ' όσον το σώμα ισορροπεί.

Η ΑΔΕ εφαρμόζεται και στην περίπτωση απαραμόρφωτων στερεών σωμάτων (rigid bodies), όπου οι ασκούμενες φορτίσεις μπορεί να είναι δυνάμεις, ροπές ή κατανεμημένες φορτίσεις. Στην περίπτωση αυτή οι δυνατές μετατοπίσεις μπορεί να είναι συνδυασμός μεταφορικών φορτίσεων και περιστροφών. Σε όλες τις περιπτώσεις το δυνατό έργο θα πρέπει να είναι μηδενικό εφ' όσον το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία. Οι θεωρούμενες μετατοπίσεις θα πρέπει να είναι αρκούντως μικρές έτσι ώστε να μην αλλάζει η κατεύθυνση δράσης των ασκούμενων φορτίσεων.

Στην περίπτωση παραμορφώσιμων στερεών η ΑΔΕ ισχύει εφ' όσον όμως ληφθεί υπ' όψη και το έργο των εσωτερικών δυνάμεων, δηλαδή των συνιστωσών των αναπτυσσομένων τάσεων.

- Ως δυνατή μετατόπιση μπορεί να θεωρηθεί οποιαδήποτε μετατόπιση η οποία θα μπορούσε να συμβεί δυναμικά, ικανοποιώντας όμως τις επιβαλλόμενες οριακές συνθήκες.

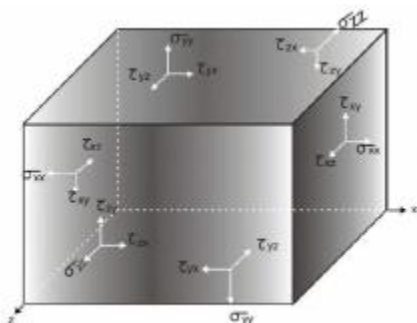
- Η ΑΔΕ διατυπώνεται ως εξής:

Αν σε ένα παραμορφώσιμο στερεό το οποίο ισορροπεί υπό την επίδραση δεδομένου συστήματος φορτίσεων, θεωρηθεί μια δυνατή μετατόπιση, τότε το δυνατό έργο των εξωτερικών φορτίσεων ισούται με το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων (συνιστωσών των τάσεων), δηλαδή

$$\delta W = \delta \int U dV = \delta U \quad \text{η συνολική ενέργεια παραμόρφωσης}$$

Για την ειδική περίπτωση γραμμικά ελαστικού σώματος στο οποίο ισχύει ο νόμος του Hooke ($\sigma = E\varepsilon$) θα δειχθεί με τη βοήθεια διανυσμάτων σ και ε .

Η ενέργεια παραμόρφωσης (strain energy) ενός σώματος υπό τρισδιάστατη εντατική κατάσταση υπολογίζεται από την ακόλουθη ολοκλήρωση σε όλο τον όγκο V του σώματος:



$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV$$

Όπου: $\{\sigma^T\} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$

$$\{\varepsilon^T\} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx})$$

Άρα από την παραπάνω έχουμε :

$$U_{ισ} = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon})^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dV$$

Μετά από την εφαρμογή μια δυνατής (ιδεατής) μετατόπισης δu με αντίστοιχη δυνατή παραμόρφωση $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$, η ελαστική ενέργεια περιγράφεται πάλι όπως παραπάνω με μια μικρή αλλαγή

$$U_{τελ} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\varepsilon} + \delta \boldsymbol{\varepsilon}) dV = \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon} + \delta \boldsymbol{\varepsilon})^T \mathbf{E} (\boldsymbol{\varepsilon} + \delta \boldsymbol{\varepsilon}) dV$$

Με αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε

$$\delta U = U_{τελ} - U_{ισ} = \frac{1}{2} \int_V [(\boldsymbol{\varepsilon} + \delta \boldsymbol{\varepsilon})^T \mathbf{E} (\boldsymbol{\varepsilon} + \delta \boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}] dV$$

Έπειτα από πράξεις με την ολοκληρωτέα συνάρτηση (I) με αντικατάσταση στη παραπάνω εξίσωση παίρνουμε ότι

$$\delta U = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dV$$

Με βάση το νόμο του Hooke τελικά παίρνουμε ότι

$$\delta U = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV$$

Παρατηρούμε ότι η νέα σχέση δεν περιλαμβάνει το $\frac{1}{2}$, διότι δεν αναφερόμαστε σε μεταβολή στο διάστημα από την αφόρτιστη μέχρι την πλήρη πραγματική φορτισμένη κατάσταση $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon})$, αλλά σε μια μεταβολή υπό σταθερό φορτίο $\boldsymbol{\sigma}$, δηλαδή σε μια επιπλέον ελαστική μετατόπιση σε σχέση με την ήδη πραγματοποιηθείσα θέση ισορροπίας.

4.3 Συνάρτηση μετατόπισης

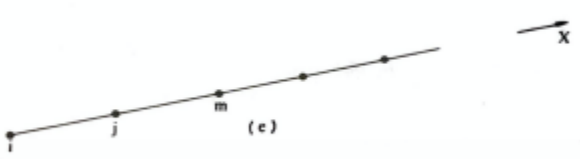
Ως συνάρτηση μετατόπισης ορίζουμε την συνάρτηση που εκφράζει την μετατόπιση των σημείων ενός στοιχείου. Η επιλογή της συνάρτησης μετατόπισης είναι καθοριστική για την ακρίβεια και την ορθότητα των υπολογισμών. Η συνάρτηση μετατόπισης μας δίνει την μετατόπιση σε κάθε σημείο ενός στοιχείου συναρτήσει των μετατοπίσεων των κόμβων. Η χρήση πολυωνυμικών συναρτήσεων σαν συνάρτηση μετατόπισης είναι μια βολική και κατάλληλη επιλογή.

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \dots + \alpha_n x^n$$

Η συνάρτηση μετατόπισης θα πρέπει να ικανοποιεί τα κάτωθι κριτήρια:

- Θα πρέπει να είναι μια συνεχής συνάρτηση.
- Θα πρέπει να επιτρέπει την μετατόπιση στερεού σώματος για κάθε στοιχείο.
- Θα πρέπει να μπορεί να προσομοιώνει την κατάσταση σταθερής παραμόρφωσης σε όλο το στοιχείο, όταν το μέγεθος του στοιχείου είναι πολύ μικρό.
- Η μετατόπιση στο σύνορο δύο στοιχείων θα πρέπει να είναι συνεχής και να μην επιτρέπει «κενά» ή επικαλύψεις μεταξύ των στοιχείων. Σε πολλά προβλήματα απαιτείται και συνέχεια της πρώτης παραγώγου στα σύνορα μεταξύ των στοιχείων.
- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις πληρούν τις ανωτέρω συνθήκες και αποτελούν μια βολική λύση

Στην περίπτωση ενός μονοδιάστατου στοιχείου e (ράβδος δικτυώματος ή δοκός σε κάμψη) η γενική μορφή του πολυωνύμου παρεμβολής που δίνει τη μετατόπιση $q(x)=u(x)$ κατά τη διεύθυνση του στοιχείου είναι:



$$q(x) = u(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_{m+1} x^m + \dots$$

Όπου $q(x)$ είναι η μετατόπιση του σημείου του e (element)

$$q(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^m & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Δηλαδή

$$q(x) = \mathbf{M}(x)\mathbf{a}$$

Οι όροι a_i είναι σταθεροί, προκύπτουν ανάλογα με το στοιχείο και ονομάζονται γενικευμένες συντεταγμένες, επειδή δεν είναι απαραίτητα μόνο συνδεδεμένοι με τις μετατοπίσεις των κόμβων του στοιχείου.

Ο αριθμός των όρων a_i πρέπει να είναι ίσος με τον συνολικό αριθμό των κομβικών παραμέτρων του στοιχείου. Οι συναρτήσεις $M(x)$ ονομάζονται συναρτήσεις μετατόπισης. Στην περίπτωση της επίπεδης έντασης ή της επίπεδης παραμόρφωσης υπάρχουν δύο συνιστώσες $u(x,y)$ και $v(x,y)$ της μετατόπισης. Το πολυώνυμο της παρεμβολής για κάθε μετατόπιση είναι της μορφής.

Για την τρισδιάστατη κατάσταση έχουμε ότι

$$\mathbf{q}(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x & y & x^2 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Με

$$\mathbf{G}(x,y,z) = [1 \quad x \quad y \quad z \quad x^2 \quad xy \quad \dots] \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Σημειώνεται ότι ο αριθμός των συντεταγμένων a_i όπως και των b_i και c_i των παραπάνω σχέσεων είναι ίσος με τον αριθμό των κόμβων του στοιχείου.

$$\mathbf{q}(x, y, z) = \mathbf{M}(x, y, z)\mathbf{a}$$

Εν τέλει έχουμε

Όπου \mathbf{a} είναι το μητρώο στήλη των συντεταγμένων a_i, b_i, c_i

Η τελευταία σχέση δίνει τις μετατοπίσεις κάθε σημείου ενός στοιχείου e (στην περίπτωση της τρισδιάστατης ελαστικότητας). Επομένως δίνει τις μετατοπίσεις q_i, q_j, q_m , των κόμβων i, j, m , του στοιχείου e , αν εφαρμοσθεί για τιμές των (x, y, z) ίσες με τις συντεταγμένες (x_i, y_i, z_i) , (x_j, y_j, z_j) , (x_m, y_m, z_m) , των κόμβων του e . Προκύπτουν λοιπόν οι σχέσεις

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_m \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(x_i, y_i, z_i) \\ \mathbf{M}(x_j, y_j, z_j) \\ \mathbf{M}(x_m, y_m, z_m) \\ \vdots \end{bmatrix} \mathbf{a}$$

ή

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{A} \mathbf{a}$$

Στη γενική περίπτωση η τελευταία αντιστρέφεται και παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{q}^e$$

Όπου φαίνεται ότι ο ολικός αριθμός των γενικευμένων συντεταγμένων είναι ίσος με τον συνολικό αριθμό των βαθμών ελευθερίας του στοιχείου e . Με αντικατάσταση έχουμε

$$\mathbf{q}(x, y, z) = \mathbf{M}(x, y, z) \mathbf{a} = \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{q}^e$$

Η εξίσωση αυτή δίνει κατευθείαν τις μετατοπίσεις στο τυχόν σημείο e συναρτήσει των μετατοπίσεων των κόμβων του στοιχείου, όπου

$$\mathbf{N}(x, y, z) = \mathbf{M}(x, y, z) \mathbf{A}^{-1}$$

Τα $\mathbf{N}_l(x, y, z)$ ($l=i, j, m, \dots$) γράφονται

$$\mathbf{N}_l(x, y, z) = \begin{bmatrix} v_l(x, y, z) & 0 & 0 \\ 0 & v_l(x, y, z) & 0 \\ 0 & 0 & v_l(x, y, z) \end{bmatrix} = v_l(x, y, z) \mathbf{I} \quad l = i, j, \dots$$

Συνάρτηση μετατόπισης: $M(x) = u = \sum_i N_i u_i$ όπου N_i = συναρτήσεις σχήματος, u_i = κομβικές τιμές

Οι συναρτήσεις σχήματος είναι συνήθως πολυωνυμικές συναρτήσεις n βαθμού (μιας, δύο ή τριών μεταβλητών ανάλογα με το πρόβλημα). Στην περίπτωση γραμμικής παρεμβολής τα πολυώνυμα είναι πρώτου βαθμού, ενώ στην περίπτωση τετραγωνικής παρεμβολής δευτέρου.

Γενικά χρησιμοποιούνται τα ακόλουθα είδη παρεμβολής:

- > Παρεμβολή Lagrange: Οι συναρτήσεις παρεμβολής Lagrange χρησιμοποιούνται συχνότερα και εξασφαλίζουν το γεγονός ότι η συνάρτηση παρεμβολής λαμβάνει ίδιες τιμές με την αρχική συνάρτηση σε συγκεκριμένα σημεία.
- > Παρεμβολή Hermite: Στην περίπτωση αυτή οι συναρτήσεις παρεμβολής, αλλά και οι παράγωγοί τους, λαμβάνουν ίδιες τιμές με την αρχική συνάρτηση σε συγκεκριμένα σημεία.

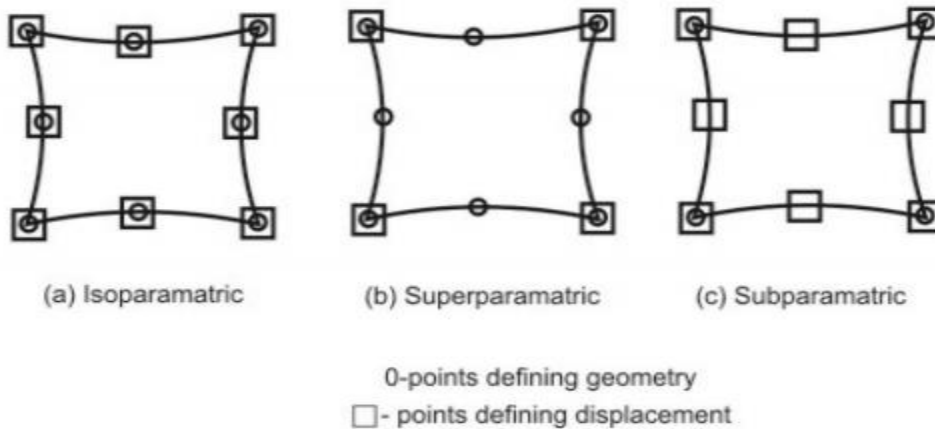
Η μορφή των συναρτήσεων παρεμβολής εξασφαλίζει την ομαλή μορφή της μετατόπισης εντός του κάθε στοιχείου, δεν είναι όμως αυτονόητη η ομαλότητα της μετατόπισης σε συνολικό επίπεδο, εφόσον δεν εξυπακούεται η συνέχεια της (ή των) παραγώγων στα σύνορα μεταξύ των στοιχείων. Για παράδειγμα στην προσομοίωση κάμψης δοκών ή ελασμάτων απαιτείται συνέχεια και της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης μετατόπισης μεταξύ των στοιχείων.

Αν οι συναρτήσεις σχήματος $\{N_i\}$ που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση της μεταβολής της γεωμετρίας του στοιχείου είναι ίδιες με τις συναρτήσεις σχήματος $\{N^i\}$ που χρησιμοποιούνται για την μεταβολή της μετατόπισης, τα αντίστοιχα στοιχεία καλούνται ισοπαραμετρικά.

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 & u &= N_1' u_1 \\ y &= N_1 y_1 & v &= N_1' v_1 \end{aligned}$$

Αν η γεωμετρία του στοιχείου ορίζεται από συναρτήσεις ανώτερης τάξης σε σχέση με αυτές που χρησιμοποιούνται για τις μετατοπίσεις, τα αντίστοιχα στοιχεία καλούνται υπερπαραμετρικά

Αν η γεωμετρία του στοιχείου ορίζεται από συναρτήσεις χαμηλότερης τάξης σε σχέση με αυτές που χρησιμοποιούνται για τις μετατοπίσεις, τα αντίστοιχα στοιχεία καλούνται υποπαραμετρικά



Η επιλογή της τάξης των χρησιμοποιούμενων συναρτήσεων σχήματος εξαρτάται από τον τύπο των στοιχείων.

- Για παράδειγμα σε ένα μονοδιάστατο (γραμμικό) στοιχείο, του οποίου ο κάθε ένας από τους δύο κόμβους έχει έναν βαθμό ελευθερίας χρησιμοποιείται η συνάρτηση μετατόπισης:

$$u = a_0 + \alpha_1 X$$

- Αν όμως για το ίδιο στοιχείο θεωρήσουμε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κόμβους έχει δύο βαθμούς ελευθερίας, τότε πρέπει να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση μετατόπισης:

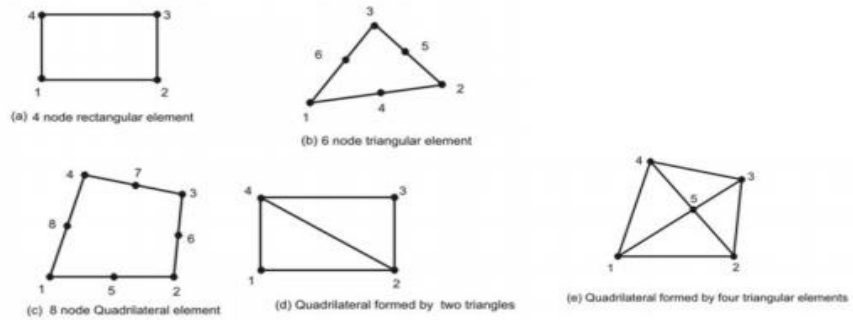
$$u = a_0 + a_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3$$

Μερικοί τύποι στοιχείων φαίνονται παρακάτω

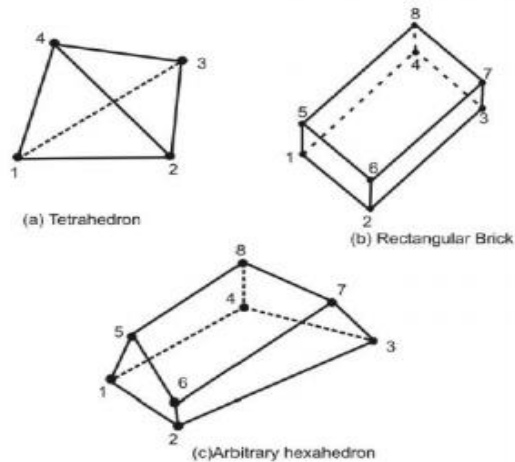
A. Μονοδιάστατα στοιχεία



B. Διδιάστατα στοιχεία



Γ. Τριδιάστατα στοιχεία



4.4 Παραμορφώσεις και τάσεις στοιχείου

Οι παραμορφώσεις στο τυχόν στοιχείο e συνδέονται, ως γνωστόν, με τις μετατοπίσεις $q(x,y,z)$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix}$$

Όπου ένα μητρώο τελεστής γράφεται στη μορφή

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα ορίζονται οι παραμορφώσεις στη μονοδιάστατη κατάσταση ή στην διδιάστατη. Αντικαθιστώντας

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{q}^e$$

όπου

$$\mathbf{B} = \mathbf{N} \mathbf{N}(x,y,z)$$

Από τη παραπάνω σχέση έχουμε τις παραμορφώσεις στο τυχόν στοιχείο e συναρτήσεων των μετατοπίσεων των κόμβων q_e και του μητρώου B που όμως προσδιορίζεται πολύ απλά εφόσον οι μετατοπίσεις έχουν εκφρασθεί συναρτήσεων των κομβικών παραμέτρων και των συναρτήσεων σχήματος. Αν μάλιστα οι συναρτήσεις σχήματος $N(x,y,z)$ είναι γραμμικές τότε οι παραμορφώσεις-τροπές θα είναι σταθερές σε κάθε σημείο του e .

Το μητρώο ακαμψίας θα προκύψει από την εφαρμογή της αρχής δυνατών έργων στο στοιχείο e . Εφαρμόζοντας τώρα την αρχή των δυνατών έργων στο στοιχείο e που έχει όγκο V_e και συνολική επιφάνεια S_e βρίσκουμε

$$\{\delta q^e\}^T \mathbf{F}_p^e + \int_{V^e} \delta q^T \mathbf{f} dV + \int_{S^e} \delta q^T \mathbf{T} dS = \int_{V^e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV$$

Οι δυνατές μετατοπίσεις δq και οι δυνατές παραμορφώσεις $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ δίνονται από τους ίδιους τύπους με τις πραγματικές μετατοπίσεις και παραμορφώσεις με αντικατάσταση του q_e με δq_e . Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \delta q &= \mathbf{N} \delta q^e \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B} \delta q^e \end{aligned}$$

Επομένως ο δεύτερος όρος του αριστερού μέλους που παριστάνει το δυνατό έργο των καθολικών δυνάμεων γράφεται

$$\int_{V^e} \delta q^T \mathbf{f} dV = (\delta q^e)^T \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV$$

Το διάνυσμα

$$\mathbf{F}_f^e = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV$$

όπως φαίνεται ,παριστάνει τις στατικά ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις. Μ' αυτό τον τρόπο μπορούν να αντικατασταθούν οι καθολικές δυνάμεις f με δυνάμεις στους κόμβους.

Με την ίδια διαδικασία μπορούν να αντικατασταθούν και οι επιφανειακές τάσεις T με τις στατικά ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις

$$\mathbf{F}_T^e = \int_{S^e} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS$$

Δηλαδή πιο αναλυτικά

$$\mathbf{f}^e = - \underbrace{\int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d(\text{vol})}_{\substack{\text{Πεδιακές} \\ \text{δυνάμεις} \\ \text{ασκούμενες} \\ \text{στον όγκο του} \\ \text{σώματος}}} - \underbrace{\int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d(\text{vol})}_{\substack{\text{Αρχικές} \\ \text{παραμορφώσεις}}} + \underbrace{\int_{V^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d(\text{vol})}_{\substack{\text{Αρχικές τάσεις}}}$$

Τα στοιχεία k_{ij} του μητρώου ακαμψίας είναι οι δυνάμεις P_i που πρέπει να εφαρμοστούν στους κόμβους του στοιχείου ώστε να προκύψει μετατόπιση του κόμβου j ίση με μονάδα ($\delta_j = 1$) όταν οι υπόλοιποι κόμβοι θεωρούνται παγωμένοι ($\delta_i = 0$, για κάθε $i \neq j$).

Κάθε στήλη του μητρώου ακαμψίας k_e του στοιχείου παριστάνει δυνάμεις που ισορροπούν. Ισχύει δηλαδή ότι το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης είναι μηδέν:

$$\sum_j k_{ij} = 0$$

4.5 Εφαρμογή της Μεθόδου των Πεπερασμένων στοιχείων στο πρόβλημα του λυγισμού

Για μια δοκό που δέχεται αξονικό θλιπτικό φορτίο P_0 , με τη μέθοδο των ΠΣ το βέλος κάμψης $y(x)$ δίνεται σαν συνάρτηση των κομβικών μετατοπίσεων \mathbf{a} , πολλαπλασιάζοντας το διάνυσμα - γραμμή των συναρτήσεων μορφής \mathbf{N} επί το διάνυσμα - στήλη των κομβικών βαθμών ελευθερίας \mathbf{a} , ως εξής

$$\mathbf{y} = \mathbf{N} \mathbf{a}$$

Για το στοιχείο - δοκό η σχέση παραμόρφωση - μετατόπιση λόγω κάμψης μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα δύο (γραμμικών) όρων ως:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_{x1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{x2}$$

Σε μια μετατοπισμένη κατάσταση της δοκού, το άθροισμα της ενέργειας παραμόρφωσης λόγω καμπτικής τάσης σ_{x1} και αξονικής θλιπτικής τάσης σ_{x0} γράφεται ως

$$U = U_I + U_o$$

Η ενέργεια παραμόρφωσης από κάμψη έχει τη μορφή

$$U_I = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{\chi 1} \varepsilon_{\chi 1} dV$$

Με αντικατάσταση $\sigma_{\chi 1} = E \varepsilon_{\chi 1}$ και ολοκλήρωση στη διατομή παίρνουμε

$$U_I = \frac{1}{2} EI a^T \int_0^L N x^T N x a dx$$

Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε για την ενέργεια αξονικής παραμόρφωσης

$$U_o = \frac{1}{2} P_o a^T \int_0^L N x^T N x a dx$$

Από το θεώρημα της ολικής δυναμικής ενέργειας

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 0$$

Έχουμε

$$(K + K_o) a = 0$$

Όπου $K = EI \int_0^L N x^T N x dx$ να είναι το μητρώο δυσκαμψίας και $K_o = P_o \int_0^L N x^T N x dx$

Το μητρώο K_o προέρχεται από την δυναμική ενέργεια των αρχικών αξονικών τάσεων και μιας προσέγγισης των αξονικών παραμορφώσεων που συνδέονται με την κάμψη. Από φυσική άποψη, οι όροι του μητρώου παριστάνουν δράσεις εκείνων του K προκειμένου να παραχθούν μοναδιαίες κομβικές μετατοπίσεις παρουσία της αξονικής δύναμης P .

Αν θέσουμε, ωστόσο $K_o = -|P_o| K_G$ και $\lambda = |P_o|$ τότε παίρνουμε

$$(K - \lambda K_G) a = 0$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι τα κρίσιμα φορτία λυγισμού της δοκού – φορέα είναι οι ιδιοτιμές λ του προβλήματος που ορίζουν τα μητρώα K και K_G και η μορφή που θα πάρει η λυγισμένη δοκός είναι το διάνυσμα a .

Όλα τα εμπορικά λογισμικά πεπερασμένων στοιχείων διαθέτουν ένα τμήμα τους (module) με τίτλο *Buckling analysis*. Αυτό αφορά στην εφαρμογή της ιδιοδιανυσματικής ανάλυσης, όπως είδαμε πιο πάνω.

Πέρα από αυτή, όμως για λόγους πρόσθετης εξασφάλισης κυρίως έναντι τοπικών (δευτερευόντων) λυγισμών, συνιστάται και η εκτέλεση της **μη- γραμμικής ανάλυσης**. Συγκεκριμένα, όπως θα δούμε και στη συνέχεια, θέτουμε ένα μικρό (πρόσθετο) φορτίο F κάθετα προς το θλιπτικό φορτίο λυγισμού, έτσι ώστε να δημιουργούμε μια τεχνητή ανωμαλία και να ξεφύγουμε από την πλήρη συμμετρία. Στη συνέχεια, το θλιπτικό

φορτίο εφαρμόζεται στο μοντέλο αυξητικά αλλά σιγά - σιγά και καταγράφουμε τη σχέση φορτίου – μετατόπισης. Έχοντας πάρει αυτή την καμπύλη, η περιοχή του φορτίου στην οποία εμφανίζεται έντονη αύξηση της μετατόπισης αντιστοιχεί στο φορτίο λυγισμού.

Γνωρίζοντας, τόσο τα φορτία λυγισμού από το πρόβλημα ιδιοτιμών (eigenvalue buckling), όσον και εκείνα από τη μη-γραμμική ανάλυση (snap-through buckling), για λόγους ασφάλειας επιλέγουμε τη μικρότερη τιμή (συντηρητική επιλογή).

4.6 Ελαστοπλαστική ανάλυση

Αν υποθέσουμε ότι η ισοδύναμη τάση υπερβεί το όριο διαρροής, τότε το μητρώο στιβαρότητας \mathbf{K} εξαρτάται από το πεδίο των μετατοπίσεων \mathbf{u} και των επαγόμενων τάσεων $\boldsymbol{\sigma}$ και επομένως $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})$.

Οι σχέσεις παραμορφώσεων – μετατοπίσεων δεν μεταβάλλονται με την είσοδο της κατασκευής στην πλαστική περιοχή, οπότε πάλι ισχύει:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u}$$

Επίσης η καταστατική εξίσωση του υλικού είναι:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{L} \mathbf{u}$$

όπου το μητρώο ελαστικότητας \mathbf{E} δεν είναι πλέον σταθερό αλλά τώρα εξαρτάται από τις συνιστώσες του διάνυσματος των τάσεων. Συνδυάζοντας τις παραπάνω έχουμε:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{L} \mathbf{u}$$

Η εξίσωση ισορροπίας είναι

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

όπου \mathbf{F} είναι το διάνυσμα φόρτισης. Παραγωγίζοντας ως προς τις μετατοπίσεις \mathbf{u} , προκύπτει:

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{u}}$$

Επίσης από την εξίσωση των τάσεων μετά από παραγωγή έχουμε:

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\mathbf{u}} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{L}$$

Τότε έχουμε από αλυσιδωτή παραγωγή

$$\frac{d\sigma}{dF} = \frac{d\sigma}{du} \frac{du}{dF} = \frac{d\sigma/du}{dF/du}$$

Με συνδυασμό των παραπάνω λαμβάνουμε

$$\frac{d\sigma}{dF} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{L}[\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})]^{-1}$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί ένα μη-γραμμικό σύστημα κανονικών διαφορικών εξισώσεων που αντιστοιχεί στην πλαστική συμπεριφορά γενικευμένων προβλημάτων επίπεδης εντατικής κατάστασης, αλλά γενικότερα ισχύει και στις τρεις διαστάσεις.

Αν εφαρμόσουμε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης και Runge-Kutta 2^{ης} τάξης για καλύτερη σύγκλιση στην ακριβή λύση ως

$$u_{n+1} = u_n + 1/2 \left(\frac{1}{1 - \frac{2u_n}{U}} + \frac{1}{1 - \frac{2 \left\{ u_n + \left[\frac{\Delta X_n}{K_0 \left(1 - \frac{2u_n}{U} \right) \right]} \right\}}{U}} \right) \frac{\Delta X_n}{K_0}$$

παίρνουμε

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + 1/2 [\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_n) + \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}'_{n+1})] \Delta F_n$$

Γενικότερα, σε ένα οποιοδήποτε μη γραμμικό πρόβλημα θα ισχύει μια μητρική εξίσωση της μορφής

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

όπου το διάνυσμα $\boldsymbol{\varphi}$ αντιστοιχεί στη μεταβλητή, η οποία εκτός από μετατόπιση μπορεί να είναι κάποιο άλλο βαθμωτό μέγεθος, όπως θερμοκρασία, πυκνότητα. Άλλες επαναληπτικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στα ΠΣ είναι

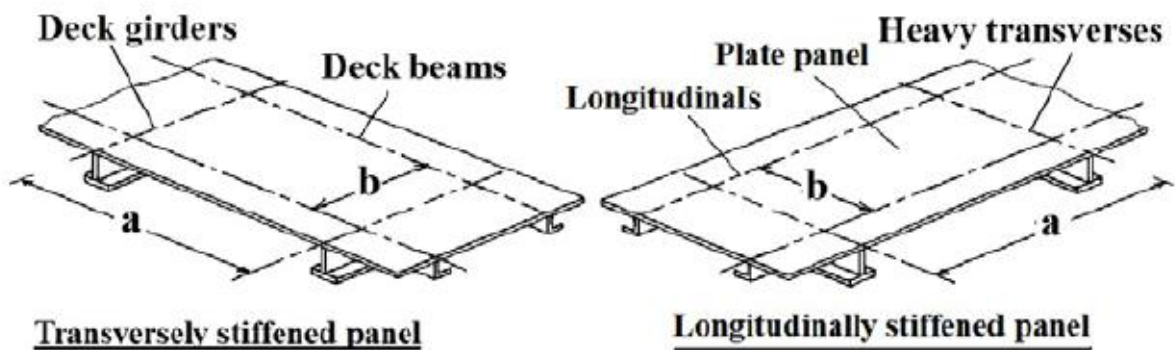
- Μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων
- Μέθοδος Newton – Raphson
- Μέθοδος εφαπτομενικής στιβαρότητας

5. Περιγραφή των υπό μελέτη μοντέλων

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στα μοντέλα των ενισχυτικών που χρησιμοποιούνται πιο πολύ στη ναυπηγική για τη διαμήκη ενίσχυση του πυθμένα και του καταστρώματος. Θα δούμε τη βασική διαμόρφωση των ενισχυμένων ελασμάτων, το φορτίο που δέχονται σε θλιπτική αξονική φόρτιση και τον τρόπο που λυγίζουν υπό την επίδραση αυτής σε συνδυασμό και με τον τρόπο στήριξης των φορτισμένων άκρων (κοντών) και των αφόρτιστων (μακριών) .

Η βασική κατασκευαστική διαρρύθμιση των ενισχυμένων ελασμάτων μοιάζει όπως την παρακάτω εικόνα. Στις κατασκευές στις οποίες το κύριο σύστημα ενίσχυσης του καταστρώματος είναι το διάμηκες, τα ενισχυτικά θα μπορούσαν να είναι τα διαμήκη (πιο μικρά) και τα πιο μεγάλα (κύρια) δοκάρια να είναι τα εγκάρσια. Στις κατασκευές στις οποίες το κύριο σύστημα ενίσχυσης του καταστρώματος είναι το εγκάρσιο, τα βαριά ενισχυτικά είναι τα διαμήκη.

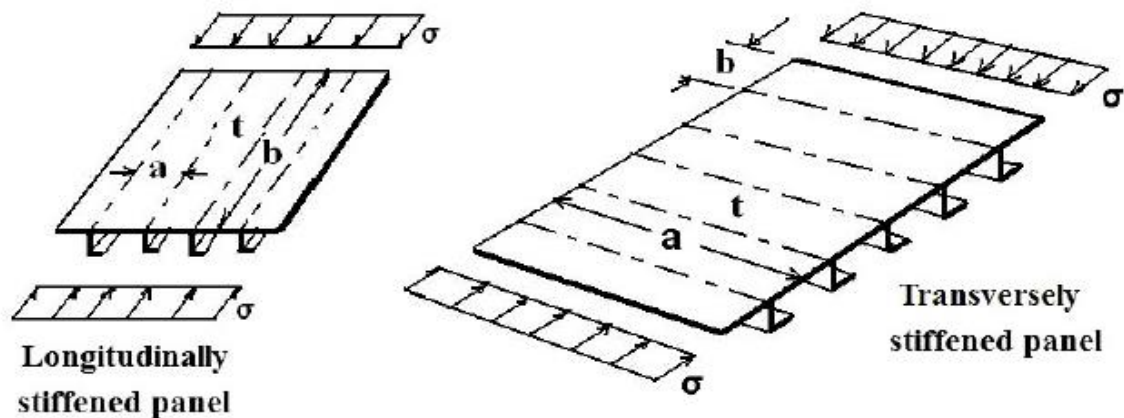


Εικόνα 24 Διάμηκες και εγκάρσιο σύστημα ενίσχυσης με το συνεργαζόμενο έλασμα

Οι πιο κοινές συνθήκες αξονικής φόρτισης στα ενισχυμένα ελάσματα είναι οι εξής , όπως και φαίνονται και παρακάτω:

- Να φορτίζονται κάθετα με την κατεύθυνση των ενισχυτικών

Να φορτίζονται στην ίδια κατεύθυνση των ενισχυτικών

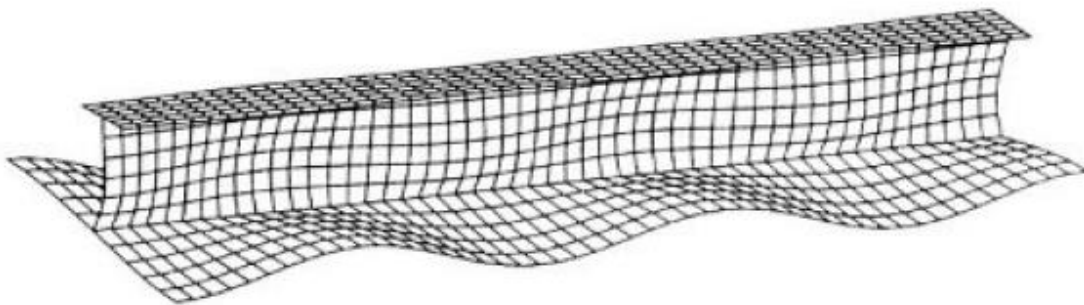


Εικόνα 25 Συνθήκες αξονικής φόρτισης σε ενισχυμένα ελάσματα

Οι διάφορες μορφές λυγισμού των ενισχυτικών που υπόκεινται σε αξονική φόρτιση με την ίδια κατεύθυνση των ενισχυτικών συνοπτικά είναι :

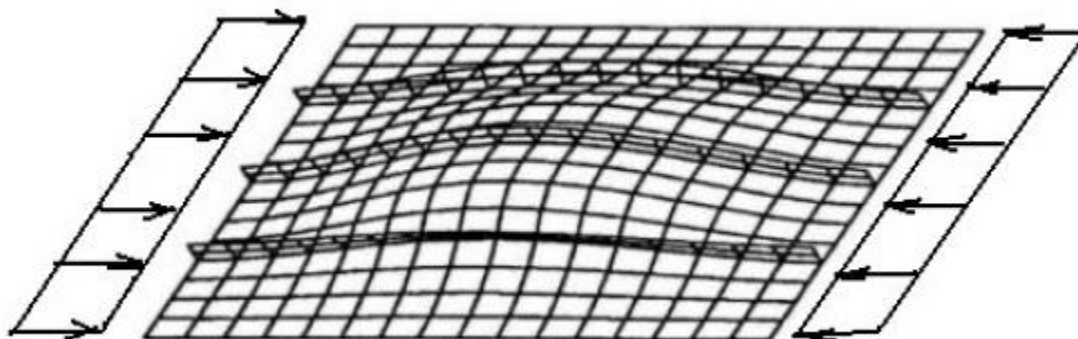
- Καμπτικός λυγισμός (*flexural buckling*)
- Στρεπτικός λυγισμός (*torsional buckling*)
- Κάθετος λυγισμός (*lateral bucklin*)
- Ολικός λυγισμός του ενισχυτικού με συνεργαζόμενο έλασμα (*Global buckling*)
- Τοπικός λυγισμός του κορμού του ενισχυτικού (*local buckling of web plate of the stiffener*)
- Τοπικός λυγισμός

Στην περίπτωση του καμπτικού λυγισμού τα ενισχυμένα ελάσματα συμπεριφέρονται όπως μια δοκός κολόνα. Όταν η καμπτική και η στρεπτική δυσκαμψία των ενισχυτικών είναι της ίδιας τάξης μεγέθους, η παραμορφωμένη μορφή του συνεργαζόμενου ελάσματος μαζί με το ενισχυτικό φαίνεται όπως παρακάτω

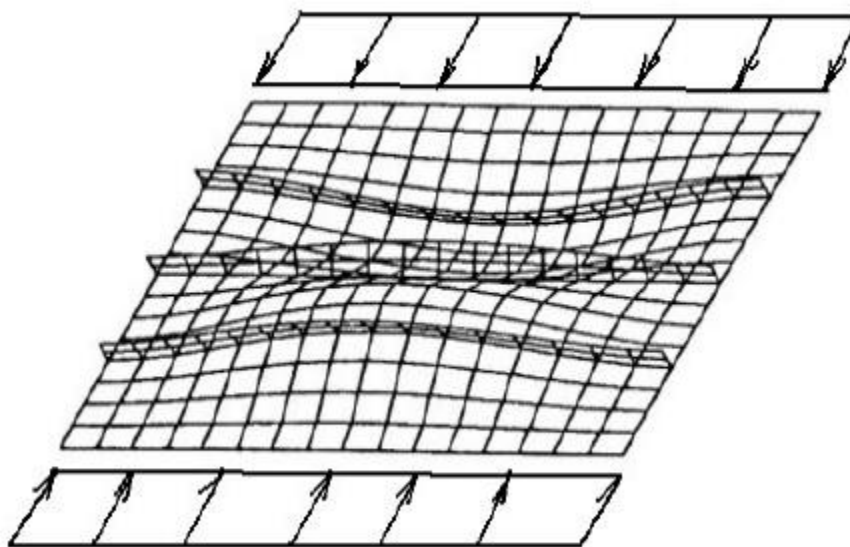


Εικόνα 26 Μορφή λυγισμού (παραμόρφωση) ενός απομονωμένου ενισχυτικού με το έλασμα σε αξονική θλιπτική φόρτιση. Φαίνεται η διαμέριση του πλέγματος σε τετραγωνικά πεπερασμένα στοιχεία από το πρόγραμμα.

Γενικά, η μορφή λυγισμού ενός ενισχυμένου ελάσματος εξαρτάται από την κατεύθυνση της αξονικής φόρτισης σε σχέση με την κατεύθυνση των ενισχυτικών.



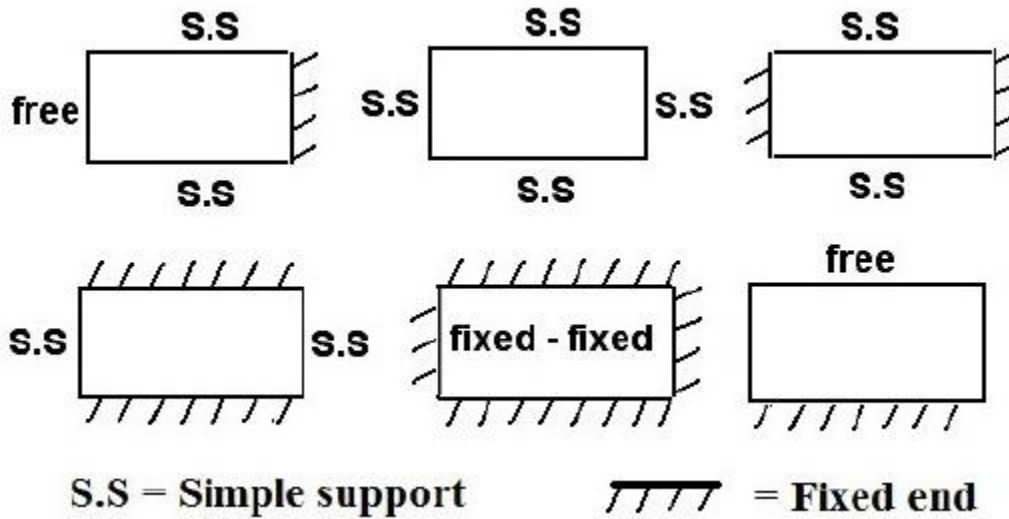
Εικόνα 27 Μορφή λυγισμού υπό αξονική θλιπτική φόρτιση με κατεύθυνση παράλληλη με τα ενισχυτικά



Εικόνα 28 Μορφή λυγισμού υπό αξονική λυγισμού ενισχυμένου ελάσματος υπό θλιπτική φόρτιση κάθετα στην κατεύθυνση ενισχυτικών

5.1 Συνθήκες στήριξης περιμετρικά του ελάσματος

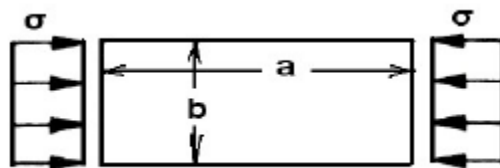
Οι συνθήκες στήριξης στα σύνορα του ελάσματος που κοινώς χρησιμοποιούνται για την ανάλυση σε ελαστικό λυγισμό των ελασμάτων έρχονται, είναι συνήθως ένας συνδυασμός των ακόλουθων τυποποιημένων ιδανικών υποστηρικτικών συνθηκών



Εικόνα 29 Συνθήκες συνδυασμοί στήριξης ενισχυμένων ελασμάτων

Στη γενική περίπτωση η εξίσωση Euler για το φορτίο λυγισμού για έλασμα παίρνει τη μορφή

$$\sigma_E = \frac{k \cdot \pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2$$



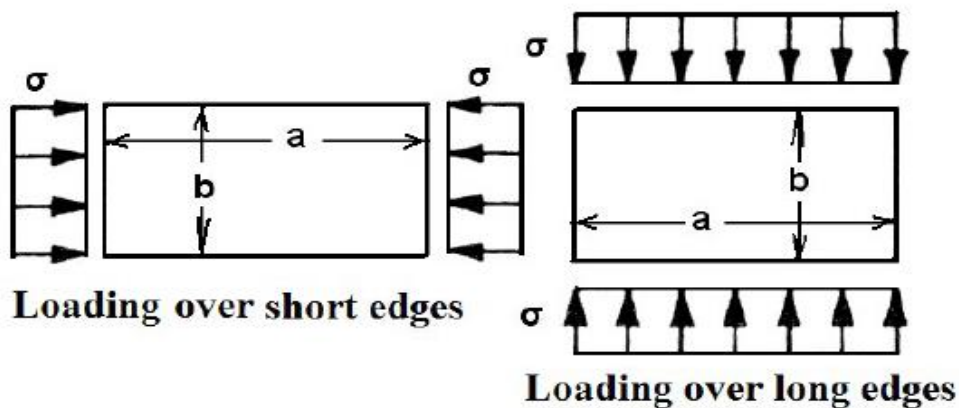
Εικόνα 30 Έλασμα υπό αξονικό θλιπτικό φορτίο στις μικρές άκρες του

για το οποίο

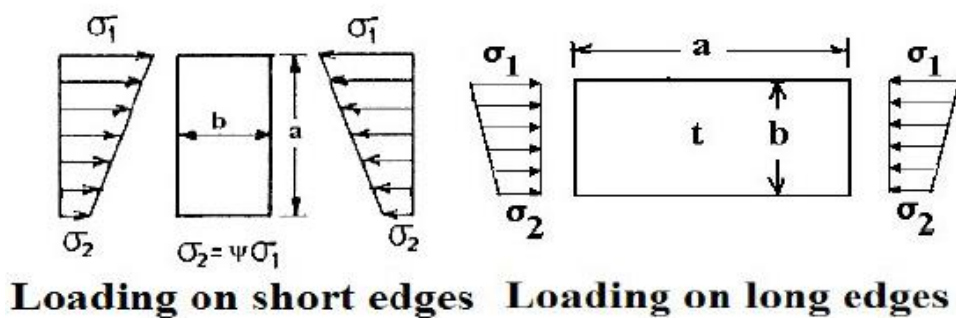
- σ_E = η τάση λυγισμού Euler
- b = το μήκος της κοντής μεριάς του ελάσματος
- a = το μήκος της μακριάς μεριάς του ελάσματος
- t = το πάχος του ελάσματος
- ν = λόγος του Poisson
- k = ένας παράγων που εξαρτάται από το λόγο a/b , τη στήριξη του ελάσματος και τον τρόπο που κατανέμεται το φορτίο

Για μονοαξονική φόρτιση ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις :

- ομοιόμορφες θλιπτικές τάσεις είτε στην κοντή είτε στη μακριά πλευρά του ελάσματος
- Μη – ομοιόμορφες θλιπτικές τάσεις είτε στην κοντή είτε στη μακριά πλευρά του ελάσματος
- Καθαρά μόνο καμπτικές τάσεις
- Καθαρά μόνο διατμητικές τάσεις



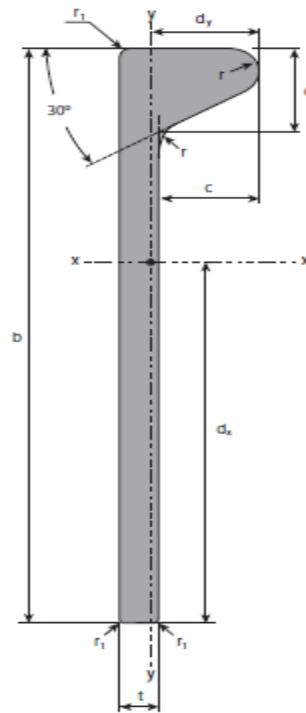
Εικόνα 31 Ομοαξονική ομοιόμορφη θλιπτική φόρτιση σε κάθε μια από τις διαστάσεις



Εικόνα 32 Ομοαξονική μη-ομοιόμορφη θλιπτική φόρτιση σε κάθε μια από τις διαστάσεις/άκρα του ελάσματος

5.2 Περιγραφή μοντέλων

Στα πλαίσια μελέτης της εργασίας μοντελοποιήθηκαν και μελετήθηκαν σε λυγισμό τριών ειδών ενισχυτικά μαζί με το συνεργαζόμενο έλασμα. Η μελέτη ξεκίνησε με γνώμονα τη μελέτη των ιδιοτήτων και διαστάσεων της βολβολάμας από τον κατάλογο ενισχυτικών της TATA STEEL Bulb Flats με την 340x15 (πλάτος x πάχος) και εμβαδού $A = 68.94 \text{ cm}^2$ ή $A = 6894 \text{ mm}^2$. Η μελέτη βασίστηκε στην εξίσωση του εμβαδού και των τριών ενισχυτικών, ήτοι για τα ενισχυτικά γωνιά - L (angle stiffener) και ταυ - T (tee stiffener).



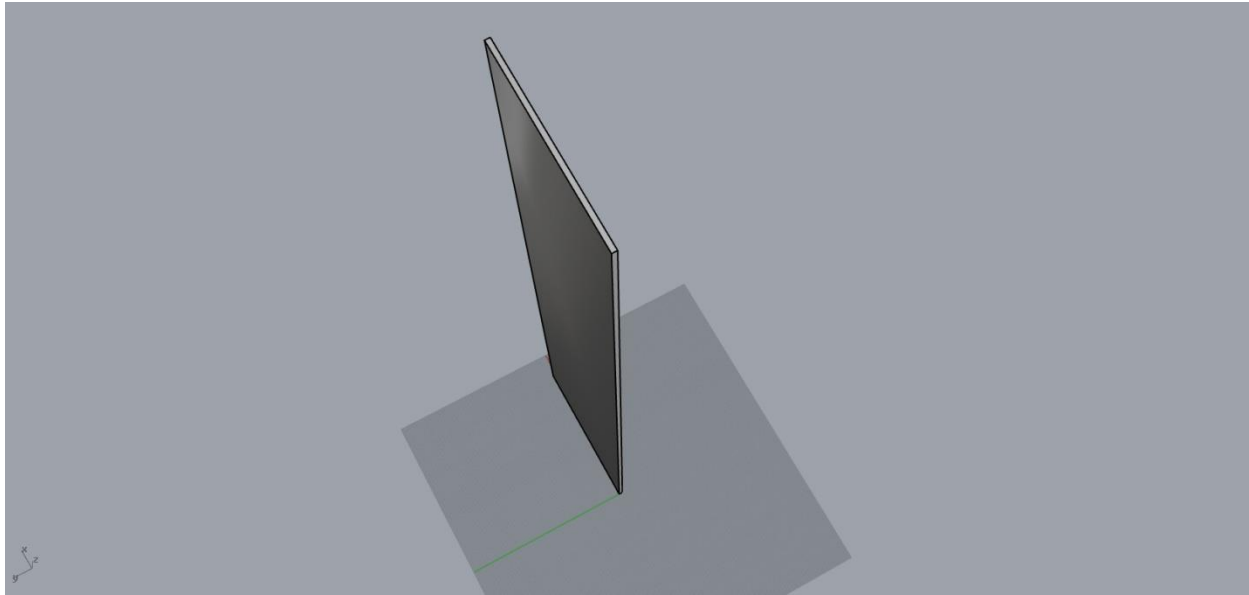
Εικόνα 33 Ενισχυτικό τύπου βολβολάμας και οι αναγραφόμενες διαστάσεις από τον κατασκευαστή.

Dimensions and Properties

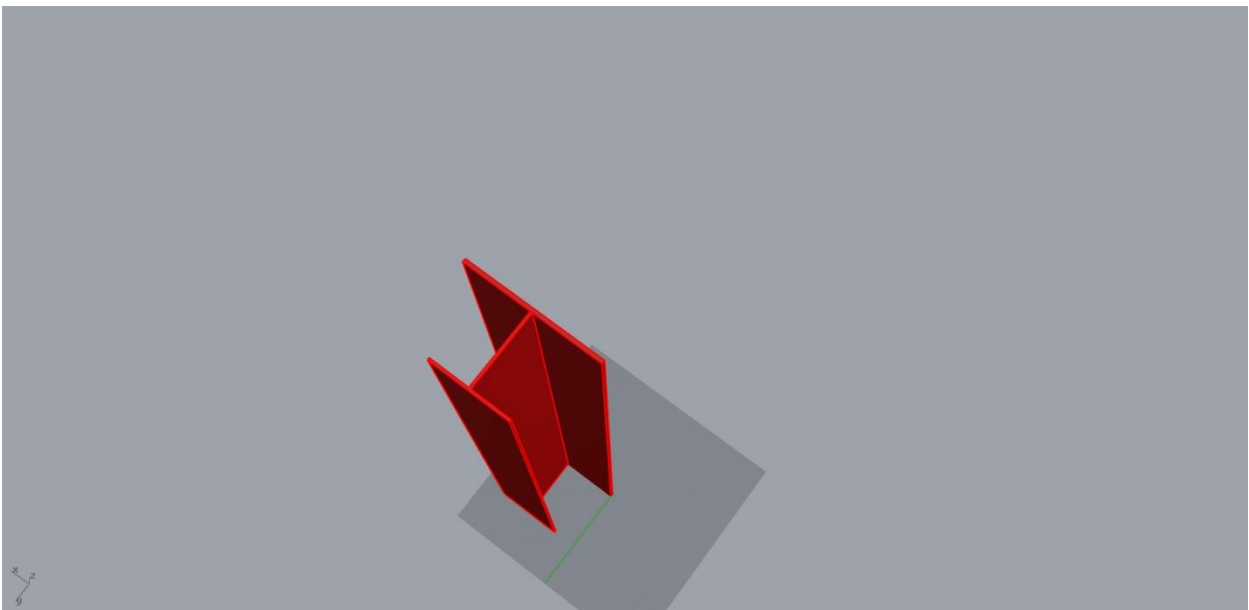
| Section Description | Section Description | | | | | Mass per metre G kg/m | Area of section F cm ² | Surface area per metre U m ² /m | Distance to Centre of Gravity | | Second Moment of Area | |
|---------------------|---------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----------------------------|---|--|-------------------------------|-------------|-----------------------|-----------------------|
| | b mm | t mm | c mm | d mm | r mm | | | | dx mm | dy mm | Ix cm ⁴ | Iy cm ⁴ |
| 160x7 | 160 | 7.0 | 22.0 | 22.2 | 6.0 | 11.44 | 14.58 | 0.365 | 96.7 | 6.5 | 371.10 | 5.85 |
| 160x8 | 160 | 8.0 | 22.0 | 22.2 | 6.0 | 12.70 | 16.18 | 0.367 | 95.1 | 6.8 | 409.27 | 6.54 |
| 160x9 | 160 | 9.0 | 22.0 | 22.2 | 6.0 | 13.95 | 17.78 | 0.370 | 93.7 | 7.1 | 446.70 | 7.31 |
| 160x10 | 160 | 10.0 | 22.0 | 22.2 | 6.0 | 15.19 | 19.34 | 0.371 | 92.6 | 7.5 | 481.31 | 8.15 |
| 160x11 | 160 | 11.0 | 22.0 | 22.2 | 6.0 | 16.44 | 20.94 | 0.373 | 91.7 | 7.9 | 517.81 | 9.09 |
| 160x11.5 | 160 | 11.5 | 22.0 | 22.2 | 6.0 | 17.07 | 21.74 | 0.374 | 91.3 | 8.1 | 535.93 | 9.60 |
| 180x8 | 180 | 8.0 | 25.0 | 25.5 | 7.0 | 14.78 | 18.83 | 0.412 | 109.0 | 7.4 | 606.55 | 9.89 |
| 180x9 | 180 | 9.0 | 25.0 | 25.5 | 7.0 | 16.20 | 20.63 | 0.414 | 107.4 | 7.7 | 661.09 | 10.92 |
| 180x10 | 180 | 10.0 | 25.0 | 25.5 | 7.0 | 17.59 | 22.40 | 0.416 | 106.0 | 8.1 | 711.72 | 12.03 |
| 180x11 | 180 | 11.0 | 25.0 | 25.5 | 7.0 | 19.00 | 24.20 | 0.418 | 104.8 | 8.4 | 764.60 | 13.25 |
| 180x11.5 | 180 | 11.5 | 25.0 | 25.5 | 7.0 | 19.70 | 25.10 | 0.419 | 104.3 | 8.6 | 790.81 | 13.90 |
| 200x8.5 | 200 | 8.5 | 28.0 | 28.8 | 8.0 | 17.77 | 22.63 | 0.458 | 122.2 | 8.2 | 901.07 | 15.06 |
| 200x9 | 200 | 9.0 | 28.0 | 28.8 | 8.0 | 18.55 | 23.63 | 0.459 | 121.3 | 8.4 | 939.14 | 15.75 |
| 200x10 | 200 | 10.0 | 28.0 | 28.8 | 8.0 | 20.10 | 25.60 | 0.460 | 119.7 | 8.7 | 1010.47 | 17.18 |
| 200x11 | 200 | 11.0 | 28.0 | 28.8 | 8.0 | 21.67 | 27.60 | 0.463 | 118.3 | 9.0 | 1084.33 | 18.75 |
| 200x11.5 | 200 | 11.5 | 28.0 | 28.8 | 8.0 | 22.45 | 28.60 | 0.464 | 117.6 | 9.2 | 1120.89 | 19.57 |
| 200x12 | 200 | 12.0 | 28.0 | 28.8 | 8.0 | 23.24 | 29.60 | 0.465 | 117.0 | 9.4 | 1157.23 | 20.43 |
| 220x9 | 220 | 9.0 | 31.0 | 32.1 | 9.0 | 21.02 | 26.78 | 0.504 | 135.5 | 9.1 | 1290.48 | 22.01 |
| 220x10 | 220 | 10.0 | 31.0 | 32.1 | 9.0 | 22.72 | 28.94 | 0.505 | 133.7 | 9.3 | 1387.89 | 23.86 |
| 220x11 | 220 | 11.0 | 31.0 | 32.1 | 9.0 | 24.45 | 31.14 | 0.507 | 132.0 | 9.7 | 1488.07 | 25.83 |
| 220x11.5 | 220 | 11.5 | 31.0 | 32.1 | 9.0 | 25.31 | 32.24 | 0.509 | 131.2 | 9.8 | 1537.57 | 26.87 |
| 220x12 | 220 | 12.0 | 31.0 | 32.1 | 9.0 | 26.17 | 33.34 | 0.510 | 130.5 | 10.0 | 1586.73 | 27.94 |
| 230x11 | 230 | 11.0 | 32.5 | 33.75 | 9.5 | 25.88 | 32.97 | 0.530 | 138.9 | 10.0 | 1724.98 | 30.05 |
| 240x9.5 | 240 | 9.5 | 34.0 | 35.4 | 10.0 | 24.51 | 31.23 | 0.549 | 148.9 | 9.9 | 1787.40 | 31.12 |
| 240x10 | 240 | 10.0 | 34.0 | 35.4 | 10.0 | 25.46 | 32.43 | 0.550 | 147.9 | 10.0 | 1854.67 | 32.30 |
| 240x10.5 | 240 | 10.5 | 34.0 | 35.4 | 10.0 | 26.40 | 33.63 | 0.551 | 146.9 | 10.2 | 1921.25 | 33.52 |
| 240x11 | 240 | 11.0 | 34.0 | 35.4 | 10.0 | 27.34 | 34.83 | 0.552 | 145.9 | 10.3 | 1987.20 | 34.78 |
| 240x11.5 | 240 | 11.5 | 34.0 | 35.4 | 10.0 | 28.28 | 36.03 | 0.554 | 145.1 | 10.5 | 2052.60 | 36.06 |
| 240x12 | 240 | 12.0 | 34.0 | 35.4 | 10.0 | 29.22 | 37.23 | 0.555 | 144.3 | 10.6 | 2117.50 | 37.39 |
| 260x10 | 260 | 10.0 | 37.0 | 38.7 | 11.0 | 28.30 | 36.05 | 0.595 | 162.3 | 10.7 | 2421.72 | 42.80 |
| 260x11 | 260 | 11.0 | 37.0 | 38.7 | 11.0 | 30.34 | 38.65 | 0.597 | 160.1 | 11.0 | 2593.45 | 45.86 |
| 260x12 | 260 | 12.0 | 37.0 | 38.7 | 11.0 | 32.38 | 41.25 | 0.600 | 158.2 | 11.3 | 2762.00 | 49.07 |
| 260x13 | 260 | 13.0 | 37.0 | 38.7 | 11.0 | 34.43 | 43.85 | 0.602 | 156.5 | 11.6 | 2927.94 | 52.45 |
| 280x10.5 | 280 | 10.5 | 40.0 | 42.0 | 12.0 | 32.36 | 41.22 | 0.641 | 175.7 | 11.6 | 3210.10 | 57.50 |
| 280x11 | 280 | 11.0 | 40.0 | 42.0 | 12.0 | 33.46 | 42.62 | 0.642 | 174.5 | 11.7 | 3318.79 | 59.39 |
| 280x12 | 280 | 12.0 | 40.0 | 42.0 | 12.0 | 35.66 | 45.42 | 0.645 | 172.4 | 11.9 | 3532.99 | 63.29 |
| 280x13 | 280 | 13.0 | 40.0 | 42.0 | 12.0 | 37.86 | 48.22 | 0.647 | 170.5 | 12.2 | 3743.56 | 67.37 |
| 300x11 | 300 | 11.0 | 43.0 | 45.3 | 13.0 | 36.69 | 46.73 | 0.687 | 189.1 | 12.4 | 4175.43 | 75.68 |
| 300x12 | 300 | 12.0 | 43.0 | 45.3 | 13.0 | 39.04 | 49.73 | 0.690 | 186.7 | 12.7 | 4443.49 | 80.39 |
| 300x13 | 300 | 13.0 | 43.0 | 45.3 | 13.0 | 41.40 | 52.73 | 0.692 | 184.6 | 12.9 | 4706.64 | 85.27 |
| 320x11.5 | 320 | 11.5 | 46.0 | 48.6 | 14.0 | 41.28 | 52.59 | 0.733 | 202.5 | 13.3 | 5342.16 | 97.86 |
| 320x12 | 320 | 12.0 | 46.0 | 48.6 | 14.0 | 42.54 | 54.19 | 0.735 | 201.3 | 13.4 | 5506.76 | 100.69 |
| 320x12.5 | 320 | 12.5 | 46.0 | 48.6 | 14.0 | 43.79 | 55.79 | 0.736 | 200.1 | 13.5 | 5669.75 | 103.58 |
| 320x13 | 320 | 13.0 | 46.0 | 48.6 | 14.0 | 45.05 | 57.39 | 0.737 | 199.0 | 13.6 | 5831.26 | 106.51 |
| 320x13.5 | 320 | 13.5 | 46.0 | 48.6 | 14.0 | 46.27 | 58.94 | 0.737 | 198.0 | 13.7 | 5977.59 | 109.44 |
| 320x14 | 320 | 14.0 | 46.0 | 48.6 | 14.0 | 47.53 | 60.54 | 0.738 | 197.0 | 13.9 | 6136.58 | 112.48 |
| 340x12 | 340 | 12.0 | 49.0 | 52.0 | 15.0 | 46.15 | 58.78 | 0.780 | 216.0 | 14.1 | 6736.30 | 124.57 |
| 340x12.5 | 340 | 12.5 | 49.0 | 52.0 | 15.0 | 47.48 | 60.48 | 0.781 | 214.7 | 14.2 | 6934.97 | 127.98 |
| 340x13 | 340 | 13.0 | 49.0 | 52.0 | 15.0 | 48.81 | 62.18 | 0.782 | 213.5 | 14.3 | 7131.73 | 131.44 |
| 340x14 | 340 | 14.0 | 49.0 | 52.0 | 15.0 | 51.45 | 65.54 | 0.784 | 211.3 | 14.6 | 7504.42 | 138.47 |
| 340x15 | 340 | 15.0 | 49.0 | 52.0 | 15.0 | 54.12 | 68.94 | 0.786 | 209.2 | 14.8 | 7886.99 | 145.80 |
| 370x12.5 | 370 | 12.5 | 53.5 | 56.9 | 16.5 | 53.22 | 67.79 | 0.848 | 236.9 | 15.4 | 9184.55 | 172.23 |
| 370x13 | 370 | 13.0 | 53.5 | 56.9 | 16.5 | 54.67 | 69.64 | 0.850 | 235.5 | 15.5 | 9444.05 | 176.62 |
| 370x14 | 370 | 14.0 | 53.5 | 56.9 | 16.5 | 57.54 | 73.30 | 0.851 | 233.0 | 15.7 | 9936.79 | 185.49 |
| 370x15 | 370 | 15.0 | 53.5 | 56.9 | 16.5 | 60.44 | 77.00 | 0.854 | 230.7 | 15.9 | 10440.07 | 194.68 |
| 370x16 | 370 | 16.0 | 53.5 | 56.9 | 16.5 | 63.35 | 80.70 | 0.857 | 228.6 | 16.1 | 10935.90 | 204.14 |
| 400x13 | 400 | 13.0 | 58.0 | 61.9 | 18.0 | 60.78 | 77.43 | 0.918 | 257.9 | 16.6 | 12234.74 | 232.34 |

Εικόνα 34 Κατάλογος βολβολιών με τις ιδιότητές τους. Ξεχωρίζει η 340x15 που χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη.

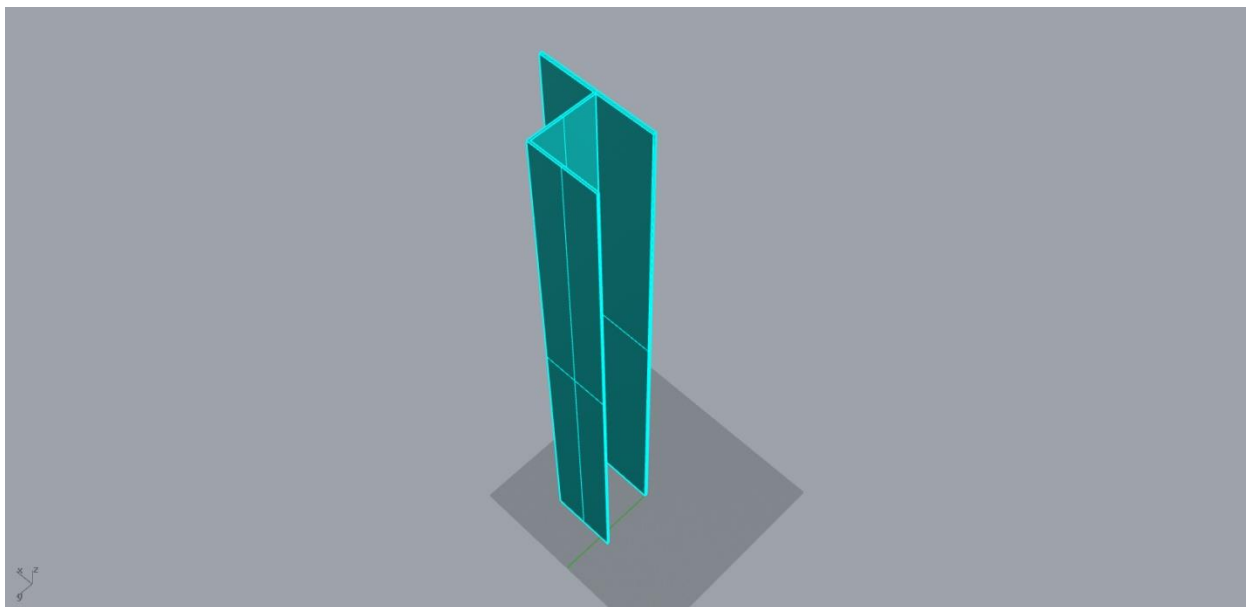
Τα τρία ενισχυτικά με το συνεργαζόμενο έλασμα μοντελοποιήθηκαν στο πρόγραμμα 3D σχεδίασης *Rhinoceros 5.0 3D* και ξέχωρο το έλασμα. Τα σχέδια φαίνονται όπως παρακάτω:



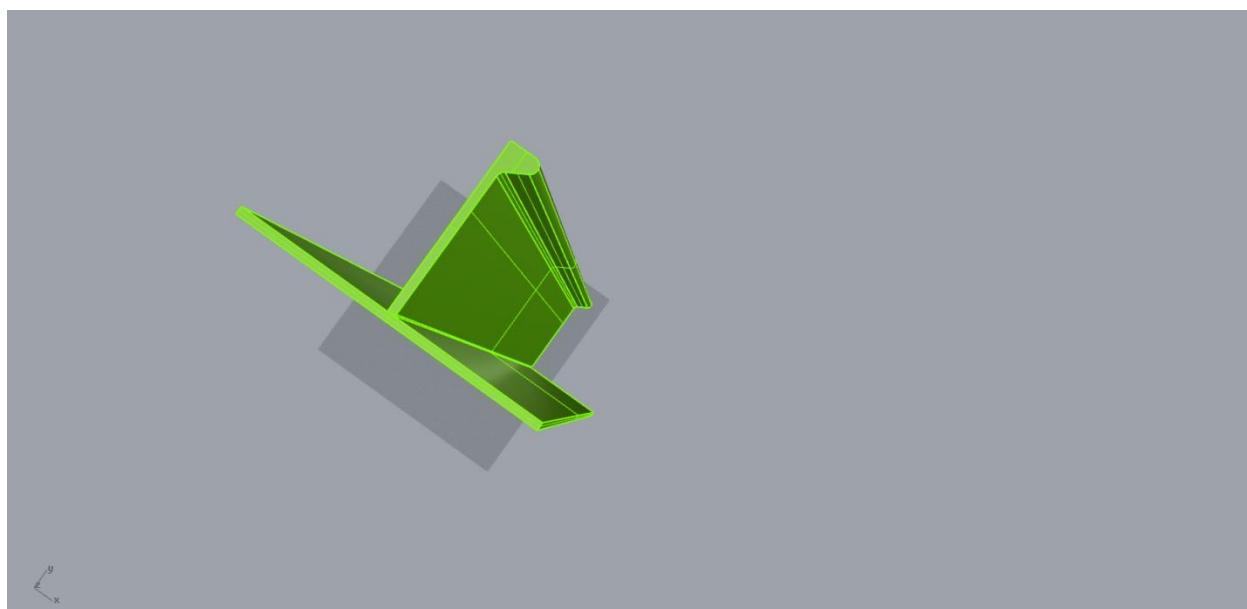
Εικόνα 35 Έλασμα μοντελοποιημένο στο *Rhino 5 3-D*



Εικόνα 36 Ενισχυτικό Ταυ (T) μαζί με το συνεργαζόμενο έλασμα στο *Rhino 5 3D*

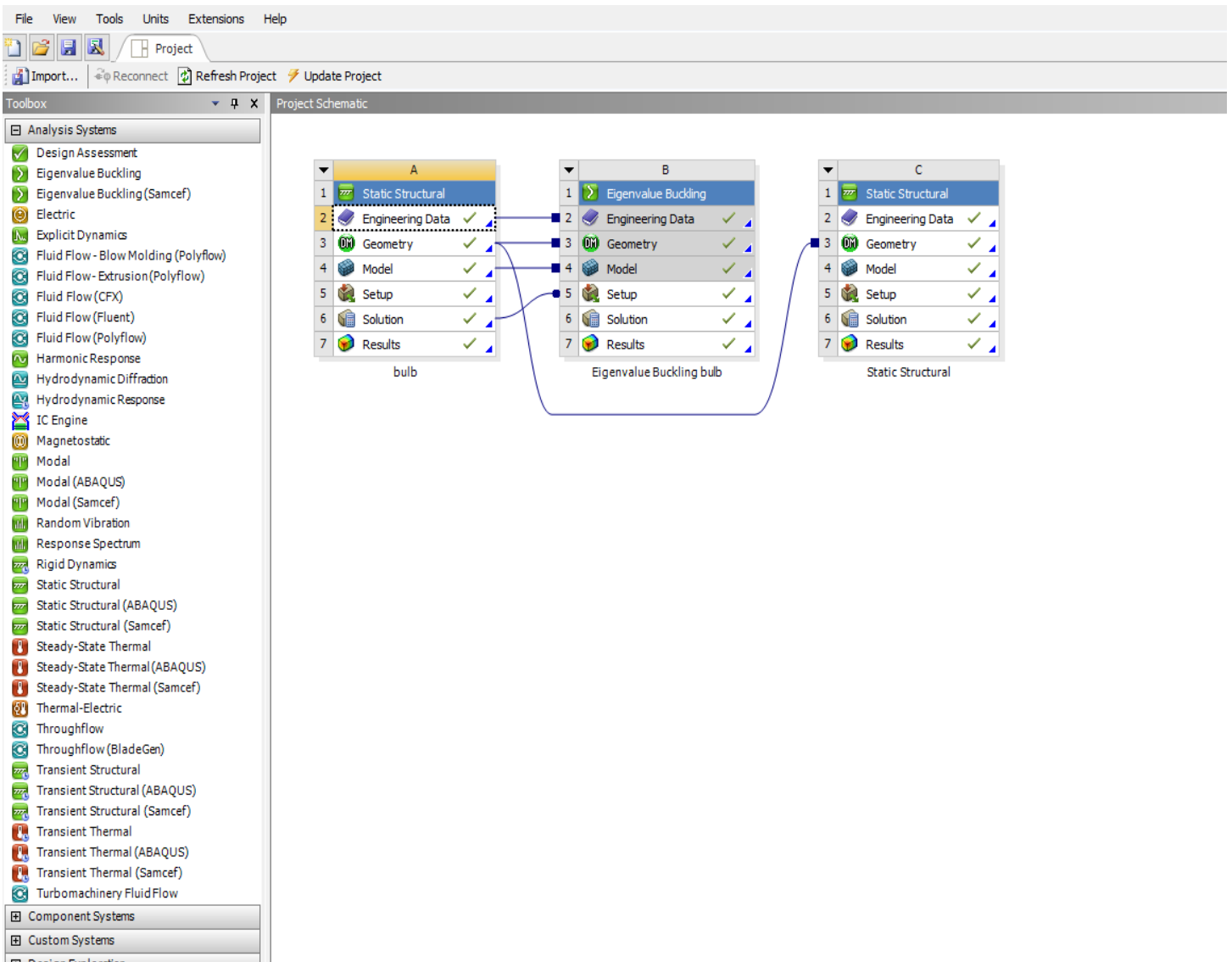


Εικόνα 37 Ενισχυτικό L (γωνιά) μαζί με το συνεργαζόμενο έλασμα στο Rhino 5 3D



Εικόνα 38 Ενισχυτικό βολβολάμας μαζί με το συνεργαζόμενο έλασμα στο Rhino 5 3D

Τα τρία μοντέλα περάστηκαν στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων *ANSYS Workbench* όπου και έγινε η περαιτέρω μελέτη του γραμμικού και του μη-γραμμικού λυγισμού. Μπαίνοντας στο interface του προγράμματος έχουμε στη διάθεσή μας ένα πλήθος λογισμικών για κάθε φυσικό πρόβλημα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση επιλέγουμε την ανάλυση στατικών κατασκευών (*static structural*) σε συνδυασμό με την ανάλυση Ιδιοτιμές λυγισμού (*Eigenvalue buckling*), όπως φαίνεται παρακάτω:



Εικόνα 39 Παράδειγμα λύσης του στατικού προβλήματος και του προβλήματος λυγισμού. Παρατηρούμε ότι τα δεδομένα από τα τρία πρώτα slots συνδέονται με την ανάλυση λυγισμού, αφού το υλικό, η γεωμετρία και η διαρρύθμιση των οριακών συνθηκών και τα φορτία είναι ίδια.

Έπειτα στο κάθε ένα από τα slots της κάθε ανάλυσης εισάγουμε τα δεδομένα για το υλικό (engineering data), τη γεωμετρία (geometry), το πλέγμα και τις συνοριακές συνθήκες του μοντέλου (model) και στο τέλος τη λύση και τα αποτελέσματα (solution and results).

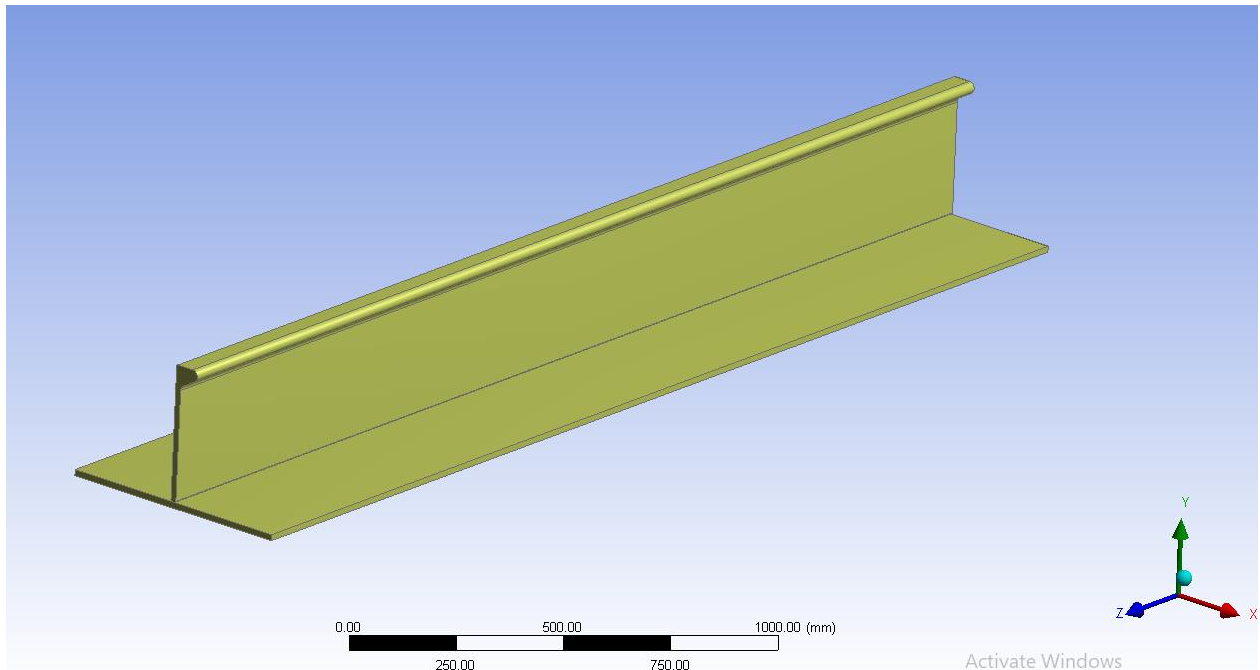
The screenshot displays the ANSYS Workbench interface with the following components:

- Toolbox:** Lists various material models such as Linear Elastic, Hyperelastic, Plasticity, and Creep.
- Outline of Schematic:** Shows a hierarchy of engineering data sources, including 'Contents of Engineering Data', 'Material', and 'Structural Steel NL'.
- Table of Properties Row 5: Isotropic Elasticity:**

| A | B |
|---|---------------------------------------|
| 1 | Temperature (C) Young's Modulus (MPa) |
| 2 | ZE+05 |
- Properties of Outline Row 3: Structural Steel NL:**

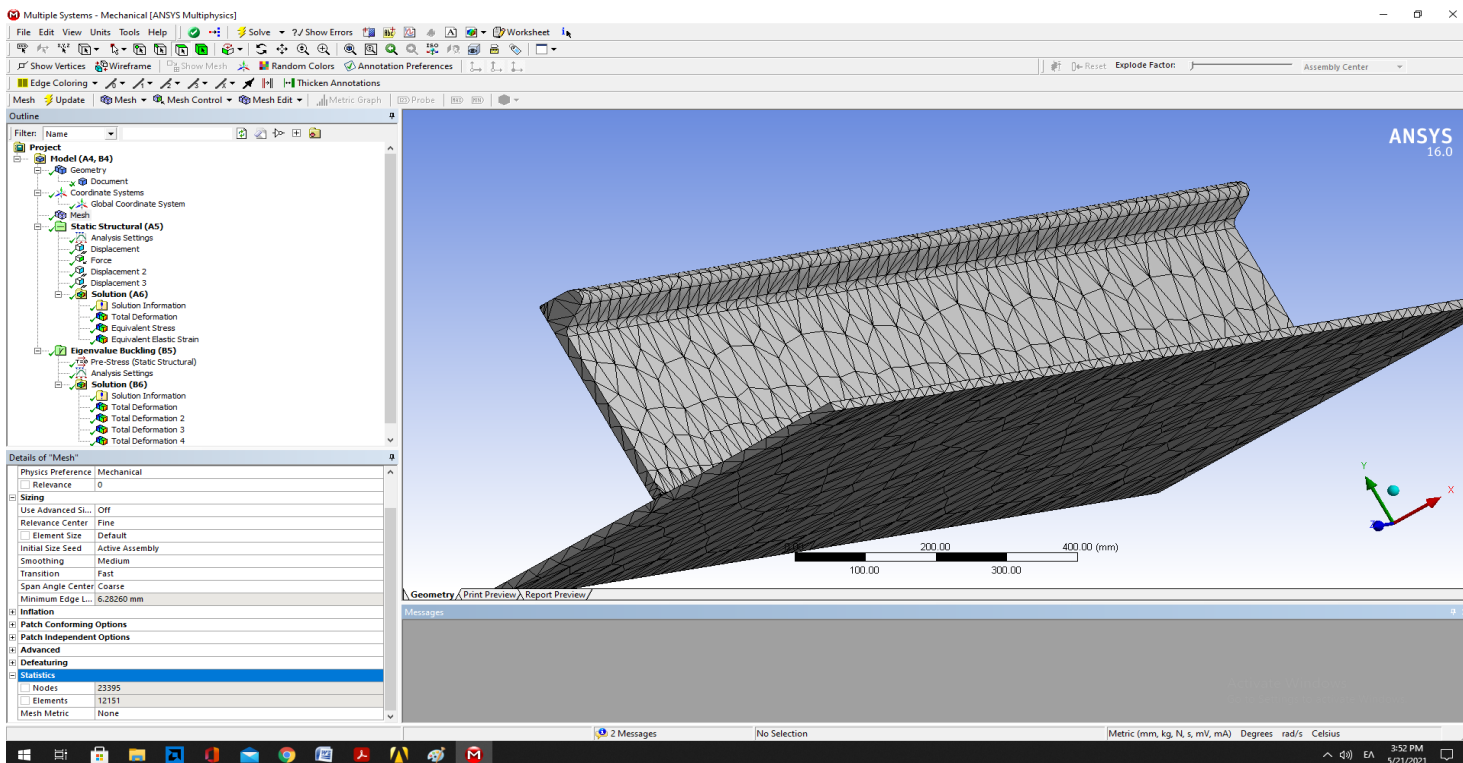
| A | B | C | D | E |
|----------|------------------------------|------------------------|---------|---|
| Property | Value | Unit | | |
| 1 | | | | |
| 2 | Density | 7850 | kg m^-3 | |
| 3 | Isotropic Elasticity | | | |
| 4 | Derive from | Young's Modulus and... | | |
| 5 | Young's Modulus | 20300 | MPa | |
| 6 | Poisson's Ratio | 0.3 | | |
| 7 | Bulk Modulus | 1.6667E+11 | Pa | |
| 8 | Shear Modulus | 7.6923E+10 | Pa | |
| 9 | Field Variables | | | |
| 10 | Temperature | Yes | | |
| 11 | Shear Angle | No | | |
| 12 | Degradation Factor | No | | |
| 13 | Bilinear Isotropic Hardening | | | |
- Chart of Properties Row 5: Isotropic Elasticity:** A graph showing Young's Modulus (MPa) on the y-axis (ranging from 1 to 3) versus Temperature (C) on the x-axis (ranging from -1 to 1). A horizontal dashed line is drawn at approximately 20,300 MPa, with a red dot at the intersection (0, 20300).

Εικόνα 40 Εισαγωγή των στοιχείων του υλικού με το οποίο κατασκευάστηκε/μοντελοποιήθηκε το μοντέλο σχεδίασης. Εδώ βρίσκονται συγκεντρωτικά όλες οι πληροφορίες για τις ιδιότητες και συμπεριφορά του υλικού.

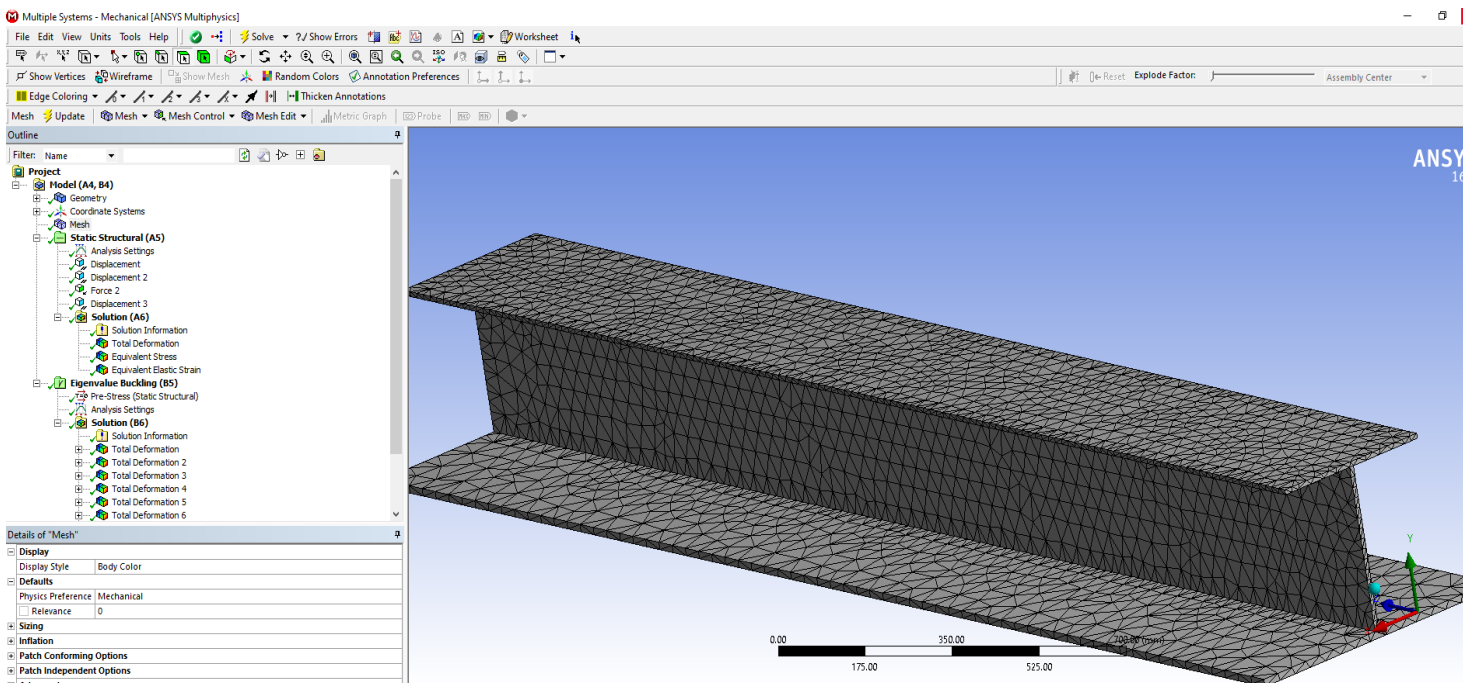


Εικόνα 41 Μοντέλο γεωμετρίας όπως εισήχθηκε από το Rhino 5 3D -εδώ η βολβολάμα

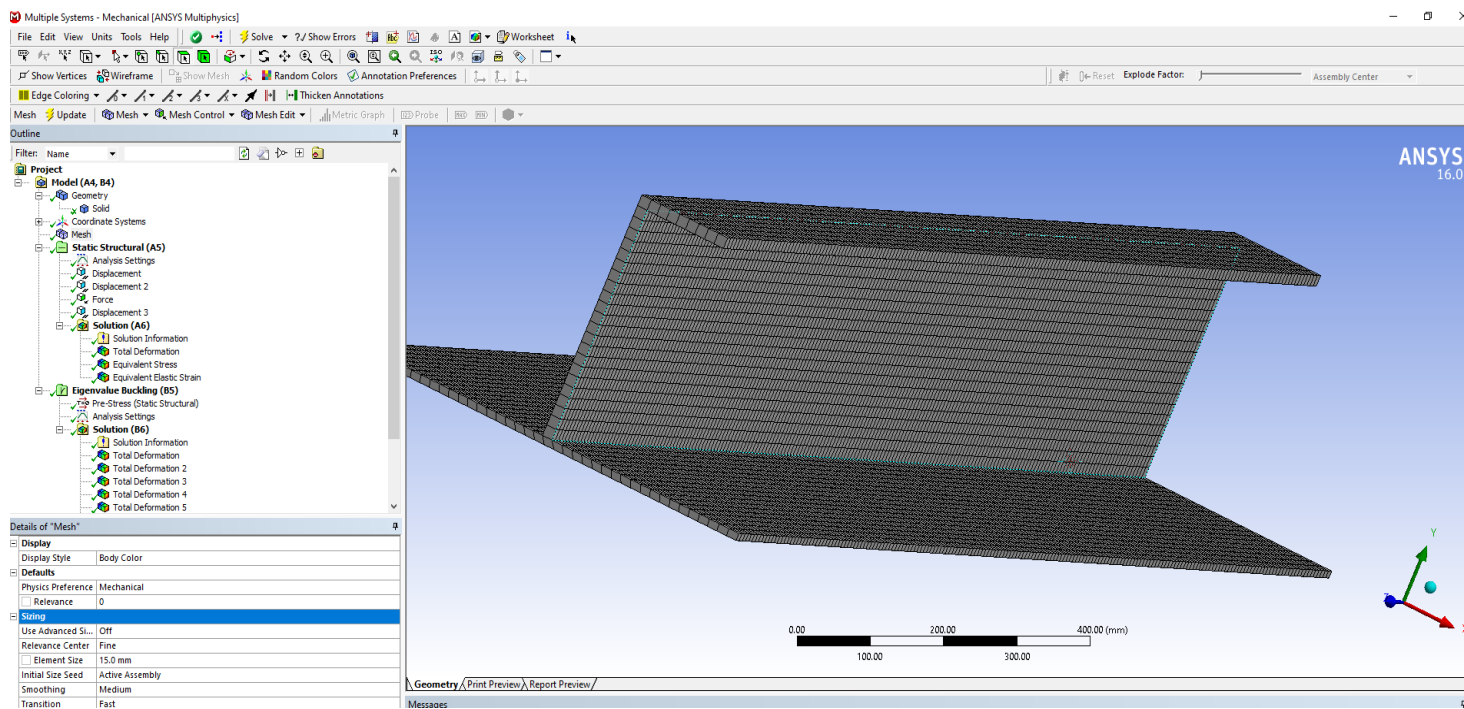
Στη συνέχεια προκειμένου το πρόγραμμα να λύσει το φυσικό πρόβλημα, το μοντέλο υποδιαιρέθηκε σε μικρότερα στοιχεία (elements) ώστε να εφαρμοστεί η θεωρία των μετατοπίσεων και της ελαστικής ενέργειας σε κάθε κόμβο (node) και στοιχείο, αλληλεπιδρώντας το ένα με το γειτονικό του άλλου. Λόγω της μικρής υπολογιστικής δύναμης του υπολογιστή που διεξήχθησαν οι αναλύσεις έλειπε η πολυτέλεια μιας πιο ακριβής λύσης και πλέγματος, αφού όσο πιο πυκνά διαμερισμένο είναι ένα πλέγμα τόσο πιο πολλά στοιχεία θα έχουμε και άρα περισσότερο χρόνο για επίλυση. Ωστόσο το κάτωθεν πλέγμα έφερε εις πέρας τη δυσκολία αυτή.



Εικόνα 42 Μοντέλο πλέγματος της βολβολάμας μαζί με το συνεργαζόμενο έλασμα. Αριθμός στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν 12151 ενώ οι κόμβοι 23395 για μήκος 2800mm.



Εισαγωγή 43 Μοντέλο πλέγματος ενισχυτικού Ταν με το συνεργαζόμενο έλασμα. Αριθμός στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν 12716 ενώ οι κόμβοι 26256 για μήκος 2800mm.



Εικόνα 44 Μοντέλο πλέγματος ενισχυτικού L (γωνιάς) με το συνεργαζόμενο έλασμα. Αριθμός στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν 4690 ενώ οι κόμβοι 30067 για μήκος 2800mm.

6. Θεωρητικός υπολογισμός του κρίσιμου φορτίου λυγισμού για τύπο κολόνας (Column beam buckling calculation)

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματοποιείται ο θεωρητικός υπολογισμός λυγισμού κατά Euler για μακρές κολόνες ή με τον τύπο Johnson για κοντές κολόνες. Στόχος του κεφαλαίου είναι να μπορέσουμε να αποφανθούμε αν ο θεωρητικός υπολογισμός αντιστοιχεί με την ανάλυση του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων ANSYS και άρα αν είναι υπαρκτό το φαινόμενο του λυγισμού τύπου κολόνα (*Euler column buckling*). Υπολογίζουμε σαν ενιαίο σώμα το συνεργαζόμενο έλασμα και το ενισχυτικό μαζί τις ροπές αδράνειας και το λόγο λυγηρότητας, σύμφωνα με τη θεωρία λυγισμού κολόνας.

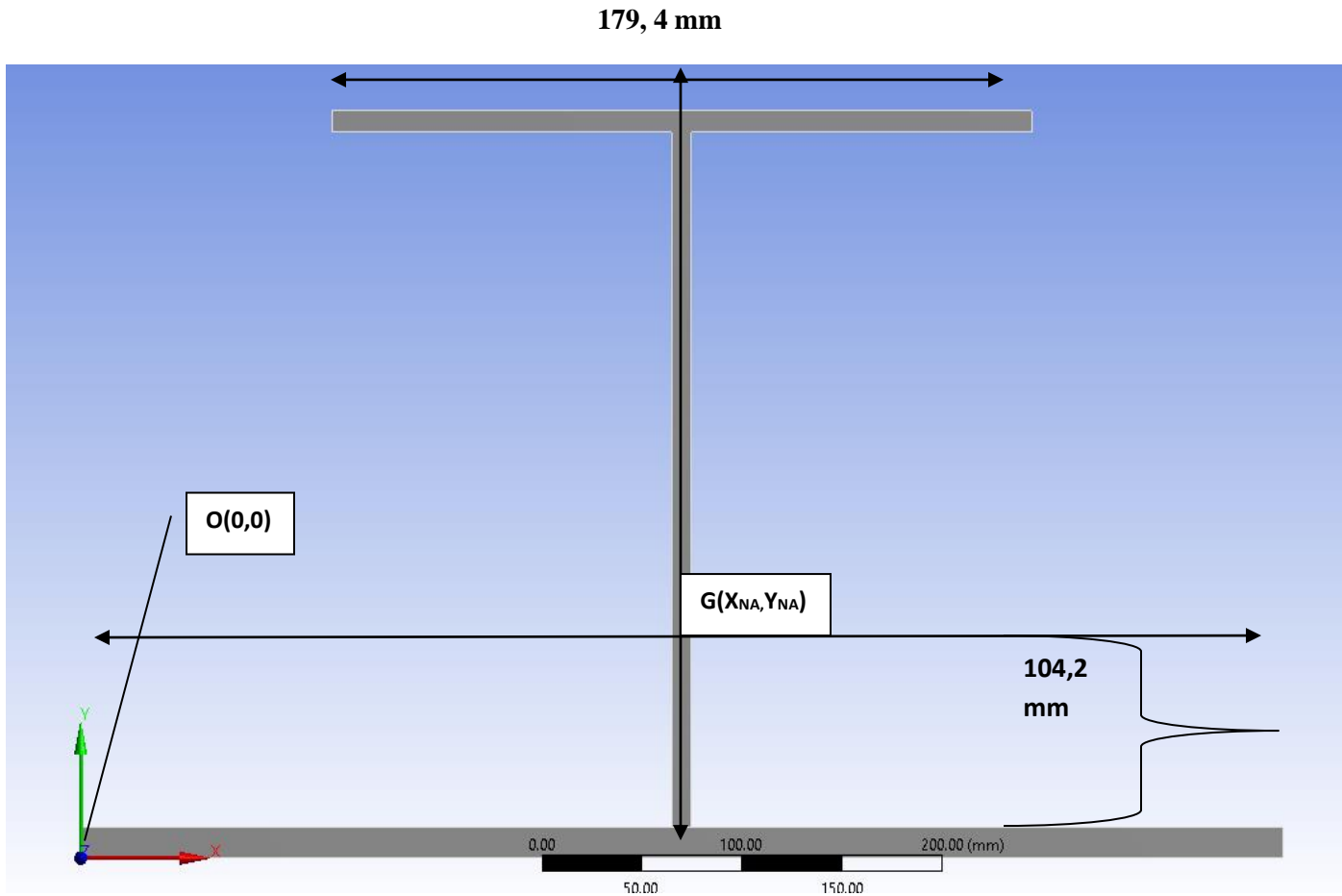
Κατά τον λυγισμό κολόνας Euler ισχύει η σχέση :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{Le^2}$$

Όπου

- I. E: μέτρο ελαστικότητας του υλικού σε Pa (για ναυπηγικό χάλυβα συνήθως παίρνουμε 210 GPa , όπως εδώ).
- II. I : η (δεύτερη) ροπή αδράνειας του σώματος σε mm⁴, λαμβάνεται η μικρότερη τιμή (ο πιο «αδύναμη» ροπή αδράνειας συνάπτει και την κατεύθυνση γύρω από τον αντίστοιχο άξονα που θα λυγίσει η κολόνα).
- III. Le : το ισοδύναμο μήκος σε mm , που δηλώνει πόσο είναι το μήκος της κολόνας ανάλογα με τις συνθήκες στήριξης (εδώ Le = 1 L , δηλαδή έχουμε απλή έδραση (simply supported) στα άκρα του μοντέλου.
- IV. P_{cr} : είναι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού κατά Euler .

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού και με την περίπτωση του ελάσματος – Ταυ. Ωστόσο, έπρεπε να βρεθεί το μήκος της φλάντζας, οπότε χωρίσαμε την ενιαία εγκάρσια διατομή σε τρεις ξεχωριστές, στα σώματα **1** , **2** και **3**. Ως διατομή **A1** σηματοδοτήσαμε το εμβαδόν του ελάσματος 600 x 15. Ως διατομή **A2** σηματοδοτήσαμε το εμβαδόν του κορμού (web) 340 x 15 και τέλος με **A3** το εμβαδόν της φλάντζας του ενισχυτικού b x 10. Όλη η διατομή του ενισχυτικού πρέπει να έχει εμβαδόν $A_2 + A_3 = 6894 \text{ mm}^2$, επομένως βρίσκουμε ότι το πλάτος της φλάντζας είναι $b = 179,4 \text{ mm}$ και έτσι $A_3 = 1794 \text{ mm}^2$. Η ανάλυση εδώ γίνεται με ελαφρώς διαφορετικό τρόπο.



Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα βρίσκουμε πιο εύκολα τις ροπές αδράνειας και τις αποστάσεις των κεντροειδών y_i των εκάστοτε χωρισμένων σωμάτων **1** , **2** , **3**). Όπως και πριν, βρίσκουμε το εμβαδόν των σωμάτων και έπειτα τον ουδέτερο άξονα και τους κεντροβαρικούς άξονες ολόκληρης της διατομής $A_{ολ}$. Από τον πίνακα παίρνουμε ότι η κατακόρυφη απόσταση Y_{NA} του ουδέτερου άξονα είναι:

$$Y_{NA} = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_{ολ}} = \frac{1.656.840}{15894} = 104,2 \text{ mm}$$

Οι αποστάσεις dy_i είναι οι διαφορές του ύψους των κεντροειδών των σωμάτων από το κέντρο ολόκληρης της διατομής, δηλαδή $dy_i = y_i - Y_{NA}$. Η ποσότητα αυτή, είτε είναι θετική είτε αρνητική στο τέλος υψώνεται στο τετράγωνο και έχουμε θετικό αριθμό. Στη περίπτωση ενισχυτικού Ταυ οι κύριοι άξονες ταυίζονται με τους άξονες X Y, άρα είναι άξονες συμμετρίας. Οπότε το γινόμενο αδράνειας θεωρούμε ότι είναι ίσο με μηδέν :

$$I_{xy} = 0$$

| i | A _i (εμβαδόν σε mm ²) | y _i (απόσταση κέντρων σε mm) | A _i * y _i | I _x (ροπή αδράνειας σε mm ⁴) | dy _i (σε mm) | A _i * dy _i ² (σε mm ⁴) |
|-----|--|---|---------------------------------|---|-------------------------|---|
| 1 | 600x15 = 9000 | 7,5 | 67.500 | 1/12*600*15 ³ = 168.750 | 7,5-104,2 = -96,7 | 84.158.010 |
| 2 | 340x15 = 5100 | 15+340/2 = 185 | 943.500 | 1/12*340 ³ *15 = 49.130.000 | 185-104,2 = 80,8 | 33.296.064 |
| 3 | 179,4x10 = 1794 | 340+15+5 = 360 | 645.840 | 1/12*10 ³ *179,4 = 14.950 | 360-104,2 = 255,8 | 117.387.950 |
| SUM | A _{ολ} = 15894 | - | 1.656.840 | 49.313.700 | | 234.842.024,2 |

Επομένως η ολική ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα Y-Y' είναι :

$$I_{x_{ολ}} = \Sigma I_{x_i} + \Sigma A_i * dy_i^2 = 49.313.700 + 234.842.024,2 = \mathbf{284.155.729, 2 \text{ mm}^4}$$

Η ολική ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα X-X' βρίσκεται εύκολα από την απλή εφαρμογή του τύπου:

$$I_{y_{ολ}} = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3} = \frac{600^3 * 15}{12} + \frac{15^3 * 340}{12} + \frac{179,4^3 * 10}{12} = 270.000.000 + 95.625 + 4.811.561, 82 =$$

$$= \mathbf{274.907.186, 8 \text{ mm}^4}$$

Από τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό ότι η ροπή I_y έχει πιο μικρή τιμή από την I_x και άρα το σώμα θα λυγίσει γύρω από τον κύρια κεντροβαρικό άξονα I_y = I_{min}. Αυτή την τιμή θα εφαρμόσουμε στην ακτίνα αδρανείας r:

$$r = \sqrt{\frac{I_{min}}{A_{ολ}}} = \sqrt{\frac{274.907.186,8}{15894}} = 131,5 \text{ mm}$$

Η κρίσιμη λυγηρότητα βρίσκεται ως :

$$SR_{crit} = \pi * \sqrt{\frac{2 * E}{\sigma_y}}, \text{ όπου } \sigma_y = 235 \text{ MPa} = 235 \text{ N/mm}^2 \text{ το όριο διαρροής}$$

Για μήκος ελάσματος L_e = 2800 mm ελέγχουμε τη γεωμετρική λυγηρότητα:

$$L_e / r = 2800 / 131,5 = \mathbf{21, 29}$$

Άρα έχουμε ότι

$$SR_{crit} = 3,14 * \sqrt{\frac{2*210000}{235}} = 132,74 > L_e/r = 21,29$$

Αυτό σημαίνει ότι θα γίνει χρήση της σχέσης του *Johnson* , αφού το υποστύλωμα θεωρείται «κοντό» .

Ισχύει, επομένως :

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \sigma_Y \left[1 - \frac{\left(\frac{L_e}{r}\right)^2}{2(SR_{cr})^2} \right] \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_{cr} = 235 * \left[1 - \frac{(21,29)^2}{2(132,74)^2} \right] = 235 * \left[1 - \frac{453}{35.239,8} \right] = 235 * 0,98714 = 231,97 \text{ MPa} \quad \Rightarrow$$

$$P_{cr} = A * \sigma_y = 15894 * 231,97 = \mathbf{3.687.056,743 \text{ N}}$$

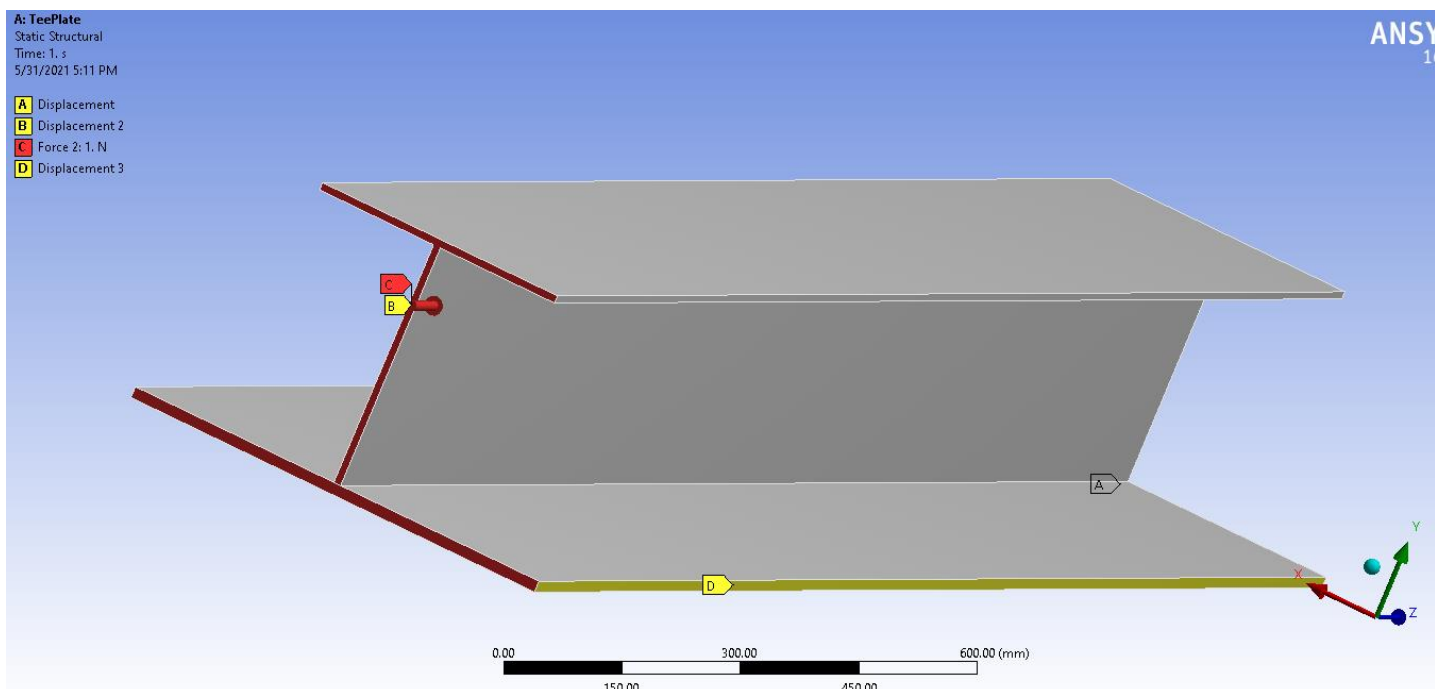
Πραγματοποιούμε τους ίδιους υπολογισμούς και για μήκος ελάσματος $L_e = 5600 \text{ mm}$ και βρίσκουμε ότι:

$$L_e / r = 5600 / 131,5 = 42,58 < 132,74$$

Άρα εφαρμόζεται πάλι η σχέση του *Johnson*:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \sigma_Y \left[1 - \frac{\left(\frac{L_e}{r}\right)^2}{2(SR_{cr})^2} \right] \quad \Rightarrow \quad \sigma_{cr} = 235 * \left[1 - \frac{(42,58)^2}{2(132,74)^2} \right] = 235 * \left[1 - \frac{1.813,52}{35.239,8} \right] = 235 * 0,9485 =$$
$$= 222,90 \text{ MPa} \quad \Rightarrow$$

$$P_{cr} = A * \sigma_y = 15894 * 222,90 = \mathbf{3.542.882,269 \text{ N}}$$



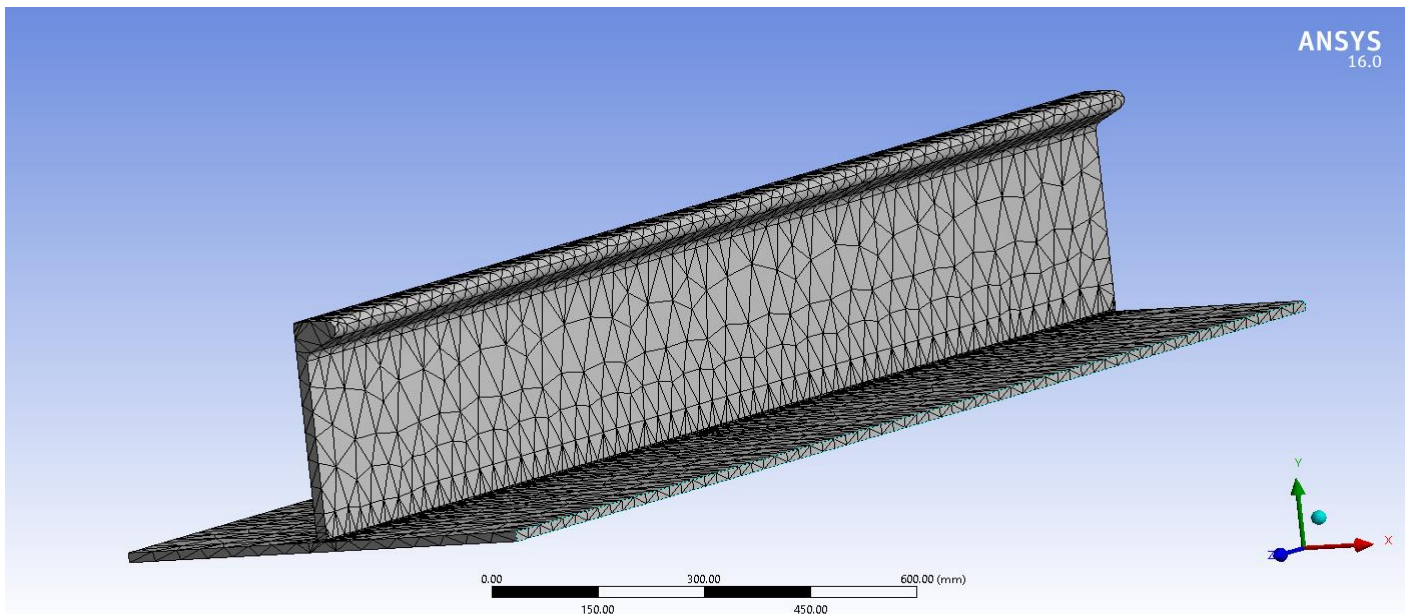
Εικόνα 45 Απεικόνιση μοντέλου ανάστροφου ταν Τ - ελάσματος με την προσθήκη της αξονικής δύναμης $F = 1 \text{ N}$ σε αλληλεπίδραση με της συνθήκες στήριξης με απλή έδραση περιμετρικά και στα άκρα με την ονομασία ως "displacement"

Παρατήρηση:

Βλέπουμε ότι για πιο μεγάλο μήκος L_e (εδώ το διπλάσιο) υπάρχει μια μικρή μείωση στο φορτίο P_{cr} που είναι αναμενόμενο.

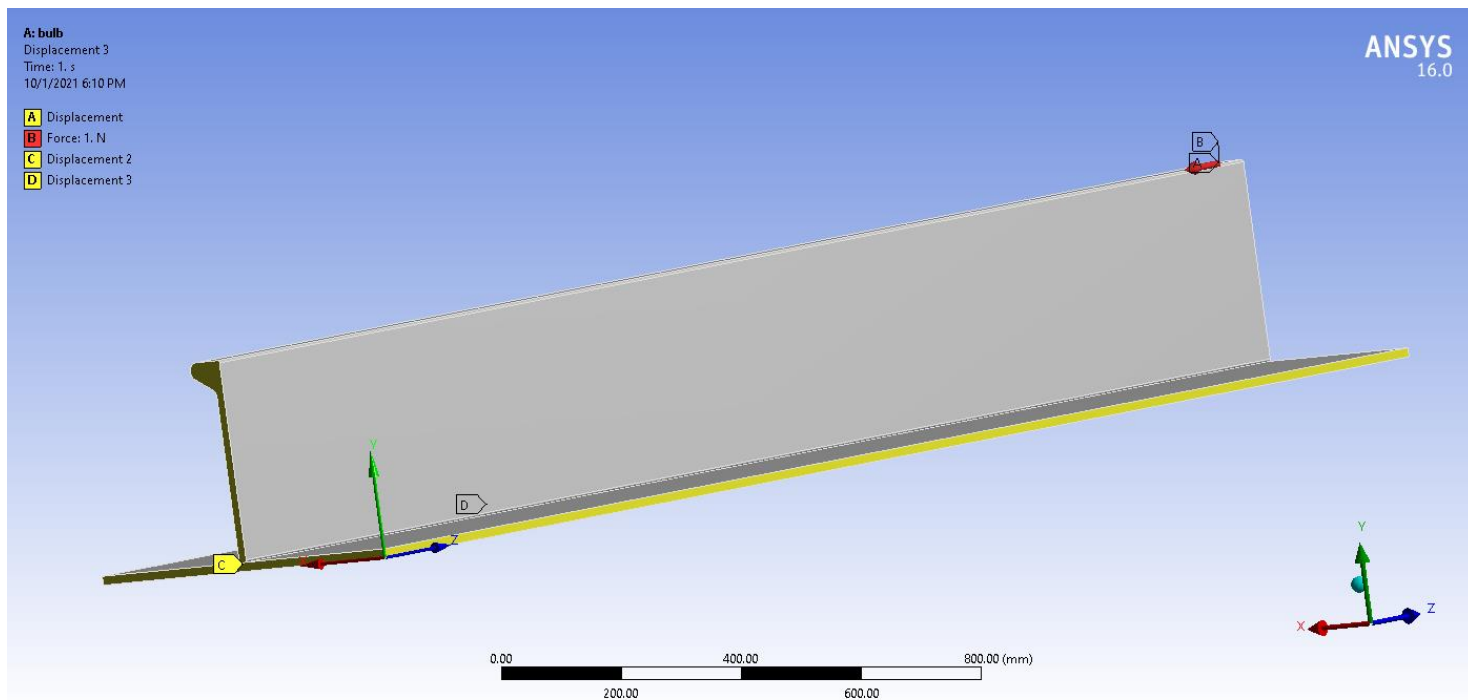
7. Αριθμητική διερεύνηση των ενισχυτικών με χρήση προγράμματος H/Y ANSYS *workbench*

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε τη θεωρητική ανάλυση του γραμμικού λυγισμού για το κρίσιμο φορτίο P_{cr} . Θέλοντας να συγκρίνουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα με εκείνα που ανταποκρίνονται περισσότερο στον πραγματικό κόσμο, έγινε αναγκαίο να γίνει περαιτέρω ανάλυση των μοντέλων των ενισχυμένων ελασμάτων με τη βοήθεια ειδικού προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων, του **ANSYS Workbench**. Στο λειτουργικό σύστημά του έγινε η εισαγωγή, καταρχήν, των σχεδιαστικών μοντέλων από ένα πρόγραμμα CAD – CAE (**Rhino 3D**). Έπειτα, προχωρήσαμε στην γραμμική και μη-γραμμική ανάλυση και λύση των μοντέλων, εισάγοντας το κατάλληλο πλέγμα, συνοριακές συνθήκες και δυνάμεις – μετατοπίσεις που συντελούνται προκειμένου να προσομοιώσουμε όσο το δυνατόν πιο ρεαλιστικά τις συνθήκες καταπόνησης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση χρησιμοποιήθηκε Fine mesh με fast and smooth transition.



Εικόνα 46 Πλέγμα με τριγωνικά στοιχεία ενισχυμένου ελάσματος – βολβολάμας

Οι συνοριακές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν για τη μελέτη των μοντέλων υλοποιήθηκαν γύρω από την ιδέα πως, το έλασμα στα άκρα του συγκρατείται ή πακτώνεται ή σταθεροποιείται με κάποιο μηχανισμό (ή συγκόλληση) με σκοπό να παρατηρηθεί η συμπεριφορά του στο ενδιάμεσο τμήμα του για το αν μπορεί να απορροφήσει τα κρουστικά και δυναμικά φορτία των κυματισμών σε καταστάσεις hogging και sagging καθώς και στην φορτοεκφόρτωση (ballasted or laden condition).



Εικόνα 47 Συνοριακές συνθήκες που εφαρμόστηκαν στο ολικό σύστημα συντεταγμένων του ενισχυτικού για τον καθορισμό των τάσεων και παραμορφώσεων

Πιο συγκεκριμένα, όπως φαίνεται και στην παραπάνω εικόνα, οι μετατοπίσεις (displacements) και η δύναμη force δείχνουν τον τρόπο και την κατεύθυνση φόρτισης. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν 3 displacements, δύο στα άκρα (displacements A & C) και ένα στα πλάγια (μεριά του ελάσματος με μεγαλύτερο μήκος- displacement D) και η δύναμη 1N. Το άκρο με displacement C του έχει αφαιρεθεί η δυνατότητα μετακίνησης ως προς οποιαδήποτε άξονα κίνησης ενώ το αντίθετο άκρο, displacement B, είναι ελεύθερο να μετακινηθεί ως προς τον διαμήκη άξονα (εδώ άξονας Z) με μια σταθερή δύναμη διέγερσης force = 1N. Τον ίδιο βαθμό ελευθερίας εφαρμόζουμε και στα πλάγια. Ωστόσο, έγινε και η μελέτη χωρίς να έχουμε displacements στα πλάγια άκρα, προκειμένου να εξετάσουμε τα ενδεχόμενα συμπεριφοράς χωρίς να είναι συγκρατημένα οι μεγαλύτερου μήκους πλάγιες πλευρές. Η ανάλυση έγινε για ισοδύναμο μήκος ελάσματος (L_e) για 2800 mm και 5600 mm. Όλοι οι παραπάνω συνδυασμοί πραγματοποιήθηκαν για τα τρία είδη ενισχυτικών. Επομένως, συμβολίζοντας ως **B** το ενισχυτικό της βολβολάμας, **T** του ανάστροφου ταυ και **L** της γωνιάς και 2800 και 5600 τα μήκη των ελασμάτων σε χιλιοστά. Για τις συνοριακές συνθήκες συμβολίσαμε ως **dd** (displacement – displacement) τα άκρα του ελάσματος και επιπλέον περιορίσαμε την μετακίνηση (κάθετη μετατόπιση) των φορτισμένων και των αφόρτιστων (μεγάλου μήκους) πλευρών και ως **df** (displacement – free) που σημαίνει ότι «ελευθερώσαμε» την κάθετη μετατόπιση στις αφόρτιστες μακριές πλευρές του. Έτσι, για παράδειγμα το ενισχυτικό με ονομασία **L_2800_df** σημαίνει ότι μελετήθηκε το ενισχυτικό της γωνιάς L σε μήκος 2800 mm, με περιορισμό της κάθετης μετατόπισης στα άκρα (περιοχή φόρτιση-**displacement**) και ελεύθερη την κάθετη μετακίνηση στις αφόρτιστες περιοχές (**free**).

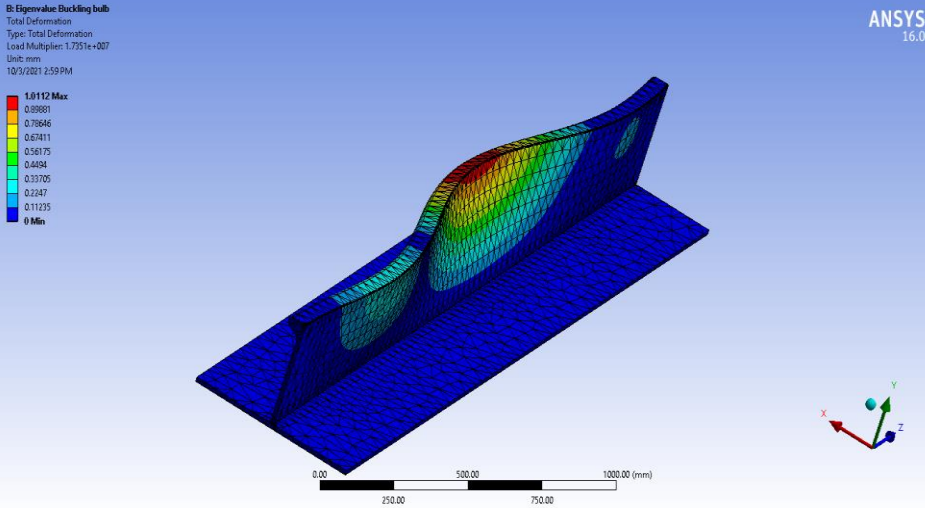
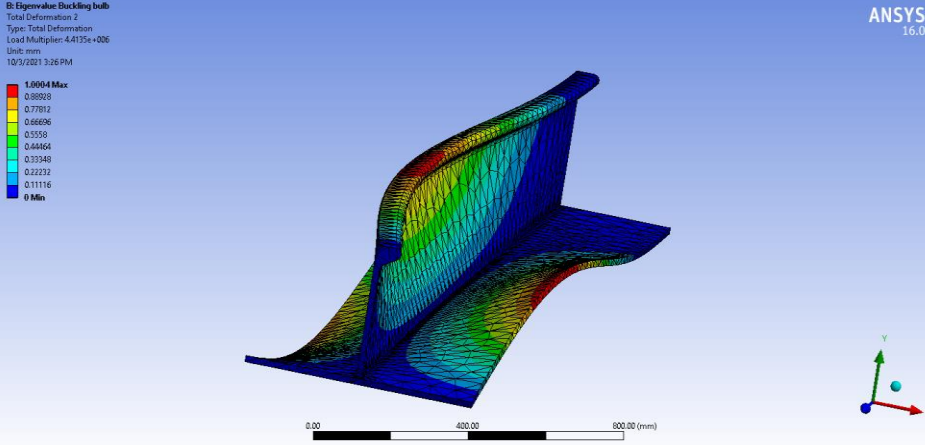
Συνολικά, οι περιπτώσεις που μελετήθηκαν είναι οι ακόλουθες :

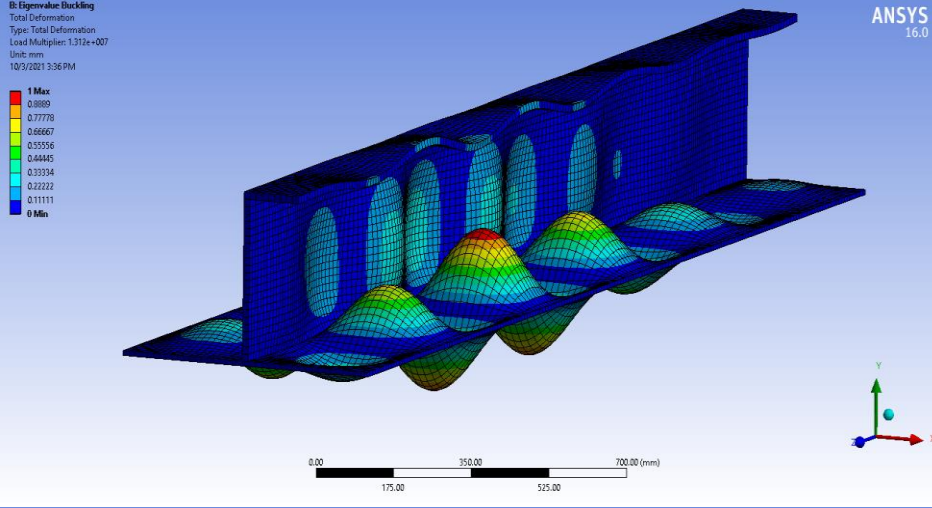
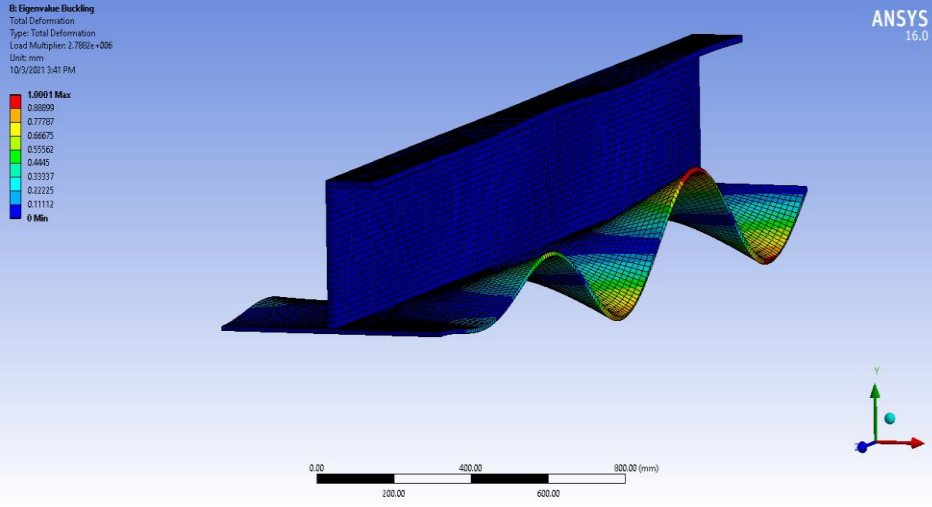
- L_2800_dd και L_2800_df
- B_2800_dd και B_2800_df
- T_2800_dd και T_2800_df
- L_5600_dd και L_5600_df
- B_5600_dd και B_5600_df
- T_5600_dd και T_5600_df

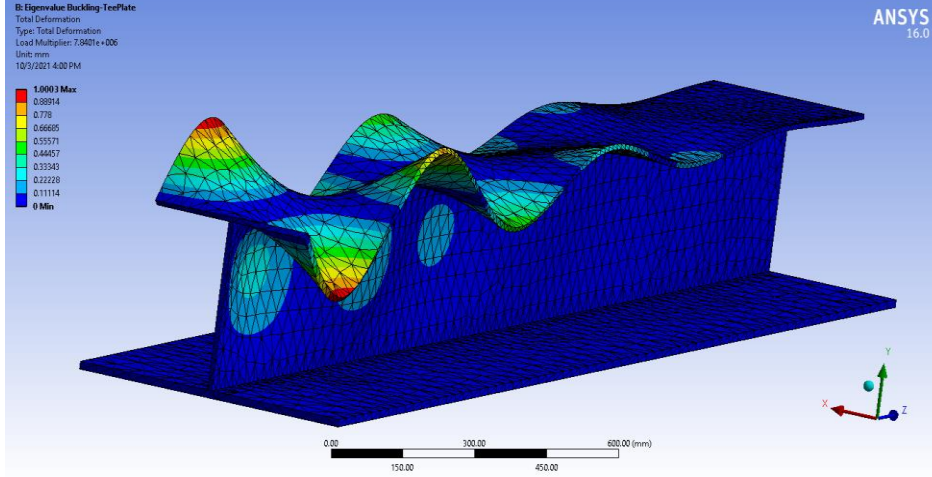
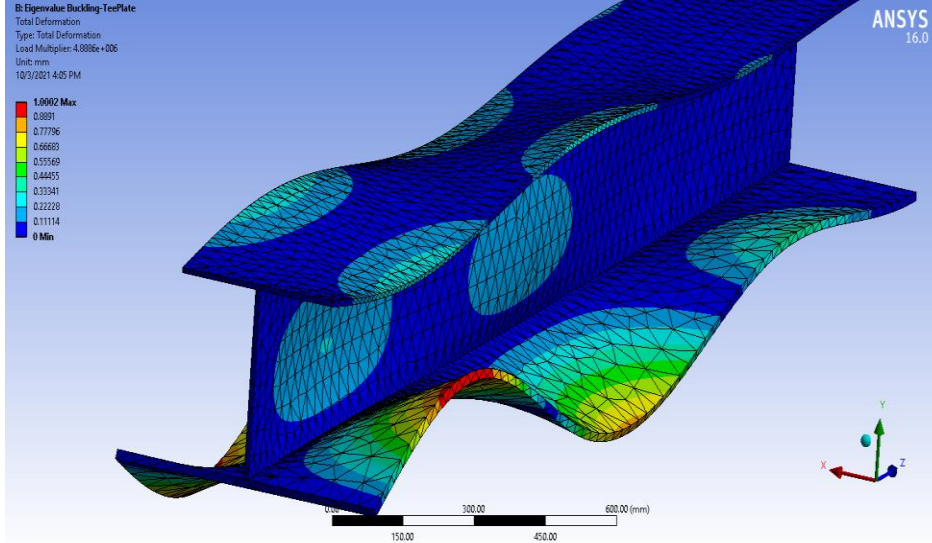
7.1 Γραμμική απεικόνιση των αποτελεσμάτων γραμμικού λυγισμού

Συνοψίζοντας, λοιπόν, έγιναν 12 μοντελοποιήσεις στις οποίες έλαβε μέρος η γραμμική και η μη-γραμμική ανάλυση (NL). Παρακάτω, παρατίθεται πίνακας με τα αποτελέσματα των λύσεων του προγράμματος

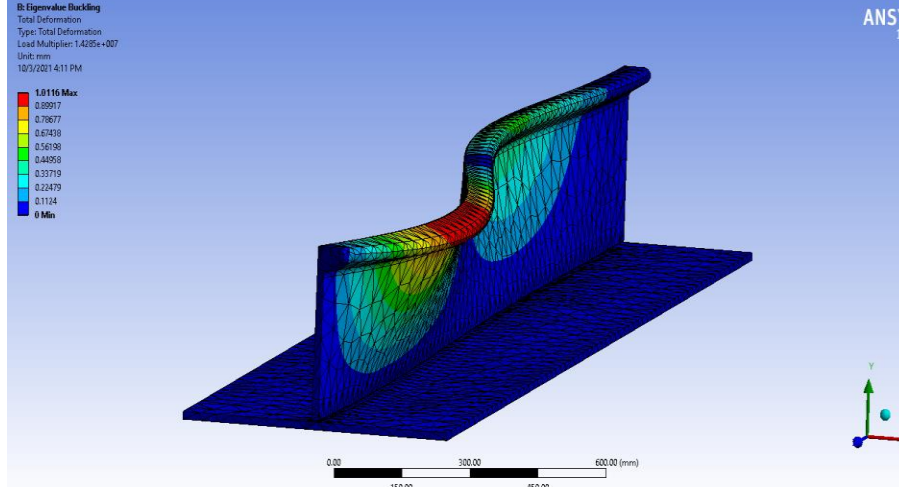
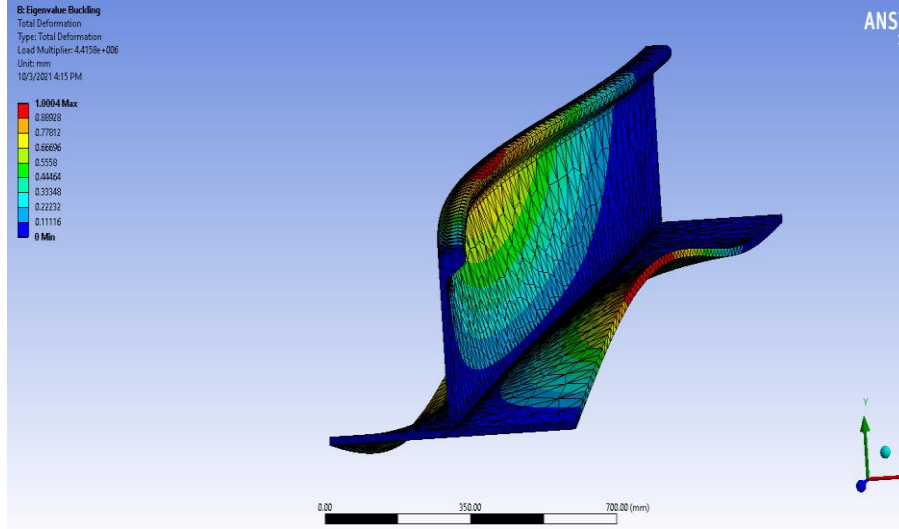
Μήκος 2600mm

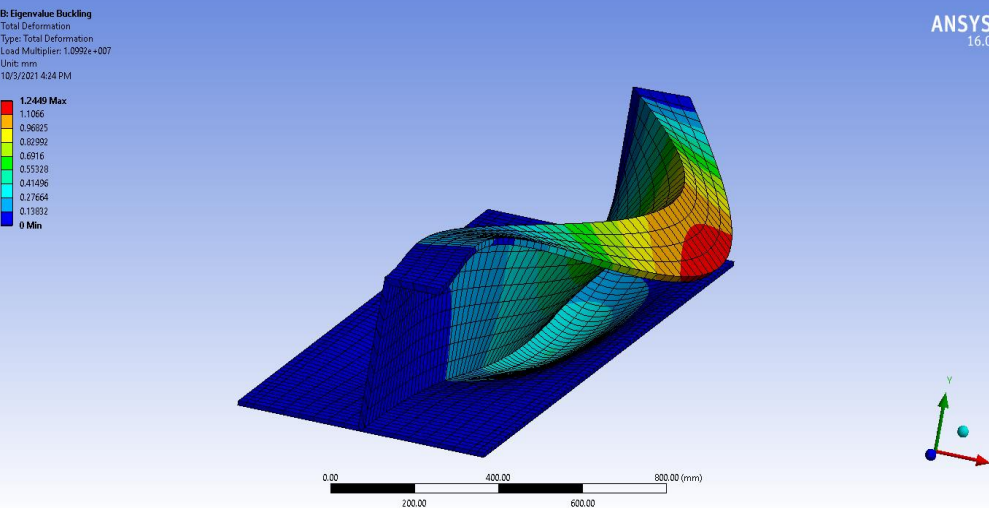
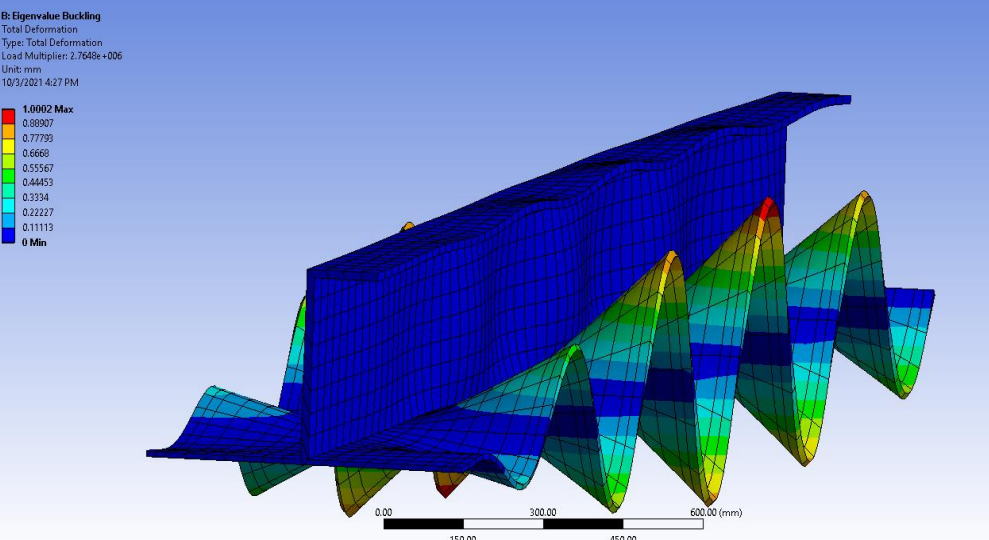
| Όνομασία μοντέλου | Απεικόνιση του μοντέλου από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων | Κρίσιμο φορτίο λυγισμού |
|-------------------|--|--------------------------|
| B_2800_dd |  | 1.4018*10 ⁷ N |
| B_2800_df |  | 4.4135*10 ⁶ N |

| Όνομασία μοντέλου | Απεικόνιση του μοντέλου από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων | Κρίσιμο φορτίο λυ |
|-------------------|---|-------------------------------|
| L_2800_dd |  <p> B: Eigenvalue Buckling Total Deformation Type: Total Deformation Load Multiplier: 1.312e+007 Unit: mm 10/3/2021 3:36 PM </p> <p> 1 Max 0.8899 0.77778 0.66667 0.55556 0.44445 0.33334 0.22223 0.11112 0 Min </p> <p>ANSYS 16.0</p> <p>0.00 175.00 350.00 525.00 700.00 (mm)</p> | $1.312 \cdot 10^7 \text{ N}$ |
| L_2800_df |  <p> B: Eigenvalue Buckling Total Deformation Type: Total Deformation Load Multiplier: 2.7882e+006 Unit: mm 10/3/2021 3:41 PM </p> <p> 1.0001 Max 0.8899 0.77787 0.66675 0.55562 0.4445 0.33337 0.22225 0.11112 0 Min </p> <p>ANSYS 16.0</p> <p>0.00 200.00 400.00 600.00 800.00 (mm)</p> | $2.7882 \cdot 10^6 \text{ N}$ |

| Όνομασία μοντέλου | Απεικόνιση του μοντέλου από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων | Κρίσιμο φορτίο λυγισμού |
|-------------------|---|--------------------------|
| T_2800_dd |  | 7.8401*10 ⁶ N |
| T_2800_df |  | 4.8886*10 ⁶ N |

Μήκος 5600 mm

| Όνομασία μοντέλου | Απεικόνιση του μοντέλου από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων | Κρίσιμο φορτίο λυγισμού |
|-------------------|--|--------------------------|
| B_5600_dd |  <p>ANSYS 16.0 B: Eigenvalue Buckling Total Deformation Type: Total Deformation Load Multiplier: 1.4285e+007 Unit: mm 10/3/2011 4:11 PM</p> <p>1.0116 Max 0.89917 0.78677 0.67476 0.56198 0.44958 0.33719 0.22479 0.1124 0 Min</p> <p>0.00 150.00 300.00 450.00 600.00 (mm)</p> | 1.4285*10 ⁷ N |
| B_5600_df |  <p>ANSYS 16.0 B: Eigenvalue Buckling Total Deformation Type: Total Deformation Load Multiplier: 4.4158e+006 Unit: mm 10/3/2011 4:15 PM</p> <p>1.0004 Max 0.88928 0.77812 0.66696 0.5558 0.44464 0.33348 0.22232 0.11116 0 Min</p> <p>0.00 175.00 350.00 525.00 700.00 (mm)</p> | 4.4158*10 ⁶ N |

| Όνομασία μοντέλου | Απεικόνιση του μοντέλου από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων | Κρίσιμο φορτίο λυγισμού |
|-------------------|--|--------------------------|
| L_5600_dd | <p>B: Eigenvalue Buckling Total Deformation Type: Total Deformation Load Multiplier: 1.0992e+007 Units: mm 10/3/2021 4:24 PM</p>  | 1.0992*10 ⁷ N |
| L_5600_df | <p>B: Eigenvalue Buckling Total Deformation Type: Total Deformation Load Multiplier: 2.7648e+006 Units: mm 10/3/2021 4:27 PM</p>  | 2.7648*10 ⁶ N |

| Όνομασία μοντέλου | Απεικόνιση του μοντέλου από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων | Κρίσιμο φορτίο λυγισμού |
|-------------------|--|-------------------------------|
| T_5600_dd | <p> B: Eigenvalue Buckling Total Deformation Type: Total Deformation Load Multiplier: 0.4549e+006 Unit: mm 10/3/2021 4:35 PM </p> <p> 1.0005 Max 0.88912 0.77816 0.66699 0.55583 0.44466 0.3335 0.22233 0.11117 0 Min </p> <p>ANSYS 16.0</p> <p>0.00 200.00 400.00 600.00 800.00 (mm)</p> | $7.4322 \cdot 10^6 \text{ N}$ |
| T_5600_df | <p> B: Eigenvalue Buckling Total Deformation 10 Type: Total Deformation Load Multiplier: 4.6231e+006 Unit: mm 10/3/2021 4:39 PM </p> <p> 1.0003 Max 0.8891 0.77805 0.6669 0.55575 0.4446 0.33345 0.2223 0.11115 0 Min </p> <p>ANSYS 16.0</p> <p>0.00 225.00 450.00 675.00 900.00 (mm)</p> | $4.6231 \cdot 10^6 \text{ N}$ |

7.1.1 Μη-γραμμικός λυγισμός

B 2800 dd NLn

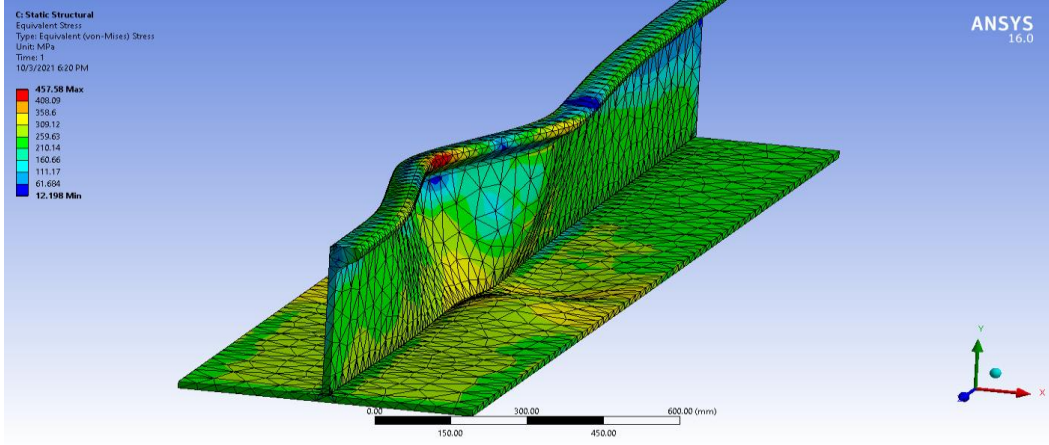
| | | |
|---|---|---|
| <p>Equivalent Von-Mises stresses</p> | <p>C:\Static Structural Equivalent Stress Type: Equivalent (von-Mises) Stress Units: MPa Time: 1 10/3/2021 5:21 PM</p> <p>443.15 Max 395.26 347.38 299.49 251.61 203.73 155.84 107.96 60.073 12.189 Min</p> <p>ANSYS 16.0</p> | |
| <p>Total deformation</p> | <p>C:\Static Structural Total Deformation Type: Total Deformation Units: mm Time: 1 10/3/2021 5:25 PM</p> <p>163.36 Max 145.21 127.05 108.9 90.753 72.603 54.452 36.301 18.151 0 Min</p> <p>ANSYS 16.0</p> | |
| <p>Force Reaction</p> | <p>C:\Static Structural Force Reaction Time: 1 10/3/2021 5:28 PM</p> <p>ANSYS 16.0</p> | <p>Max reaction Force</p> <p>4356400 N for 5.8725mm displacement</p> |

B 2800 df NLn

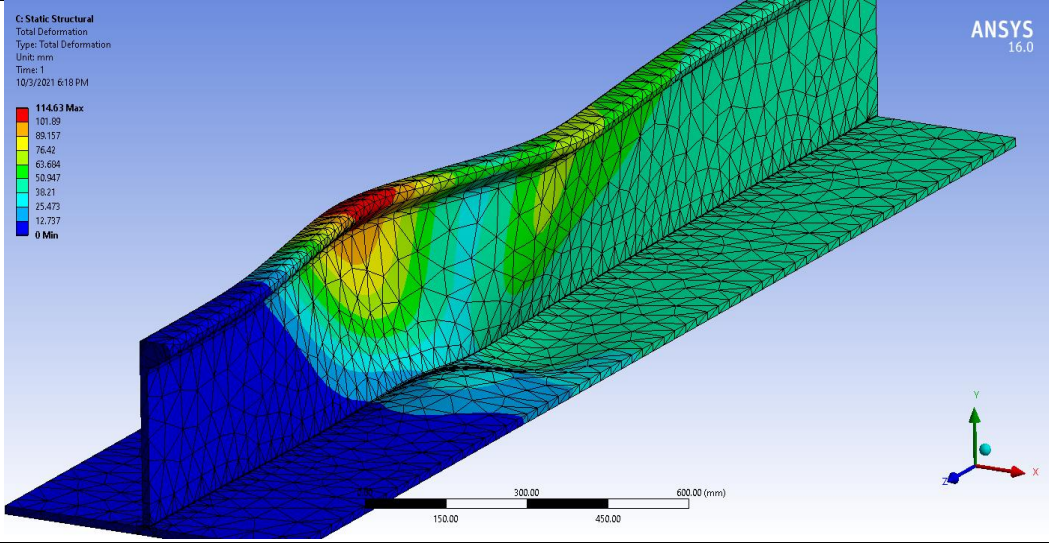
| | | |
|---|---|---|
| <p>Equivalent Von-Mises stresses</p> | <p>C: Static Structural Equivalent Stress Type: Equivalent (von-Mises) Stress Unit: MPa Time: 1 10/3/2021 5:44 PM</p> <p>ANSYS 16.0</p> | |
| <p>Total deformation</p> | <p>C: Static Structural Total Deformation Type: Total Deformation Unit: mm Time: 1 10/3/2021 5:45 PM</p> <p>ANSYS 16.0</p> | |
| <p>Force Reaction</p> | <p>C: Static Structural Force Reaction 10/3/2021 5:47 PM</p> <p>ANSYS 16.0</p> | <p><u>Max reaction Force</u></p> <p>4409400 N for 9.3956mm displacement</p> |

B 5600 dd NLn

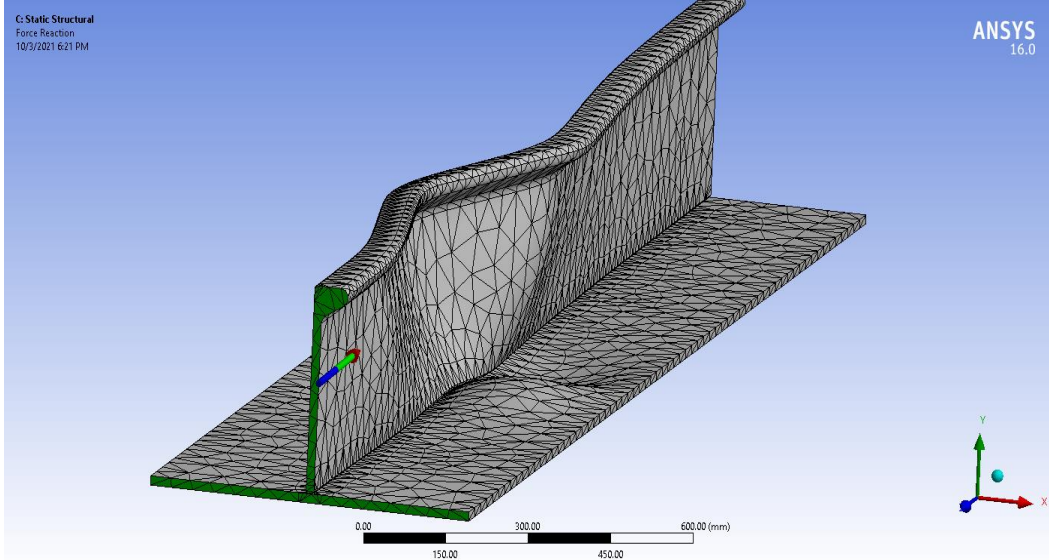
Equivalent Von-Mises stresses



Total deformation



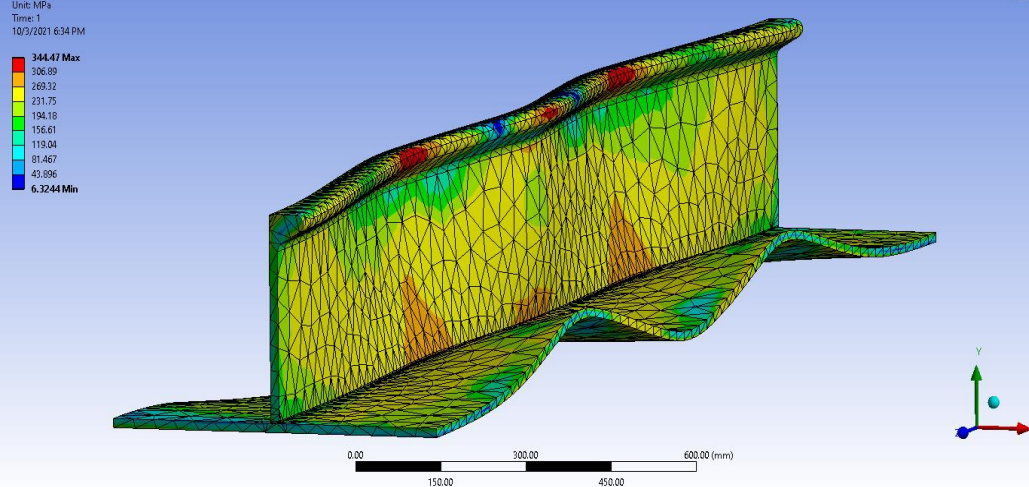
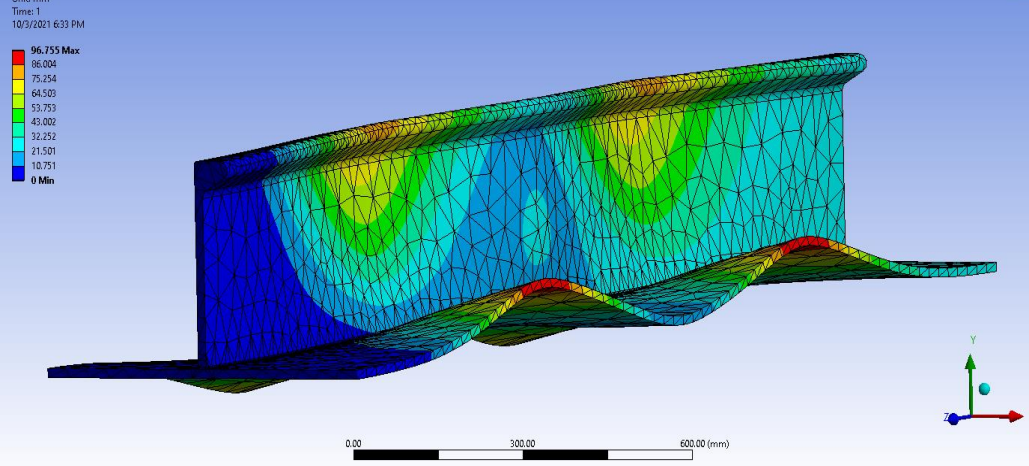
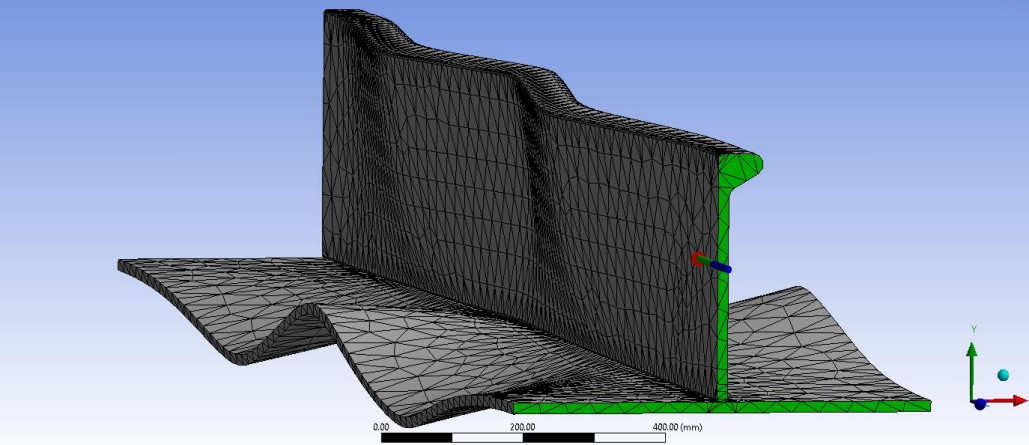
Force Reaction



Max reaction Force

4456800 N
for 8.8725mm
displacement

B 5600 df NLn

| | | |
|---|---|---|
| <p>Equivalent Von-Mises stresses</p> | <p>C: Static Structural Equivalent Stress Type: Equivalent (von-Mises) Stress Unit: MPa Time: 1 10/9/2021 6:34 PM</p>  <p>344.47 Max 306.89 269.32 231.75 194.18 156.61 119.04 81.467 43.896 6.3244 Min</p> <p>ANSYS 16.0</p> | |
| <p>Total deformation</p> | <p>C: Static Structural Total Deformation Type: Total Deformation Unit: mm Time: 1 10/9/2021 6:33 PM</p>  <p>96.755 Max 86.004 75.254 64.503 53.753 43.002 32.252 21.501 10.751 0 Min</p> <p>ANSYS 16.0</p> | |
| <p>Force Reaction</p> | <p>C: Static Structural Force Reaction Time: 1 10/9/2021 6:35 PM</p>  <p>ANSYS 16.0</p> | <p><u>Max reaction Force</u></p> <p>3976500 N for 3.6335mm displacement</p> |

T 2800 dd NLn

| | | |
|---|---|---|
| <p>Equivalent Von-Mises stresses</p> | <p>C: Static Structural Equivalent Stress Type: Equivalent (von-Mises) Stress Unit: MPa Time: 1 10/3/2021 6:42 PM</p> <p>510.84 Max 454.57 398.31 342.05 285.78 229.52 173.25 116.99 60.726 4.4626 Min</p> <p>ANSYS 16.0</p> <p>0.00 175.00 350.00 525.00 700.00 (mm)</p> | |
| <p>Total deformation</p> | <p>C: Static Structural Total Deformation Type: Total Deformation Unit: mm Time: 1 10/3/2021 6:41 PM</p> <p>103.98 Max 92.428 80.874 69.321 57.767 46.214 34.66 23.107 11.553 0 Min</p> <p>ANSYS 16.0</p> <p>0.00 125.00 250.00 375.00 500.00 (mm)</p> | |
| <p>Force Reaction</p> | <p>C: Static Structural Force Reaction 10/3/2021 6:44 PM</p> <p>ANSYS 16.0</p> <p>0.00 150.00 300.00 450.00 600.00 (mm)</p> | <p><u>Max reaction Force</u></p> <p>4410000 N for 9.697 mm displacement</p> |

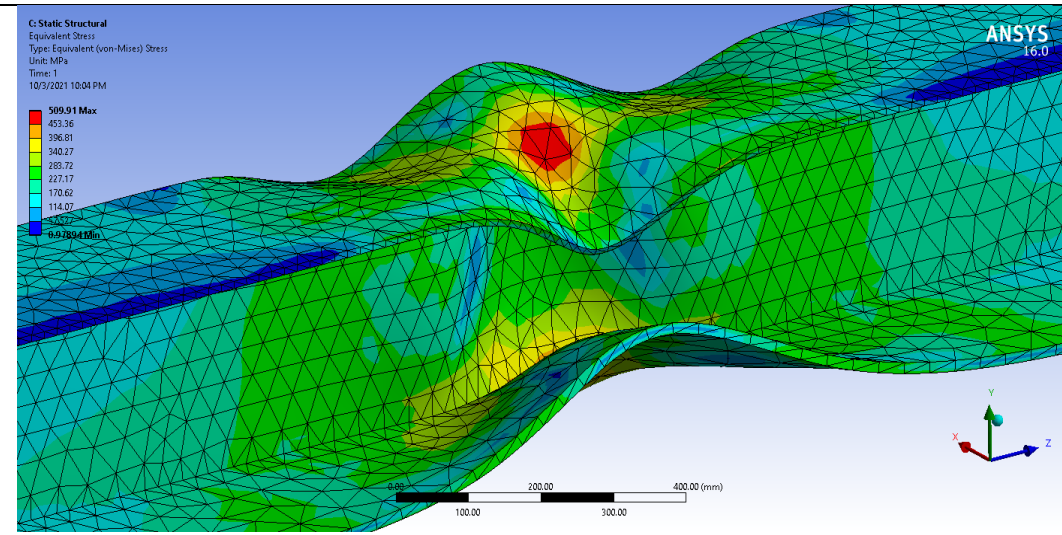
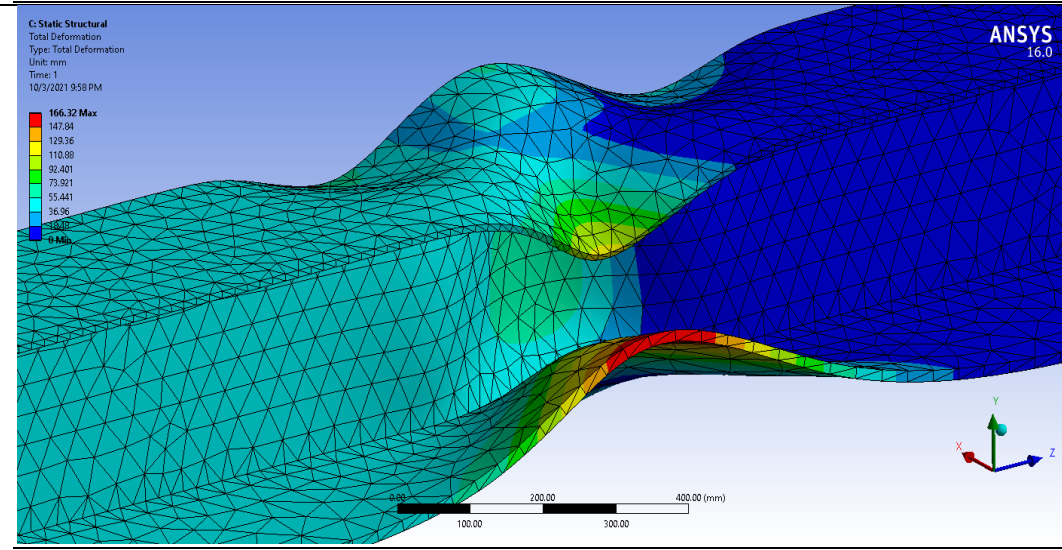
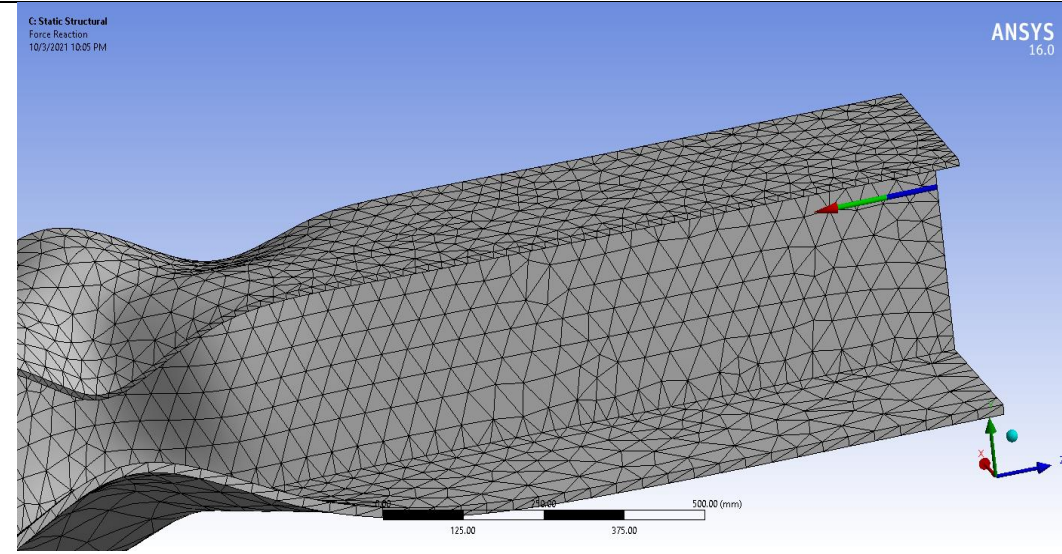
T 2800 dfNLn

| | | |
|---|---|--|
| <p>Equivalent Von-Mises stresses</p> | <p>C: Static Structural Equivalent Stress Type: Equivalent (von-Mises) Stress Unit: MPa Time: 1 10/9/2021 6:59 PM</p> <p>509.91 Max 453.36 396.81 340.27 283.72 227.17 170.62 114.07 57.527 0.97894 Min</p> <p>ANSYS 16.0</p> | |
| <p>Total deformation</p> | <p>C: Static Structural Total Deformation Type: Total Deformation Unit: mm Time: 1 10/9/2021 6:59 PM</p> <p>166.32 Max 147.84 129.36 110.88 92.401 73.921 55.441 36.96 18.48 0 Min</p> <p>ANSYS 16.0</p> | |
| <p>Force Reaction</p> | <p>C: Static Structural Force Reaction 10/9/2021 7:01 PM</p> <p>ANSYS 16.0</p> | <p><u>Max reaction Force</u></p> <p>3954600 N for 3.9359 mm displacement</p> |

T 5600 dd NLn

| | | |
|---|---|---|
| <p>Equivalent Von-Mises stresses</p> | <p>C: Static Structural Equivalent Stress Type: Equivalent (von-Mises) Stress Units: MPa Time: 1 10/3/2021 7:11 PM</p> <p>548.59 Max 488.21 427.83 367.45 307.07 246.69 186.3 125.92 65.54 5.1582 Min</p> <p>ANSYS 16.0</p> | |
| <p>Total deformation</p> | <p>C: Static Structural Total Deformation Type: Total Deformation Units: mm Time: 1 10/3/2021 7:09 PM</p> <p>123.47 Max 109.75 96.02 82.311 68.593 54.874 41.156 27.437 13.719 0 Min</p> <p>ANSYS 16.0</p> | |
| <p>Force Reaction</p> | <p>C: Static Structural Reaction Type: Reaction Units: N Time: 1 10/3/2021 7:18 PM</p> <p>4327200 N for 13.195 mm displacement</p> <p>ANSYS 16.0</p> | <p><u>Max reaction Force</u></p> <p>4327200 N for 13.195 mm displacement</p> |

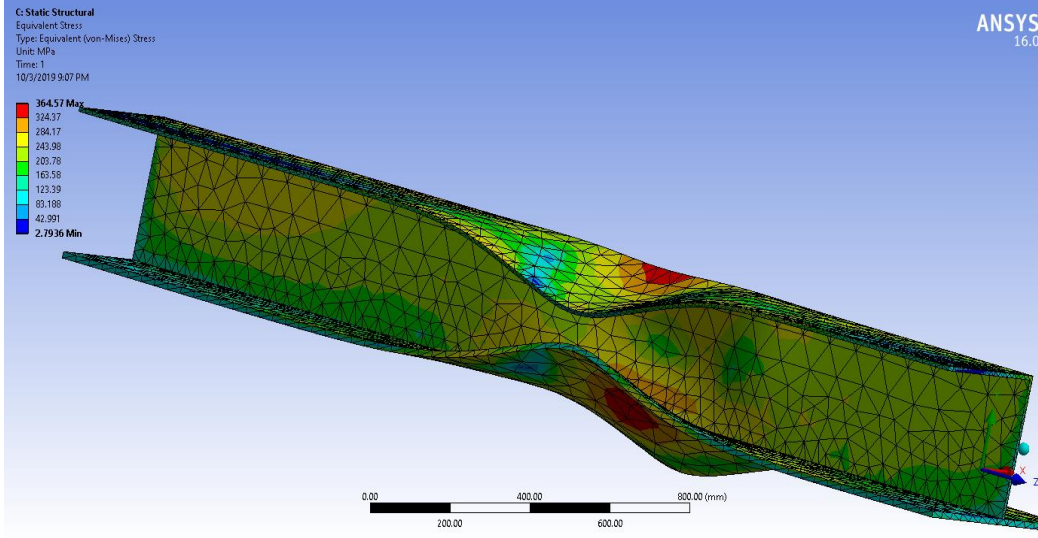
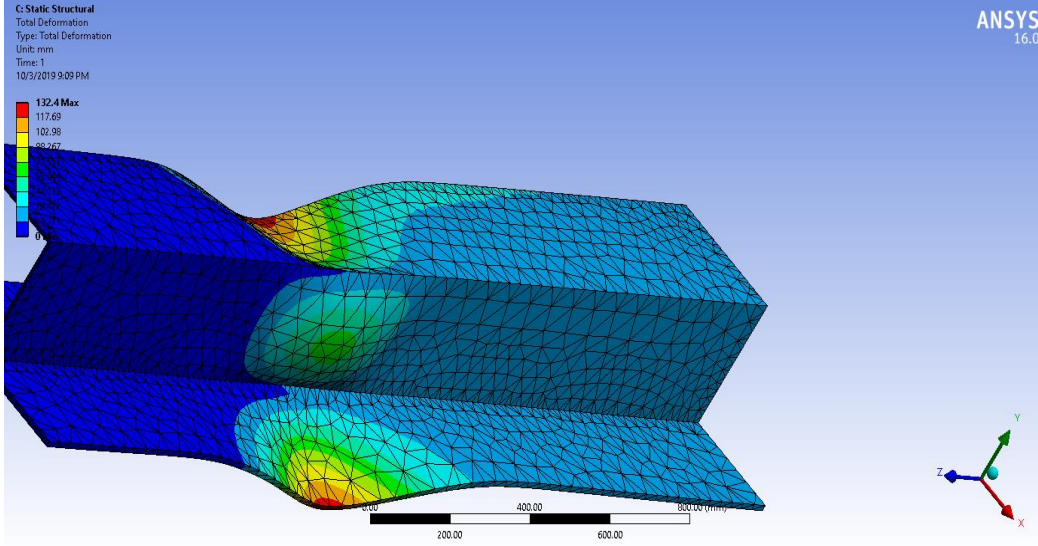
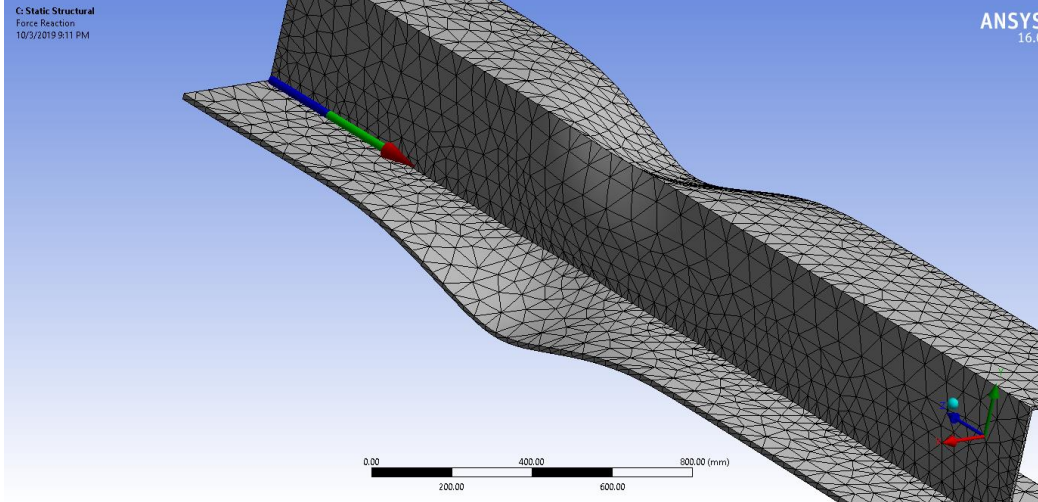
T 5600 df NLn

| | | |
|--------------------------------------|--|--|
| Equivalent Von-Mises stresses |  <p>C: Static Structural Equivalent Stress Type: Equivalent (von-Mises) Stress Unit: MPa Time: 1 10/3/2021 10:04 PM</p> <p>509.91 Max 453.36 396.81 340.27 283.72 227.17 170.62 114.07 57.52 0.01894 Min</p> <p>ANSYS 16.0</p> | |
| Total deformation |  <p>C: Static Structural Total Deformation Type: Total Deformation Unit: mm Time: 1 10/3/2021 9:59 PM</p> <p>166.32 Max 147.84 129.36 110.88 92.401 73.921 55.441 36.96 18.48 0 Min</p> <p>ANSYS 16.0</p> | |
| Force Reaction |  <p>C: Static Structural Force Reaction Time: 1 10/3/2021 10:05 PM</p> <p>ANSYS 16.0</p> | Max reaction Force 3915000 N for 7.1673 mm displacement |

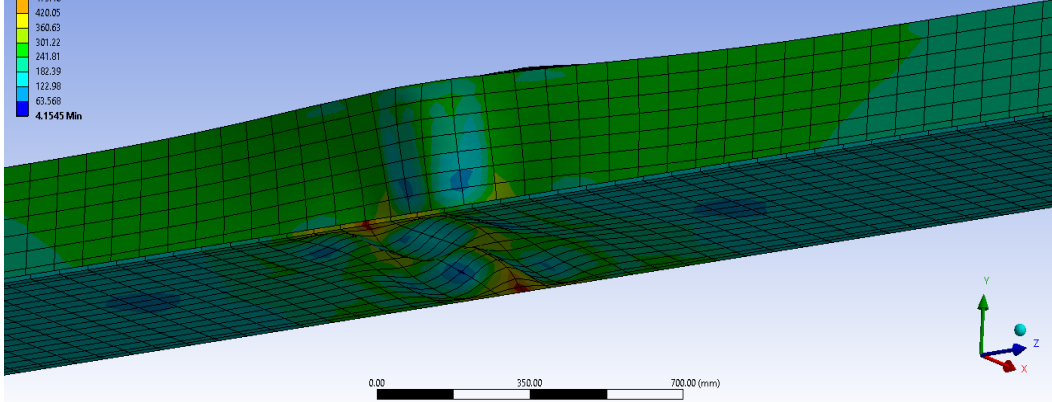
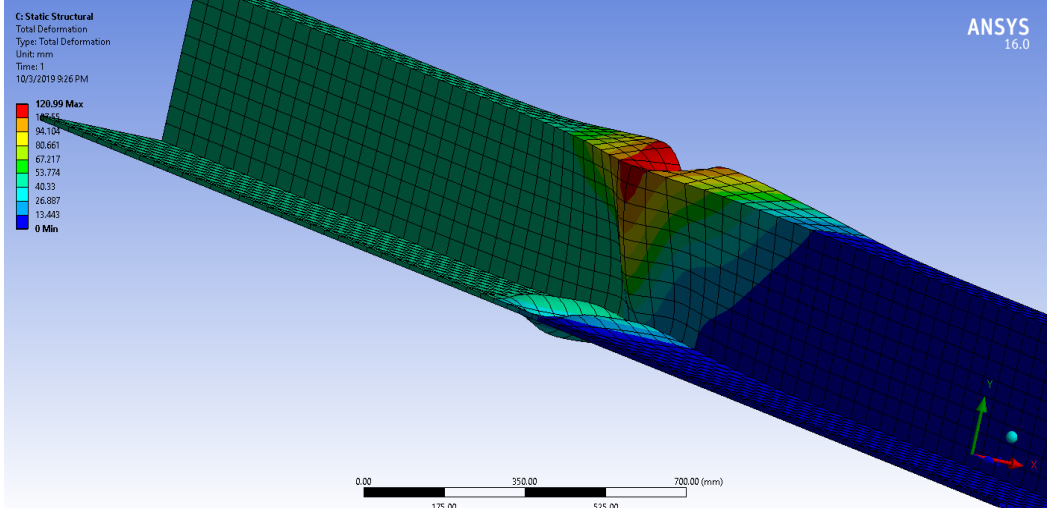
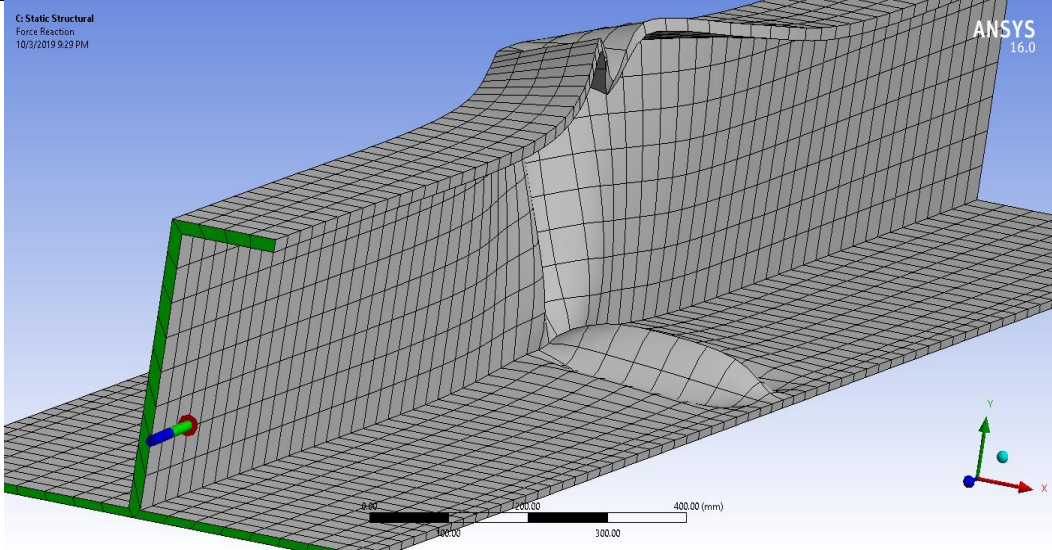
L 2800 dd NLn

| | | |
|---|---|--|
| <p>Equivalent Von-Mises stresses</p> | <p>C: Static Structural Equivalent Stress Type: Equivalent (von-Mises) Stress Unit: MPa Time: 1 10/3/2019 8:45 PM</p> <p>553.04 Max 492.65 432.26 371.88 311.49 251.1 190.72 130.33 69.942 9.5555 Min</p> <p>ANSYS 16.0</p> | |
| <p>Total deformation</p> | <p>C: Static Structural Total Deformation Type: Total Deformation Unit: mm Time: 1 10/3/2019 8:45 PM</p> <p>96.0894 Max 81.494 72.712 63.076 52.331 40.724 28.030 14.242 0.000 0 Min</p> <p>ANSYS 16.0</p> | |
| <p>Force Reaction</p> | <p>C: Static Structural Force Reaction 10/3/2019 8:49 PM</p> <p>ANSYS 16.0</p> | <p>Max reaction Force</p> <p>4348200 N for 6.1931 mm displacement</p> |

L 2800 df NLn

| | | |
|--------------------------------------|--|--|
| Equivalent Von-Mises stresses |  <p>C: Static Structural Equivalent Stress Type: Equivalent (von-Mises) Stress Unit: MPa Time: 1 10/3/2019 9:07 PM</p> <p>364.57 Max 324.37 284.17 243.96 203.76 163.58 123.39 83.188 42.991 2.7936 Min</p> <p>0.00 200.00 400.00 600.00 800.00 (mm)</p> <p>ANSYS 16.0</p> | |
| Total deformation |  <p>C: Static Structural Total Deformation Type: Total Deformation Unit: mm Time: 1 10/3/2019 9:09 PM</p> <p>132.4 Max 117.69 102.98 88.267 73.556 58.845 44.134 29.423 14.712 0.00 Min</p> <p>0.00 200.00 400.00 600.00 800.00 (mm)</p> <p>ANSYS 16.0</p> | |
| Force Reaction |  <p>C: Static Structural Force Reaction 10/3/2019 9:11 PM</p> <p>0.00 200.00 400.00 600.00 800.00 (mm)</p> <p>ANSYS 16.0</p> | Max reaction Force 3974900 N for 3.6213 mm displacement |

L 5600 dd NLn

| | | |
|---|--|--|
| <p>Equivalent Von-Mises stresses</p> | <p>C: Static Structural Equivalent Stress Type: Equivalent (von-Mises) Stress Unit: MPa Time: 1 10/3/2019 9:37 PM</p>  <p>538.87 Max 479.46 420.05 360.63 301.22 241.81 182.39 122.98 63.568 4.1545 Min</p> <p>0.00 175.00 350.00 525.00 700.00 (mm)</p> <p>ANSYS 16.0</p> | |
| <p>Total deformation</p> | <p>C: Static Structural Total Deformation Type: Total Deformation Unit: mm Time: 1 10/3/2019 9:26 PM</p>  <p>120.99 Max 109.55 94.104 80.661 67.217 53.774 40.33 26.887 13.443 0 Min</p> <p>0.00 175.00 350.00 525.00 700.00 (mm)</p> <p>ANSYS 16.0</p> | |
| <p>Force Reaction</p> | <p>C: Static Structural Force Reaction 10/3/2019 9:29 PM</p>  <p>0.00 100.00 200.00 300.00 400.00 (mm)</p> <p>ANSYS 16.0</p> | <p><u>Max reaction Force</u></p> <p>4105000 N for 30.0 mm displacement</p> |

L 5600 df NLn

| | | |
|---|---|--|
| <p>Equivalent Von-Mises stresses</p> | <p>C: Static Structural Total Deformation Type: Total Deformation Unit: mm Time: 1 10/3/2021 9:58 PM</p> <p>166.32 Max 147.94 129.36 110.88 92.401 73.921 55.441 36.96 18.48 0 Min</p> <p>0.00 100.00 200.00 300.00 400.00 (mm)</p> <p>ANSYS 16.0</p> | |
| <p>Total deformation</p> | <p>C: Static Structural Total Deformation Type: Total Deformation Unit: mm Time: 1 10/3/2021 9:49 PM</p> <p>328.13 Max 291.67 255.21 218.75 182.29 145.83 0 Min</p> <p>0.00 200.00 400.00 600.00 800.00 (mm)</p> <p>ANSYS 16.0</p> | |
| <p>Force Reaction</p> | <p>C: Static Structural Force Reaction 10/3/2021 9:51 PM</p> <p>0.00 200.00 400.00 600.00 800.00 (mm)</p> <p>ANSYS 16.0</p> | <p><u>Max reaction Force</u></p> <p>3676200 N for 6.7782 mm displacement</p> |

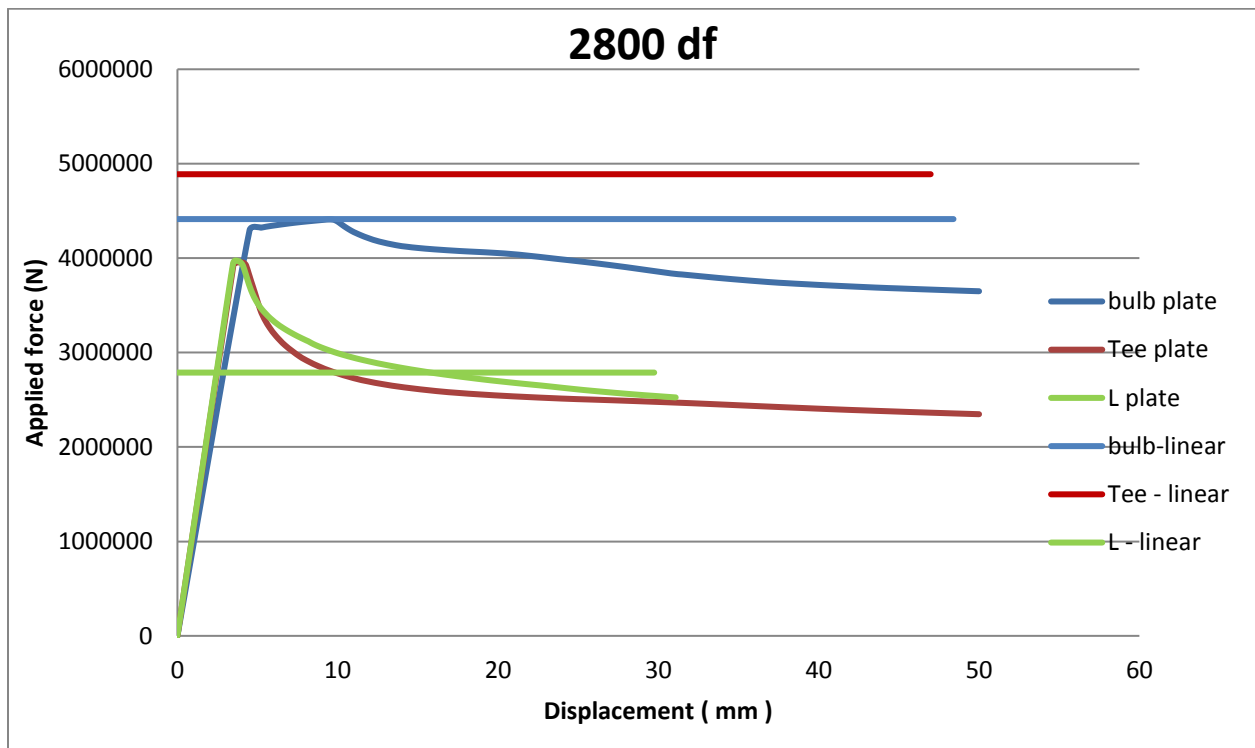
7.2 Σύγκριση αποτελεσμάτων

Από τα παραπάνω αποτελέσματα των μοντέλων και τις μετρήσεις που πήραμε από το **ANSYS** , καταστρώσαμε κάποια διαγράμματα στο excel στα οποία γίνονται οι συγκρίσεις των διάφορων δοκιμίων που επιλύθηκαν με το φορτίο που τους ασκήθηκε και τον τρόπο στήριξης (συνοριακές συνθήκες). Ωστόσο, για να επιτευχθεί η πρόκληση του μη-γραμμικού λυγισμού υπάρχουν δύο δυνατότητες:

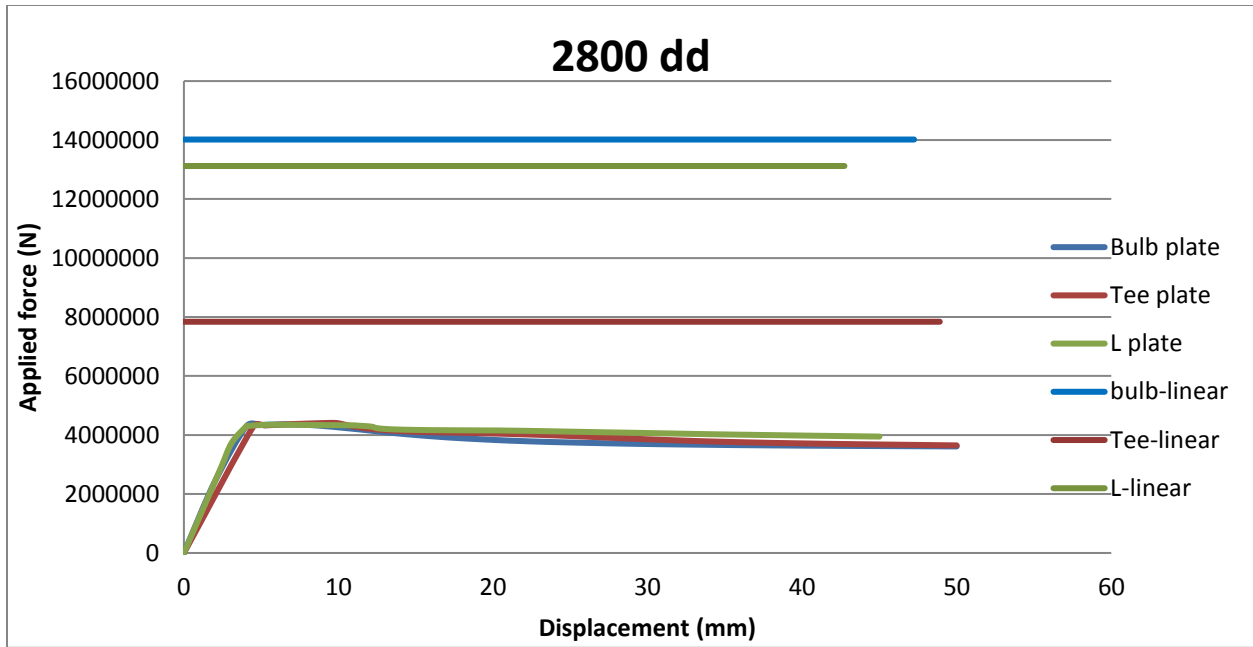
- η εισαγωγή αυθαιρέτων γεωμετρικών ατελειών ή
- η άσκηση μιας κάθετης , μικρής κατανεμημένης πίεσης (ή δύναμης 1000N) στην επιφάνεια του ελάσματος, δρώντας ως την ελάχιστη δυνατή διεγείρουσα πίεσης ώστε η διατομή/κατασκευή να αποκτήσει μόνιμη παραμόρφωση.

Στην περίπτωση μας , επιλέξαμε να ασκήσουμε μια ομοιόμορφη πίεση $P = F/A = 1000N / 600mm*2800mm = 0.00059 N/mm^2$, η οποία ισοδυναμεί με την ομοιόμορφη κατανεμημένη δύναμη των 1000 N. Για την ίδια δύναμη και διαστάσεις 600*5600 παίρνουμε πίεση διέγερσης $P = 0.000297 N/mm^2$ (υποδιπλάσια).

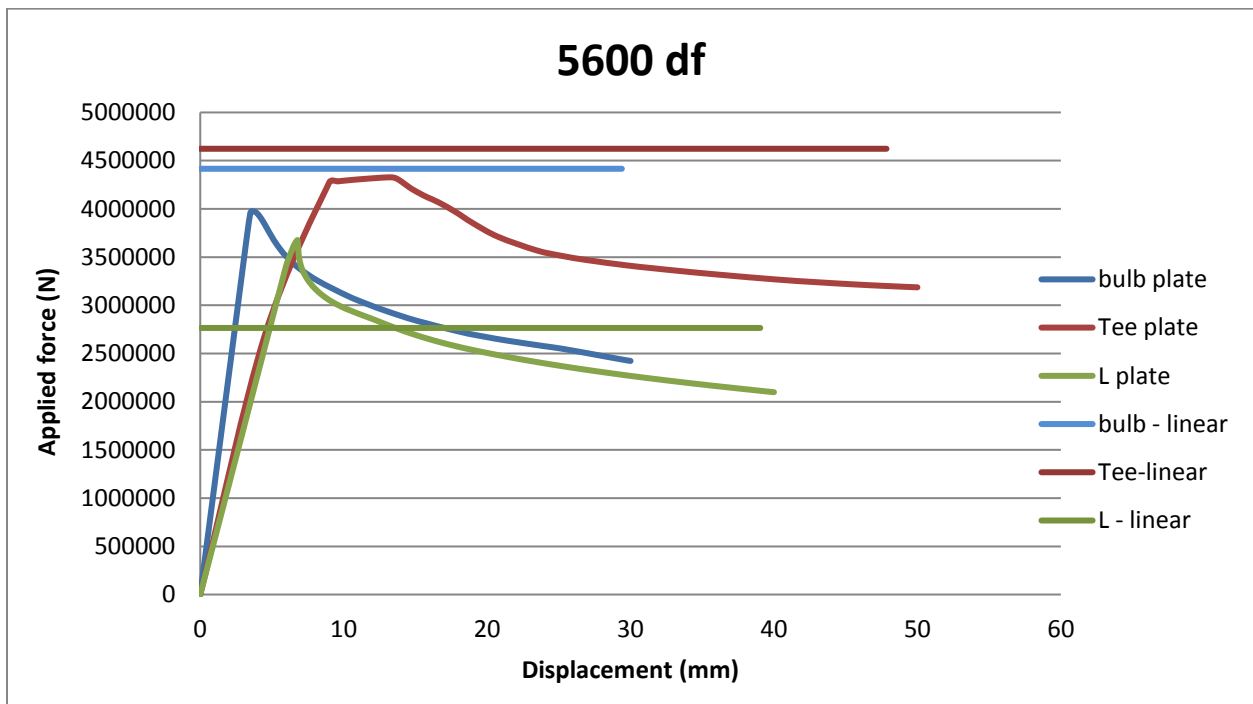
Για τον κάθε συνδυασμό συνοριακών συνθηκών-φόρτιση και ισοδύναμο μήκος ελάσματος, κατασκευάσαμε τα εξής διαγράμματα :



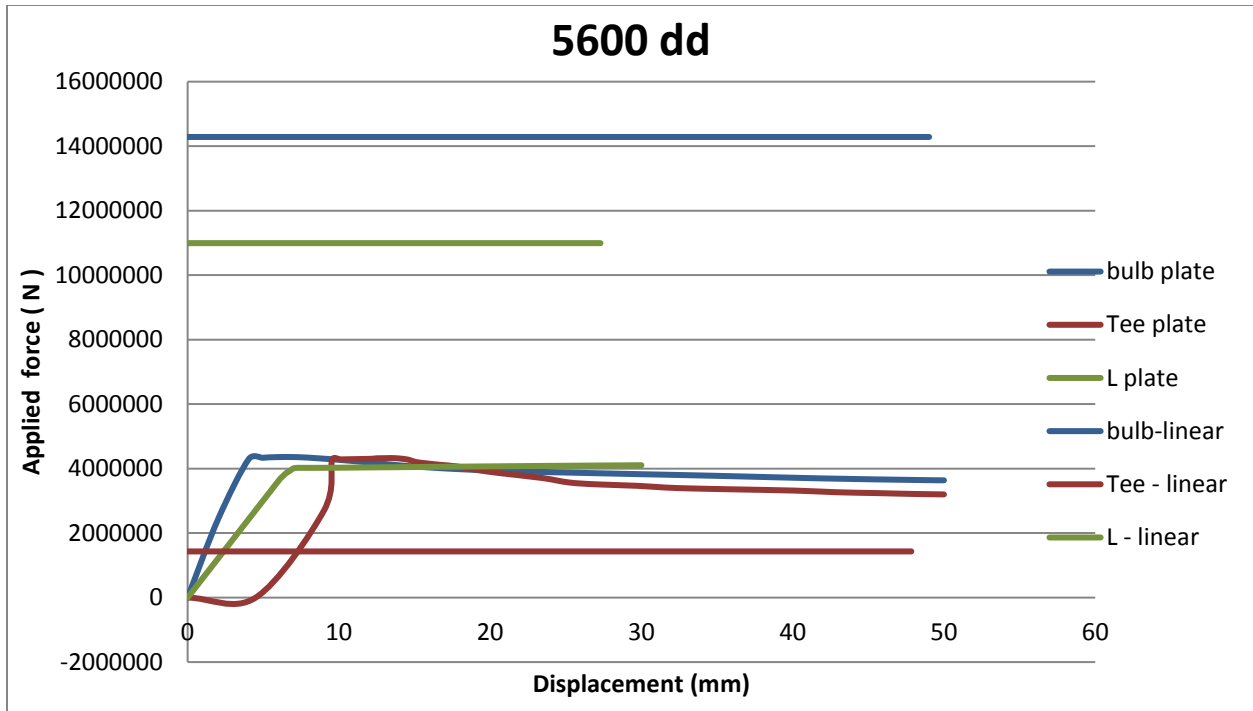
Εικόνα 48 Διάγραμμα απεικόνισης της (αντίθετης) αντιδρούσας δύναμης (Force Reaction ή Applied force) σε συνάρτηση με το αξονικό θλιπτικό φορτίο μετατόπισης (displacement) που ασκείται κάθετα στη διατομή για μήκος 2800mm και ελεύθερες τις (αφόρτιστες) πλευρές μεγαλύτερου μήκους. Το φορτίο που επιβάλλουμε (applied force) είναι αυτό που λαμβάνουμε από το πρόγραμμα ως Reaction Force λόγω ισοροπίας της δοκού-ελάσματος (δυνάμεις δράσης-αντίδρασης).



Εικόνα 49 Διάγραμμα απεικόνισης της αντιδρούσας δύναμης (Force Reaction ή Applied force) συναρτήσεως του αξονικού θλιπτικού φορτίου μετατόπισης (displacement) ασκούμενο κάθετα στην εγκάρσια διατομή του ενισχυμένου ελάσματος για μήκος 2800mm και κρατημένες τις μεγαλύτερες (αφόρτιστες) πλευρές.



Εικόνα 50 Διάγραμμα απεικόνισης της αντιδρούσας δύναμης (Force Reaction) συναρτήσεως του αξονικού θλιπτικού φορτίου μετατόπισης (displacement) ασκούμενο κάθετα στην εγκάρσια διατομή του ενισχυμένου ελάσματος για μήκος 5600mm και ελεύθερες τις αφόρτιστες) μεγαλύτερες πλευρές.



Εικόνα 51 Διάγραμμα απεικόνισης της αντιδρούσας δύναμης (Force Reaction ή Applied force συναρτήσει του αξονικού θλιπτικού φορτίου μετατόπισης (displacement) ασκούμενο κάθετα στην εγκάρσια διατομή του ενισχυμένου ελάσματος για μήκος 5600mm και κρατημένες τις (αφόρτιστες) μεγαλύτερες πλευρές.

7.3 Συμπεράσματα - Παρατηρήσεις

Από την παραπάνω μελέτη γίνεται αντιληπτό ποιο ενισχυτικό είναι πιο ανθεκτικό στην εκάστοτε περίπτωση . Συγκεκριμένα συμπεραίνουμε ότι για τον μη-γραμμικό λυγισμό παρατηρήθηκαν τα εξής :

- Από τα διαγράμματα για μήκος 2800 mm βλέπουμε ότι για **dd** και **df** το πιο ανθεκτικό είναι εκείνο του συνεργαζόμενου ελάσματος-βολβολάμας με οριακές συνθήκες **dd** με μέγιστο θλιπτικό επιβαλλόμενο φορτίο στον γραμμικό λυγισμό το **1.4018*10⁷ N**. Το ίδιο ισχύει, ωστόσο και στην περίπτωση του διπλάσιου μήκους ελάσματος (5600mm) όπου το φορτίο είναι ελαφρά μεγαλύτερο **1.4285*10⁷ N**.
- Στην περίπτωση του **2800_ df** το πιο ανθεκτικό φαίνεται να είναι η βολβολάμα στον μη-γραμμικό λυγισμό ενώ το Ταυ και η γωνία L συμπεριφέρονται σχεδόν παρόμοια. Σαν γεωμετρία, η βολβολάμα , για το ίδιο φορτίο καταπόνησης, φαίνεται να αποκτά μια σταθερότητα για ένα μικρό εύρος τιμών επιβαλλόμενης μετατόπισης (κράτυνση). Στη συνέχεια, βέβαια, ενώ η κατασκευή διαρρέει, γίνεται με σχεδόν γραμμικό τρόπο. Από αυτό καταλαβαίνουμε πως, η συγκεκριμένη γεωμετρία είναι ικανή να αντέχει φορτία ακόμα και μετά τη διαρροή της και ο ρυθμός μείωσης της ανθεκτικότητας της αντοχής της να γίνεται με ομαλό τρόπο.
- Στην περίπτωση **2800_ dd** παρατηρούμε ότι όταν έχουμε όλες τις πλευρές του ελάσματος – φορτισμένες και αφόρτιστες – όλα τα ενισχυτικά παραλαμβάνουν σχεδόν το ίδιο φορτίο ελαφρά μεγαλύτερο από την περίπτωση που οι αφόρτιστες πλευρές είναι ελεύθερες προς την κάθετη μετατόπιση.
- Στην περίπτωση του διπλάσιου μήκους ελάσματος για **5600_df** λίγο πιο ανθεκτικό από τη βολβολάμα είναι το ενισχυτικό Ταυ. Αντίθετα στην περίπτωση για **5600_dd** βλέπουμε και πάλι ότι η βολβολάμα είναι το πιο ανθεκτικό ενισχυτικό παραλαμβάνοντας μεγαλύτερο φορτίο, ενώ με την αύξησή του η παραμόρφωσή της μεταπίπτει ομαλά . Εδώ συγκεκριμένα παρόμοια συμπεριφορά έχει και το ενισχυτικό Ταυ.
- Αυτό όμως που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι ότι σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις το φορτίου γραμμικού λυγισμού είναι υπερεκτιμημένο και δεν δίνει σωστή πρόβλεψη για την αρχή της κατάρρευσης της κατασκευής (έναρξη του λυγισμού). Έτσι , ενώ συχνά φαίνεται ότι με τη μελέτη γραμμικού λυγισμού ο σχεδιαστής μηχανικός είναι καλυμμένος για την αντοχή της κατασκευής, σε κάποιες περιπτώσεις είναι αναγκαίο να συντελείται και η μη-γραμμική μελέτη της κατασκευής, για τυχόν πρόωρη διαρροή.
- Μια εξίσου σημαντική παρατήρηση είναι ότι ο θεωρητικός υπολογισμός των φορτίων λυγισμού με τη θεωρία του *Euler* δεν συμπίπτει καθόλου με τον αντίστοιχο για τον γραμμικό λυγισμό από το πρόγραμμα *ANSYS* . Αντιθέτως, οι τιμές έχουν μια απόκλιση 100,000 – 200,000 Newtons για την κάθε φόρτιση του εκάστοτε ενισχυτικού. Αυτό ίσως να μας προϊδεάζει που περίπου κοντά να περιμένουμε την πραγματική κατάρρευση της κατασκευής.

Γενικά, γραμμικός και μη-γραμμικός λυγισμός είναι δύο διαφορετικά φαινόμενα. Εκεί όπου οι μη-γραμμικότητες είναι έντονες , όπως στην αρχική γεωμετρία από την παραγωγή (παραμένουσες τάσεις, αρχικό βέλος κάμψης σε δοκούς και στύλους) ή το ίδιο το υλικό συμπεριφέρεται μη-γραμμικά, τότε λαμβάνει χώρα υποχρεωτικά η μη-γραμμική ανάλυση για τον υπολογισμό του φορτίου λυγισμού. Παρόλο που υπάρχει ένα νέο κεφάλαιο στους κανονισμούς **CSR** για την αξιολόγηση των ενισχυτικών και των ελασμάτων ως προς τον λυγισμό, καλό θα ήταν ο μελετητής ναυπηγός να διεξάγει και μια μη-γραμμική μελέτη προκειμένου να είναι ασφαλής η προς μελέτη κατασκευή, χωρίς περιθώρια λάθους.

8. Βιβλιογραφία

- [1] **Αλέξανδρος Θεοδουλίδης. 2020.** ΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΝΑΥΠΗΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ. [UNIWA Open eClass] Αθήνα : s.n., 2020.
- [2] **Ferdinand P. Beer , E.Russell Johnston , Jr. John T. DeWolf , David F. Mazurek. 2012.** ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ. 6η Έκδοση, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ, 2012.
- [3] **I.A.C.S. . 01 JAN 2019.** C.S.R. for Bulk Carriers and Oil Tankers. 01 JAN 2019.
- [4] **K.J. RAWSON & E.C. TUPPER. 2002.** ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΟΙΟΥ. 4η . ΑΘΗΝΑ : Addison Wesley Longman Limited, 2002. Τόμ. 1.
- [5] **Mohamed Shama. 2013.** Buckling of Ship Structures. Alexandria, Egypt : Springer, 2013.
- [6] **Piotr Stepien .** Linear VS Nonlinear buckling.
- [7] **PROFESSOR ALLA MANSOUR AND DONALD LIU. 2008.** Strength of Ships and Ocean Structures. New Jersey, USA : The Society of Naval Architects and Marine Engineers , SNAME, 2008.
- [8] **STEPHEN P. TIMOSHENKO and JAMES M. GERE. 1985.** Theory of Elastic Stability. New York : s.n., 1985.
- [9] **Θεοδουλίδης Αλέξανδρος, Δημήτριος Δραγατογγιάνης. 2020.** ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΤΗ ΝΑΥΠΗΓΙΚΗ ΚΑΙ ΤΗ ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ. [UNIWA Open eClass] Αθήνα : s.n., 2020.
- [10] **ΠΕΤΡΟΣ Α. ΚΑΡΥΔΗΣ. 2000.** Η Μεταλλική Κατασκευή του Πλοίου - Θέματα Τοπικής Αντοχής. Αθήνα : Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο , 2000.
- [11] **Χαράλαμπος Ι. Γαντές. 2015.** ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ. [ΣΕΑΒ] ΑΘΗΝΑ : ΣΕΑΒ , 2015.
- [12] **Χριστόφορος Γ. Προβατίδης. 2015.** Πεπερασμένα Στοιχεία στην Ανάλυση Κατασκευών. 2η Έκδοση. Αθήνα : ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ, 2015.