



**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ:
«ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΩΝ ΣΕ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ, ΑΡΧΕΙΑ, ΜΟΥΣΕΙΑ»**

**ΤΜΗΜΑ ΑΡΧΕΙΟΝΟΜΙΑΣ, ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΩΝ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**DEPARTMENT OF ARCHIVAL, LIBRARY AND INFORMATION STUDIES
SCHOOL OF MANAGEMENT, ECONOMICS AND SOCIAL SCIENCES**

Διπλωματική Εργασία

**Ανάλυση φιλοσοφικού λόγου στην τυπική γλώσσα του
Κατηγορηματικού Λογισμού**

Συγγραφέας

Ειρήνη Κοτσίκου (186682010)

Επιβλέπων: Μάρκος Δενδρινός

Αθήνα, Νοέμβριος 2020

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας την εκπόνηση της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας, θα ήθελα να απευθύνω τις ευχαριστίες μου σε μια σειρά από ανθρώπους που με βοήθησαν καθ' όλη τη διάρκεια της πορείας μου αυτής.

Κατ' αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Μάρκο Δενδρινό για τις χρήσιμες συμβουλές, την πολύτιμη καθοδήγησή του, αλλά και για την υποστήριξη του και το χρόνο που διέθεσε κατά τη διάρκεια υλοποίησης της εργασίας αυτής. Επιπλέον, για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον πεδίο, όπως αυτό με το οποίο καταπιάνεται η παρούσα εργασία.

Θα ήθελα ακόμα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές του τμήματος Αρχαιονομίας, Βιβλιοθηκονομίας και Συστημάτων Πληροφόρησης, για τις επιστημονικές γνώσεις που μου μεταλαμπάδευσαν και για τις χρήσιμες συμβουλές τους καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Επίσης, ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου, για την στήριξη τους σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου και για την αμέριστη συμπαράσταση και βοήθεια τους όλο αυτόν τον καιρό της προετοιμασίας της συγκεκριμένης εργασίας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου, για την κατανόηση και τις σημαντικές συμβουλές που μου παρείχαν, καθώς επίσης και για την υπομονή τους και που όλο αυτόν τον καιρό με στήριζαν και με ενθάρρυναν στον υπέρτατο βαθμό.

15/11/2020

Ειρήνη Κοτσίκου

Περίληψη

Η ιστορία της επιστήμης της λογικής ανάγεται πολλούς αιώνες πίσω, στην εποχή του Αριστοτέλη, ο οποίος υπήρξε και θεμελιωτής της. Τους δύο τελευταίους αιώνες η εξέλιξη της ήταν ραγδαία και πλέον αποτελεί απαραίτητο στοιχείο σε όλες τις επιστήμες. Από τα τέλη του 19ου αιώνα, η μαθηματική λογική ανέκυψε ως φυσικό επακόλουθο της ανάγκης κατασκευής μιας αυστηρής γλώσσας για την περιγραφή περίπλοκων μαθηματικών θεωριών. Η μαθηματική λογική συναντάται και ως τυπική λογική, λόγω του αυστηρού χαρακτήρα της και συμβολική, λόγω των συμβόλων που χρησιμοποιεί αντί για λέξεις. Τα δύο σημαντικότερα είδη μαθηματικής λογικής είναι ο προτασιακός λογισμός και ο κατηγορηματικός λογισμός.

Στην παρούσα εργασία περιγράφουμε τη γλώσσα του κατηγορηματικού λογισμού και πιο συγκεκριμένα το συντακτικό, τη σημασιολογία και τους μηχανισμούς εξαγωγής συμπερασμάτων της. Στη συνέχεια επιχειρείται η μετατροπή προτάσεων φυσικής γλώσσας στην τυπική γλώσσα του κατηγορηματικού λογισμού. Πιο συγκεκριμένα, οι προτάσεις φυσικής γλώσσας που θα μεταγραφούν στη κατηγορηματική γλώσσα έχουν προέλθει από τους φιλοσοφικούς διαλόγους του Πλάτωνα. Σε αυτά τα έργα γίνεται μια προσπάθεια ορισμού μιας έννοιας, όπου από διάφορες προκείμενες προτάσεις καταλήγουν σε ένα συμπέρασμα. Τέλος, με το βασικό μηχανισμό εξαγωγής συμπερασμάτων της κατηγορηματικής λογικής, θα ελέγξουμε την ορθότητα αυτών των συμπερασμάτων.

Λέξεις Κλειδιά: Κατηγορηματικός Λογισμός, Κατηγορηματική Λογική, Λογική Πρώτου Βαθμού, Πρωτοβάθμια Λογική, Λογική, Πλατωνικοί Διάλογοι, Πλατωνικά Έργα, Επεξεργασία Φυσικής Γλώσσας

Abstract

The history of the science of logic dates back many centuries, to the time of Aristotle, who was also its founder. In the last two centuries its evolution has been rapid and is now a necessary element in all sciences. From the end of the 19th century, mathematical logic emerged as a natural consequence of the need to construct a rigorous language to describe complex mathematical theories. Mathematical logic is found both as formal logic, due to its strict nature, and as symbolic, due to the symbols it uses instead of words. The two most important types of mathematical logic are propositional calculus and predicate calculus.

In the present work, we describe the language of predicate calculus and more specifically its syntax, semantics and mechanisms for drawing conclusions. Then, the conversion of propositions of natural language into the standard language of predicate calculus is attempted. More specifically, the propositions of natural language that will be translated into the predicate language have come from Plato's philosophical dialogues. In these works an attempt is made to define a concept, where from various premises they come to a conclusion. Finally, with the basic mechanism of drawing conclusions of categorical logic, we will check the correctness of these conclusions.

Keywords: Predicate Logic, Predicate Calculus, First-Order Logic, Logic, Platonic Dialogues, Platonic Works, Natural Language Processing

Πίνακας περιεχομένων

| | |
|--|-----------|
| ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ | III |
| ΠΕΡΙΛΗΨΗ | IV |
| ABSTRACT | V |
| ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ | VI |
| ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ..... | VIII |
| ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΙΝΑΚΩΝ | IX |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ | 1 |
| 1.1 Η ΛΟΓΙΚΗ | 1 |
| 1.1.1 Η λογική στην αρχαιότητα..... | 1 |
| 1.1.2 Η λογική στην νεότερη και σύγχρονη εποχή | 3 |
| 1.2 ΣΚΟΠΟΣ ΚΑΙ ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ | 6 |
| 1.3 ΔΙΑΡΘΡΩΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ | 6 |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Ο ΠΛΑΤΩΝ | 7 |
| 2.1 Η ΖΩΗ ΤΟΥ | 7 |
| 2.2 ΤΑ ΕΡΓΑ ΤΟΥ | 11 |
| 2.3 Η ΔΙΑΛΕΚΤΙΚΗ ΤΟΥ..... | 14 |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Ο ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ | 17 |
| 3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ..... | 17 |
| 3.2 ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΟ | 18 |
| 3.2.1 Συντακτικά σύμβολα..... | 18 |
| 3.2.2 Κατηγορήματα..... | 20 |
| 3.2.3 Συναρτήσεις | 22 |
| 3.2.4 Ποσοδείκτες | 22 |
| 3.2.5 Λογικά και μη λογικά σύμβολα | 25 |
| 3.2.6 Όροι και τύποι | 25 |
| 3.3 ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΑ | 27 |
| 3.3.1 Εννοιολογική αποτύπωση | 27 |
| 3.3.2 Ερμηνεία | 29 |

| | | |
|--|---|-----------|
| 3.3.3 | Εκτίμηση αληθείας | 30 |
| 3.3.4 | Οι κανονικές μορφές στον κατηγορηματικό λογισμό | 32 |
| 3.3.5 | Ισοδυναμίες..... | 33 |
| 3.4 | ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΞΑΓΩΓΗΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ | 34 |
| 3.4.1 | Συστήματα απόδειξης..... | 34 |
| 3.4.2 | Διαδικασία μετατροπής προτάσεων από καλοσηματισμένη μορφή σε φράσεις..... | 35 |
| 3.4.3 | Η αρχή της απόφασης..... | 37 |
| 3.5 | ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ | 38 |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΕΥΘΥΦΡΩΝ – Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΣΙΟΥ | | 39 |
| 4.1 | ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΔΙΑΛΟΓΟΥ | 39 |
| 4.2 | ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΑ ΚΟΜΜΑΤΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΛΟΓΟΥ | 40 |
| 4.3 | ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΑΠΟΦΑΣΗΣ | 42 |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΛΑΧΗΣ – Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΝΔΡΕΙΑΣ | | 44 |
| 5.1 | ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΔΙΑΛΟΓΟΥ | 44 |
| 5.2 | ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΑ ΚΟΜΜΑΤΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΛΟΓΟΥ | 45 |
| 5.3 | ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΑΠΟΦΑΣΗΣ | 46 |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΛΥΣΙΣ – Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΦΙΛΙΑΣ..... | | 49 |
| 6.1 | ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΔΙΑΛΟΓΟΥ | 49 |
| 6.2 | ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΑ ΚΟΜΜΑΤΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΛΟΓΟΥ | 51 |
| 6.3 | ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΑΠΟΦΑΣΗΣ | 54 |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ | | 56 |
| 7.1 | ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ | 56 |
| 7.2 | ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ | 56 |
| 7.3 | ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ..... | 56 |
| ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ..... | | 58 |
| ΠΡΟΣΘΕΤΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ..... | | 61 |

Πίνακας Σχημάτων

| | |
|---|----|
| Σχήμα 1. Εννοιολογική αποτύπωση : ο κόσμος, η γλώσσα και η ερμηνεία | 28 |
|---|----|

Πίνακας Πινάκων

| | |
|---|----|
| Πίνακας 1 Τα έργα του Πλάτωνα..... | 11 |
| Πίνακας 2. Λογικά συνδετικά..... | 19 |
| Πίνακας 3. Ποσοδείκτες..... | 20 |
| Πίνακας 4. Λογικές ισοδυναμίες από την προτασιακή λογική..... | 33 |
| Πίνακας 5. Λογικές ισοδυναμίες ποσοδεικτών..... | 34 |
| Πίνακας 6. Λογικές ισοδυναμίες – λογικά συμπεράσματα..... | 34 |
| Πίνακας 7. Πίνακας αληθείας $(\Phi 3) \wedge (\Phi 4) - (\Phi 5) \wedge (\Phi 6)$ | 52 |
| Πίνακας 8. Πίνακας αληθείας $(\Phi 11) - (\Phi 12)$ | 53 |

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή

1.1 Η Λογική

Η λέξη «λογική» προέρχεται από την λέξη «λόγος», η οποία χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Ηράκλειτο, τον ιδρυτή της Σχολής της Εφέσου, για να περιγράψει «τη νομοτέλεια που χαρακτηρίζει τις μεταβολές των πραγμάτων» (Κορδάτος, 1972, όπως αναφέρεται στον Μάργαρη, 2018). Αρχικά, η επιστήμη της λογικής περιέγραφε τον προφορικό λόγο που στηριζόταν η σκέψη και χαρακτηριζόταν από κάποια δομή, ωστόσο σήμερα ορίζεται ως «η συστηματική μελέτη των πάσης φύσεως επιχειρημάτων ή διαλογισμών τα οποία στηριζόμενα σε κάποιες προκείμενες ή παραδοχές, καταλήγουν τελικά σε κάποιο συμπέρασμα» (Μάργαρης, 2018: 2). Σύμφωνα με τους Αναπολιτάνος, κ.α. (1991: 9), η λογική ασχολείται κατά κύριο λόγο με τη «μελέτη διαδικασιών και κανόνων, με τους οποίους μπορούμε να οδηγηθούμε με ορθό τρόπο από υποθέσεις σε συμπεράσματα.

Η λογική «αποτελεί κεντρικό στοιχείο σε όλες τις επιστήμες, καθώς προσφέρει, μέσω των αρχών της συλλογιστικής, την μεθοδολογία για την αναπαράσταση και την επίλυση ποικίλων προβλημάτων. Κάθε λογική έχει ένα αυστηρό (μαθηματικό) ορισμό, που καθορίζει την μεθοδολογία και την σημασιολογία της. [...] Πρακτικά κάθε λογική μέσω της αντίστοιχης διαδικασίας συλλογιστικής, συνδυάζει τμήματα υπάρχουσας γνώσης με αποτέλεσμα την παραγωγή νέας. Με άλλα λόγια, η συλλογιστική επιτρέπει την εξαγωγή συμπερασμάτων, ωστόσο για το σκοπό αυτό είναι απαραίτητη η χρήση αντίστοιχων μηχανισμών εξαγωγής συμπερασμάτων» (Κράβαρη, 2015: 39-40).

Στην επόμενη υποενότητα παρατίθεται μια σύντομη ιστορική ανασκόπηση σχετικά με την εξέλιξη της επιστήμης της λογικής τόσο στα αρχαία χρόνια όσο και στη νεότερη και σύγχρονη εποχή.

1.1.1 Η λογική στην αρχαιότητα

Όπως είναι φυσικό οι άνθρωποι επιχειρηματολογούσαν, χωρίς βέβαια να ακολουθούν ή να διατυπώνουν κανόνες για τον τρόπο που το έπρατταν, αιώνες πριν την εμφάνιση της λογικής (Αναπολιτάνος, κ.α., 1991). Η συστηματική ανάπτυξη της επιστήμης της Λογικής έχει τις ρίζες της στην αρχαία Ελλάδα και είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη φιλοσοφία (Μάργαρης, 2018). Θεμελιωτής της λογικής θεωρείται ο Αριστοτέλης, αν και προκύπτει από διάφορες πηγές ότι υπήρξαν αρκετοί φιλόσοφοι πριν από αυτόν, που

ασχολήθηκαν με θέματα λογικής. Ο Πλάτων, στους διαλόγους του, διατυπώνει, συχνά με έμμεσο τρόπο, λογικές αρχές, όπως για παράδειγμα, στην Πολιτεία αναφέρεται στον αποκαλούμενο «Νόμο της Αντίφασης», σύμφωνα με τον οποίο είναι αδύνατο ταυτόχρονα κάτι να ισχύει και να μην ισχύει. Αν και ο Πλάτων ανακάλυψε μερικές έγκυρες λογικές αρχές και η συνεισφορά του ήταν σημαντική στον τομέα της φιλοσοφικής λογικής, δεν έκανε καμιά συστηματική προσπάθεια να αναπτύξει ένα σύστημα τέτοιων αρχών (Αναπολιτάνος, κ.α., 1991).

Ο Αριστοτέλης πραγματοποίησε την πρώτη συστηματική μελέτη λογικών αρχών και κανόνων. Ασχολήθηκε με την τέχνη της έγκυρης γνώσης και της απόδειξης. Για αυτό το λόγο δε θεωρούσε τη λογική φιλοσοφική μάθηση, αλλά «προπαιδεία και γενικό εργαλείο (όργανο) για κάθε επιστημονική εργασία». Ο Αριστοτέλης μέσα από μια σειρά βιβλίων που αφορούσαν στη λογική, περιέγραψε τις αντιλήψεις του σχετικά με την ανθρώπινη σκέψη και τους τρόπους συλλογισμού. Τα έργα αυτά ομαδοποιήθηκαν από τους μαθητές του, μετά το θάνατο του ίδιου (322 π.Χ.), σε ένα ενιαίο έργο που ονομάστηκε «Όργανον». Συνοπτικά, σε αυτά τα έργα ασχολήθηκε με κανόνες κατασκευής ορθών συλλογισμών (Τοπικά), την κατάταξη των κατηγορημάτων (ιδιοτήτων) (Κατηγορίες), την ανάλυση επιχειρημάτων με βάση τη μορφή τους (Αναλυτικά Πρότερα), τη μελέτη της επιστημονικής απόδειξης (Αναλυτικά Ύστερα), την ανάλυση απλών κατηγορηματικών προτάσεων (Περί Ερμηνείας). Στα Αναλυτικά Πρότερα επίσης, ο μεγάλος φιλόσοφος ορίζει την έννοια του συλλογισμού, που ισχύει μέχρι και σήμερα, ως «μια λεκτική μορφή σύμφωνα με την οποία από ένα σύνολο υποθέσεων παράγονται κατ' ανάγκη συγκεκριμένα συμπεράσματα» (Αναπολιτάνος, κ.α.: 16). Επίσης ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε γράμματα του αλφαβήτου ως σύμβολα μεταβλητών όρων, για να δείξει την υποκείμενη λογική μορφή των επιχειρημάτων και γι' αυτό μπορεί να θεωρηθεί ο πρώτος επιστήμονας της τυπικής λογικής (Μάργαρης, 2018).

Σημαντική συνεισφορά στην λογική επιστήμη παρείχε και η δεύτερη μεγάλη σχολή της αρχαίας Ελλάδας (μετά την Περιπατητική σχολή λογικής του Αριστοτέλη), η Στωική σχολή, που ασχολήθηκε με τη μελέτη των επιχειρημάτων της καθημερινής ζωής. Ενώ οι Περιπατητικοί ασχολήθηκαν με τη λογική των κατηγορημάτων, οι στωικοί ασχολήθηκαν με τη λογική των προτάσεων, δηλαδή οι πρώτοι μελέτησαν τις λογικές σχέσεις μεταξύ προτάσεων δίνοντας έμφαση στα μέρη των προτάσεων (υποκείμενο-κατηγορημα), ενώ οι δεύτεροι λαμβάνοντας τις προτάσεις ως ολότητα. Αν και υπήρχε αντιπαλότητα μεταξύ των δύο σχολών και οι λογικές που εφάρμοσαν υπήρξαν ανταγωνιστικές για αιώνες, αργότερα διαπιστώθηκε ότι αφορούν συμπληρωματικές θεωρίες (Αναπολιτάνος, κ.α., 1991). Οι

σημαντικότεροι στωικοί λογικοί ήταν ο Χρύσιππος και ο Φίλωνας ο Μεγαρεύς, οι οποίοι διατύπωσαν τη δίτιμη λογική (μια αποφαντική πρόταση θα είναι είτε αληθής είτε ψευδής). Στη στωική λογική επίσης, μέσα από μελέτη υποθετικών συλλογισμών εμφανίζονται για πρώτη φορά οι λογικές πράξεις της σύζευξης, της διάζευξης και της άρνησης, θέτοντας έτσι τις βάσεις για τη σύγχρονη προτασιακή λογική, με την τυποποίησή των πράξεων αυτών κάποιους αιώνες αργότερα με σύμβολα και λογικούς τελεστές (Μάργαρης, 2018). Εκείνοι έκαναν ακόμη τη σημαντική διάκριση μεταξύ του “σημαινόμενου” (δηλαδή στο νόημα), και στο “σημαίνον” (δηλαδή στη λέξη ή λέξεις που είναι φορέας του νοήματος), που απασχόλησε σοβαρά φιλοσόφους αρκετά αργότερα, όπως τον Frege τον 19ο αιώνα (Αναπολιτάνος, κ.α., 1991).

1.1.2 Η λογική στην νεότερη και σύγχρονη εποχή

Μετά την εποχή του Αριστοτέλη η ενασχόληση με τη λογική περιορίστηκε στη συγγραφή σχολιασμών για το έργο του, το οποίο μεταφράστηκε σε πολλές γλώσσες. Χάρη στο έργο των σχολιαστών, όπως ο Βοήθιος και ο Θωμάς, ο Ακινάτης, η αριστοτελική λογική διαδόθηκε και σε άλλους λαούς και επηρέασε σε μεγάλο βαθμό στη δυτική σκέψη. Μέχρι το 19ο αιώνα δεν υπήρξε κάποια αξιοσημείωτη πρόοδος στην επιστήμη της λογικής, με κάποιες εξαιρέσεις φτωχότερη από τις οποίες ήταν ο Gottfried Leibniz (1646-1716) και ο Bernard Bolzano (1781-1848). Ο Leibniz (που είχε πραγματοποιήσει αριστοτελικές σπουδές) προσπάθησε να αναπτύξει μια παγκόσμια γλώσσα, την “characteristica universalis”, μέσω της οποίας όλες οι επιστημονικές και φιλοσοφικές διερευνήσεις θα μπορούσαν να αναχθούν σε υπολογισμούς. Ο Bolzano ανέπτυξε βασικές έννοιες της λογικής (όπως της λογικής συνέπειας) και χρησιμοποίησε μια εν μέρει τυπική γλώσσα (δηλαδή τη γερμανική εμπλουτισμένη με σταθερές και μεταβλητές) (Αναπολιτάνος, κ.α., 1991).

Αν και η προσπάθεια του Leibniz δεν επιτεύχθηκε, ωστόσο με τη σκέψη του αυτή έθεσε τις βάσεις για τη νεότερη λογική, η οποία είναι γνωστή ως μαθηματική, τυπική ή συμβολική λογική. Η μαθηματική λογική βασίζεται σε μεθόδους εξαγωγής συμπερασμάτων, οι οποίες όμως συνδυάζονται με τεχνικές από τον κλάδο των μαθηματικών. Αυτό το είδος λογικής αναφέρεται και ως συμβολική λογική, καθώς οι λέξεις αντικαθίστανται με ειδικά σύμβολα. Η επιστήμη της λογικής μέχρι εκείνο το διάστημα διατυπωνόταν μέσω της φυσικής, καθομιλούμενης γλώσσας, η οποία δεν είχε αυστηρή σύνταξη και οδηγούσε σε μια σειρά από παράδοξα, οπότε και κατέστη επιτακτική η ανάγκη κατασκευής μιας αυστηρής μαθηματικής γλώσσας, που να βασίζεται σε αξιώματα και κανόνες παραγωγής (Μάργαρης, 2018).

Η θεμελίωση της μαθηματικής λογικής ξεκίνησε ουσιαστικά με τα έργα Formal Logic (1847) του Augustus De Morgan, και το Mathematical Analysis of Logic (1847) του George Boole, στο οποίο περιέγραψε μια ειδική άλγεβρα που φέρει το όνομά του (άλγεβρα Boole). Στο διάστημα αυτό διακρίνονται τρεις διαφορετικές σχολές των λογικών αναζητήσεων, η καθεμία των οποίων ακολούθησε τη δική της προσέγγιση: η “αλγεβρική”, η “λογικιστική” και η “φορμαλιστική” σχολή. Η βασική ενασχόληση της αλγεβρικής σχολής ήταν η μελέτη της σχέσης ανάμεσα στις αριθμητικές/αλγεβρικές πράξεις και τις λογικές πράξεις στο πλαίσιο της επιχειρηματολογίας. Από τους κυριότερους εκπροσώπους της σχολής αυτής ήταν ο Boole, που προαναφέρθηκε. Τα μέλη της λογικιστικής σχολής θεωρούσαν ότι η λογική αποτελούσε τη βάση για κάθε είδους επιχειρηματολογία. Οι σημαντικότεροι εκπρόσωποι της λογικιστικής σχολής ήταν ο Gottlob Frege και ο Bertrand Russell. Ο Frege, ίσως ο μεγαλύτερος λογικός μετά τον Αριστοτέλη, ανέπτυξε στο έργο του Begriffsschrift (Εννοιογραφία) μια πλούσια και αυστηρή τυπική γλώσσα προσφέροντας σημαντική συνεισφορά στην πρωτοβάθμια λογική. Ο Russell με την ανακάλυψη του περίφημου παραδόξου του, κατέρριψε το σύστημα του Frege ως αντιφατικό. Επίσης, σε συνεργασία με τον Alfred Whitehead συνέταξαν το τρίτομο έργο Principia Mathematica, στο οποίο επιλύουν τα παράδοξα που είχε αναπτύξει ο Cantor, και αποδεικνύουν με τη βοήθεια λογικών κανόνων και αξιωμάτων όλες τις αποδείξεις και διατυπώσεις των μαθηματικών θεωρημάτων. Η φορμαλιστική σχολή ασχολήθηκε με την κατασκευή αξιωματικών συστημάτων και κανόνων παραγωγής για διάφορους κλάδους των μαθηματικών, ώστε αυτά να μην οδηγούν σε αντιφατικά αποτελέσματα. Από τους κυριότερους εκπροσώπους της ήταν ο γερμανός μαθηματικός David Hilbert, ο οποίος ανέπτυξε το περίφημο “πρόγραμμα του Hilbert”, που είχε σαν στόχο την αξιωματική θεμελίωση των μαθηματικών. Σε αυτό το πρόγραμμα προσπάθησε να διαχειριστεί το πρόβλημα της συνέπειας που σχετίζεται με τη σωστή σχεδίαση των παραγωγικών συστημάτων, ώστε αυτά να μην οδηγούν σε αντιφάσεις, και το πρόβλημα της απόφασης συνίσταται στην επινόηση μιας μηχανικής διαδικασίας (δηλαδή ενός αλγόριθμου) η οποία θα αποφάσιζε εάν η κάθε λογική έκφραση είναι αληθής στο θεωρούμενο αποδεικτικό σύστημα (Αναπολιτάνος, κ.α., 1991; Μάργαρης, 2018).

Κατά τον 20ο αιώνα, η μαθηματική λογική σημείωσε μεγάλη εξέλιξη, χάρη σε σημαντικούς λογικούς επιστήμονες, όπως ο Thoralf Skolem, Alonzo Church, Kurt Godel, Paul Cohen. Ειδικότερα, ο Godel (1906-1978) απέδειξε το περίφημο θεώρημα του περί της μη πληρότητας (σύμφωνα με το οποίο υπάρχουν αληθή θεωρήματα, τα οποία δεν είναι δυνατόν να αποδειχθούν), καταρρίπτοντας έτσι το πρόγραμμα του Hilbert (Αναπολιτάνος,

κ.α., 1991). Κατά τον 20ο αιώνα επίσης, η λογική βρίσκει αρκετές εφαρμογές σε διάφορους τομείς της πληροφορικής. Αυτοί οι τομείς περιλαμβάνουν μεταξύ άλλων τη μηχανική λογισμικού, όπως είναι οι βάσεις δεδομένων και οι γλώσσες προγραμματισμού καθώς και την ψηφιακή σχεδίαση που ασχολείται με τη σχεδίαση ολοκληρωμένων κυκλωμάτων. Επίσης αποτελεί αναπόσπαστο στοιχείο κάθε συστήματος τεχνητής νοημοσύνης. Η γνωστή γλώσσα προγραμματισμού Prolog (PROgramming in LoGic), η οποία δημιουργήθηκε από τον Alain Colmerauer (1941-2017), στηρίζεται εξ ολοκλήρου στις αρχές της πρωτοβάθμιας λογικής και έχει χρησιμοποιηθεί σε πολλούς τομείς της τεχνητής νοημοσύνης και των συναφών επιστημών, όπως είναι η αυτοματοποιημένη απόδειξη θεωρημάτων και τα έμπειρα συστήματα. Εκτός όμως από την πληροφορική, η λογική βρίσκει εφαρμογή και σε πολλές άλλες επιστήμες όπως είναι η γλωσσολογία όπου χρησιμοποιείται ως εργαλείο για την κατασκευή σημασιολογικών κανόνων, η ψυχολογία και οι γνωσιακές επιστήμες καθώς επίσης και οι οικονομικές επιστήμες (Μάργαρης, 2018).

Η συμβολική ή μαθηματική λογική, όπως κάθε κλάδος των μαθηματικών, έχει τη δική της μαθηματική γλώσσα, η οποία διαθέτει τα σύμβολά της, καθώς και μια σειρά από κανόνες, που ρυθμίζουν το πώς αυτά συνδυάζονται μεταξύ τους. Η μαθηματική αυτή γλώσσα είναι πιο αυστηρή από μια φυσική, καθομιλούμενη γλώσσα και η θεμελίωσή της απαιτεί τόσο τον ορισμό του συντακτικού της (δηλαδή τις δομικές τις μονάδες και τον τρόπο με τον οποίο αυτές συνδυάζονται για να σχηματίσουν πολύπλοκες εκφράσεις), όσο και τον ορισμό της σημασιολογίας της (δηλαδή της απόδοσης νοήματος). Αυτές οι διαδικασίες περιγράφονται και μελετώνται από δύο συστήματα λογικής: την προτασιακή λογική και την κατηγορηματική λογική.

Από αυτές, η προτασιακή λογική ορίζει τις στοιχειώδεις οντότητες που σχηματίζουν προτάσεις και οι οποίες είναι γνωστές ως προτασιακές μεταβλητές (ή άτομα), καθώς και τους τρόπους με τους οποίους αυτές συνδυάζονται για να σχηματίσουν σύνθετες προτάσεις. Η προτασιακή λογική δεν ασχολείται με την απόδοση και την κατανόηση του νοηματικού περιεχομένου μιας πρότασης. Το μόνο που κάνει είναι να χαρακτηρίζει μια πρόταση ως αληθή ή ψευδή για τις τιμές αληθείας που έχουν εκχωρηθεί στις προτασιακές της μεταβλητές. Αντίθετα η κατηγορηματική λογική, εφαρμόζεται πάνω σε έγκυρες μαθηματικές προτάσεις και προσπαθεί να περιγράψει ή /και να αποσαφηνίσει το νοηματικό τους περιεχόμενο, έχοντας τη δυνατότητα να χειριστεί καταστάσεις τις οποίες η προτασιακή λογική δεν μπορεί να αντιμετωπίσει. Στη βιβλιογραφία της επιστήμης της λογικής, τα διάφορα λογικά συστήματα της προτασιακής και της κατηγορηματικής λογικής χαρακτηρίζονται ως κλασικά συστήματα λογικής και στηρίζονται στη θεωρία που

αναπτύχθηκε από τους Frege, Russell και άλλους λογικολόγους στα τέλη του 19ου και στις αρχές του 20ου αιώνα. Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε με την κατηγορηματική λογική, οι αρχές της οποίας περιγράφονται αναλυτικά σε επόμενη ενότητα.

1.2 Σκοπός και στόχοι της εργασίας

Κύριος σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η ανάλυση φιλοσοφικού λόγου στην τυπική γλώσσα του κατηγορηματικού λογισμού. Οι επιμέρους στόχοι είναι αρχικά η επιλογή τριών πλατωνικών έργων, στους οποίους επιδιώκεται ο ορισμός κάποιας έννοιας. Στη συνέχεια, η επιλογή εκείνων των αποδεικτικών σημείων και των συμπερασμάτων, που θα μετατραπούν στη γλώσσα του κατηγορηματικού λογισμού. Επόμενος στόχος είναι η μετατροπή των προτάσεων της φυσικής γλώσσας στην συμβολική γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής. Τελευταίος στόχος είναι ο έλεγχος των συμπερασμάτων, μέσω των κανόνων της κατηγορηματικής λογικής.

1.3 Διάρθρωση της Εργασίας

Συνολικά η εργασία αποτελείται από επτά ενότητες, συμπεριλαμβανομένης της παρούσας εισαγωγικής ενότητας. Στην επόμενη ενότητα γίνεται μια παρουσίαση για την ζωή του Πλάτωνα, του μεγάλου φιλοσόφου, για τα έργα του και τη μέθοδο που χρησιμοποιούσε, τη διαλεκτική. Στη συνέχεια ακολουθεί μια αναλυτική περιγραφή των βασικών αρχών του κατηγορηματικού λογισμού, του συντακτικού του, της σημασιολογίας του, καθώς και των κανόνων εξαγωγής συμπερασμάτων. Στα επόμενα τρία κεφάλαια περιγράφεται η εφαρμογή της κατηγορηματικής λογικής σε τρεις πλατωνικούς διαλόγους: Ευθύφρων (κεφάλαιο 4), Λάχης (κεφάλαιο 5) και Λύσις (κεφάλαιο 6). Σε καθένα από αυτά τα τρία κεφάλαια, δίνεται μια αναλυτική περίληψη του διαλόγου, τα αποδεικτικά σημεία που επιλέχτηκαν, η μεταγραφή τους στη γλώσσα του κατηγορηματικού λογισμού και τέλος η διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων. Έπονται τα συμπεράσματα, οι περιορισμοί της παρούσας έρευνας και οι προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

Κεφάλαιο 2. Ο Πλάτων

2.1 Η ζωή του

Ο Πλάτων γεννήθηκε στην Αθήνα¹ το 428-7² π.Χ και πέθανε το 348-7 π.Χ., σε ηλικία ογδόντα ή ογδόντα ενός ετών (Taylor, 1990). Αρχικά, το όνομά του ήταν Αριστοκλής, όμως επειδή είχε πλατύ στέρνο και μέτωπο του δόθηκε το προσωνύμιο³ Πλάτων, που τελικά παρέμεινε ως όνομά του (Φιλολογική ομάδα Κάκτου, 1993). Ήταν το τέταρτο παιδί του Αρίστωνα, και της Περικτιόνης, που προέρχονταν και οι δύο από αριστοκρατικές οικογένειες (Nails, 2006). Η καταγωγή του πατέρα του έφτανε μέχρι τον μυθικό βασιλιά Κόδρο και μέσω αυτού συγγένευε με τον θεό Ποσειδώνα, ενώ της μητέρας του μέχρι τον μεγάλο νομοθέτη και ποιητή, Σόλωνα (Φιλολογική ομάδα Κάκτου, 1993). Η Περικτιόνη είχε αδερφό τον Χαρμίδα και ξάδελφο τον Κριτία, δύο εξέχουσες προσωπικότητες στην αθηναϊκή ολιγαρχία των Τριάκοντα τυράννων, το 404-403 π.Χ., που ακολούθησε την ήττα των Αθηνών στο τέλος του Πελοποννησιακού πολέμου (Taylor, 1990). Ο Πλάτων είχε επίσης δύο αδερφούς, τον Γλαύκωνα και τον Αδείμαντο και μια αδερφή, την Ποτώνη (Φιλολογική ομάδα Κάκτου, 1993). Όταν ο Αρίστων πέθανε, ο Πλάτων ήταν ακόμα μικρό παιδί και επειδή ο αθηναϊκός νόμος απαγόρευε τη νόμιμη ανεξαρτησία των γυναικών, η μητέρα του παντρεύτηκε το θείο της, τον Πυριλάμπη, που ήταν στενός φίλος του Περικλή και απέκτησαν άλλο ένα παιδί τον Αντιφώντα (Nails, 2006; Bluck, 2013).

Λίγα χρόνια πριν γεννηθεί ο Πλάτων, είχε ξεκινήσει ένας πόλεμος ανάμεσα στην Αθήνα και τη Σπάρτη, ο Πελοποννησιακός πόλεμος, που έληξε με την ήττα της Αθήνας (Bluck, 2013). Παρά τον πόλεμο και την αναταραχή, ως παιδί ο Πλάτων, αναμφίβολα έλαβε την αρμόζουσα για γόνους αριστοκρατικής οικογένειας εκπαίδευση, στη γυμναστική και τη μουσική, που αφορούσε όλους τους τομείς των Μουσών δηλαδή χορό, στίχο, επική και ορχηστρική μουσική, αλλά και ανάγνωση, γραφή, αριθμητική, γεωμετρία, ιστορία, αστρονομία κ.α. (Nails, 2006). Από πολύ νέος ενδιαφέρθηκε για την πολιτική (Κοπιδάκης, κ.α., 2009) και η παιδεία που έλαβε ήταν ανάλογη των προσώπων, που προορίζονται να

¹ Σύμφωνα με κάποιες πηγές γεννήθηκε στην Αίγινα (Nails, 2006; Bluck, 2013).

² Πολλές πηγές αναφέρουν ότι γεννήθηκε το 427 π.Χ., το μήνα Θαργηλίωνα (Μάιος – Ιούνιος), ενώ άλλες ότι γεννήθηκε στις αρχές του καλοκαιριού του 428 (Φιλολογική ομάδα Κάκτου, 1993; Nails, 2006)

³ Το προσωνύμιο του δόθηκε πιθανότατα από τον γυμναστή του, τον Αρίστωνα τον Αργείο (Φιλολογική ομάδα Κάκτου, 1993)

ασχοληθούν με τα κοινά (Φιλολογική ομάδα Κάκτου, 1993). Ωστόσο, η ανάμειξη των μελών της οικογένειάς του στην υπόθεση των Τριάκοντα και η απόπειρα της αποκατεστημένης δημοκρατίας να εκδικηθεί τους ολιγαρχικούς, καταδικάζοντας τον Σωκράτη, τον απομάκρυναν από τις φιλοδοξίες του για συμμετοχή στα κοινά. Ασχολήθηκε επίσης με την τραγική ποίηση, την οποία όμως εγκατέλειψε, όταν γνώρισε τον Σωκράτη. Το λογοτεχνικό του ταλέντο όμως είναι εμφανές στους διαλόγους του (Κοπιδάκης, κ.α. 2009).

Όταν ο Πλάτων ήταν είκοσι ετών, έγινε ο πιο πιστός μαθητής του Σωκράτη, ο οποίος ήταν γιος ενός λιθοδόμου και μιας μαίας (Hummel, 1994). Πιθανότατα όμως ο Πλάτων είχε πρωτοσυναντήσει τον Σωκράτη σε μικρότερη ηλικία (Bluck, 2013). Ο Σωκράτης τότε ήταν περίπου εξήντα χρονών. Ο Σωκράτης, είχε αποστολή του να εξετάζει τις πεποιθήσεις των συμπολιτών του, προκειμένου να βοηθήσει τους ίδιους και τον εαυτό του να αποκτήσουν τη σοφία. Ως αληθινός φιλόσοφος, ο Σωκράτης ισχυρίζεται ότι δεν ξέρει τίποτα. Πράγματι, έχει επίγνωση όλων όσων δεν γνωρίζει και, συνεπώς, αναζητά την αληθινή γνώση, ενώ οι άλλοι - τόσο οι Σοφιστές όσο και οι άνθρωποι στο δρόμο με τους οποίους συνομιλεί και τους οποίους "εξετάζει" - ζουν στην ψευδαίσθηση ότι διαθέτουν γνώση (Hummel, 1994). Εξαιτίας της επίμονης φιλοσοφικής εξέτασης, ο Σωκράτης απέκτησε έναν αριθμό από ισχυρούς εχθρούς και το 399 π.Χ. δικάστηκε με την κατηγορία της ασέβειας και της διαφθοράς των νέων της πόλης, βρέθηκε ένοχος και τελικά καταδικάστηκε σε θάνατο. Ο τρόπος θανάτου του Σωκράτη ήταν μια τραυματική εμπειρία για τον Πλάτωνα, ο οποίος ενίσχυσε τη χαμηλή του γνώμη για το δημοκρατικό καθεστώς, που είχε αποκατασταθεί τότε, και τελικά εγκατέλειψε όλες τις σκέψεις μιας πολιτικής καριέρας, αφιερώνοντας τον εαυτό του στη φιλοσοφία (Hummel, 1994; Russo, 2001) Η επιρροή του Σωκράτη στη φιλοσοφική σκέψη του Πλάτωνα είναι αδιαμφισβήτητη. Ο Πλάτων πήρε το χαρακτήρα και τις ιδέες του Σωκράτη και χρησιμοποίησε τον Σωκράτη ως κεντρική φιγούρα στους φιλοσοφικούς του διαλόγους (Russo, 2001).

Μετά την εκτέλεση του Σωκράτη, ο Πλάτων, όπως και άλλοι Σωκρατικοί, έφυγε από την Αθήνα και ταξίδεψε για δώδεκα χρόνια στη Μεσόγειο, σπουδάζοντας φιλοσοφία, γεωμετρία, θρησκεία και άλλες επιστήμες (Russo, 2001). Σύμφωνα με διάφορες πηγές αρχικά κατέφυγε στα Μέγαρα, όπου επισκέφτηκε τον Ευκλείδη (τον φιλόσοφο, όχι τον μαθηματικό), ιδρυτή της Μεγαρικής σχολής και στη συνέχεια ταξίδεψε στην Αίγυπτο και στην Κυρήνη (Φιλολογική ομάδα Κάκτου, 1993; Hummel, 1994). Επίσης επισκέφτηκε τη Magna Graecia, στη νότια Ιταλία, όπου ήρθε σε επαφή με Πυθαγόρειους κύκλους, περνώντας χρόνο κυρίως με τον Αρχύτα τον Ταραντίνο, ο οποίος ήταν ένας λαμπρός μαθηματικός (Hummel, 1994). Ο Πλάτων είχε αποκτήσει μεγάλη φήμη, και περίπου το 388

π.Χ. προσκλήθηκε στη Σικελία, από τον Διονύσιο Α', τύραννο των Συρακουσών, ο οποίος φιλοξενούσε συχνά αξιόλογους Αθηναίους στα ανάκτορά του (Nails, 2006). Οι αγώνες του Διονυσίου ενάντια στους Καρχηδόνιους ήταν ξακουστοί και δίκαια θεωρούνταν προασπιστής του Ελληνισμού στη Δύση (Φιλολογική ομάδα Κάκτου, 1993). Εκεί ο Πλάτων υποστήριξε την άποψή του ότι οι βασιλιάδες πρέπει να είναι φιλόσοφοι και θα πρέπει να αφιερώσουν τη ζωή τους στην υπηρεσία των υψηλότερων ηθικών αξιών παρά στην προσωπική τους βελτίωση και στα ενδιαφέροντά τους. Η προσπάθειά του όμως δεν είχε καλά αποτελέσματα (Hummel, 1994). Σύμφωνα με μεταγενέστερες πηγές (Πλούταρχος, Διογένης ο Λαέρτιος) το τέλος του ταξιδιού έληξε άδοξα, καθώς ο Πλάτων εξόργισε τον τύραννο. Το ταξίδι επιστροφής στην Αθήνα ήταν περιπετειώδες και κινδύνευσε η ζωή του, καθώς το πλοίο στο οποίο επέβαινε, τον αποβίβασε, πιθανώς με διαταγή του Διονυσίου στην εμπόλεμη τότε κατά των Αθηνών, Αίγινα. Εκεί, ο Πλάτων αιχμαλωτίστηκε και θα πουλιόταν ως δούλος αν δεν βρισκόταν ο πλούσιος Κυρηναίος Αννίκερις να τον εξαγοράσει και να τον απελευθερώσει έναντι του ποσού των τριάντα μινων. Όταν τελικά επέστρεψε στην Αθήνα, οι φίλοι του προσπάθησαν να επιστρέψουν τα χρήματα στον Αννίκερι, όμως εκείνος τα αρνήθηκε και έτσι αγοράστηκε ένα κτήμα στο άλσος του Ακάδημου, όπου ιδρύθηκε η περίφημη σχολή του Πλάτωνα, η Ακαδημία (Φιλολογική ομάδα Κάκτου, 1993). Σε κάθε περίπτωση, ο Πλάτων φαίνεται να έχει περάσει την περίοδο από 383 π.Χ έως 366 π.Χ. σε σχετικά ήσυχη, μελέτη, συζήτηση, γραφή και συνεισφορά γενικά στην Ακαδημαϊκή εκπαίδευση. Σε αυτήν την περίοδο αποδίδεται η μεγαλύτερη παραγωγικότητα των διαλόγων του (Nails, 2006).

Όταν ο Πλάτων επέστρεψε στην Αθήνα από το πρώτο του ταξίδι στη Σικελία, ίδρυσε το 387 π.Χ την Ακαδημία, ένα κέντρο μελέτης και έρευνας, σκοπός του οποίου ήταν να εκπαιδεύσει φιλοσοφικά τους μελλοντικούς ηγέτες της ελληνικής κοινωνίας (Hummel, 1994; Russo, 2001). Η Ακαδημία περιγράφεται συχνά ως το πρώτο ευρωπαϊκό πανεπιστήμιο και πρόγονος του σύγχρονου πανεπιστημίου, αφού το πρόγραμμα σπουδών της περιλάμβανε όχι μόνο τη φιλοσοφία, αλλά και τα μαθηματικά και όλες τις γνωστές επιστήμες (Russo, 2001; Nails, 2006), ωστόσο ήταν περισσότερο επιστημονική κοινότητα παρά σχολείο (Hummel, 1994). Σύμφωνα με μια παλιά παράδοση, υπήρχε μια επιγραφή πάνω από την πύλη της Ακαδημίας που ανήγγελε ότι η γνώση της γεωμετρίας ήταν απαίτηση για την είσοδο (Hummel, 1994). Υπήρχαν γυμναστήρια, χώροι παραδόσεων και συζητήσεων, αίθουσες κοινών συσσιτίων και αργότερα κατασκευάστηκαν και καταλύματα για τους μαθητές (Φιλολογική ομάδα Κάκτου, 1993). Λέγεται ότι ο ίδιος ο Πλάτων έδωσε πολλές από τις διαλέξεις στην Ακαδημία, αν και οι σημειώσεις από αυτές τις διαλέξεις δεν

δημοσιεύθηκαν ποτέ. Οι δάσκαλοι και οι μαθητές ζούσαν εκεί σε μια κοινοτική ατμόσφαιρα που ενισχύθηκε με μια διαλεκτική μέθοδο διδασκαλίας, στην οποία οι διδακτικές παρουσιάσεις ακολουθούνταν από συζήτηση. Ο Πλάτων, κάλεσε κι άλλους μελετητές να διδάξουν στην Ακαδημία, όπως ήταν ο Εύδοξος, ο οποίος ήταν μαθηματικός, αστρονόμος, γεωγράφος και γιατρός (Hummel, 1994). Μεταξύ των πιο διάσημων μαθητών της Ακαδημίας ήταν ο Αριστοτέλης, ο οποίος αργότερα ίδρυσε τη δική του σχολή, το Λύκειο (Russo, 2001). Ο Πλάτων παρέμεινε επικεφαλής της Ακαδημίας για το υπόλοιπο της ζωής του. Η Ακαδημία παρέμεινε ανοιχτή μέχρι το 529 μ.Χ., όταν την έκλεισε ο Ιουστινιανός, δηλαδή για σχεδόν 900 χρόνια μετά το θάνατο του Πλάτωνα (Hummel, 1994).

Κατά τη διάρκεια της παραμονής του στις Συρακούσες, ο Πλάτων είχε δημιουργήσει φιλία με τον γαμπρό του Διονύσιου, τον Δίωνα, ο οποίος μαγεύτηκε από τον Πλατωνικό λόγο και έμεινε έκτοτε παντοτινός θαυμαστής του Πλάτωνα. (Φιλολογική ομάδα Κάκτου, 1993; Nails, 2006). Όταν ο Διονύσιος ο Πρεσβύτερος πέθανε, ο Διονύσιος Β΄ διαδέχτηκε τον πατέρα του και ο Δίων ξανακάλεσε τον Πλάτωνα στις Συρακούσες για να διδάξει τον νέο τύραννο τα φιλοσοφικά του διδάγματα. Ο Πλάτων στην αρχή δεν ήταν πρόθυμος να επιστρέψει. Ο Δίων προέτρεψε τον Πλάτωνα με διάφορους τρόπους, αναφέροντάς του την απειρία του νέου ηγέτη και τον κίνδυνο από τους Καρχηδόνιους. Εμπιστευόμενος περισσότερο τον σταθερό χαρακτήρα και τις προθέσεις του Δίωνα, τελικά ο φιλόσοφος ξεκίνησε το 366 π.Χ. για ένα δεύτερο ταξίδι στη Σικελία. Για άλλη μια φορά ο Πλάτων πίστευε ότι θα μπορούσε να εφαρμόσει τις ιδέες του σχετικά με το ρόλο της εκπαίδευσης και της φιλοσοφίας στην πολιτική. Κατά συνέπεια, πήγε πάλι στις Συρακούσες, όπου έγινε δεκτός, και ανέλαβε το καθήκον να εκπαιδεύσει τον Διονύσιο Β΄. Ο νεαρός Διονύσιος, ωστόσο, δεν ήταν πολύ ικανός και κουράστηκε γρήγορα από τα μαθήματα του απαιτητικού δασκάλου του (Nails, 2006). Επιπλέον έστειλε στην εξορία τον Δίωνα, ενώ κράτησε με τη βία τον Πλάτωνα στις Συρακούσες για δύο χρόνια. Το 365 κατάφερε να γυρίσει στην Αθήνα και να αναλάβει και πάλι τη διεύθυνση της σχολής του. Το 361 π.Χ. ο Πλάτων υπέκυψε για τρίτη φορά στον πειρασμό να πάει στις Συρακούσες, αφού άκουσε ότι ο Διονύσιος είχε αναπτύξει ένα θαυμάσιο πάθος για τη φιλοσοφία, αλλά χωρίς τα αναμενόμενα αποτελέσματα κι αυτή τη φορά. Επέστρεψε οριστικά στην Αθήνα και επιδόθηκε στο συγγραφικό και διδακτικό του έργο. Τα τελευταία χρόνια της ζωής του ασχολήθηκε με τα κοσμολογικά και φυσικά του συγγράμματα και συνέγραψε τους Νόμους (Hummel, 1994).

2.2 Τα έργα του

Τα έργα του Πλάτωνα έχουν διασωθεί σχεδόν ανέπαφα (Russo, 2001). Αυτό αφορά τα συγγράμματά του, καθώς όπως προαναφέρθηκε δεν υπάρχουν γραπτά των διαλέξεων και των παραδόσεων του στην Ακαδημία, καθώς συνήθιζε να μιλάει χωρίς χειρόγραφο. Όλα τα έργα του εκτός από την Απολογία Σωκράτους και τις Επιστολές είναι διάλογοι (Φιλολογική ομάδα Κάκτου, 1993). Ωστόσο υπάρχει κι ένας σημαντικός αριθμός έργων, τα οποία αποδίδονται στον Πλάτωνα, δεν είναι όμως όλα γνήσια. Πολλά κείμενα άλλων φιλοσόφων της Ακαδημίας διασώθηκαν με το όνομα του Πλάτωνα και έργο της σύγχρονης φιλολογίας, μεταξύ άλλων είναι ο διαχωρισμός γνήσιων και νόθων έργων, καθώς και η χρονολόγησή τους (Κοπιδάκης, κ.α., 2009). Επιπλέον, είναι εξαιρετικά δύσκολο να σχεδιάσουμε τη γραμμή οριοθέτησης μεταξύ των ιδεών του Σωκράτη και εκείνων του Πλάτωνα. Οι φιλόλογοι προσπάθησαν να το κάνουν ταξινομώντας τους διαλόγους του Πλάτωνα σε διάφορες ομάδες, που κυμαίνονται από τους πιο Σωκρατικούς έως εκείνους που ξεφεύγουν ξεκάθαρα από τη σκέψη του Σωκράτη και θεωρούνται σαφώς Πλατωνικοί (Hummel, 1994). Με τον τρόπο αυτό τα έργα του Πλάτωνα μπορούν να χωριστούν σε τρεις περιόδους: την πρώιμη περίοδο, τη μέση περίοδο και την ύστερη περίοδο: (Russo, 2001, Κοπιδάκης, κ.α., 2009).

| Πρώιμη περίοδος | Μέση Περίοδος | Ύστερη περίοδος |
|----------------------------|------------------------------------|--------------------------------|
| Απολογία Σωκράτους | Γοργίας ή περί ρητορικής | Θεαίτητος ή περί επιστήμης |
| Κρίτων ή περί του πρακτέου | Ευθύδημος | Παρμενίδης ή περί ιδεών |
| Ίων ή περί Ιλιάδος | Ιπτίας ελάσων ή περί του ψεύδους | Σοφιστής ή περί όντος |
| Λάχης ή περί ανδρείας | Ιπτίας μείζων ή περί του καλού | Φαίδρος ή περί έρωτος |
| Χαρμίδης ή περί σωφροσύνης | Κρατύλος ή περί ορθότητας ονομάτων | Πολιτικός ή περί της βασιλείας |
| Λύσις ή περί φιλίας | Μένων ή περί αρετής | Φίληβος ή περί ηδονής |
| Πρωταγόρας ή Σοφισταί | Μενέξενος ή επιτάφιος | Τίμαιος ή περί φύσεως |
| Ευθύφρων ή περί του οσίου | Συμπόσιον ή περί αγαθού | Κριτίας ή Ατλαντικός |
| | Φαίδων ή περί ψυχής | Νόμοι ή περί νομοθεσίας |
| | Πολιτεία ή περί δικαίου | |

Πίνακας 1 Τα έργα του Πλάτωνα

Ο Πλάτων χρησιμοποιεί τον Σωκράτη ως τον κύριο συνομιλητή στους περισσότερους διαλόγους του. Ο συγκεκριμένος τρόπος, με τον οποίο ο Πλάτων

χρησιμοποιεί τον χαρακτήρα του Σωκράτη ποικίλλει κατά τη διάρκεια των διαφορετικών περιόδων συγγραφής του. Στους πρώτους διαλόγους ο Σωκράτης που παρουσιάζει ο Πλάτων στον αναγνώστη είναι πιθανώς πιο κοντά στον ιστορικό Σωκράτη. Ο Σωκράτης απεικονίζεται σε αυτούς τους διαλόγους όπως ήταν στην πραγματική ζωή - μια αλογόμυγα, του οποίου στόχος ήταν να κάνει τους ανθρώπους να αναγνωρίσουν ότι πολλές από τις πεποιθήσεις τους είναι αβάσιμες. Ο Σωκράτης αυτών των πρώιμων διαλόγων ισχυρίζεται ότι αγνοεί τα πάντα και ως εκ τούτου σπάνια παρουσιάζει τη δική του θέση στα θέματα που συζητούνται. Ο στόχος του Πλάτωνα, λοιπόν, σε αυτούς τους πρώιμους διαλόγους πρωταρχικά, είναι επικριτικός: δηλαδή, να διαλύσει τις ανεπαρκείς ηθικές απόψεις των άλλων. Στους ενδιάμεσους διαλόγους, ο Πλάτων εισάγει τη δική του φιλοσοφική σκέψη και αρχίζει να αναπτύσσει μερικές από τις μεταφυσικές και επιστημολογικές θέσεις του. Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου που ο Πλάτων αρχίζει να εισάγει τη θεωρία των Ιδεών στα γραπτά του. Στην τελευταία περίοδο των διαλόγων, ο Πλάτων χρησιμοποιεί τον Σωκράτη σχεδόν αποκλειστικά για να προωθήσει τις απόψεις του. Η προσέγγισή του σε αυτούς τους διαλόγους είναι ουσιαστικά επικοδομητική, δηλαδή, με σκοπό να αναπτύξει το δικό του ώριμο φιλοσοφικό σύστημα (Russo, 2001).

Ο Πλάτων ανέπτυξε τη θεωρία των «Ιδεών», την αδιάσπαστη πραγματικότητα που θεωρείται ως το θεμέλιο της ύπαρξης και επεσήμανε αυτή την ιδέα μέσα από τον συναρπαστικό και γοητευτικό μύθο του σπηλαίου (Πολιτεία, 514α – 517α). Ανέφερε ότι μόνο μέσω της σωστής εκπαίδευσης και μέσω της επιδίωξης της φιλοσοφίας τα ανθρώπινα όντα μπορούν να απελευθερωθούν από τις αλυσίδες των αισθήσεων, των επιθυμιών, των φιλοδοξιών τους (όπως ο πλούτος και η δύναμη) και τα πάθη και ότι μπορούν να ενταχθούν, προοδευτικά, περνώντας από το ένα επίπεδο του διαφωτισμού στο επόμενο, στην αληθινή γνώση και, τελικά, στο όραμα του αγαθού, του Τελικού Αγαθού. Ο Πλάτων ανέπτυξε επίσης την έννοια της εκπαιδευτικής πολιτικής στα δύο μεγαλύτερα έργα του, την Πολιτεία και τους Νόμους. Στην Πολιτεία, ο Πλάτων ανέπτυξε την ιδέα του για το ιδανικό κράτος, που ενσαρκώνει τη δικαιοσύνη. Ήταν ένα είδος Ουτοπίας (για τον Πλάτωνα, ο κόσμος των ιδεών, επειδή είναι μόνιμος, είναι πιο «πραγματικός» από τον κόσμο των γεγονότων, ο οποίος βρίσκεται σε κατάσταση συνεχούς ροής). Στους νόμους, το τελευταίο έργο του Πλάτωνα, στο οποίο εξέθεσε λεπτομερώς τις ιδέες του για την εκπαιδευτική πολιτική, συνέταξε ένα πολύ λεπτομερές σύστημα νόμων για μια προτεινόμενη αποικιακή πόλη-κράτος. Ο Πλάτων θεωρούσε ότι η φιλοσοφία και η εκπαίδευση ταυτίζονται, ότι είναι το ίδιο αντικείμενο (Hummel, 1994).

Το μεγαλύτερο μέρος της φιλοσοφικής γραφής του Πλάτωνα έχει τη μορφή διαλόγων. Οι διάλογοι αυτοί είναι φιλοσοφικές συζητήσεις μεταξύ δύο ή περισσότερων συμμετεχόντων (Russo, 2001). Συχνά ασχολούνται με την αποσαφήνιση μιας έννοιας - όπως η δικαιοσύνη, η φιλία, η ευσέβεια κ.α.. Ωστόσο, συνήθως, δεν καταλήγουν σε ένα σε τελικό συμπέρασμα σχετικά με το θέμα που συζητείται ή δεν καταλήγουν σε καθολική συμφωνία. Η αρχική ερώτηση παραμένει ανοιχτή. Για παράδειγμα, ο Πρωταγόρας τελειώνει με την ακόλουθη δήλωση: «Λοιπόν, θα μιλήσουμε για αυτά τα θέματα [τα οποία μόλις συζητήσαμε] σε κάποια μελλοντική συνάντηση» (Protagoras, 361e) (Hummel, 1994).

Με μοναδική σημαντική εξαίρεση τους Νόμους, ο Σωκράτης, άμεσα ή έμμεσα, διαδραματίζεται ως ένας από τους πρωταγωνιστές των διαλόγων. Ο Σωκράτης εμφανίζεται στα έργα του Πλάτωνα ως πρότυπο δασκάλου, παρόλο που ο ίδιος επέμενε ότι δεν είναι δάσκαλος. Κατά συνέπεια, το αντικείμενο των περισσότερων αν όχι όλων των διαλόγων του Πλάτωνα είναι ουσιαστικά εκπαιδευτικό (Hummel, 1994). Ο Σωκράτης πίστευε ότι για να είναι κάποιος ικανός να διδάξει, θα πρέπει να γνωρίζει το θέμα που διδάσκεται. Ο ίδιος ως αληθινός φιλόσοφος, υποστήριζε ότι δεν γνωρίζει τίποτα. Πράγματι, γνωρίζει όλα αυτά που δεν ξέρει και, κατά συνέπεια, αναζητά πάντα τη γνώση, ενώ οι συνομιλητές του, τους οποίους "εξετάζει" ζουν στην ψευδαίσθηση ότι κατέχουν τη γνώση. Η Σωκρατική μέθοδος, επομένως, διακρίνεται από την παραδοσιακή μέθοδο διδασκαλίας, στην οποία οι εκπαιδευτικοί επιδιώκουν να μεταδώσουν τις γνώσεις τους στους μαθητές τους, οι οποίοι αναμένεται να τις αφομοιώσουν πλήρως. Αντίθετα, η Σωκρατική μέθοδος είναι μια διαδραστική μέθοδος στην οποία ο δάσκαλος και ο μαθητής συνεργάζονται για την αναζήτηση της γνώσης μέσω του διαλόγου. Η διαλεκτική αυτή μέθοδος διατρέχει ολόκληρο το έργο του Πλάτωνα, τοποθετώντας τον αναγνώστη στη συζήτηση ως ενεργό παρατηρητή (Hummel, 1994). Η μέθοδος διδασκαλίας του Σωκράτη συχνά χαρακτηρίζεται ως «μαιευτική» μέθοδος, με την οποία ο δάσκαλος αναλαμβάνει το ρόλο της μαίας. Μια περιγραφή αυτής της μεθόδου περιλαμβάνεται στον Μένωνα. Εκεί, ο Σωκράτης υποστηρίζει ότι «δεν υπάρχει διδασκαλία, μόνο ανάμνηση» (Μένων, 82a) και ότι οι δάσκαλοι πρέπει να διαδραματίσουν το ρόλο της μαίας για να δώσουν στους μαθητές τους τη γνώση, που έχουν ασυνείδητα. Για να απεικονίσει αυτήν την πρωτότυπη μέθοδο, ο Σωκράτης διεξάγει ένα εκπαιδευτικό πείραμα: ρωτώντας έναν νεαρό σκλάβο, τον οδηγεί στην αυτό-ανακάλυψη της λύσης σε ένα σχετικά περίπλοκο πρόβλημα στη γεωμετρία (Μένων, 82b – 85b) (Hummel, 1994).

Οι διάλογοι του Πλάτωνα δεν είναι απλώς σπουδαία έργα φιλοσοφίας, αλλά αναγνωρίζονται επίσης ως σπουδαία λογοτεχνικά έργα (Russo, 2001), τα οποία είχαν καθοριστική επιρροή σε όλες τις πτυχές της δυτικής φιλοσοφίας (Hummel, 1994).

2.3 Η διαλεκτική του

Για να κατανοήσουμε τον Πλάτωνα και τη σκέψη του, θα πρέπει να έχουμε υπόψη ότι η φιλοσοφία του δεν είναι σε καμία περίπτωση διδασκαλία. Για παράδειγμα, ο Πλάτων δεν δημιούργησε ένα φιλοσοφικό σύστημα, όπως ο Χέγκελ. Το διακριτικό χαρακτηριστικό της φιλοσοφίας του Πλάτωνα είναι η πρόοδος ή η διαδικασία με την οποία διαμορφώνονται οι ιδέες του, η λεγόμενη διαλεκτική του μέθοδος. Η διαλεκτική μέθοδος δεν αποτελεί μοναχική, επομένως μονομερή, διαδικασία, αλλά είναι περισσότερο μια συλλογική άσκηση κατά την οποία οι φίλοι, όπως στο Συμπόσιο, ή οι αντίπαλοι, όπως στον Γοργία, συμμετέχουν στη συζήτηση. Εμπνευστική αφετηρία των διαλόγων υπήρξε η Σωκρατική μέθοδος της φιλοσοφικής συζήτησης και γι' αυτό διαρθρώνεται συνήθως με την αρχική επισήμανση των λανθασμένων αντιλήψεων και στη συνέχεια την ανασκευή τους (Hummel, 1994).

Ο ορισμός της έννοιας της διαλεκτικής αποτελεί «πεδίο διαμάχης» μεταξύ των μελετητών της πλατωνικής φιλοσοφίας. Αυτό οφείλεται στο ότι η έννοια της διαλεκτικής μεταβάλλεται και εξελίσσεται τόσο σημασιολογικά όσο και μεθοδολογικά σε όλη τη διαδικασία εξέλιξης της φιλοσοφικής σκέψης του Πλάτωνα (Γιασουμή, 2019). Ο Πλάτων αποκαλεί τη διαλεκτική μεταξύ άλλων: μέθοδο, δύναμη, επιστήμη, τέχνη και πραγματεία (Δεσποτόπουλος, 1990, όπως αναφέρεται στη Γιασουμή, 2019). Η διαλεκτική είναι ένας όρος που χρησιμοποιείται στα βιβλία της Πολιτείας του Πλάτωνα και σε άλλους διαλόγους για τον προσδιορισμό μιας επιστημονικής μεθόδου, την οποία ο φιλόσοφος ακολουθεί για να μελετήσει τη μεταφυσική πραγματικότητα των Ιδεών και του Αγαθού (Benson, 2006)

Η πλατωνική διαλεκτική μπορεί να πάρει τουλάχιστον δύο σημασίες: «Αν ληφθεί με τη σημασία της διαλογής, ως να προέρχεται δηλαδή από το ρήμα διαλέγω, μπορεί να της αποδοθεί διαιρετικός χαρακτήρας (διαιρετική μέθοδος), ενώ αν ληφθεί με τη σημασία του διαλόγου, ως δηλαδή να προέρχεται από το ρήμα διαλέγομαι, παίρνει τον χαρακτήρα της ερωταπόκρισης. Αν και η πλατωνική διαλεκτική παρουσιάζεται και ορίζεται διαφορετικά σε κάθε έναν από τους διαλόγους του Πλάτωνα, θα μπορούσε να συνοψιστεί σε μια και μόνο ενδεικτική φράση: «είναι η μέθοδος που ακολουθεί την πορεία προς το αληθινό ον χωρίς τη συμβολή των αισθήσεων» (Πολιτεία, 537d) (Γιασουμή, 2019: 2).

Ο Blackburn (1996 όπως αναφέρεται στη Γιασουμή, 2019) αναγνωρίζει δύο μορφές της διαλεκτικής στα έργα του Πλάτωνα: τη σωκρατική και την πλατωνική. Η σωκρατική μέθοδος της διαλεκτικής είναι η διαδικασία που οδηγεί στην αλήθεια μέσω ερωτήσεων και απαντήσεων, μέσω των οποίων ελέγχονται είτε οι ήδη καθιερωμένες απόψεις είτε οι αντιφατικές θέσεις του εκάστοτε συνομιλητή του Σωκράτη. Ο Σωκράτης είχε τη διαλεκτική ως ένα μέσο για τον έλεγχο και την εξαγωγή συμπερασμάτων. Η διαλεκτική σημαίνει κατ' αρχήν διάλογος, όμως δεν πρόκειται για οποιαδήποτε συζήτηση. Ο συνομιλητής του Σωκράτη εκθέτει αρχικά την άποψή του για το θέμα που συζητείται, την οποία θεωρεί θεμελιωμένη και σωστή. Η Σωκρατική διαλεκτική είναι η σταδιακή αναίρεση των θέσεων του συνομιλητή και στη συνέχεια η επίσης σταδιακή προσπάθεια να εξαχθεί ένα νέο συμπέρασμα, ώστε να οδηγηθούν στη γενική αλήθεια, που υπάρχει ανεξαρτήτως των περιστάσεων και των συνθηκών, στην πρώτη αλήθεια των πραγμάτων (Κοπιδάκης, κ.α., 2009). Από τη μέση συγγραφική περίοδο και έπειτα, η μέθοδος της διαλεκτικής εξελίσσεται σε μια καθολική διαδικασία πνευματικής διαφώτισης μέσω της οποίας ο φιλόσοφος εκπαιδεύεται και παιδαγωγείται, ώστε να προσεγγίσει την Ιδέα του αγαθού (Blackburn, 1996 όπως αναφέρεται στη Γιασουμή, 2019). Έργο αποκλειστικά του φιλοσόφου είναι η διαλεκτική, δυναμική και κλιμακούμενη μέθοδος αναζήτησης της αλήθειας, όργανο δηλαδή της προσπάθειας της ψυχής να προχωρήσει προς τις Ιδέες (Φιλολογική ομάδα Κάκτου, 1993).

Ο Robinson, (1953, όπως αναφέρεται στον Benson, 2006) στο κλασικό έργο του, *Plato's Earlier Dialectic*, περιγράφει την ακόλουθη διαφορά μεταξύ των διαλόγων της πρώιμης περιόδου και τους διαλόγους της ενδιάμεσης περιόδου: στην πρώιμη συγγραφική περίοδο, ο Πλάτων δίνει έμφαση και προτεραιότητα στη μέθοδο αλλά όχι στη μεθοδολογία (το λόγο περί της μεθόδου), ενώ στη μέση περίοδο δίνει έμφαση στη μεθοδολογία αλλά όχι στη μέθοδο. Με άλλα λόγια, οι θεωρίες της διαλεκτικής μεθόδου είναι πιο προφανείς στη μεσαία περίοδο, αλλά παραδείγματα αυτής είναι πιο εμφανείς στις αρχές. Όπως αναφέρει ο ίδιος, (Robinson, 1953, όπως αναφέρεται στη Γιασουμή, 2019), η μέθοδος του Πλάτωνα εξελίσσεται στις τρεις συγγραφικές περιόδους ως εξής: στην πρώιμη περίοδο, διαθέτει τον χαρακτήρα του σωκρατικού ελέγχου και ορισμού, ενώ η μέθοδος, ως διαλεκτική, εμφανίζεται αρχικά στη μεσαία συγγραφική περίοδο ως μέθοδος υποθέσεων και στην τελευταία περίοδο περιγράφεται ως μια διαιρετική και συνθετική μέθοδος. Οι περισσότεροι μελετητές θεωρούν ότι η «πρώιμη διαλεκτική» του Πλάτωνα είναι στην ουσία αντιγραφή ή έστω απομίμηση της σωκρατικής διαλεκτικής. Σύμφωνα με τον Kahn (2012, όπως αναφέρεται στη Γιασουμή, 2019), δεν μπορεί να θεωρηθεί τυχαίο το γεγονός ότι ο

Πλάτων επέλεξε να αντλήσει ετυμολογικά την ύψιστη μορφή φιλοσοφικής γνώσης, τη διαλεκτική του, από το ρήμα διαλέγεσθαι, διότι η διαλεκτική είναι στην κυριολεξία η τέχνη του διαλόγου.

Κεφάλαιο 3. Ο Κατηγορηματικός λογισμός

3.1 Εισαγωγή

Ο κατηγορηματικός λογισμός έχει χρησιμοποιηθεί για να αυξήσει την ακρίβεια στην περιγραφή και τη μελέτη δομών από τη γλωσσολογία και τη φιλοσοφία έως τα μαθηματικά και την επιστήμη των υπολογιστών (Bentham et al., n.d.). Ο κατηγορηματικός λογισμός ή κατηγορηματική λογική ή πρωτοβάθμια λογική (predicate logic) είναι συμβολική γλώσσα για την αναπαράσταση της γνώσης. Μαζί με την προτασιακή λογική (propositional calculus - logic) αποτελούν τις δύο γνωστότερες και δημοφιλέστερες μορφές λογικής. Η Προτασιακή Λογική, η οποία αποτελεί το πιο απλό σύστημα συμβολικής λογικής, έχει τα πλεονεκτήματα ότι είναι απλή στη σύνταξή της και ότι έχει την ιδιότητα να μπορεί να καταλήγει πάντα σε ένα συμπέρασμα (καταληκτική – decidable), μέσω διαφόρων διαδικασιών απόδειξης. Ωστόσο, παρουσιάζει αδυναμία ως προς την αποτύπωση «γενικής» γνώσης, καθώς αναπαριστά τα γεγονότα του πραγματικού κόσμου με δηλωτικές εκφράσεις που μπορούν να λάβουν μόνο δύο λογικές τιμές, την αληθή (true) και την ψευδή (false) (Βλαχάβας κ.α., 2005). Επίσης, επειδή χρησιμοποιεί ολόκληρες προτάσεις ως δομικές μονάδες, παρουσιάζει αδυναμία να εισχωρήσει στην εσωτερική δομή των οντοτήτων του κόσμου, δηλαδή στα αντικείμενα στα οποία αυτές αναφέρονται. Αυτή η αδυναμία οφείλεται στο γεγονός πως η προτασιακή λογική δεν διαθέτει τα απαραίτητα εργαλεία, με τα οποία θα μπορούσε να τις προσπελάσει (Μάργαρης, 2018).

Στους περιορισμούς που παρουσιάζει η προτασιακή λογική έρχεται να δώσει λύση ο κατηγορηματικός λογισμός, που αποτελεί επέκταση της γλώσσας της προτασιακής λογικής, εισάγοντας τα κατάλληλα εργαλεία. Στα πλαίσια του κατηγορηματικού λογισμού, ο κόσμος απεικονίζεται σαν ένα σύνολο αντικειμένων, ιδιοτήτων και σχέσεων, παρέχοντας την δυνατότητα για αναπαραστάσεις που είναι πιο κοντά στην ανθρώπινη εμπειρία. (Βασιλειάδης, 2014). Με τον τρόπο αυτό, καθίσταται μια ιδιαίτερος εκφραστική γλώσσα, που επιτυγχάνει να αποτυπώσει τη γενικότητα όπως για παράδειγμα την πρόταση «όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί» ως $(\forall x)Human(x) \rightarrow Mortal(x)$. Επιπλέον, η κατηγορηματική λογική σε αντίθεση με την προτασιακή λογική αναλύει κάθε πρόταση σε επιμέρους δομικές μονάδες, δίνοντάς της έτσι τη δυνατότητα προσπέλασης των οντοτήτων του κόσμου (Μπαγουλή, 2009). Για παράδειγμα η πρόταση «ο Σωκράτης είναι άνθρωπος» απεικονίζεται

ως Άνθρωπος(σωκράτης), καθιστώντας με τον τρόπο αυτό δυνατή την προσπέλαση των στοιχείων του κατηγορήματος από τους αποδεικτικούς κανόνες για την εξαγωγή συμπερασμάτων και την σύσταση καινούριων προτάσεων (Βασιλειάδης). Η συνεισφορά της κατηγορηματικής λογικής είναι μεγάλη, τόσο στο χώρο των μαθηματικών, καθώς επέτρεψε τη διατύπωση των θεωριών και αξιωμάτων με αυστηρό και τυπικό (φορμαλιστικό) τρόπο, όσο και στο χώρο της τεχνητής νοημοσύνης, χάρη στην εκφραστικότητά της να περιγράφει πολύπλοκες καταστάσεις του φυσικού κόσμου (Μάργαρης, 2018).

Όπως σε κάθε γλώσσα αναπαράστασης γνώσης, έτσι και στην κατηγορηματική λογική, θα πρέπει να αναλύσουμε κάποιες βασικές συνιστώσες της, όπως είναι α) το συντακτικό της (syntax), β) η σημασιολογία της (semantics) και γ) συστήματα απόδειξης / κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων. Αυτά τα στοιχεία της κατηγορηματικής λογικής περιγράφονται στις επόμενες υποενότητες.

3.2 ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΟ

Στην υποενότητα αυτή παρουσιάζεται το συντακτικό της κατηγορηματικής λογικής, δηλαδή τα σύμβολα της και οι κανόνες με τους οποίους τα σύμβολα αυτά συνδυάζονται για να κατασκευαστούν αποδεκτές προτάσεις για την αναπαράσταση των γεγονότων του κόσμου. Τα σύμβολα που χρησιμοποιεί ο κατηγορηματικός λογισμός περιγράφονται αναλυτικά παρακάτω:

3.2.1 Συντακτικά σύμβολα

▪ Σταθερές (Constants)

Οι σταθερές αντιπροσωπεύουν συγκεκριμένα αντικείμενα του κόσμου αναφοράς (Δενδρινός, χ.χ.). Τα ονόματα σταθερών γράφονται με πεζά ελληνικά ή αγγλικά γράμματα ή αριθμούς. π.χ. a, b, c, a₁, a₂, α, β, γ, john, πέτρος κ.λ.π. (Βλαχάβας, κ.α. 2005)

▪ Μεταβλητές (variables)

Μια μεταβλητή αναπαριστά κάποιο αντικείμενο χωρίς να ορίζει το όνομά του (Μπαγουλή, 2009). Η χρήση των μεταβλητών συμβάλει έτσι στην αναπαράσταση γενικών σχέσεων, αυξάνοντας την εκφραστικότητα της γλώσσας (Πολιτοπούλου, 2008; Μπούτας, 2016). Για παράδειγμα στην πρόταση που αναφέρθηκε στην εισαγωγή, $(\forall x)\text{Human}(x) \rightarrow \text{Mortal}(x)$, το σύμβολο x αποτελεί μεταβλητή. Αυτή η μεταβλητή (x) αν αντικατασταθεί με οποιοσδήποτε σταθερές τιμές θα προκύψουν διαφορετικές προτάσεις

που θα εκφράζουν μια συγκεκριμένη σχέση. Έτσι από τη γενική σχέση καταλήγουμε σε ειδικές, συγκεκριμένες προτάσεις (Πολιτοπούλου, 2008). Οι μεταβλητές αναπαριστώνται με ονόματα, που ξεκινούν από κεφαλαία γράμματα ελληνικά ή αγγλικά. π.χ. X, Y, Z X1, X2, Human, Άνθρωπος κ.λ.π. (Βλαχάβας, κ.α. 2005; Δενδρινός, χ.χ.).

▪ **Σύμβολα κατηγορημάτων (predicate symbols) ή κατηγορήματα (predicates)**

Τα κατηγορήματα χρησιμοποιούνται για να αποτυπώσουν ιδιότητες ή συσχετισμούς μεταξύ αντικειμένων. Αποτελούνται από ένα σύμβολο σχέσης και έναν αριθμό ορισμάτων και γράφονται είτε με πεζούς είτε κεφαλαίους χαρακτήρες (Δενδρινός, χ.χ.). Παραδείγματα κατηγορημάτων είναι τα student(x), student(george) likes (john, anna).

▪ **Συναρτησιακά σύμβολα (function symbols) ή συναρτήσεις (functions)**

Συμβολίζονται με λατινικά μικρά γράμματα (πχ f, g) όπως και οι σταθερές, ή με λέξεις που δηλώνουν τη σχέση μεταξύ των οντοτήτων (motherOf, average(x,y)) (Μάργαρης, 2018).

▪ **Λογικά συνδετικά (Connectives):**

Οι ατομικές προτάσεις (δηλαδή οι απλές προτάσεις), οι οποίες αποτελούνται από ένα κατηγορήμα με τα n ορίσματά του, μπορούν να συνδυαστούν μεταξύ τους και να δημιουργήσουν σύνθετες προτάσεις. Αυτό γίνεται με τη χρήση των λογικών συνδετικών (Τζαφέστας, 1991). Τα λογικά συνδετικά είναι ακριβώς τα ίδια με της προτασιακής λογικής και διατηρούν και στον κατηγορηματικό λογισμό την ίδια ερμηνεία (Βλαχάβας, κ.α. 2005).

| Σύμβολο | Ονομασία | Σημασιολογία |
|-------------------|------------|------------------------------|
| \wedge | Σύζευξη | Λογικό "ΚΑΙ" / AND |
| \vee | Διάζευξη | Λογικό "Η" / OR |
| \neg | Άρνηση | Λογικό "ΟΧΙ" / NOT |
| \rightarrow | Συνεπαγωγή | "Εάν ... Τότε" / If ... then |
| \leftrightarrow | Ισοδυναμία | "Αν και μόνο αν" / Only if |

Πίνακας 2. Λογικά συνδετικά

Το συνδετικό \wedge , αναπαριστά το γεγονός ότι αν αληθεύει η πρόταση p και συγχρόνως αληθεύει και η πρόταση q, τότε αληθεύει και η πρόταση $p \wedge q$. Το σύμβολο της διάζευξης (\vee) δηλώνει ότι εάν ισχύει είτε η πρόταση p ή η πρόταση q, τότε αληθεύει και η πρόταση $p \vee q$. Το λογικό συνδετικό \neg αλλάζει την τιμή αληθείας του κατηγορήματος, δηλαδή αν η πρόταση p είναι αληθής, τότε η $\neg p$ είναι ψευδής και το αντίστροφο. Το λογικό σύμβολο της

συνεπαγωγής (\rightarrow) απεικονίζει το γεγονός ότι αν ισχύει η p , τότε ισχύει και η q ($p \rightarrow q$). Τέλος, το σύμβολο της ισοδυναμίας \leftrightarrow ερμηνεύεται ως εξής: η πρόταση q θα είναι αληθής αν και μόνο αν είναι αληθής η πρόταση p ($p \leftrightarrow q$) (Βλαχάβας, κ.α. 2005).

- **Ποσοδείκτες (quantifiers)**

Η κατηγορηματική λογική χρησιμοποιεί δύο ποσοδείκτες, τον υπαρξιακό ποσοδείκτη " \exists " (existential quantifier) και τον καθολικό ποσοδείκτη " \forall " (universal quantifier) (Βλαχάβας, κ.α. 2005).

| Σύμβολο | Ονομασία | Σημασιολογία |
|-----------|------------------------|--------------------|
| \forall | Καθολικός ποσοδείκτης | Για κάθε x |
| \exists | Υπαρξιακός ποσοδείκτης | Υπάρχει κάποιο x |

Πίνακας 3. Ποσοδείκτες

Με τους ποσοδείκτες προσδιορίζεται η ποσοτικοποίηση των μεταβλητών. Ο καθολικός ποσοδείκτης σημαίνει για κάθε x , ενώ ο υπαρξιακός ερμηνεύεται ως υπάρχει κάποιο x .

- **Σύμβολα στίξης:**

Τα σύμβολα στίξης που χρησιμοποιούνται στην κατηγορηματική λογική είναι τρία, τα οποία είναι τα εξής: οι παρενθέσεις «(», «)» και το κόμμα «,». Η χρήση των παρενθέσεων είναι σημαντική καθώς αποφεύγονται προβλήματα ασάφειας, καθίστανται σαφείς οι προτεραιότητες των τελεστών και ορίζονται οι εμβέλεις των ποσοδεικτών (Μπαγουλή, 2009).

- **Οι λογικές σταθερές / σύμβολα αληθείας**

Οι λογικές σταθερές αποτελούνται από δύο σύμβολα αληθείας, γνωστά από την προτασιακή λογική, το αληθές (true) και το ψευδές (false) (Βλαχάβας, 2005, Λαγουδάκης, 2016).

3.2.2 Κατηγορήματα

Τα κατηγορήματα ή σύμβολα κατηγορημάτων αποτελούν το θεμελιώδες συστατικό του κατηγορηματικού λογισμού, τα οποία χρησιμοποιούνται για να ορίσουν σχέσεις ανάμεσα σε αντικείμενα. Συγκεκριμένα, τα κατηγορήματα είναι σε θέση να ορίσουν συσχετίσεις ανάμεσα σε μεταβλητές, σταθερές τιμές ή συναρτήσεις, οι οποίες αποτελούν

τα ορίσματα τους. Ο αριθμός των ορισμάτων που λαμβάνει ένα κατηγορημα ονομάζεται βαθμός ή πληθικός αριθμός (arity) του κατηγορήματος. Ένα κατηγορημα βαθμού $n = 1$ δεν περιγράφει κάποια σχέση μεταξύ αντικειμένων, αφού για να μπορεί να ορίσει συσχέτιση θα πρέπει να περιλαμβάνει δύο ή περισσότερα ορίσματα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση περιγράφει ιδιότητες αντικειμένων και αυτός ο τύπος κατηγορήματος είναι γνωστός ως μοναδιαίο κατηγορημα. Παραδείγματος χάριν, το κατηγορημα $student(george)$ περιγράφει ότι ο George έχει την ιδιότητα του φοιτητή ή απλώς ότι είναι φοιτητής. Αναλυτικότερα, τα κατηγορήματα βαθμού $n=1$ περιγράφουν ιδιότητες αντικειμένων, τα κατηγορήματα βαθμού $n=2$ περιγράφουν δυαδικές συσχετίσεις αντικειμένων, τα κατηγορήματα βαθμού $n=3$ περιγράφουν τριαδικές συσχετίσεις αντικειμένων κτλ. Για παράδειγμα στο κατηγορημα δύο ορισμάτων $Takes(george, algebra)$, το πρώτο όρισμα αναφέρεται στον φοιτητή George και το δεύτερο στο μάθημα της άλγεβρας και περιγράφει τη σχέση ότι ο συγκεκριμένος φοιτητής δηλώνει το μάθημα της άλγεβρας (Μάργαρης, 2018).

Τα ορίσματα των κατηγορημάτων μπορεί να είναι απλοί όροι, όπως οι παραπάνω, ή και σύνθετοι όροι, όπως οι συναρτήσεις. Για παράδειγμα, το κατηγορημα δύο ορισμάτων $Married(john, mary)$ που σημαίνει ότι ο John παντρεύεται τη Mary, αν η Mary είναι η μητέρα του George, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το συνώνυμο $motherOf(george)$. Κατά συνέπεια το κατηγορημα μπορεί να γραφεί και ως $Married(john, motherOf(george))$, το οποίο περιλαμβάνει ένα απλό και ένα σύνθετο όρισμα (Μάργαρης, 2018). Η Λογική που επιτρέπει ως ορίσματα κατηγορημάτων μόνο απλούς όρους (και όχι συναρτήσεις) ονομάζεται Κατηγορηματική Λογική Πρώτης Τα άξης (First Order Predicate Calculus).

Όπως αναφέρει σχετικά ο Μάργαρης (2018), εάν ένα κατηγορημα περιλαμβάνει μία ή παραπάνω μεταβλητές, στις οποίες δεν έχει εκχωρηθεί κάποια τιμή δεν αποτελεί πρόταση. Για να μετατραπεί σε πρόταση, θα πρέπει οι μεταβλητές να λάβουν κάποια τιμή, οπότε η πρόταση που δημιουργείται να μπορεί να χαρακτηριστεί ως αληθής ή ψευδής, ανάλογα με την εκάστοτε τιμή. Παραδείγματος χάριν, η έκφραση $even(x)$ (=ο αριθμός x είναι άρτιος), όταν η τιμή που θα λάβει η μεταβλητή είναι ζυγός αριθμός πχ $x=4$ η πρόταση γίνεται αληθής, ενώ αν το x είναι περιττός αριθμός πχ $x=9$, τότε γίνεται ψευδής. Η αληθοτιμή, δηλαδή, των προτάσεων προϋποθέτει την αντικατάσταση όλων των μεταβλητών με σταθερές τιμές.

Η ονομασία ενός κατηγορήματος μπορεί να είναι οποιαδήποτε, αν και συνήθως περιγράφεται από μία λέξη, που είναι αντιπροσωπευτική της ιδιότητας ή της σχέσης που δηλώνει (Μάργαρης, 2018). Συνήθως οι λέξεις αυτές είναι ρήματα με ορίσματα το υποκείμενο και το αντικείμενο του ρήματος (Πολιτοπούλου, 2008). Σε πολλές περιπτώσεις

τα κατηγορήματα μπορούν να περιγράφονται με απλούς πεζούς ή κεφαλαίους λατινικούς χαρακτήρες, όπως p, q, r, P, Q, R (Μάργαρης, 2018).

3.2.3 Συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις ή συναρτησιακά σύμβολα αναφέρονται σε αντικείμενα του κόσμου με περιφραστικό τρόπο (Λαγουδάκης, 2016). Δηλαδή, για να περιγράψουμε ένα αντικείμενο, δεν αναφερόμαστε άμεσα σε αυτό, χρησιμοποιώντας το όνομά του, αλλά με έμμεσο τρόπο, χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση, που να το προσδιορίζει με μοναδικό τρόπο. Παραδείγματος χάριν, εάν η Helen είναι η μητέρα του John, θεωρώντας πως ο John, όπως κάθε άνθρωπος έχει μια μοναδική μητέρα, τότε μπορούμε να ορίσουμε το συναρτησιακό σύμβολο $motherOf$. Έτσι, μπορούμε να αναφερθούμε στη Mary αντί με το όνομά της, με τη συνάρτηση $motherOf(john)$. Ένα συναρτησιακό σύμβολο μπορεί να λαμβάνει ένα απλό όρισμα, ή μπορεί να δέχεται και δύο ή παραπάνω ορίσματα. Σε πλήρη αναλογία με τα κατηγορήματα, οι συναρτήσεις δέχονται ως ορίσματα όρους της κατηγορηματικής γλώσσας, δηλαδή μεταβλητές και σταθερές. Τα ορίσματα διαχωρίζονται μεταξύ τους με κόμματα ή εσωκλείονται σε παρενθέσεις (Μάργαρης, 2018). Επίσης, όπως και στα κατηγορηματικά σύμβολα, το πλήθος των ορισμάτων που δέχονται ονομάζεται πληθικότητα, πληθικός αριθμός, βαθμός ή τάξη (arity) της συνάρτησης (Κολέτσος, χ.χ.).

Η διαφορά μεταξύ μιας συνάρτησης και ενός κατηγορήματος έγκειται στο ότι όταν αντικατασταθούν οι μεταβλητές, που αποτελούν ορίσματα ενός συναρτησιακού συμβόλου, με κάποιες σταθερές τιμές, τότε το συναρτησιακό παίρνει τιμή μια σταθερά. Από την άλλη πλευρά, όταν αντικατασταθούν οι μεταβλητές που αποτελούν ορίσματα ενός κατηγορηματικού συμβόλου, τότε το κατηγορηματικό λαμβάνει τιμή «αλήθεια» ή «ψέμα» (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012).

3.2.4 Ποσοδείκτες

Στην προτασιακή λογική για να αναπαραστήσουμε την πρόταση «εάν ο Σωκράτης είναι άνθρωπος τότε ο Σωκράτης είναι θνητός», θα είχαμε τον προτασιακό τύπο $p \rightarrow q$, όπου $p =$ ο Σωκράτης είναι άνθρωπος και $q =$ ο Σωκράτης είναι θνητός. Η συγκεκριμένη πρόταση αφορά τον Σωκράτη, ενώ για να μιλήσουμε για κάθε άνθρωπο στον κόσμο, θα έπρεπε να κατασκευάσουμε άπειρες προτάσεις, κάτι που είναι πρακτικά ανέφικτο. Αντίθετα, ο κατηγορηματικός λογισμός, εισάγοντας τους ποσοδείκτες, μας παρέχει έναν αποτελεσματικότερο τρόπο περιγραφής των ιδιοτήτων των οντοτήτων, αναφερόμενοι σε αυτά ως συλλογές και όχι απαριθμώντας τα ένα προς ένα. Αυτός ο τρόπος περιγραφής

ιδιοτήτων για ολόκληρες συλλογές αντικειμένων ονομάζεται ποσοτικοποίηση και πραγματοποιείται με την εισαγωγή ειδικών συμβόλων, τα οποία λέγονται ποσοτικοί δείκτες ή ποσοδείκτες. Έτσι στο προηγούμενο παράδειγμα, μπορούμε να διατυπώσουμε το ζητούμενο σε μία μόνο πρόταση, χρησιμοποιώντας τον καθολικό ποσοδείκτη. Για το σχηματισμό της έκφρασης χρειάζεται επίσης να ορίσουμε τα μοναδιαία κατηγορήματα $Man(x) = \text{ο } x \text{ είναι άνθρωπος}$ και $Mortal(x) = \text{ο } x \text{ είναι θνητός}$, και με τον καθολικό ποσοδείκτη προκύπτει η πρόταση $\forall x Man(x) \rightarrow Mortal(x)$ (Μάργαρης, 2018).

Όπως έχει αναφερθεί, οι ποσοδείκτες είναι δύο, ο καθολικός (\forall) και ο υπαρξιακός (\exists). Οι προτάσεις με καθολικό ποσοδείκτη, $(\forall x)\phi(x)$ ερμηνεύονται ως «όλα τα x » ή «κάθε x ». Οι προτάσεις που χρησιμοποιούν τον υπαρξιακό ποσοδείκτη, $(\exists x)(\phi(x))$ μπορούν να ερμηνευτούν με διάφορους τρόπους όπως «υπάρχει x » ή «τουλάχιστον ένα x » ή «κάποιο x », «μερικά x », «ένα συγκεκριμένο x ». Για να διατυπώσουμε λοιπόν, ότι όλα τα αντικείμενα ενός συνόλου, ικανοποιούν την ιδιότητα p , γράφουμε $\forall x p(x)$, ενώ αν θέλουμε να πούμε πως υπάρχουν κάποια αντικείμενα του συνόλου, που ικανοποιούν την ιδιότητα p , γράφουμε $\exists x p(x)$. Με άλλα λόγια, αυτό σημαίνει ότι η έκφραση $\forall x p(x)$ είναι αληθής αν όλα τα αντικείμενα ικανοποιούν την ιδιότητα p , ενώ η έκφραση $\exists x p(x)$ είναι αληθής αν υπάρχει τουλάχιστον ένα αντικείμενο που να ικανοποιεί την ιδιότητα p (Μάργαρης, 2018)

Με τον καθολικό ποσοδείκτη χρησιμοποιείται από κοινού ο τελεστής της λογικής συνεπαγωγής. Ένα λάθος που παρατηρείται συχνά είναι η χρήση του καθολικού ποσοδείκτη μαζί με τον τελεστή της λογικής σύζευξης. Για παράδειγμα η πρόταση $(\forall x)Student(x) \rightarrow Smart(x)$, που σημαίνει ότι όλοι οι φοιτητές είναι έξυπνοι. Αντίθετα, ο υπαρξιακός ποσοδείκτης, συνηθέστερα χρησιμοποιείται από κοινού με τον τελεστή της λογικής σύζευξης. Ένα συχνό λάθος είναι η χρήση του υπαρξιακού ποσοδείκτη με τον τελεστή της λογικής συνεπαγωγής. Για παράδειγμα, η πρόταση $(\exists x)Student(x) \wedge Smart(x)$, σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας έξυπνος φοιτητής (Μάργαρης, 2018).

▪ Σειρά και προτεραιότητα ποσοδεικτών

Στην περίπτωση που υπάρχουν δύο ποσοδείκτες ίδιου είδους (δηλαδή δύο καθολικοί ή δύο υπαρξιακοί) δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία γράφονται τα στιγμιότυπά τους. Για παράδειγμα, είτε γράψουμε $(\forall x)(\forall y)P(x)Q(y)$ είτε $(\forall y)(\forall x)Q(y)P(x)$ το νόημα παραμένει το ίδιο (Μάργαρης, 2018). Ωστόσο, όπως αναφέρουν ο Βλαχάβας, κ.α. (2005), η σειρά των ποσοδεικτών σε μια έκφραση έχει μεγάλη σημασία, όταν αυτοί είναι διαφορετικού τύπου (δηλαδή υπαρξιακοί και καθολικοί ποσοδείκτες). Ο κανόνας που ακολουθείται είναι ο εξής: ο πρώτος ποσοδείκτης υποδεικνύει το υποκείμενο της

έκφρασης, ενώ οι υπόλοιποι αναφέρονται στα αντικείμενα της έκφρασης. Για παράδειγμα στους τύπους $(\forall x)((\exists y)(P(x,y)))$, και $(\exists y)((\forall x)(P(x,y)))$, ο πρώτος τύπος ερμηνεύεται ως «για κάθε αντικείμενο x του πεδίου ορισμού, υπάρχει ένα αντικείμενο y , ώστε να αληθεύει η σχέση (x,y) », ενώ ο δεύτερος ερμηνεύεται ως «υπάρχει τουλάχιστον ένα αντικείμενο y , ώστε για κάθε αντικείμενο x να αληθεύει η σχέση (x,y) ». Όσον αφορά στην προτεραιότητα των ποσοδεικτών, εκείνοι έχουν μεγαλύτερη προτεραιότητα από τους λογικούς τελεστές, εκτός από τον τελεστή της λογικής άρνησης, με τον οποίον έχουν την ίδια προτεραιότητα (Μάργαρης, 2018).

▪ Εμβέλεια Ποσοδεικτών

Η εμβέλεια (score) ενός ποσοδείκτη είναι το εύρος των προτάσεων στις οποίες έχει ισχύ (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012). Σε έναν τύπο $(\exists x)(\phi(x))$ ή $(\forall x)(\phi(x))$, το $\phi(x)$ ονομάζεται εμβέλεια των $\exists x$ και $\forall x$ αντίστοιχα (Βλαχάβας, κ.α. 2005). Για να ορίσουμε με ακριβές τρόπο την εμβέλεια ενός ποσοδείκτη είναι απαραίτητη η χρήση παρενθέσεων για να την υποδείξουμε. Για παράδειγμα στην πρόταση $(\forall x) (\text{φοιτητής}(x) \rightarrow (\exists z) (\text{πανεπιστήμιο}(z) \wedge \text{πηγαίνει}(x,z)))$, εμβέλεια του $(\forall x)$, αποτελεί όλη η πρόταση που έπεται του ποσοδείκτη αυτού, ενώ εμβέλεια του υπαρξιακού ποσοδείκτη $(\exists z)$ αποτελεί η υποπρόταση $(\text{πανεπιστήμιο}(z) \wedge \text{πηγαίνει}(x,z))$. Όταν οι παρενθέσεις απουσιάζουν, υπονοείται ότι ο ποσοδείκτης εφαρμόζεται μόνο στην πρόταση που ακολουθεί, όπως για παράδειγμα στην πρόταση $(\exists x) \text{άνθρωπος}(x) \wedge (\exists y) \text{ινδός}(y)$ (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012).

▪ Δεσμευμένες και ελεύθερες μεταβλητές

Σε μια έκφραση, μια μεταβλητή ονομάζεται δεσμευμένη (bound), όταν η εμφάνισή της (occurrence) μέσα στην έκφραση αυτή βρίσκεται μέσα στην εμβέλεια ενός ποσοδείκτη, που την προσδιορίζει. Εάν μια μεταβλητή δεν είναι δεσμευμένη από κάποιον ποσοδείκτη, τότε ονομάζεται ελεύθερη (free). Για παράδειγμα, στην έκφραση $(\forall x)(\phi(x,y))$ η εμφάνιση της μεταβλητής x είναι δεσμευμένη, ενώ η εμφάνιση της y είναι ελεύθερη. Ένας τύπος που περιέχει ελεύθερες μεταβλητές λέγεται ανοιχτός τύπος ή ανοιχτή πρόταση, ενώ ένας τύπος που δεν περιέχει ελεύθερες μεταβλητές λέγεται κλειστός τύπος ή κλειστή πρόταση (closed formula) (Βλαχάβας, κ.α. 2005; Μπαγουλή, 2009). Θα πρέπει να σημειωθεί πως οι μεταβλητές που δεσμεύονται από διαφορετικούς ποσοδείκτες θεωρούνται διαφορετικές, ακόμη κι αν έχουν την ίδια ονομασία. Επίσης είναι δυνατόν η εμφάνιση της ίδιας μεταβλητής σε μια πρόταση τόσο ως ελεύθερη όσο και ως δεσμευμένη. Το γεγονός αυτό

μας επιτρέπει να διατυπώσουμε τον ισχυρισμό ότι ο χαρακτηρισμός μιας μεταβλητής ως ελεύθερης ή δεσμευμένης, στην πραγματικότητα δεν αναφέρεται στη μεταβλητή αυτή καθαυτή αλλά στην εμφάνισή της μέσα στον πρωτοβάθμιο τύπο.

Οι πιο ενδιαφέροντες πρωτοβάθμιοι τύποι είναι όσοι περιέχουν δεσμευμένες μεταβλητές και όχι ελεύθερες από την άποψη ότι επιδέχονται πλήρη και σαφή μετάφραση και δεν οδηγούν σε ατελείς προτάσεις. Αυτοί οι τύποι περιγράφουν έναν ισχυρισμό ο οποίος μπορεί πάντοτε να εκτιμηθεί ως αληθής ή ψευδής και μπορούν να χαρακτηριστούν ως «προτάσεις» της κατηγορηματικής λογικής. Επομένως ως πρόταση ορίζεται ένας πρωτοβάθμιος τύπος, ο οποίος δεν περιέχει ελεύθερες μεταβλητές (Μάργαρης, 2018).

3.2.5 Λογικά και μη λογικά σύμβολα

Τα συντακτικά σύμβολα του κατηγορηματικού λογισμού, που αναλύθηκαν παραπάνω μπορούν να διακριθούν σε λογικά και μη λογικά σύμβολα. Τα λογικά σύμβολα έχουν πάντοτε συγκεκριμένη ερμηνεία. Στα μη λογικά σύμβολα, η λειτουργία τους καθορίζεται από την εκάστοτε ερμηνεία (Κολέτσος, χ.χ.).

Στα λογικά σύμβολα της κατηγορηματικής λογικής περιλαμβάνονται (Μάργαρης, 2018):

- Οι πέντε λογικοί σύνδεσμοι
- Τα σύμβολα του καθολικού και του υπαρξιακού ποσοδείκτη
- Τα σημεία στίξης, δηλαδή τα κόμματα και οι παρενθέσεις

Στα μη λογικά σύμβολα ή ειδικά σύμβολα της κατηγορηματικής γλώσσας περιλαμβάνονται (Μάργαρης, 2018):

- Οι σταθερές
- Οι μεταβλητές
- Τα κατηγορηματικά σύμβολα
- Τα συναρτησιακά σύμβολα

3.2.6 Όροι και τύποι

Σε αυτό το σημείο, δίνεται ο ορισμός δύο διαφορετικών τύπων αντικειμένων, των όρων που περιγράφουν τα αντικείμενα της γλώσσας και τις ιδιότητές τους, και των τύπων, που περιγράφουν μέσω των κατάλληλων κατηγορημάτων, τις συσχετίσεις που υφίστανται ανάμεσα στα αντικείμενα αυτά.

Ένας όρος (term) της κατηγορηματικής λογικής ορίζεται αναδρομικά ως εξής (Παναγιωτόπουλος, και Αναστασάκης, 2012: 42-43) :

- μια σταθερά είναι ένας όρος
- μια μεταβλητή είναι ένας όρος
- εάν f είναι ένα συναρτησιακό σύμβολο n -ορισμάτων, της μορφής $F(t_1, t_2, \dots, t_n)$ και t_1, t_2, \dots, t_n είναι όροι, τότε το $F(t_1, t_2, \dots, t_n)$ είναι επίσης όρος
- Όλοι οι όροι που μπορούμε να παράγουμε σχηματίζονται με τους παραπάνω κανόνες.

Σε περιπτώσεις που ένας όρος δεν περιέχει μεταβλητές, αλλά κατασκευάζεται μόνο από σταθερές και συναρτήσεις, ονομάζεται βασικός ή κλειστός όρος (Μάργαρης, 2018).

Ένας ατομικός τύπος απεικονίζει μια σχέση ανάμεσα σε μια διατεταγμένη πλειάδα (tuple) αντικειμένων, που μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής. Αυτού του είδους συσχετίσεις περιγράφονται ως επί το πλείστον με τη βοήθεια των κατηγορημάτων. Έτσι ως ατομικός πρωτοβάθμιος τύπος ή άτομο ορίζεται μια πλειάδα συμβόλων $(p, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$ ή ισοδύναμα ως την έκφραση $p(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$, όπου p είναι ένα κατηγορηματάξης n , ενώ τα σύμβολα $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, αποτελούν τα ορίσματά του (Βλαχάβας, κ.α. 2005). Τα ορίσματα των ατομικών τύπων αποτελούν όρους, οι οποίοι μπορεί να είναι απλοί ή σύνθετοι (Μάργαρης, 2018).

Μία λογική έκφραση, λοιπόν, χαρακτηρίζεται ως πρωτοβάθμιος τύπος εάν έχει κατασκευαστεί από ένα ή περισσότερα κατηγορήματα (Μάργαρης, 2018). Όταν για την κατασκευή ενός τύπου έχει χρησιμοποιηθεί ένα απλό κατηγορηματά, ο τύπος χαρακτηρίζεται ως στοιχειώδης ή ατομικός πρωτοβάθμιος τύπος. Από την άλλη πλευρά, πιο πολύπλοκοι τύποι που προκύπτουν από συνδυασμό των ατομικών τύπων με τη βοήθεια των πέντε λογικών τελεστών ή/ και περιέχουν ποσοδείκτες λέγονται σύνθετοι τύποι.

Ένας ατομικός τύπος (atomic formula) ορίζεται επαγωγικά ως εξής (Μάργαρης, 2018):

- i. Κάθε άτομο αποτελεί έναν τύπο
- ii. Αν ϕ και ψ είναι πρωτοβάθμιοι τύποι, τότε οι σύνθετες εκφράσεις $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\neg\phi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$ αποτελούν τύπους
- iii. Αν x είναι μεταβλητή και ϕ τύπος, τότε οι εκφράσεις $(\exists x)\phi$, $(\forall x)\phi$, αποτελούν τύπους της κατηγορηματικής λογικής
- iv. Δεχόμαστε πως τίποτε άλλο εκτός από αυτά που περιγράφονται στα i, ii και iii δεν αποτελεί έγκυρο πρωτοβάθμιο τύπο

Ένας ατομικός τύπος που δεν περιέχει μεταβλητές, περιγράφει ιδιότητες αντικειμένων π.χ. $\text{Student}(\text{john})$ είναι ένας τύπος που αναφέρει απλώς ότι ο John είναι φοιτητής.

Όλα τα παραπάνω τα συνδυάζουμε κατάλληλα, ώστε να σχηματίσουμε προτάσεις της κατηγορηματικής λογικής. Τα κατηγορήματα και οι ποσοδείκτες χρησιμοποιούνται για το σχηματισμό καλοσχηματισμένων προτάσεων (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012). Οι καλοσχηματισμένες προτάσεις (well formed formulas, wffs), στον κατηγορηματικό λογισμό ορίζονται αναδρομικά ως εξής (Δενδρινός, χ.χ.: 32-33):

- i. Ένα άτομο ή κατηγορηματικό είναι μια wff.
- ii. Εάν p και q είναι wffs, τότε οι εκφράσεις $\neg p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$, είναι επίσης wffs.
- iii. Εάν p είναι μια wff και X είναι μια ελεύθερη μεταβλητή που εμφανίζεται μέσα στην πρόταση p , τότε οι εκφράσεις $(\forall X)p$ και $(\exists X)p$ είναι επίσης wffs.
- iv. Οι wffs δημιουργούνται μόνο μέσω πεπερασμένης ακολουθίας των κανόνων i-iii.

Παραδείγματα καλοσχηματισμένων προτάσεων είναι οι παρακάτω προτάσεις:

$(\forall X) (\text{άνθρωπος}(X) \rightarrow \text{θνητός}(X))$ = όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί

$(\exists X) (\text{άνθρωπος}(X) \wedge \text{ιταλός}(X))$ = υπάρχει κάποιος άνθρωπος που είναι Ιταλός

$\neg(\exists X) (\text{δεινόσαυρος}(X) \wedge \text{ζωντανός}(X))$ = δεν υπάρχει κάποιος δεινόσαυρος που να είναι ζωντανός.

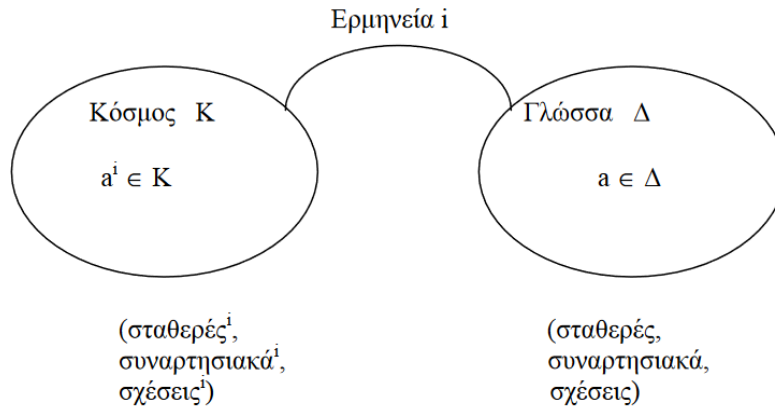
3.3 Σημασιολογία

Αφού περιγράψαμε το συντακτικό του κατηγορηματικού λογισμού και τον τρόπο κατασκευής πρωτοβάθμιων τύπων, αυτή η υποενότητα πραγματεύεται τη σημασιολογία της κατηγορηματικής λογικής, που σχετίζεται με την απόδοση νοήματος σε αυτούς τους τύπους.

3.3.1 Εννοιολογική αποτύπωση

Η εννοιολογική αποτύπωση (conceptualization) αποτελεί μια περιγραφή της εννοιολογικής δομής που σχηματίζεται στον μυαλό μας, όταν αντικρύζουμε ένα γεγονός ή ένα φαινόμενο. Αρχικά, το πρώτο που διακρίνουμε όταν παρατηρούμε ένα φαινόμενο ή ένα γεγονός είναι το σύνολο των αντικειμένων που συμμετέχουν στο φαινόμενο, τα οποία μπορεί να είναι συγκεκριμένα ή αφηρημένα, απλά ή σύνθετα, πραγματικά ή φανταστικά. Ένα αντικείμενο, δηλαδή, είναι ο,τιδήποτε, στο οποίο θέλουμε να αναφερθούμε. Στη συνέχεια εντοπίζουμε τις ιδιότητες και τις συσχετίσεις μεταξύ των αντικειμένων. «Η εννοιολογική αποτύπωση είναι το μαθηματικό εκείνο εργαλείο που θα μας επιτρέψει να αποτυπώσουμε τη μοντελοθεωρητική σημασιολογία της κατηγορηματικής λογικής».

Αποτελεί μια περίπλοκη έννοια γιατί δεν αναφέρεται απλά σε συναρτήσεις, σχέσεις κ.τ.λ.. αλλά «σε συναρτήσεις, σχέσεις, αντικείμενα του πραγματικού κόσμου, συναρτήσεις, σχέσεις και σύμβολα της τυπικής γλώσσας και την σχέση μεταξύ τους» (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012: 45).



Σχήμα 1. Εννοιολογική αποτύπωση : ο κόσμος, η γλώσσα και η ερμηνεία (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012: 45)

Ο κόσμος K, όπως απεικονίζεται στην αριστερή πλευρά του σχήματος έχει ως στοιχεία του τα αντικείμενα, τις συναρτήσεις τους και τις μεταξύ τους σχέσεις, τα οποία αποτυπώνονται στο νου μας και αποτελούν αναπαραστάσεις του πραγματικού κόσμου. Ο κόσμος αυτός μπορεί να είναι ο πραγματικός κόσμος ή κάποιος φανταστικός κόσμος, ο οποίος αποτελεί την εκάστοτε φορά το αντικείμενο ενδιαφέροντος ενός νοήμονος όντος. Έτσι μπορεί να μιλάμε για το φυσικό κόσμο, για τον μαθηματικό κόσμο ή για τον κοινωνικό κόσμο ή για κάποια υποσύνολά τους (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012).

Πραγματοποιώντας κάποια αφαίρεση του κόσμου προσπαθούμε να αναπτύξουμε θεωρητικά ή μαθηματικά συστήματα/μοντέλα, που θα οδηγήσουν στην ανάπτυξη πληροφοριακών συστημάτων (Δενδρινός, χ.χ.). Η ανάπτυξη ωστόσο ενός τέτοιου συστήματος προϋποθέτει την αναπαράσταση της γνώσης του κόσμου D (universe of discourse), με την χρήση μιας τυπικής γλώσσας ή ενός τυπικού συστήματος. Η τυπική γλώσσα D (formal language), που απεικονίζεται στη δεξιά πλευρά του σχήματος, πρέπει να διαθέτει τα σύμβολα και τις συντακτικές δομές που μπορούν να αναπαραστήσουν τα αντικείμενα, τις συναρτήσεις και τις σχέσεις (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012). Με αυτόν τον τρόπο ένα νοήμον ον, χρησιμοποιώντας μια τυπική γλώσσα μπορεί να αποτυπώσει με σύμβολα διάφορα γεγονότα του κόσμου αναφοράς στη γλώσσα Δ (Δενδρινός, χ.χ.).

Ο κόσμος αναφοράς ή πεδίο αναφοράς αποτελεί το πεδίο ορισμού της κατηγορηματικής συνάρτησης που χρησιμοποιείται σε κάθε περίπτωση. Περιλαμβάνει τη συσχετίση ενός κατηγορήματος με το κατάλληλο σύνολο, τα στοιχεία του οποίου εάν αντικατασταθούν το μετασχηματίζουν σε αληθή ή ψευδή πρόταση. Η επιλογή του κατάλληλου συνόλου αναφοράς, υπαγορεύεται από τη φύση του κατηγορήματος, δηλαδή ένα κατηγορηματικό της μορφής $I_{\text{oves}}(x,y)$, θα χρησιμοποιεί ως πεδίο αναφοράς το σύνολο των ανθρώπων. Από την άλλη πλευρά, εάν το κατηγορηματικό περιέχει μαθηματικές πράξεις, θα χρησιμοποιεί ως πεδίο αναφοράς το σύνολο R των πραγματικών αριθμών (Μάργαρης, 2018).

Η γλώσσα του κατηγορηματικού λογισμού διαθέτει την απαιτούμενη συντακτική δομή, δηλαδή τους όρους, τα κατηγορήματα και τις καλοσχηματισμένες προτάσεις, που χρησιμοποιούνται για τη σύνταξη ενός συνόλου αρχικών προτάσεων, που περιγράφει ένα γεγονός που θέλουμε να αναπαραστήσουμε. Το σύνολο αυτό των αρχικών προτάσεων, ονομάζεται και σύνολο θεμελιωδών αξιωμάτων (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012).

3.3.2 Ερμηνεία

Η σημασιολογία μιας συμβολικής γλώσσας αναπαράστασης γνώσης, όπως η κατηγορηματική λογική, προϋποθέτει την ύπαρξη ενός αφηρημένου κόσμου (abstract world), συνόλου ή σύμπαντος αναφοράς ή πεδίου ορισμού (Universe of discourse ή D) στον οποίο αντιστοιχούν τα λογικά σύμβολα της γλώσσας. Ο κόσμος αυτός απαρτίζεται από αντικείμενα και σχέσεις μεταξύ αυτών των αντικειμένων της πραγματικότητας που θέλουμε να περιγράψουμε (Κοντούλης, 2012). Η αντιστοίχιση των λογικών συμβόλων με τα αντικείμενα αυτά προϋποθέτει την ερμηνεία τους. Η ερμηνεία I στη κατηγορηματική λογική είναι «η απεικόνιση που αντιστοιχεί κάθε σύμβολο της γλώσσας σε κάποιο από τα στοιχεία του κόσμου αναφοράς» (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012: 46). Στο πλαίσιο της κατηγορηματικής λογικής, «η ερμηνεία μιας πρότασης p της γλώσσας L συνίσταται στον ορισμό ενός μη κενού συνόλου D , που αποτελείται από τα αντικείμενα του κόσμου αναφοράς W και στην απεικόνιση κάθε σταθεράς, συναρτησιακού και κατηγορήματος της p σε αντικείμενα, συναρτήσεις και σχέσεις του W ως εξής» (Δενδρινός, χ.χ.: 40):

1. $c \in C \Rightarrow c' \in D$, δηλαδή, σε καθεμία από τις σταθερές (C) της γλώσσας αναθέτουμε ένα αντικείμενο του κόσμου D ,

2. $f \in F \Rightarrow f^i : D^n \rightarrow D$, δηλαδή, κάθε συναρτησιακό σύμβολο f , αντιστοιχίζεται σε μία συνάρτηση f^i του κόσμου αναφοράς, που εκφράζει ένα αντικείμενο του κόσμου ως συνάρτηση n αντικειμένων του,

3. $r \in R \Rightarrow r^i : D^n \rightarrow \{0, 1\}$ (ή $r^i \subseteq D^n$), δηλαδή για κάθε κατηγορηματικό σύμβολο n -ορισμάτων αναθέτουμε μια αντιστοιχία με μια σχέση r^i μεταξύ n αντικειμένων του κόσμου αναφοράς, που μπορούμε να βεβαιώσουμε ως αληθή ή ψευδή.

Η απόδοση του νοηματικού περιεχομένου αποτελεί μια απαραίτητη και σημαντική διαδικασία, αφού οι πρωτοβάθμιοι τύποι αποτελούν αφηρημένες συμβολοσειρές, που δεν μπορούν να ερμηνευτούν ως έχουν στην καθομιλούμενη γλώσσα. Άλλωστε, τα μη λογικά σύμβολα, ονομάζονται έτσι για το λόγο ότι απουσιάζει πλήρως σε αυτά το νοηματικό περιεχόμενο και έχουν καθαρά αφηρημένο συμβολικό χαρακτήρα, με το νοηματικό περιεχόμενο να εκχωρείται σε αυτά μέσω της ερμηνείας. Παραδείγματος χάριν, το κατηγορημα $\text{loves}(x,y)$ δεν έχει κάποιο νόημα, παρά μόνο όταν οι μεταβλητές x και y αντικατασταθούν από ονόματα ανθρώπων, οπότε και η πρόταση που προκύπτει μπορεί να χαρακτηριστεί ως αληθής ή ψευδής (Μάργαρης, 2018).

3.3.3 Εκτίμηση αληθείας

Για να είναι δυνατή η εκτίμηση αληθείας είναι αναγκαία η εκχώρηση ή απονομή τιμών, που αποδίδει σημασιολογικό περιεχόμενο στις μεταβλητές, απεικονίζοντας τις στα κατάλληλα αντικείμενα, δηλαδή τα στοιχεία του συνόλου αναφοράς που χρησιμοποιούνται σε κάθε περίπτωση. Η απονομή αυτή είναι απαραίτητη για τους όρους που περιέχουν μεταβλητές ή για τους τύπους που περιλαμβάνουν ελεύθερες μεταβλητές, δηλαδή τη μετατροπή τους σε κλειστούς τύπους, ώστε να είναι δυνατός ο καθορισμός της αληθοτιμής τους (Μάργαρης, 2018). Η ανάθεση μεταβλητών U πραγματοποιείται ως εξής: εάν V είναι το σύνολο μεταβλητών της γλώσσας, τότε η ανάθεση μεταβλητών (variable assignment) U είναι μια απεικόνιση από το V στο D , $X \in V \Rightarrow X_u \in D$. Για παράδειγμα στην πρόταση $(\forall X)(\forall Y)(\text{on}(X,Y) \rightarrow \text{abov}(X,Y))$ εμφανίζονται οι μεταβλητές X και Y . Μια ανάθεση για την X θα ήταν η $X_u = \alpha$, και μια άλλη ανάθεση για την Y θα ήταν η $Y_u = \gamma$. Η ανάθεση των μεταβλητών συμπληρώνει την ερμηνεία και είναι χρήσιμη στην ανάθεση όρων (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012). Απαραίτητη επίσης είναι η ερμηνεία, που αποτελεί ευρύτερη έννοια της εκχώρησης και όπως έχει αναφερθεί προσδίδει νόημα στα μη λογικά σύμβολα της πρωτοβάθμιας γλώσσας (Μάργαρης, 2018). Δεδομένης μιας ερμηνείας I και μιας ανάθεσης μεταβλητών U , η ανάθεση όρων (term assignment) T_{IU} είναι

μια απεικόνιση από τους όρους της γλώσσας στα αντικείμενα του κόσμου (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012). Αφού έχουν πραγματοποιηθεί αυτές οι διαδικασίες, μπορούμε να ελέγξουμε την τιμή αληθείας των προτάσεων (Μάργαρης, 2018).

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι ερμηνείες μπορούν να είναι πολλές και διαφορετικές, όπου η καθεμία σχετίζεται με ένα πεδίο αναφοράς. Επομένως κάθε πρωτοβάθμιος τύπος θα ικανοποιείται ή όχι, ανάλογα με την ερμηνεία που χρησιμοποιείται σε κάθε περίπτωση (Μάργαρης, 2018). Ανάλογα με την ερμηνεία δηλαδή αλλάζει το νόημα των συμβόλων της γλώσσας, των σχέσεων, οι τιμές αλήθειας, κ.τ.λ. (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012). Για κάθε ερμηνεία μιας πρότασης σε ένα πεδίο D , μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της ως αληθής (1) ή ψευδής (0), χρησιμοποιώντας τους παρακάτω κανόνες (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012: 52):

1. Εάν έχουμε υπολογίσει τις τιμές των προτάσεων ϕ και ψ , τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των προτάσεων $\neg\phi$, $\phi\vee\psi$, $\phi\wedge\psi$, $\phi\rightarrow\psi$, $\phi\leftarrow\psi$, $\phi\leftrightarrow\psi$, χρησιμοποιώντας τους πίνακες αλήθειας των λογικών συνδέσμων,
2. $(\forall X)\phi$ αποτιμάται ως αληθής (1), εάν η τιμή του ϕ αποτιμάται 1 για κάθε στοιχείο d του συνόλου D (για το οποίο θα κάνουμε την ανάθεση $X=d$). Αλλιώς αποτιμάται ως ψευδής,
3. $(\exists X)\phi$ αποτιμάται ως αληθής (1), εάν υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο d του D για το οποίο η ϕ αποτιμάται 1 (για το οποίο θα κάνουμε την ανάθεση $X=d$). Αλλιώς αποτιμάται ως ψευδής.

Όλοι οι παραπάνω ορισμοί είναι απαραίτητοι για τον ορισμό της αλήθειας μιας πρότασης του κατηγορηματικού λογισμού. Η αλήθεια αυτή ορίζεται μέσα από τις προτάσεις ικανοποιησιμότητας (satisfaction formulae) (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012). Μια ερμηνεία ικανοποιεί έναν τύπο, αν ο τύπος είναι αληθής κάτω από αυτή την ερμηνεία (Βλαχάβας, κ.α., 2005), τότε και ο τύπος χαρακτηρίζεται ως ικανοποιήσιμος (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012). Εάν ένας τύπος ϕ ικανοποιείται από κάποια ερμηνεία ε που σχετίζεται με ένα πεδίο αναφοράς, η ερμηνεία χαρακτηρίζεται ως μοντέλο M του τύπου και γράφουμε $\models M \phi[\varepsilon]$, ενώ ο τύπος ϕ χαρακτηρίζεται ως ικανοποιήσιμος. Αντίθετα εάν η ερμηνεία ε δεν ικανοποιεί τον τύπο ϕ , αυτό απεικονίζεται ως $\not\models M \phi[\varepsilon]$ και ο τύπος χαρακτηρίζεται ως μη ικανοποιήσιμος. Εάν ένας τύπος ικανοποιείται για όλες τις ερμηνείες γράφουμε απλά $M \models \phi$. Ένας πρωτοβάθμιος τύπος ϕ είναι λογικό συμπέρασμα ενός τύπου ψ , αν κάθε μοντέλο του ψ είναι και μοντέλο του ϕ , δηλαδή κάθε ερμηνεία που ικανοποιεί τον ψ ικανοποιεί και τον ϕ και συμβολίζεται ως $\psi \models \phi$. Δύο πρωτοβάθμιοι τύποι ϕ και ψ χαρακτηρίζονται ως λογικά

ισοδύναμοι αν ο καθένας είναι λογικό συμπέρασμα του άλλου ($\phi \models \psi$ και $\psi \models \phi$) και συμβολίζεται ως $\phi \equiv \psi$ (Μάργαρης, 2018). Μια πρόταση που είναι αληθής κάτω από όλες τις ερμηνείες ονομάζεται ταυτολογία (valid, tautology). Στην αντίθετη περίπτωση, όταν η πρόταση είναι ψευδής κάτω από όλες τις ερμηνείες λέγεται αντίφαση, αντιλογία ή ασυνεπής (inconsistent, unsatisfiable, contradiction) (Παναγιωτόπουλος και Αναστασιάκης, 2012).

3.3.4 Οι κανονικές μορφές στον κατηγορηματικό λογισμό

Όπως και στην προτασιακή λογική, οι κανονικές μορφές της κατηγορηματικής λογικής, είναι η διαζευκτική και η συζευκτική μορφή. Ένας τύπος ϕ της κατηγορηματικής λογικής είναι εκπεφρασμένος σε κανονική διαζευκτική μορφή (Disjunctive Normal Form, DNF), όταν γράφεται ως $P_1 \vee P_2 \vee P_3 \dots \vee P_n$, όπου P είναι κατηγορήματα. Ανάλογα, ένας τύπος ϕ εκφράζεται σε κανονική συζευκτική μορφή (Conjunctive Normal Form, CNF), όταν είναι διατυπωμένος ως $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \dots \wedge P_n$. Ωστόσο στον κατηγορηματικό λογισμό υπάρχουν κι άλλες κανονικές μορφές, στις οποίες μπορεί να εκφράζεται ένας τύπος, οι οποίες σχετίζονται με τους δύο ποσοδείκτες. Αυτές οι κανονικές μορφές είναι η κανονική μορφή PNF (Prenex Normal Form) και η κανονική μορφή SNF (Skolem Normal Form). Ένας τύπος της κατηγορηματικής λογικής βρίσκεται σε κανονική μορφή prenex, όταν όλοι οι ποσοδείκτες που εμφανίζονται στον τύπο βρίσκονται στα αριστερά, δηλαδή προηγούνται των υπόλοιπων λογικών συμβόλων του τύπου (Μάργαρης, 2018). Για να μετατρέψουμε έναν τύπο σε κανονική μορφή PNF απαιτούνται τέσσερα βήματα (Μάργαρης, 2018: 542-543):

1. Απαλοιφή των λογικών τελεστών της συνεπαγωγής και της ισοδυναμίας, χρησιμοποιώντας τις λογικές ισοδυναμίες που είναι γνωστές από την προτασιακή λογική: $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ και $p \leftrightarrow q \equiv ((\neg p \vee q) \wedge (q \vee p))$
2. Μετασχηματισμός του τύπου που προκύπτει από το βήμα 1 σε κανονική μορφή άρνησης, χρησιμοποιώντας το νόμο της διπλής άρνησης, και τους νόμους de Morgan⁴ για τους ποσοδείκτες.
3. Μετονομασία των δεσμευμένων μεταβλητών, ώστε να μην υπάρχει μεταβλητή που να βρίσκεται την εμβέλεια διαφορετικών ποσοδεικτών
4. Μεταφορά των ποσοδεικτών στα αριστερά του τύπου μπροστά από τους τελεστές της λογικής σύζευξης και διάζευξης.

⁴ $\neg \forall x p(x) \equiv \exists x \neg p(x)$ και $\neg \exists x p(x) \equiv \forall x \neg p(x)$

Ένας τύπος της κατηγορηματικής λογικής βρίσκεται σε κανονική μορφή Skolem (Skolem Normal Form, SNF), όταν εκφράζεται σε μορφή PNF και όλοι οι υπαρξιακοί ποσοδείκτες προηγούνται των καθολικών ποσοδεικτών. Η διαδικασία μετασχηματισμού ενός τύπου PNF σε μορφή SNF συνίσταται στην απαλοιφή όλων των υπαρξιακών ποσοδεικτών από τον τύπο PNF και την αντικατάσταση όλων των εμφανίσεων των μεταβλητών που βρίσκονταν κάτω από την εμβέλεια του υπαρξιακού ποσοδείκτη με σύμβολα σταθερών ή/και συναρτήσεων, τα οποία είναι γνωστά ως σταθερές Skolem και συναρτήσεις Skolem αντίστοιχα (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012; Μάργαρης, 2018). Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή και ως Σκολεμοποίηση (Skolemization), από το όνομα του Νορβηγού μαθηματικού A.T. Skolem, που εισήγαγε τη μέθοδο το 1920 (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012).

Οι παραπάνω διαδικασίες μετατροπής σε κανονική μορφή, είναι χρήσιμες και κατά την αποδεικτική διαδικασία, που αναφέρεται στη συνέχεια.

3.3.5 Ισοδυναμίες

Στον κατηγορηματικό λογισμό χρησιμοποιείται ένα σύνολο από λογικές ισοδυναμίες για τον μετασχηματισμό των τύπων της λογικής. Αυτές οι ισοδυναμίες διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: εκείνες που είναι όμοιες με την προτασιακή λογική και σε αυτές που σχετίζονται με τους δύο ποσοδείκτες της κατηγορηματικής λογικής (Βλαχάβας, κ.α., 2005).

Από την προτασιακή λογική (Βλαχάβας, κ.α., 2005):

| Ισοδυναμία | Ονομασία |
|---|----------------------------------|
| $p \Leftrightarrow \neg\neg p$ | Νόμος της διπλής άρνησης |
| $(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg (p \wedge q)$ | Νόμος De Morgan |
| $(\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg (p \vee q)$ | Νόμος De Morgan |
| $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ | Επιμερισμός ως προς την σύζευξη |
| $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ | Επιμερισμός ως προς την διάζευξη |
| $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg (p \vee q)$ | |
| $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$ | |

Πίνακας 4. Λογικές ισοδυναμίες από την προτασιακή λογική

Οι παρακάτω ισοδυναμίες αφορούν στους ποσοδείκτες (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012):

| | | |
|--|-----------|--|
| $(\exists X) (\exists Y) \phi(X,Y)$ | \models | $(\exists Y) (\exists X) \phi(X,Y)$ |
| $(\forall X) (\forall Y) \phi(X,Y)$ | \models | $(\forall Y) (\forall X) \phi(X,Y)$ |
| $(\forall X) (\phi(X) \wedge \psi(X))$ | \models | $(\forall X) \phi(X) \wedge (\forall X) \psi(X)$ |
| $(\forall X) (\phi(X) \vee \psi)$ | \models | $(\forall X) \phi(X) \vee \psi$ |
| $(\exists X) (\phi(X) \vee \psi(X))$ | \models | $(\exists X) \phi(X) \vee (\exists X) \psi(X)$ |
| $(\exists X) (\phi(X) \wedge \psi)$ | \models | $(\exists X) \phi(X) \wedge \psi$ |
| $(\forall X) \neg \phi(X)$ | \models | $\neg (\exists X) \phi(X)$ |
| $(\exists X) \neg \phi(X)$ | \models | $\neg (\forall X) \phi(X)$ |

Πίνακας 5. Λογικές ισοδυναμίες ποσοδεικτών

Οι επόμενες σχέσεις δεν λειτουργούν σαν λογικές ισοδυναμίες αλλά μόνο σαν λογικά συμπεράσματα (δηλαδή μόνο κατά τη μια φορά) (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012):

| | | |
|--|-----------|--|
| $(\exists X) (\phi(X) \wedge \psi(X))$ | \models | $(\exists X) \phi(X) \wedge (\exists X) \psi(X)$ |
| $(\exists X) (\forall Y) \phi(X,Y)$ | \models | $(\forall Y) (\exists X) \phi(X,Y)$ |
| $(\forall X) \phi(X)$ | \models | $(\exists X) \phi(X)$ |
| $\neg(\exists X) \phi(X)$ | \models | $\neg(\forall X) \phi(X)$ |
| $(\forall X) (\phi(X) \vee \psi(X))$ | \models | $(\forall X) \phi(X) \vee (\forall X) \psi(X)$ |
| $(\forall X) (\exists Y) \phi(X,Y)$ | \models | $(\exists Y) (\forall X) \phi(X,Y)$ |

Πίνακας 6. Λογικές ισοδυναμίες – λογικά συμπεράσματα

3.4 Διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων

3.4.1 Συστήματα απόδειξης

Όπως και η προτασιακή λογική, ο κατηγορηματικός λογισμός διαθέτει τα δικά του συστήματα απόδειξης. Το σύστημα απόδειξης αποτελείται από ένα σύνολο κανόνων συμπερασμού, οι οποίοι μπορούν να εφαρμοστούν σε ένα σύνολο προτάσεων για την παραγωγή νέων προτάσεων ή για την απόδειξη προτάσεων από ακολουθίες προτάσεων (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012). Υπάρχουν πολλοί κανόνες συμπερασμού, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μια αποδεικτική διαδικασία: αυτοί που ισχύουν στην προτασιακή λογική, π.χ. "τρόπος του θέτειν" (modus ponens), η εισαγωγή συζεύξεων, η εισαγωγή διαζεύξεων, αντικατάσταση μεταβλητών κλπ. ενώ υπάρχουν δύο ακόμη κανόνες, που αφορούν προτάσεις που περιέχουν ποσοτικοποιημένες μεταβλητές. Ο modus ponens (τρόπος του θέτειν) είναι βασικός κανόνας για την εξαγωγή συμπερασμάτων και σημαίνει ότι αν το A συνεπάγεται το B και το A είναι αληθές, τότε και το B είναι αληθές, -το

αντίστροφο δεν ισχύει. Ο modus tollens σημαίνει ότι αν το A συνεπάγεται το B και το B είναι αληθές, τότε και το A είναι αληθές (Τζαφέστας, 1991).

Ο βασικός μηχανισμός εξαγωγής συμπερασμάτων στον κατηγορηματικό λογισμό είναι η αρχή της απόφασης. Η αρχή της απόφασης (resolution principle), η ύπαρξη της οποίας οφείλεται στον J. Alan Robinson, δημοσιεύτηκε το 1965 και αποτέλεσε πολύ μεγάλο βήμα στη μηχανοποίηση απόδειξης θεωρημάτων στην κατηγορηματική λογική (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012).

3.4.2 Διαδικασία μετατροπής προτάσεων από καλοσηματισμένη μορφή σε φράσεις

Υπάρχουν κι άλλα είδη προτάσεων, πέρα από τις καλοσηματισμένες προτάσεις (wffs), όπως αυτά των φράσεων (clauses), (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012) που συναντώνται στη βιβλιογραφία και ως κανονική ή προτασιακή μορφή (clausal form) και αποτελούν μια απλοποιημένη εκδοχή του κατηγορηματικού λογισμού (Βλαχάβας, κ.α., 2005). Οι φράσεις αποτελούν βασικά δομικά συστατικά των αποδείξεων και είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για τη διαδικασία της αυτοματοποιημένης συμπερασματολογίας. Οι φράσεις είναι «μια μορφή λογικών προτάσεων στην οποία έχουν απαλειφθεί όλοι οι ποσοδείκτες καθώς και όλα τα λογικά σύμβολα εκτός της άρνησης και της διάζευξης» (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012: 59).

Για την απόδειξη προτάσεων μέσω της αρχής της απόφασης είναι αναγκαία μια προεπεξεργασία, που σχετίζεται με τη μετατροπή των καλοσηματισμένων προτάσεων σε φράσεις (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012). Η διαδικασία αυτή θυμίζει ως ένα βαθμό τη διαδικασία μετατροπής προτάσεων σε κανονική μορφή prenex (PNF) και skolem (SNF), που έχει περιγραφεί σε προηγούμενη υποενότητα, με την προσθήκη ορισμένων ακόμα βημάτων.

Η διαδικασία αποτελείται από τα ακόλουθα οκτώ βήματα, τα οποία πρέπει να εκτελεστούν με τη σειρά που παρατίθενται (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012: 60-62 Δενδρινός, χ.χ.: 50-52):

1. Απαλοιφή συνεπαγωγών και ισοδυναμιών

Αρχικά, απαλείφουμε όλες τις συνεπαγωγές και τις ισοδυναμίες που υπάρχουν σε μια πρόταση, μετατρέποντάς τες σε ισοδύναμες προτάσεις που χρησιμοποιούν μόνο συζεύξεις, διαζεύξεις και αρνήσεις:

$$p \rightarrow q: \neg p \vee q$$

$$p \leftrightarrow q: (\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$$

2. Μεταφορά αρνήσεων στο εσωτερικό της πρότασης

Στη συνέχεια οι αρνήσεις μεταφέρονται στο εσωτερικό της πρότασης χρησιμοποιώντας ισοδύναμες προτάσεις, μέχρι όλοι οι λογικοί τελεστές της άρνησης να εφαρμόζονται σε έναν μόνο ατομικό τύπο:

$$\neg\neg p: p$$

$$\neg(p \wedge q): \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q): \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(\forall X)(p(X)): (\exists X)(\neg p(X))$$

$$\neg(\exists X)(p(X)): (\forall X)(\neg p(X))$$

3. Τυποποίηση μεταβλητών

Σε αυτό το βήμα πραγματοποιούμε μετονομασία των μεταβλητών, με τέτοιο τρόπο, ώστε ο κάθε ποσοδείκτης να εμπεριέχει μια και μοναδική μεταβλητή (δηλαδή δύο μεταβλητές που ποσοτικοποιούνται από διαφορετικούς ποσοδείκτες να μην έχουν το ίδιο όνομα)

$$(\forall X)(p(X) \rightarrow (\exists X)(q(X))) : (\forall X)(p(X) \rightarrow (\exists Y)(q(Y)))$$

4. Απαλοιφή υπαρξιακών ποσοδεικτών

Σε αυτό το βήμα μετατρέπουμε τη πρόταση σε μορφή skolem με τον ακόλουθο τρόπο: αν στην πρόταση που μετατρέπουμε υπάρχει υπαρξιακός ποσοδείκτης εκτός της εμβέλειας καθολικών ποσοδεικτών, τότε προχωρούμε σε διαγραφή του υπαρξιακού ποσοδείκτη και στην αντικατάσταση όλων των εμφανίσεων της μεταβλητής που βρισκόταν υπό την εμβέλειά του, με μια σταθερά, η οποία δεν εμφανίζεται σε κανένα άλλο σημείο της πρότασης (ή των προτάσεων) του συνόλου που εξετάζουμε

5. Απαλοιφή καθολικών ποσοδεικτών

Σε αυτό το βήμα, αφού έχει προηγηθεί η διαγραφή των υπαρξιακών ποσοδεικτών, είναι δυνατή η απαλοιφή των καθολικών ποσοδεικτών δίχως να προκαλούνται ασυνέπειες:

$$(\forall X)(p(X) \wedge q(X, Y)): p(X) \wedge q(X, Y)$$

6. Μεταφορά των διαζεύξεων στο εσωτερικό της πρότασης

Σε αυτό το μεταφέρουμε όλες τις διαζεύξεις στο εσωτερικό της πρότασης με τη χρήση των κανόνων επιμερισμού, μέχρι να φτάσουμε σε κανονική συζευκτική μορφή:

$$p \vee (q \wedge r) : (p \vee q) \wedge (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \vee r : (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r : p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r : p \vee (q \vee r)$$

7. Χωρισμός σε φράσεις

Διαχωρίζουμε τα συζευγμένα μέρη των συζεύξεων σε διαφορετικές φράσεις ώστε να περιέχουν μόνο διαζεύξεις και αρνήσεις.

$$p \wedge q \wedge r : \{p\}, \{q\}, \{r\}$$

$$p \vee q \vee r : \{p \vee q \vee r\}$$

$$(p \vee q) \wedge (r \vee s) : \{p \vee q\}, \{r \vee s\}$$

8. Μετονομασία μεταβλητών

Τέλος, μετονομάζουμε τις μεταβλητές έτσι ώστε να μην υπάρχει καμία μεταβλητή που να εμφανίζεται σε περισσότερες από μια φράσεις:

$$p(X) : \{p(X)\}$$

$$q(X) : \{q(Y)\}$$

3.4.3 Η αρχή της απόφασης

Η αρχή της απόφασης «μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα σύνολο φράσεων για να ελέγξει την μη ικανοποιησιμότητα τους». Η βασική ιδέα είναι αφού μετασχηματίσουμε τις καλοσηματισμένες προτάσεις σε φράσεις, να εισάγουμε την άρνηση της προς απόδειξη πρότασης p (άρα $\neg p$), να την μετασχηματίσουμε και αυτή σε ένα σύνολο φράσεων και στη συνέχεια να εφαρμόζουμε την απόδειξη με βάση την αρχή της απόφασης (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012).

Ο κανόνας ο οποίος ονομάζεται αρχή της απόφασης είναι ο εξής: «για οποιοσδήποτε δύο φράσεις $C1$ και $C2$, αν υπάρχει ένα λεκτικό $L1$ στη $C1$ το οποίο είναι συμπληρωματικό προς ένα λεκτικό $L2$ στη $C2$, τότε αφαιρούμε τα $L1$ και $L2$ από τις $C1$ και $C2$ αντίστοιχα, και δημιουργούμε τη διάζευξη των φράσεων που απέμειναν. Η παραγόμενη φράση είναι το αποφαινόμενο των $C1$ και $C2$ » (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012: 64). Για παράδειγμα αν έχουμε δύο φράσεις p και $\neg p \vee q$, σύμφωνα με τον κανόνα, αρχικά

αναζητούμε αν υπάρχει συμπληρωματικό ζεύγος ενός λεκτικού, δηλαδή ένα λεκτικό και η άρνησή του. Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε το p και $\neg p$, το οποίο το αφαιρούμε και καταλήγουμε στη φράση C3: q (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012).

Η βασική ιδέα της απόδειξης με την αρχή της απόφασης είναι να ελέγχει αν η απόδειξη καταλήγει σε κενή φράση, η οποία συμβολίζεται με το σύμβολο \square ή 0. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε οδηγηθεί σε αντίφαση ή σε άτοπο και το σύνολο είναι μη ικανοποιήσιμο. Επομένως η $\neg p$ δεν αληθεύει, άρα αληθεύει η p (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012). Για να αποδείξουμε δηλαδή την αλήθεια ενός γεγονότος προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι η άρνηση του γεγονότος αυτού οδηγεί σε αντίφαση (Τζαφέστας, 1991). Εάν η απόδειξη δεν καταλήξει σε άτοπο, δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε κάποιο συμπέρασμα (Παναγιωτόπουλος και Αναστασάκης, 2012).

3.5 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της Κατηγορηματικής Λογικής

Τα βασικότερα πλεονεκτήματα της κατηγορηματικής λογικής είναι «η αντιστοιχία με τη φυσική γλώσσα, η ικανοποιητική έκφραση ποσοτικοποίησης των εννοιών με τους κατάλληλους ποσοδείκτες και η ικανότητα να συλλάβει τη γενικότητα» (Βλαχάβας, κ.α., 2005: 64).

Στα μειονεκτήματα της περιλαμβάνονται «η αδυναμία έκφρασης ασάφειας, αφού κάθε πρόταση μπορεί να είναι μόνο αληθής ή ψευδής. Ένα άλλο μειονέκτημα αφορά στην αθροιστικότητα των αποτελεσμάτων, αφού ένα συμπέρασμα προστίθεται στη γνώση χωρίς να δίνεται η δυνατότητα αναθεώρησής του στην περίπτωση που αργότερα κριθεί ότι είναι εσφαλμένο (μονότονη λογική). Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων, η κλασική λογική επεκτείνεται με εντολές ελέγχου και λειτουργικές δομές, που προσφέρουν ευελιξία και ευκολία στην ανάπτυξη εφαρμογών, με χαρακτηριστικό παράδειγμα τη γλώσσα Prolog» (Βλαχάβας, κ.α. 2005: 64).

Κεφάλαιο 4. Ευθύφρων – η έννοια του οσίου

4.1 Περίληψη του διαλόγου

Στον πλατωνικό διάλογο, Ευθύφρων συνομιλητές είναι ο Σωκράτης και ο μάντης και θεολόγος, Ευθύφρων και αντικείμενο του διαλόγου είναι ο ορισμός της έννοιας του «οσίου» (όπως θα λέγαμε σήμερα, το θρησκευτικό καθήκον).

Ο διάλογος ξεκινά με τη συνάντηση του Σωκράτη και του Ευθύφρονα στη βασιλείο στοά, έδρα του άρχοντος βασιλέως⁵. Ο Σωκράτης είχε προσέλθει εκεί για να πληροφορηθεί για τις κατηγορίες που εξαπέλυε εναντίον του ο Μέλητος, μεταξύ των οποίων και για ασέβεια (και λόγω των οποίων αργότερα καταδικάστηκε σε θάνατο). Ο Ευθύφρων βρισκόταν εκεί για να καταγγείλει για φόνο τον ίδιο του τον πατέρα, καθώς θεωρούσε πώς έτσι ακολουθεί τον ηθικό νόμο και θα απαλασσόταν από το θρησκευτικό «μιάσμα» της συνηγορίας στο έγκλημα. Την πράξη του, οι συγγενείς του τη χαρακτηρίζουν ανόσια. Με αφορμή την σοφία του Ευθύφρονα στα θεολογικά ζητήματα, ο Σωκράτης του ζητά να τον διδάξει ποιο είναι το όσιο και το ευσεβές.

Αρχικά, ο Ευθύφρων υποστηρίζει ότι όσιο είναι αυτό στο οποίο προέβη, δηλαδή η καταγγελία του δράστη οποιασδήποτε αξιόποινης πράξης, ανεξαρτήτως συγγένειας. Ξεκινάει, όπως και άλλοι συνομιλητές του Σωκράτη συγχέοντας το ορισμό με την παράθεση παραδειγμάτων. Έτσι ο Σωκράτης τον προτρέπει να ορίσει την κοινή ιδιότητα που θα πρέπει να έχει κάτι για να χαρακτηριστεί όσιο, όχι τα επιμέρους χαρακτηριστικά αλλά το καθολικό. Έτσι ο Ευθύφρων οδηγείται στον πρώτο ορισμό του διαλόγου: «το μὲν τοις θεοῖς προσφιλές όσιον, το δε μη προσφιλές ανόσιον» (Όσιο είναι ότι ευχαριστεί τους θεούς και ανόσιο ότι τους δυσαρρεστεί). Ωστόσο ο Σωκράτης καταρρίπτει αυτόν τον ισχυρισμό, λέγοντας πως αν οι θεοί έχουν διαφωνίες μεταξύ τους, τότε διαφωνούν για ηθικά ζητήματα, όπως το σωστό και το άδικο. Επομένως, κάτι που ευχαριστεί έναν θεό, μπορεί να δυσαρρεστεί έναν άλλο και τότε το ίδιο πράγμα είναι όσιο και ανόσιο. Στη συνέχεια, ο Ευθύφρων τροποποιεί τον ορισμό του ως εξής: ο μὲν αν πάντες οί θεοί μισώσιν ανόσιον εστίν, ο δ' αν φιλώσιν, όσιον (Όσιο είναι ό,τι οι θεοί εγκρίνουν, ανόσιο ό,τι κατακρίνουν

⁵ Ένας από τους εννέα άρχοντες της Αθήνας, με αρμοδιότητες θρησκευτικά θέματα, την εκδίκαση αυτών των θεμάτων, θυσίες, μυστήρια κ.α. (Φιλολογική ομάδα Κάκτου, 1994)

ομόφωνα»). Όμως και πάλι ο ορισμός δεν αφορά την ουσία του οσίου, αλλά μια ιδιότητά που έχει (ότι αγαπιέται από όλους τους θεούς).

Τότε ο Σωκράτης οδηγεί την συζήτηση προς άλλη κατεύθυνση, ζητώντας από τον Ευθύφωνα να προσδιορίσει την σχέση του οσίου με το δίκαιο. Έτσι ο Ευθύφων ορίζει το όσιον το μέρος του δικαίου που αφορά τις υπηρεσίες του ανθρώπου προς το θεό (θρησκευτικό καθήκον) και το υπόλοιπο μέρος του δικαίου αποτελούν οι υπηρεσίες προς τους συνανθρώπους του (ηθικό καθήκον)⁶. Η προσφορά υπηρεσιών προς τους συνανθρώπους έχει σκοπό τη βελτίωση τους, ενώ οι υπηρεσία προς τους θεούς έχει τη σημασία της συνεργασίας του ανθρώπου με το θεό για την επίτευξη ενός σημαντικού έργου. Τότε ο Ευθύφων διατυπώνει τον τέταρτο ορισμό του οσίου ως την «επιστήμη (σωστή γνώση) της αίτησης από τους θεούς και της προσφοράς προς αυτούς, δηλαδή το θρησκευτικό καθήκον είναι εμπορική συναλλαγή μεταξύ θεών και ανθρώπων. Από τη σχέση αυτή οι άνθρωποι ωφελούνται με τα αγαθά που λαμβάνουν από τους θεούς, ενώ το όφελος των θεών είναι οι τιμές, οι ευχαριστίες και η ευγνωμοσύνη από πλευράς των ανθρώπων. Έτσι, το όσιο σημαίνει αυτό που είναι ευχάριστο στους θεούς, δηλαδή επανέρχεται στον δεύτερο ορισμό που δόθηκε, ο οποίος όμως έχει απορριφθεί.

Ο Ευθύφων αποχωρεί, και έτσι ο διάλογος δεν καταλήγει σε κάποιον αποδεκτό ορισμό για το όσιο.

4.2 Αποδεικτικά κομμάτια του διαλόγου

7a1 «Έστι τοίνυν τό μέν τοις θεοίς προσφιλές όσιον, το δέ μή προσφιλές ανόσιον» (Λοιπόν ό,τι είναι αγαπητό στους θεούς είναι όσιο και ό,τι δεν είναι αγαπητό ανόσιο).

Η παράθεση των προτάσεων δεν είναι λογικά συμβατή. Αν θεωρήσουμε ότι ισχύει ο πρώτος ορισμός τότε από αυτόν προκύπτει μέσω του λογικού κανόνα Modus Tollens ότι αν υπάρχει θεός για τον οποίο κάτι δεν είναι προσφιλές τότε αυτό είναι ανόσιο.

9d3-4 «ως ό μέν αν πάντες οί θεοί μισώσιν ανόσιον εστί, ό δ' αν φιλώσιν, όσιον» (ό,τι μισούν όλοι οι θεοί είναι ανόσιο, ενώ ό,τι αγαπούν είναι όσιο).

9e1-3 «Αλλ' έγγωγε φαίην αν τούτο είναι το οσιον ο αν πάντες οι θεοί φιλώσιν, καϊ το εναντίον, δ αν πάντες θεοί μισώσιν, ανόσιον» (εγώ, λοιπόν, θα έλεγα ότι όσιο είναι

⁶ Σύμφωνα με το Σωκράτη, η αντίληψη για το διαχωρισμό θρησκείας και ηθικής είναι εσφαλμένη, καθώς δεν μπορεί κανείς να υπηρετεί τον άνθρωπο χωρίς ταυτόχρονα να υπηρετεί τον Θεό, ούτε το αντίστροφο. Η αληθινή αρετή είναι η γνώση του καλού και είναι ενιαία.

ό,τι τυχόν οι θεοί αγαπούν και το αντίθετο, αυτό που τυχόν όλοι οι θεοί μισούν, είναι ανόσιο).

Ο πιο έγκυρος από τους ορισμούς: Όσιο είναι εκείνο που φιλείται (αγαπιέται) από όλους τους θεούς.

$\forall X \text{ osio}(X) \rightarrow \forall Y (\text{god}(Y) \rightarrow \text{theofiles}(X,Y))$ (Φ1)

7e1-3 «Και τών θεών άρα, ω γενναίε Εύθύφρων, άλλοι άλλα δίκαια ηγούνται κατά τον σον λόγον, καί καλά καί αίσχρά καί αγαθά και κακά.

7e6-7 Ούκουν απερ καλά ηγούνται έκαστο καί αγαθά καί δίκαια, ταύτα και «φιλούσιν, τα δε εναντία τούτων μισούσιν.

Που σημαίνει ότι άλλοι θεοί θεωρούν άλλα δίκαια και καλά και αγαθά και άλλοι αισχρά και κακά. Όσα θεωρούν καλά αγαθά και δίκαια τα φιλούν και όσα ενάντια αυτών τα μισούν.

Δηλαδή κάποιο συγκεκριμένο πράγμα (thing) υπάρχει θεός που το αγαπά αλλά το ίδιο κάποιος άλλος θεός το μισεί.

$\exists X (\text{god}(X) \wedge \text{theofiles}(\text{thing},X))$ [περιττή στην αποδεικτική διαδικασία]

$\exists X (\text{god}(X) \wedge \neg \text{theofiles}(\text{thing},X))$ (Φ2)

Από αυτά προκύπτει ότι εκείνο το πράγμα που από άλλους αγαπιέται και άλλους μισείται ότι δεν είναι όσιο.

Αποδεικτέα πρόταση:

$\neg \text{osio}(\text{thing})$ (Φ3)

8a1 Ταυτα δε γε, ως σν φής, οι μεν δίκαια ηγούνται, οί δε άδικα. (Ισχυρίζεσαι, λοιπόν, ότι τα ίδια πράγματα άλλοι θεοί τα θεωρούν δίκαια, άλλοι όμως άδικα).

8a4-5 Ταυτ' άρα, ως έοικεν, μισείται τε υπο τών θεών και φιλείται, καί θεομισή τε καί θεοφιλή ταυτ' άν εϊη. (Τα ίδια, καθώς φαίνεται, οι θεοί και μισούν και αγαπούν και άρα είναι και αγαπητά και μισητά στους θεούς).

8a7 Καί όσια άρα καί αν'οσια τά αυτά άν εϊη, ω Εύθύφρων, τούτω τω λόγω. (Άρα, λοιπόν, τα ίδια είναι όσια και ανόσια, σύμφωνα με όσα λέμε).

Οι προτάσεις είναι λογικά άκυρες καθώς δεν μπορεί να ισχύουν και τα δύο ταυτόχρονα (p ΚΑΙ \neg p).

9d4-5 «ο δ άν οί μεν φιλώσιν οί δε μισώσιν, ουδέτερα ή αμφότερα».

Εκείνο που άλλοι θεοί φιλούν και άλλοι θεοί μισούν δεν είναι ούτε το ένα ούτε το άλλο (δηλαδή δεν είναι ούτε όσιο ούτε ανόσιο) ή είναι και τα δυο (δηλαδή είναι και όσιο και ανόσιο). Στην πρώτη περίπτωση η καταληκτική πρόταση είναι λογικά άκυρη καθώς δεν ακολουθεί την αρχή της του τρίτου αποκλείσεως, ενώ η δεύτερη είναι επίσης λογικά άκυρη καθώς είναι μια τυπική αντίθεση (p ΚΑΙ όχι-p).

$\text{osio}(a) \wedge \text{anosio}(a) \models \text{osio}(a) \wedge \neg \text{osio}(a) = 0$ (αντίφαση)

$\neg \text{osio}(a) \wedge \neg \text{anosio}(a) \models \neg \text{osio}(a) \wedge \neg (\neg \text{osio}(a)) \models \neg \text{osio}(a) \wedge \text{osio}(a) = 0$ (αντίφαση)

4.3 Αρχή της απόφασης

Αρχικά οι καλοσχηματισμένες προτάσεις Φ1-Φ3 μετατρέπονται σε φράσεις.

Από την Φ1 προκύπτει:

$\forall X \text{osio}(X) \rightarrow \forall Y (\text{god}(Y) \rightarrow \text{theofiles}(X,Y)) \models$

Από τη μετατροπή των συνεπαγωγών σε συζεύξεις, διαζεύξεις και αρνήσεις.

$\forall X \neg \text{osio}(X) \vee \forall Y \neg \text{god}(Y) \vee \text{theofiles}(X,Y) \models$

Και με την απαλοιφή των ποσοδεικτών

$\neg \text{osio}(X1) \vee \neg \text{god}(Y1) \vee \text{theofiles}(X1,Y1)$ (Φ4)

Από την Φ2 προκύπτει:

$\exists X (\text{god}(X) \wedge \neg \text{theofiles}(\text{thing},X)) \models$

Απαλείφοντας τον ποσοδείκτη

$\text{god}(a)$ (Φ5)

$\neg \text{theofiles}(\text{thing},a)$ (Φ6)

Από την άρνηση της Φ3 που είναι η προς απόδειξη πρόταση προκύπτει

$\neg \text{osio}(\text{thing}) \models$

$\neg \neg \text{osio}(\text{thing}) \models$

$\text{osio}(\text{thing})$ (Φ7)

Οπότε έχουμε τις φράσεις:

$\neg \text{osio}(X1) \vee \neg \text{god}(Y1) \vee \text{theofiles}(X1, Y1)$ (Φ4)

$\text{god}(a)$ (Φ5)

$\neg \text{theofiles}(\text{thing}, a)$ (Φ6)

$\text{osio}(\text{thing})$ (Φ7)

Εφαρμόζοντας την αρχή της απόφασης:

(Φ4) και (Φ5) για $X1=a, Y1=b \rightarrow \neg \text{osio}(a) \vee \text{theofiles}(a, b)$ (Φ8)

(Φ6) και (Φ8) $\rightarrow \neg \text{osio}(a)$ (Φ9)

(Φ7) και (Φ9) $\rightarrow 0$

Η αρχή της απόφασης κατέληξε σε αντίφαση, οπότε το συμπέρασμα αποδεικνύεται.

Κεφάλαιο 5. Λάχης – η έννοια της ανδρείας

5.1 Περίληψη του διαλόγου

Ο διάλογος πραγματεύεται το ζήτημα της ανδρείας, δηλαδή της γενναιότητας και του θάρρους. Η συζήτηση εκτυλίσσεται σε ένα δημόσιο χώρο της Αγοράς, όπου γινόταν επίδειξη οπλομαχίας. Εκεί βρίσκονταν ο Λυσίμαχος, γιός Αριστείδη του Δίκαιου και ο Μελησίας, γιος του ολιγαρχικού πολιτικού Θουκυδίδη. Εκείνοι είχαν προσκαλέσει και δύο στρατηγούς των Αθηναίων κατά τον Πελοποννησιακό πόλεμο, τον Νικία και τον Λάχη για να τους συμβουλευτούν για την χρησιμότητα της οπλομαχητικής στην αγωγή των παιδιών τους. Ο Λάχης καλεί και τον Σωκράτη, που βρίσκεται εκεί, να συμμετάσχει στη συζήτηση. Οι δύο στρατηγοί διαφωνούν για την πρακτική αξία της εκπαίδευσης της οπλομαχίας. Ο Νικίας υποστηρίζει ότι η τέχνη της οπλομαχίας είναι ωφέλιμη, καθώς βοηθάει τον πολεμιστή τόσο στη μάχη, όσο και στη στρατηγική και σε άλλες πτυχές της ζωής του, ενώ ο Λάχης έχει αντίθετη άποψη. Το λόγο παίρνει τότε ο Σωκράτης, ο οποίος υποστηρίζει ότι το ζήτημα αφορά τη «περίθαψη» των ψυχών των νέων, οπότε αρμόδιος να δώσει απαντήσεις είναι κάποιος ειδήμονας, κάποιος που κατέχει την αρετή και να τη μεταδώσει και σε άλλους. Τότε προτρέπει τους συνομιλητές του να ορίσουν το τμήμα της συνολικής αρετής που αφορά την τέχνη της οπλομαχίας, δηλαδή την ανδρεία.

Ο Λάχης δίνει τον πρώτο ορισμό: ανδρείος είναι όποιος μένει στη θέση του για να πολεμήσει τον εχθρό και δεν το βάζει στα πόδια (190e). Ο Σωκράτης σχολιάζει ότι πρόκειται για περιγραφή μιας μεμονωμένης εξωτερικής εκδήλωσης και του υποδεικνύει ότι υπάρχουν πολλές περιπτώσεις γενναίας συμπεριφοράς που δεν σχετίζονται με τον πόλεμο, αλλά εκδηλώνονται ακόμα και στην καθημερινή ζωή. Τότε του ζητά τον εντοπισμό του εσωτερικού χαρακτηριστικού που διατρέχει ποικίλες εκδηλώσεις ανδρείας.

Έτσι ο Λάχης τροποποιεί τον ορισμό του ως την κάποιου είδους καρτερία τις ψυχής (υπομονή και επιμονή για την επίτευξη κάποιου σκοπού). Ύστερα από έλεγχο όμως του Σωκράτη αναγκάζεται να προσαρμόσει τον ορισμό του, καθώς παραδέχεται ότι η ασύνετη υπομονή (άφρων καρτερία), το καθαρό πείσμα δεν είναι κάτι καλό, όπως είναι η γενναιότητα. Λέει λοιπόν ότι η ανδρεία είναι φρόνιμος καρτερία (συνετή υπομονή). Όμως ο Σωκράτης καταρρίπτει και αυτόν τον ορισμό, παραθέτοντας παραδείγματα που ο ανδρείος χαρακτηρίζεται παράτολμος, που επιμένει ασύνετα και όχι ο έχων συνετή υπομονή, όπως

ένα ολιγάριθμο στράτευμα, που παραμένει στο πεδίο μάχης, φαίνεται πιο γενναίο από την πολυάριθμη στρατιωτική δύναμη που παραμένει συνετά, βασισμένη στην υπεροχή της.

Στη συνέχεια το λόγο παίρνει ο Νικίας. Υποστηρίζει την σωκρατική άποψη, ότι είναι κανείς καλός σε αυτά που γνωρίζει και κακός σε αυτά που αγνοεί. Αφού λοιπόν ο ανδρείος είναι καλός, τότε είναι σοφός και αντίστοιχα, η ανδρεία είναι ένα είδος σοφίας. Με βάση αυτά ορίζει την ανδρεία ως τη γνώση των σχετικών με το φόβο και την τόλμη και στον πόλεμο και σε όλα τα άλλα (εκείνος που ξέρει σε όλες τις περιστάσεις ποιά πράγματα πρέπει και ποια δεν πρέπει να προξενούν φόβο). Αφού ο Λάχης προσπαθεί ανεπιτυχώς να καταρρίψει τον ορισμό του Νικία, στη συνέχεια αναλαμβάνει την εξέταση του ορισμού ο Σωκράτης. Εκείνος λέει ότι τα φοβερά και τα θαρραλέα αναφέρονται σε γεγονότα που πρόκειται να συμβούν στο μέλλον, δηλαδή τα μελλοντικά κακά και τα μελλοντικά καλά. Οστόσο δεν υπάρχει ειδική επιστήμη των μελλοντικών καλών και κακών ξεχωριστή από την καθαυτή επιστήμη του καλού και του κακού, που περιλαμβάνει παρελθόντα, παρόντα και μέλλοντα. Αν όμως η ανδρεία οριστεί ως η γνώση του καλού και του κακού, προσδιορίζει ολόκληρη την αρετή. Οστόσο, αρχικά η ανδρεία διακρίθηκε ως ένα συστατικό της αρετής.

Ο διάλογος τελειώνει χωρίς να έχουν βρει απάντηση στο ερώτημα τι είναι η ανδρεία.

5.2 Αποδεικτικά κομμάτια του διαλόγου

192b9. «δοκεῖ τοίνυν μοι καρτερία τις εἶναι τῆς ψυχῆς, εἰ τό γε διὰ πάντων περι ἀνδρείας πεφυκὸς δεῖ εἰπεῖν» (μου φαίνεται λοιπόν ότι είναι κάποιου είδους καρτερία της ψυχής, αν βέβαια πρέπει να χαρακτηρίσω ανδρεία αυτό που δημιουργείται σε όλες τις περιστάσεις).

192c6. «ὅτι τῶν πάνυ καλῶν πραγμάτων ἡγῆ σὺ ἀνδρείαν εἶναι» (ότι θεωρείς την ανδρεία από τα πολύ ωραία πράγματα).

192c8. «οὐκοῦν ἢ μὲν μετὰ φρονήσεως καρτερία καλὴ κάγαθή» (λοιπόν η καρτερία με σύνεση είναι καλή και ενάρετη).

192d11-12. «ἢ φρόνιμος ἄρα καρτερία κατὰ τὸν σὸν λόγον ἀνδρεία ἂν εἴη» (Αρα, σύμφωνα με τα λόγια σου, η συνετή καρτερία μπορεί να είναι ανδρεία).

193d1-2. «αἰσχρὰ ἢ ἄφρων τόλμα τε καὶ καρτέρησις ἐν τῷ πρόσθεν ἐφάνη ἡμῖν οὔσα καὶ βλαβερὰ» (η χωρίς σύνεση τόλμη και καρτερία πριν από λίγο δε μας φάνηκε αισχρή και βλαβερή;).

193d4. «ἢ δέ γε ἀνδρεία ὡμολογεῖτο καλὸν τι εἶναι». (η ανδρεία όμως αναγνωρίζεται πως είναι κάτι καλό).

Προκείμενες

Η ανδρεία είναι μια κάποια καρτερία.

Η ανδρεία είναι κάτι καλόν (δηλαδή ωραίο)

Υπάρχει η φρόνιμος (μετά φρονήσεως) καρτερία αλλά και η αισχρά ή άφρων καρτερία.

Η μετά φρονήσεως καρτερία είναι καλή (δηλαδή ωραία)

Η άφρων καρτερία είναι αισχρή δηλαδή μη καλή δηλαδή άσχημη.

Το συμπέρασμα που προκύπτει από αυτές είναι ο ορισμός της ανδρείας:

Ανδρεία είναι η φρόνιμος καρτερία.

Μεταγραφή στον Κατηγορικό Λογισμό

$\forall X \text{ andreia}(X) \rightarrow \text{kalon}(X)$ (Φ1)

$\forall X \text{ andreia}(X) \rightarrow \text{karteria}(X)$ (Φ2)

$\forall X \text{ karteria}(X) \rightarrow \text{fronimos_karteria}(X) \text{ OR } \text{afron_karteria}(X)$ (Φ3)

$\forall X \text{ fronimos_karteria}(X) \rightarrow \text{kalon}(X)$ (Φ4)

$\forall X \text{ afron_karteria}(X) \rightarrow \sim \text{kalon}(X)$ (Φ5)

Η αποδεικτέα πρόταση είναι:

$\forall X \text{ andreia}(X) \rightarrow \text{fronimos_karteria}(X)$ (Φ6)

5.3 Αρχή της απόφασης

Αρχικά μετατρέπονται οι καλοσηματισμένες προτάσεις σε φράσεις.

Από την Φ1 προκύπτει:

Από τη μετατροπή των συνεπαγωγών σε συζεύξεις, διαζεύξεις και αρνήσεις.

$\forall X \neg \text{andreia}(X) \vee \text{kalon}(X)$

Και με την απαλοιφή ποσοδεικτών

$\neg \text{andreia}(X1) \vee \text{kalon}(X1)$ (Φ1)

Από την Φ2 προκύπτει:

Από τη μετατροπή των συνεπαγωγών σε συζεύξεις, διαζεύξεις και αρνήσεις.

$\forall X \neg \text{andreia}(X) \vee \text{karteria}(X)$

Και με την απαλοιφή ποσοδεικτών

$\neg \text{andreia}(X2) \vee \text{karteria}(X2)$ (Φ2)

Από την Φ3 προκύπτει:

Από τη μετατροπή των συνεπαγωγών σε συζεύξεις, διαζεύξεις και αρνήσεις.

$\forall X \neg \text{karteria}(X) \vee \text{fronimos_karteria}(X) \vee \text{afron_karteria}(X)$

Και με την απαλοιφή ποσοδεικτών

$\neg \text{karteria}(X3) \vee \text{fronimos_karteria}(X3) \vee \text{afron_karteria}(X3)$ (Φ3)

Από την Φ4 προκύπτει:

Από τη μετατροπή των συνεπαγωγών σε συζεύξεις, διαζεύξεις και αρνήσεις.

$\forall X \neg \text{fronimos_karteria}(X) \vee \text{kalon}(X)$

Και με την απαλοιφή ποσοδεικτών

$\neg \text{fronimos_karteria}(X4) \vee \text{kalon}(X4)$ (Φ4)

Από την Φ5 προκύπτει:

Από τη μετατροπή των συνεπαγωγών σε συζεύξεις, διαζεύξεις και αρνήσεις

$\forall X \neg \text{afron_karteria}(X) \vee \neg \text{kalon}(X)$

Και με την απαλοιφή ποσοδεικτών

$\neg \text{afron_karteria}(X5) \vee \neg \text{kalon}(X5)$ (Φ5)

Από την άρνηση της Φ6 προκύπτει:

Από τη μετατροπή των συνεπαγωγών σε συζεύξεις, διαζεύξεις και αρνήσεις

$\neg \forall X \neg \text{andreia}(X) \vee \text{fronimos_karteria}(X)$

Με τη μεταφορά αρνήσεων στο εσωτερικό της πρότασης

$(\exists x) \neg (\neg \text{andreia}(X) \vee \text{fronimos_karteria}(X)) \quad | = |$

$(\exists x) \text{andreia}(X) \wedge \neg \text{fronimos_karteria}(X) \quad | = |$

Και με την απαλοιφή ποσοδεικτών

$\text{andreia}(a) \wedge \neg \text{fronimos_karteria}(a) \quad | = |$

andreia(a) (Φ6)

–fronimos_karteria(a) (Φ7)

Καταληξαμε έτσι στις παρακάτω φράσεις:

–andreia(X1) ∨ kalon(X1) (Φ1)

–andreia(X2) ∨ karteria(X2) (Φ2)

–karteria(X3) ∨ fronimos_karteria(X3) ∨ afron_karteria(X3) (Φ3)

–fronimos_karteria(X4) ∨ kalon(X4) (Φ4)

–afron_karteria(X5) ∨ –kalon(X5) (Φ5)

andreia(a) (Φ6)

–fronimos_karteria(a) (Φ7)

Εφαρμόζοντας την αρχή της απόφασης:

(Φ3) και (Φ7) για X3=a → –karteria(a) ∨ afron_karteria(a) (Φ8)

(Φ2) και (Φ6) για X2=a → karteria(a) (Φ9)

(Φ8) και (Φ9) → afron_karteria(a) (Φ10)

(Φ5) και (Φ10) για X5=a → –kalon(a) (Φ11)

(Φ1) και (Φ11) για X1=a → –andreia (Φ12)

(Φ6) και (Φ12) =0

Η αρχή της απόφασης κατέληξε σε αντίφαση, οπότε το συμπέρασμα αποδεικνύεται.

Παρατηρούμε ότι η φράση 4 είναι πλεοναστική, δηλαδή παρότι την περιλαμβάνει στην διαλεκτική του ο Σωκράτης, δεν είναι αναγκαία για την απόδειξη ότι η ανδρεία είναι φρόνιμος καρτερία. Αυτό είναι και ένα σημείο που φαίνεται η χρησιμότητα του κατηγορηματικού λογισμού, ότι δηλαδή μας βοηθά να περιοριζόμαστε στις αναγκαίες για την απόδειξη προτάσεις

Κεφάλαιο 6. Λύσις – η έννοια της φιλίας

6.1 Περίληψη του διαλόγου

Σε αυτόν τον διάλογο αντικείμενο της συζήτησης είναι η φιλία. Επιχειρείται να οριστεί η έννοια της φιλίας και να διαπιστωθεί ποιοι και γιατί γίνονται φίλοι. Ο διάλογος είναι μια αναδιήγηση από τον Σωκράτη προς κάποιον απροσδιόριστο ομιλητή, μιας συζήτησης που είχε κάνει με κάποιους νεαρούς συνομιλητές. Αυτοί ήταν ο Κτήσιππος, φίλος και μαθητής του Σωκράτη, ο ξάδελφός του, ο Μενέξενος, ο Λύσις και ο Ιπποθάλης. Ο Σωκράτης πήγαινε από την Ακαδημία στο Λύκειο, όταν συνάντησε τον Ιπποθάλη και τον Κτήσιππο, έξω από μια αθηναϊκή παλαίστρα. Ο Σωκράτης συζητώντας μαζί τους, πληροφορείται την αγάπη του Ιπποθάλη για έναν νεαρότερο όμορφο έφηβο, τον Λύσι και για τους τρόπους με τους οποίους επιδιώκει να τον κατακτήσει, με ποιήματα και ωδές που τον εξυμνούν. Ο Σωκράτης επισήμανε στον Ιπποθάλη ότι η τακτική που ακολουθεί είναι λάθος και μαθαίνοντας ότι ο Λύσις βρίσκεται στην παλαίστρα, αναλαμβάνει να του δώσει ένα έμπρακτο παράδειγμα του είδους της συζήτησης, που πραγματικά ταιριάζει σε έναν εραστή. Όταν μπήκαν στην παλαίστρα, όπου είχε μόλις ολοκληρωθεί μια θρησκευτική γιορτή, τους πλησίασαν ο Λύσις και ο Μενέξενος.

Σιωπηρά υπονοείται ότι ένας εραστής επιθυμεί την ευτυχία του αγαπημένου του και ότι το πάθος του είναι καθαρό και ανιδιοτελές, μια μορφή φιλίας, δηλαδή στοργικής αγάπης. Γι' αυτό ο Σωκράτης ξεκινά την επιχειρηματολογία του δίνοντας ως παράδειγμα την αγάπη των γονέων προς το παιδί. Οι γονείς του Λύσι, αν και τον αγαπούν και θέλουν να είναι ευτυχισμένος, τον περιορίζουν και δεν του επιτρέπουν να κάνει ό,τι επιθυμεί. Για να είναι όμως κανείς ευτυχισμένος πρέπει να είναι κύριος του εαυτού του. Ο Λύσις δίνει την απάντηση ότι δεν είναι ακόμα αρκετά μεγάλος. Όμως, κάποια πράγματα του επιτρέπεται να τα κάνει, διότι αυτά τα πράγματα γνωρίζει πώς θα τα κάνει. Σύντομα, καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι απόλυτη ελευθερία μας παραχωρούν οι άλλοι σε ζητήματα τα οποία κατέχουμε, ενώ στους τομείς που έχουμε άγνοια δεν μπορούν να μας έχουν εμπιστοσύνη, γιατί είμαστε ανωφελείς σε αυτά. Αν έχουμε άγνοια κανείς δε θα μας αγαπά, επειδή ακριβώς είμαστε ανεπαρκής, ενώ αν είμαστε σοφοί, όλοι θα μας αγαπούν γιατί είμαστε καλοί και χρήσιμοι. Αυτή η συζήτηση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ελευθερία και η ευτυχία είναι απολύτως συνδεδεμένες με την πραγματική γνώση.

Ο Σωκράτης στη συνέχεια στρέφεται στον Μενέξενο και του ζητάει να του πει με ποιόν τρόπο μπορεί να αποκτήσει έναν φίλο. Όταν ένας αγαπάει κάποιον, ποιος από τους δύο γίνεται φίλος του άλλου; Αυτός που αγαπάει γίνεται φίλος αυτού που αγαπιέται ή αυτός που αγαπιέται γίνεται φίλος αυτού που αγαπάει; Στη συνέχεια συμφωνούν ότι κανείς από τους δύο δεν είναι φίλος κανενός, αν δεν αγαπιούνται κι οι δύο μεταξύ τους. Όμως, σε αυτή την περίπτωση, αν αγαπάμε κάτι που δεν ανταποδίδει αγάπη, πχ το κρασί ή η σοφία, δεν είναι αγαπητό (φίλον) σ αυτόν που το αγαπάει. Όμως η αλήθεια είναι ότι ο καθένας μπορεί να αγαπάει κάποιον ή κάτι, χωρίς να του ανταποδίδει αγάπη, άρα φίλος δεν είναι όποιος αγαπά, αλλά όποιος αγαπιέται. Αναλόγως τότε, εχθρός δεν είναι όποιος μισεί, αλλά όποιος μισείται. Έτσι όμως θα καταλήγαμε στο παράδοξο, πολλοί να αγαπιούνται από τους εχθρούς, ενώ μισούνται από τους φίλους. Στο ίδιο παράδοξο καταλήγουμε κι όταν υποθέσουμε ότι φίλος είναι αυτός που αγαπάει. Έχουν εξαντληθεί όλες οι δυνατότητες ύπαρξης φιλίας, άρα πρέπει να αλλάξει η μέθοδος της διερεύνησης.

Στη συνέχεια ο Σωκράτης στρέφεται στο Λύσι και εξετάζεται αν φίλοι είναι αυτοί που είναι όμοιοι, σύμφωνα με τους λόγους των ποιητών, οι οποίοι λένε ότι ο θεός έλκει τον όμοιο προς τον όμοιο. Όμως όταν ο κακός βρεθεί κοντά στον όμοιό του, δεν δημιουργείται φιλία αλλά μεγαλύτερη εκατέρωθεν αδικία. Όσο περισσότερο πλησιάζουν, τόσο περισσότερο προσπαθεί ο καθένας να εκμεταλλευτεί τον άλλον και τόσο πιο εχθρικοί γίνονται μεταξύ τους. Έτσι το επιχείρημα είναι κατά το ήμισυ σωστό. Τότε οι ποιητές εννοούν ότι μόνο οι καλοί (αγαθοί) είναι όμοιοι μεταξύ τους και φίλοι, καθώς οι κακοί δεν είναι όμοιοι ούτε με τον ίδιο τους τον εαυτό. Όμως υπάρχει μια δυσκολία σε αυτό το συλλογισμό. Η αλληλεπίδραση, την οποία προϋποθέτει η αγάπη, αποκλείει την ομοιότητα, άρα οι καλοί, όταν είναι φίλοι είναι φίλοι λόγω της αρετής τους. Αλλά, οι αγαθοί είναι αυτάρκεις, δηλαδή δεν μπορούν να ωφελήσουν ο ένας τον άλλον, άρα δεν είναι δυνατό να γίνουν φίλοι. Ενδέχεται όμως το θεμέλιο της φιλίας να βρίσκεται στην απόλυτη ανομοιότητα. Η φιλία των αντιθέτων, όμως, απορρίπτεται λογικά, αφού ο φίλος δεν μπορεί να είναι φίλος με το αντίθετό του, δηλαδή τον εχθρό.

Αφού έχει απορριφθεί και η ομοιότητα και η ανομοιότητα ως λόγος φιλίας, εξετάζεται η περίπτωση η φιλία να δημιουργείται ανάμεσα σε ένα καλό και ένα ούτε καλό, ούτε κακό. Αυτό που δεν είναι κακό ούτε καλό, γίνεται φιλικό του καλού, εξαιτίας της παρουσίας του κακού. Η παρουσία του κακού, δηλαδή, δημιουργεί στο ηθικά ουδέτερο την επιθυμία για φιλία με το καλό. Το ηθικά ουδέτερο, όταν η παρούσα κατάσταση είναι το κακό ορισμένες φορές, δεν γίνεται κακό, άλλες φορές όμως γίνεται και τότε, παύει να επιθυμεί το καλό. Ωστόσο, και ο συλλογισμός του Σωκράτη χρειάζεται συμπλήρωση, όπως

λέει ο ίδιος. Όποιος γίνεται φίλος κάποιου, γίνεται για κάποιο λόγο, για κάποιο σκοπό. Τότε συνεπάγεται ότι καθετί που μας είναι αγαπητό ή ευπρόσδεκτο ή φιλικό το επιθυμούμε ως μέσο για να πετύχουμε κάτι άλλο. Αλλά αν αποφανθούμε έτσι, αναπόφευκτα θα φτάσουμε σε ένα πρωταρχικό αγαθό, για χάρη του οποίου είναι όλα τα άλλα αγαπητά, άρα αληθινή αγάπη νιώθουμε για εκείνο στο οποίο καταλήγουν όλες οι λεγόμενες αγάπες.

Όμως αν εκλείψει το κακό από τον κόσμο, αυτό που δεν είναι ούτε καλό, ούτε κακό, θα συνεχίσει να επιθυμεί το καλό. Άρα, το καλό δεν μας γίνεται φιλικό εξαιτίας του κακού, αλλά από την έμφυτη επιθυμία του ανθρώπου για αυτό στο οποίο είναι ελλειμματικός, επιθυμεί αυτό που έχει ανάγκη. Η έλλειψη προέρχεται από την αφαίρεση κάποιου πράγματος που είχαμε, δηλαδή δικού μας, (οικείου, αυτού που φύσει μας αρμόζει, αλλά το στερούμαστε). Άρα το εκ φύσεως οικείο δημιουργεί κατ' ανάγκη τη φιλία. Άρα για να είναι κάποιος γνήσιος εραστής, η αγάπη του πρέπει να ανταποδίδεται, η αγάπη οφείλει να είναι αμοιβαία. Όμως αν το οικείον δηλαδή αυτό που μου ανήκει αποτελεί επίσης το όμοιον, τότε το συμπέρασμα έρχεται αντίφαση με την προηγούμενη παραδοχή ότι η φιλία δεν βασίζεται στην ομοιότητα.

Έτσι ο διάλογος, δεν καταλήγει σε κάποιο θετικό συμπέρασμα.

6.2 Αποδεικτικά κομμάτια του διαλόγου

1ο ζήτημα

213a5. «οὐκ ἄρα ὁ φιλῶν φίλος ἐκ τούτου τοῦ λόγου, ἀλλ' ὁ φιλούμενος» (άρα, σύμφωνα με το επιχείρημα τούτο, δεν είναι φίλος όποιος αγαπά, αλλά όποιος αγαπιέται).

$\forall X \forall Y \text{ filous}(X,Y) \rightarrow \text{filein}(Y,X) \wedge \neg \text{filein}(X,Y)$ (Φ1)

213a7. «καὶ ὁ μισούμενος ἐχθρὸς ἄρα, ἀλλ' οὐχ ὁ μισῶν» (και εχθρός συνεπώς όποιος μισείται και όχι όποιος μισεί)

$\forall X \forall Y \text{ exthros}(X,Y) \rightarrow \neg \text{filein}(Y,X) \wedge \text{filein}(X,Y)$

Για να καταλάβουμε αν εδώ ο Σωκράτης υπονοεί ότι $\text{exthros}(X,Y) \models \neg \text{filous}(X,Y)$ αντικαθιστώ στην προηγούμενη

$\neg \text{filous}(X,Y) \rightarrow \neg \text{filein}(Y,X) \wedge \text{filein}(X,Y)$ (Φ2)

και εξετάζω αν οι (Φ1) και (Φ2) είναι λογικά ισοδύναμες όπως υπονοεί ο Σωκράτης.

(Φ1) $\models \neg \text{filous}(X,Y) \vee (\text{filein}(Y,X) \wedge \neg \text{filein}(X,Y)) \models$

$\neg \text{filous}(X,Y) \vee \text{filein}(Y,X)$ (Φ3)

και

$$\neg \text{filos}(X,Y) \vee \neg \text{filein}(X,Y) \text{ (}\Phi 4\text{)}$$

$$\text{(}\Phi 2\text{) } \models \text{filos}(X,Y) \vee (\neg \text{filein}(Y,X) \wedge \text{filein}(X,Y)) \models$$

$$\text{filos}(X,Y) \vee \neg \text{filein}(Y,X) \text{ (}\Phi 5\text{)}$$

και

$$\text{filos}(X,Y) \vee \text{filein}(X,Y) \text{ (}\Phi 6\text{)}$$

Για να είναι οι (Φ1) και (Φ2) λογικά ισοδύναμες πρέπει να είναι λογικά ισοδύναμες η (Φ3) \wedge (Φ4) με την (Φ5) \wedge (Φ6). Αυτό πρέπει να ισχύει για $\forall X$ και $\forall Y$. Αν λοιπόν δεν ισχύει για κάποια X και Y τότε δεν ισχύει γενικά. Αντικαθιστώ λοιπόν $X=a$ και $Y=b$.

Θέτοντας $\text{filos}(a,b) = p$ και $\text{filein}(Y,X) = q$ και $\text{filein}(X,Y) = r$, πρέπει να εξετάσουμε αν:

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \models (p \vee \neg) \wedge (p \vee r) \wedge$$

Για να ελέγξουμε την ισοδυναμία των προτάσεων σχεδιάζουμε τον παρακάτω πίνακα αληθείας. Σύμφωνα με αυτόν, οι δύο προτάσεις δεν είναι λογικά ισοδύναμες, καθώς δεν έχουν ίδιες τιμές αληθείας για κάθε ερμηνεία τους.

| p | q | r | $\neg p \vee q$ | $\neg p \vee r$ | $p \vee \neg q$ | $p \vee r$ | $(\neg p \vee q) \wedge \neg p \vee r$ | $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee r)$ |
|---|---|---|-----------------|-----------------|-----------------|------------|--|-------------------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Πίνακας 7. Πίνακας αληθείας (Φ3) \wedge (Φ4) - (Φ5) \wedge (Φ6).

Τα 213a5 και 213a7 μπορούν να ερμηνευτούν και ως εξής:

$$\text{filos}(X,Y) \rightarrow \text{filein}(Y,X) \text{ (}\Phi 7\text{)}$$

$$\neg \text{filos}(X,Y) \rightarrow \neg \text{filein}(Y,X) \text{ (}\Phi 8\text{)}$$

που ισοδυναμούν με τις

$$\neg \text{filos}(X,Y) \vee \text{filein}(Y,X) \text{ (}\Phi 9\text{)}$$

$$\text{filos}(X,Y) \vee \neg \text{filein}(Y,X) \text{ (}\Phi 10\text{)}$$

που καταλήγουν στις

$$\neg p \vee q \text{ (}\Phi 11\text{)}$$

$$p \vee \neg q \text{ (}\Phi 12\text{)}$$

Για να είναι οι (Φ7) και (Φ8) λογικά ισοδύναμες πρέπει να είναι οι (Φ11) και (Φ12) λογικά ισοδύναμες. Οι (Φ11) και (Φ12) όμως όπως φαίνεται από τους πίνακες αληθείας δεν είναι λογικά ισοδύναμες, οπότε ούτε και οι αρχικές (Φ7) και (Φ8) είναι λογικά ισοδύναμες.

| p | q | $\neg p \vee q$ | $p \vee \neg q$ |
|---|---|-----------------|-----------------|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Πίνακας 8. Πίνακας αληθείας (Φ11) - (Φ12)

Για να μη θεωρήσουμε λοιπόν τον λόγο του Σωκράτη ασυνεπή πρέπει να κάνουμε την παραδοχή ότι $\text{exthros}(X,Y) \neq \neg \text{filos}(X,Y)$

2ο ζήτημα

213b7. «τὸ φιλοῦν ἂν εἴη φίλον τοῦ φιλουμένου» (ὅποιος αγαπάει είναι φίλος ὁποῦ ἀγαπιέται).

$$\forall X \forall Y \text{ filos}(X,Y) \rightarrow \text{filein}(X,Y) \wedge (\text{filein}(Y,X) \text{ (}\Phi 13\text{)})$$

213b9. «τὸ μισοῦν ἄρα πάλιν ἐχθρὸν τοῦ μισουμένου» (ἀρα καὶ αὐτὸς πάλιν ποὺ μισεῖ εἶναι ἐνχρὸς αὐτοῦ ποὺ μισεῖται).

$$\forall X \forall Y \text{ exthros}(X,Y) \rightarrow \neg \text{filein}(X,Y) \wedge \neg \text{filein}(Y,X) \text{ (}\Phi 14\text{)}$$

Εἶχε ὁμως προηγουμένως συμφωνηθεῖ:

213c2. «πολλάκις φίλον εἶναι μὴ φίλου, πολλάκις δὲ καὶ ἐχθροῦ, ὅταν ἢ μὴ φιλοῦν τις φιλῆ ἢ καὶ μισοῦν φιλῆ» (πολλές φορές δηλαδή κάποιος εἶναι φίλος μὴ φίλου ἢ ἀκόμα καὶ ἐχθροῦ, κι αὐτὸ συμβαίνει ἢ ὅταν αγαπάει κάποιον ὁ οποίος δὲν ανταποδίδει τὴν ἀγάπη ἢ ὅταν αγαπάει κάποιον ὁ οποίος τὸν μισεῖ).

Εμεῖς θα ἐξετάσουμε τὴν περίπτωση 'μὴ φίλου' σε συνδυασμὸ με τὴν περίπτωση 'μὴ φιλοῦν'.

$$\exists X \exists Y \text{ filos}(X,Y) \wedge \neg \text{filos}(Y,X) \rightarrow \text{filein}(X,Y) \wedge \neg \text{filein}(Y,X) \text{ (}\Phi 15\text{)}$$

213c4. «πολλάκις δ' ἐχθρὸν εἶναι μὴ ἐχθροῦ ἢ καὶ φίλου, ὅταν ἢ μὴ μισοῦν τις μισῆ ἢ καὶ φιλοῦν μισῆ. (καὶ πολλές φορές εἶναι ἐχθρὸς μὴ ἐχθροῦ ἢ ἀκόμα καὶ φίλου, κι αὐτὸ

συμβαίνει όταν μισεί κάποιον ο οποίος δεν τον μισεί ή όταν μισεί κάποιον ο οποίος τον αγαπά). Και πάλι επικεντρωνόμαστε στην περίπτωση 'μη εχθρού' σε συνδυασμό με την περίπτωση 'μη μισούν'»

$$\exists X \exists Y \text{exthros}(X,Y) \wedge \neg \text{exthros}(Y,X) \rightarrow \text{misein}(X,Y) \wedge \neg \text{misein}(Y,X) \text{ (}\Phi 16\text{)}$$

Στη συνέχεια ο Σωκράτης θεωρεί ότι αυτή η συλλογιστική γραμμή κατέληξε σε αντίφαση: Άρα μη το παράπαν ουκ ορθώς εζητούμεν; Ουκ έμοιγε δοκεί (231d1).

Η (Φ13) δείχνει ότι ο φιλών (X) και ο φιλούμενος (Y) δεν έχουν καμία λειτουργική διαφορά, οπότε η σχέσεις 'φίλος' και 'φιλείν' είναι συμμετρικές:

$$\text{filos}(X,Y) \text{ |=| } \text{filos}(Y,X) \text{ (}\Phi 17\text{)}$$

και

$$\text{filein}(X,Y) \text{ |=| } \text{filein}(Y,X) \text{ (}\Phi 18\text{)}$$

6.3 Αρχή της απόφασης

Αρχή της απόφασης:

Αρχικά μετατρέπονται οι καλοσηματισμένες προτάσεις σε φράσεις.

Από την Φ15 προκύπτει:

Από τη μετατροπή των συνεπαγωγών σε συζεύξεις, διαζεύξεις και αρνήσεις.

$$\exists X \exists Y \text{filos}(X,Y) \wedge \neg \text{filos}(Y,X) \rightarrow \text{filein}(X,Y) \wedge \neg \text{filein}(Y,X) \text{ |=|}$$

$$\exists X \exists Y \neg (\text{filos}(X,Y) \wedge \neg \text{filos}(Y,X)) \vee (\text{filein}(X,Y) \wedge \neg \text{filein}(Y,X)) \text{ |=|}$$

$$\exists X \exists Y \neg \text{filos}(X,Y) \vee \text{filos}(Y,X) \vee (\text{filein}(X,Y) \wedge \neg \text{filein}(Y,X)) \text{ |=|}$$

$$\exists X \exists Y 1 \vee (\text{filein}(X,Y) \wedge \neg \text{filein}(X,Y)) \text{ |=|}$$

$$\exists X \exists Y \text{filein}(X,Y) \wedge \neg \text{filein}(X,Y) \text{ |=|}$$

$$\text{filein}(a,b) \wedge \neg \text{filein}(a,b) \text{ |=| } 0 \text{ (ψευδής)}$$

Από την Φ16 προκύπτει:

Από τη μετατροπή των συνεπαγωγών σε συζεύξεις, διαζεύξεις και αρνήσεις.

$$\exists X \exists Y \text{exthros}(X,Y) \wedge \neg \text{exthros}(Y,X) \rightarrow \text{misein}(X,Y) \wedge \neg \text{misein}(Y,X) \text{ |=|}$$

$$\exists X \exists Y \neg (\text{exthros}(X,Y) \wedge \neg \text{exthros}(Y,X)) \vee (\text{misein}(X,Y) \wedge \neg \text{misein}(Y,X)) \text{ |=|}$$

$$\exists X \exists Y \neg (\text{exthros}(X,Y) \vee \text{exthros}(Y,X)) \vee (\text{misein}(X,Y) \wedge \neg \text{misein}(Y,X)) \text{ |=|}$$

$$\exists X \exists Y \neg 1 \vee (\text{misein}(X,Y) \wedge \neg \text{misein}(Y,X)) \text{ |=|}$$

$\exists X \exists Y \text{misein}(X,Y) \wedge \neg \text{misein}(Y,X) \models$

$\exists X \exists Y \text{misein}(a,b) \wedge \neg \text{misein}(a,b) \models 0$ (ψευδής)

Ομοίως από την Φ16 οδηγούμαστε σε ψευδές συμπέρασμα.

Έτσι εξηγείται γιατί ο Σωκράτης θεωρεί ότι αυτή η συλλογιστική γραμμή καταλήγει σε αντίφαση.

Κεφάλαιο 7. Συμπεράσματα

7.1 Ανακεφαλαίωση

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας ήταν η ανάλυση του φιλοσοφικού λόγου στη συμβολική γλώσσα του κατηγορηματικού λογισμού. Τα φιλοσοφικά κείμενα που χρησιμοποιήθηκαν για τις ανάγκες της εργασίας ήταν πλατωνικά έργα. Πιο συγκεκριμένα επιλέχθηκαν τα έργα Ευθύφρων, Λάχης και Λύσις, στα οποία γίνεται μια προσπάθεια ορισμού κάποιας έννοιας: η έννοια του οσίου, η έννοια της ανδρείας και η έννοια της φιλίας αντίστοιχα. Στη συνέχεια επιλέχθηκαν τα αποδεικτικά σημεία κάθε διαλόγου και μεταγράφηκαν στην γλώσσα του κατηγορηματικού λογισμού. Τέλος, με τον μηχανισμό εξαγωγής συμπερασμάτων της κατηγορηματικής λογικής, την αρχή της απόφασης, ελέγχθηκαν τα αντίστοιχα συμπεράσματα, αν ισχύουν ή όχι.

7.2 Συμπεράσματα

Συμπερασματικά, η γλώσσα του κατηγορηματικού λογισμού μπορεί να εφαρμοστεί σε κείμενα όπως τα πλατωνικά έργα, όπου μέσω μιας σειράς προκειμένων καταλήγουν σε ένα συμπέρασμα. Επίσης, με τους κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων, που μας παρέχει η κατηγορηματική λογική, μπορούμε να ελέγξουμε κατά πόσο τα συμπεράσματα αυτά ισχύουν ή όχι. Τέλος, διαπιστώνουμε ότι η κατηγορηματική γλώσσα έχει ως πλεονεκτήματα την ικανότητα να συλλάβει τη γενικότητα και την αντιστοιχία με τη καθομιλούμενη γλώσσα, αφού μετατρέψαμε την φυσική γλώσσα στη γλώσσα του κατηγορηματικού λογισμού. Επίσης, χάρη στους ποσοδείκτες που χρησιμοποιεί η γλώσσα αυτή καταφέραμε να εκφράσουμε τις ποσοτικοποιημένες έννοιες.

7.3 Περιορισμοί και προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Η παρούσα εργασία επικεντρώθηκε στην εφαρμογή του κατηγορηματικού λογισμού σε τρία συγκεκριμένα πλατωνικά έργα. Επομένως, στους περιορισμούς της εργασίας περιλαμβάνεται το εύρος εφαρμογής του κατηγορηματικού λογισμού στα τρία αυτά κείμενα του Πλάτωνα.

Μελλοντικά θα μπορούσε μια αντίστοιχη εργασία να επεκταθεί και σε άλλα πλατωνικά έργα ή και σε άλλα κείμενα του φιλοσοφικού λόγου ή και γενικότερα σε άλλα κείμενα που έχουν αποδεικτικό χαρακτήρα.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Bentham, J., Ditmarsch, H., Eijck, J., Jaspars, J. (n.d.). Logic in Action. *An open course in logic*
Ανάκτηση 13/11/2020 από: <http://www.logicinaction.org/docs/ch4.pdf>
- Bluck, R. S. (2013). *Plato's Life and Thought (RLE: Plato): With a Translation of the Seventh Letter*. Routledge. Ανάκτηση 13/11/2020 από Google Books:
https://books.google.gr/books?hl=el&lr=&id=eQ68AAAAIAAJ&oi=fnd&pg=PA1&dq=Bluck+plato&ots=0XQ3PflOig&sig=gD8ihKUzsd9lN3P7KbsoBGLTmoo&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false
- Hummel, C. (1994). Plato. *Prospects*, 24(1-2), 329-342. Ανάκτηση 13/11/2020 από:
<http://193.242.192.196/sites/default/files/platoe.PDF>
- Nails, D. (2006). The life of Plato of Athens. *A companion to Plato, 1-12*. Ανάκτηση 13/11/2020 από: <https://msu.edu/~nails/Nails%202006P.pdf>
- Russo, M. S. (2001). Plato in a Nutshell: A Beginner's Guide to the Philosophy of Plato. *Pridobljeno*, 15(5). Ανάκτηση 13/11/2020 από: http://www.sophia-project.org/uploads/1/3/9/5/13955288/russo_plato1.pdf
- Taylor, A. E. (1990). *Πλάτων: ο άνθρωπος και το έργο του*. Αθήνα: Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης.
- Αναπολιτάνος, Δ., Γαβαλάς, Δ., Δέμης, Α., Δημητρακόπουλος, Κ., Καρασμάνης, Β. (1991). *Λογική: θεωρία και πρακτική* Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας, Υπολογιστών και εκδόσεων. Ανάκτηση 13/11/2020 από: «Διόφαντος».
http://archeia.moec.gov.cy/sm/661/logiki_vivlio_mathiti.pdf
- Βασιλειάδης, Ν. (2014). *Υπολογιστική Λογική και Λογικός Προγραμματισμός* [online].
Ανάκτηση 30/10/2020 από: <https://opencourses.auth.gr/modules/units/?course=OCRS163&id=2647>
- Βλαχάβας, Ι., Κεφαλάς, Π., Βασιλειάδης, Ν., Κόκκορας, Φ., Σακελλαρίου, Η. (2005). *Τεχνητή Νοημοσύνη - Β' Έκδοση: Διαφάνειες*. [online]. Ανάκτηση 30/10/2020 από:
<http://aibook.csd.auth.gr/include/slides/Chap09.pdf>
- Γιασουμή, Α. (2019). Η διαλεκτική μέθοδος στον Πλάτωνα. *Academia.edu* Ανάκτηση 13/11/2020 από *Academia.edu*:
https://www.academia.edu/40055051/%CE%97_%CE%94%CE%99%CE%91%CE%9B

<http://www.math.ntua.gr/logic/mathlogic/logiki-1.pdf>

Δενδρινός, Μ. (χ.χ.). «Από τα πληροφοριακά δεδομένα (information data) στη σημαίνουσα/σημαντική πληροφορία (semantic information)». *Διδακτικές σημειώσεις*.

Κολέτσος, Γ. (χ.χ.). «Σημειώσεις μαθηματικής λογικής». *Διδακτικές σημειώσεις*. Ανάκτηση 30/10/2020 από: <http://www.math.ntua.gr/logic/mathlogic/logiki-1.pdf>

Κοντούλης, Ι. Β. (2012). *Θεωρίες και Συστήματα Κατανόησης Κειμένου κατά την Ανάγνωση: Μοντέλα Σημασιολογικής Ανάλυσης*. Αθήνα: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών. Μεταπτυχιακό. Ανάκτηση 30/10/2020 από: http://cogsci.phs.uoa.gr/fileadmin/cogsci.phs.uoa.gr/uploads/files/diplomatikes/Kontoulis_Ioannis_2012.pdf

Κοπιδάκης, Μ. Ζ., Πατρικίου, Ε., Λυπορλής, Δ., Μωραΐτου, Δ. (2009). *Φιλοσοφικός λόγος: Πλάτων – Αριστοτέλης, 9^η έκδ.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Κράβαρη, Κ. (2015). *Διαλειτουργικότητα και αξιοπιστία της αλληλεπίδρασης ευφυών πρακτόρων στον σημασιολογικό ιστό*. Διδακτορική διατριβή. Θεσσαλονίκη: Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης. Ανάκτηση 13/11/2020 από: <https://www.didaktorika.gr/eadd/handle/10442/35354>

Λαγουδάκης, Μ. Γ. (2016). *Λογική Πρώτης Τάξης - First-Order Logic*. [online]. Ανάκτηση 30/10/2020 από: <http://www.intelligence.tuc.gr/~ai/previous/2006-fall/lectures/lecture11.pdf>

Μάργαρης, Α. Ι. (2018). *Εισαγωγή στη μαθηματική λογική*. Αθήνα: Τζιόλα.

Μπαγουλή, Α. (2009). *Μετατροπή εκφράσεων κατηγορηματικής λογικής πρώτης τάξης σε φυσική γλώσσα*. Πάτρα: Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα μηχανικών ηλεκτρονικών υπολογιστών και πληροφορικής. Μεταπτυχιακό. Ανάκτηση 30/10/2020 από:

<https://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/bitstream/10889/2106/1/%CE%9C%CE%95%CE%A4%CE%91%CE%A4%CE%A1%CE%9F%CE%A0%CE%97%20%CE%95%CE%9A%CE%A6%CE%A1%CE%91%CE%A3%CE%95%CE%A9%CE%9D%20%CE%9A%CE%91%CE%A4%CE%97%CE%93%CE%9F%CE%A1%CE%97%CE%9C%CE%91%CE%A4%CE%99%CE%9A%CE%97%CE%A3%20%CE%9B%CE%9F%CE%93%CE%99%CE%9A%CE%97%CE%A3%20%CE%A0%CE%A1%CE%A9%CE%A4%CE%97%CE%A3%20%CE%A4%CE%91%CE%9E%CE%97%CE%A3%20%CE%A3%CE%95%20%CE%A6%CE%A5%CE%A3%CE%99%CE%9A%CE%97%20%CE%93%CE%9B%CE%A9%CE%A3%CE%A3%CE%91.pdf>

- Μπούτας, Α. (2016). *Αρχές της Λογικής με εφαρμογή στα θεολογικά δεδομένα*. Θεσσαλονίκη: Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεολογίας. Μεταπτυχιακό. Ανάκτηση 30/10/2020 από: <http://ikee.lib.auth.gr/record/285323/files/GRI-2016-17626.pdf>
- Παναγιωτόπουλος, Θ και Αναστασάκης, Γ. (2012) «Λογικός προγραμματισμός». *Διδακτικές σημειώσεις*. Ανάκτηση 30/10/2020 από: <https://gunet2.cs.unipi.gr/modules/document/file.php/TME137/%CE%A3%CE%B7%CE%BC%CE%B5%CE%B9%CF%8E%CF%83%CE%B5%CE%B9%CF%82/notes-lp-msc-inf-2012.pdf>
- Πολιτοπούλου, Β. (2008). *Αυτόματη Παραγωγή Ασκήσεων για Διδασκαλία της Λογικής ως Γλώσσας Αναπαράστασης Γνώσης*. Πάτρα: Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα μηχανικών ηλεκτρονικών υπολογιστών και πληροφορικής. Μεταπτυχιακό. Ανάκτηση 30/10/2020 από: <https://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/bitstream/10889/10114/7/Grivokostopoulou%28com%29.pdf>.
- Τζαφέστας, Σ. (1991). «Τεχνητή νοημοσύνη, έμπειρα συστήματα και παραδοσιακή επεξεργασία δεδομένων». Ανάκτηση 30/10/2020 από: http://library.tee.gr/digital/techr/1991/techr_1991_6_29.pdf.
- Φιλολογική ομάδα Κάκτου. (1993). *Πλάτων: Λάχης ή περί ανδρείας, Λύσις ή περί φιλίας*. Αθήνα: Φιλολογική ομάδα Κάκτου, 1993.
- Φιλολογική ομάδα Κάκτου. (1994). *Πλάτων: Ευθύφρων ή περί του οσίου, Κρίτων ή περί του πρακτέου, Ίων ή περί Ιλιάδος*. Αθήνα: Φιλολογική ομάδα Κάκτου, 1993.

Πρόσθετη Βιβλιογραφία

- Καργόπουλος, Φ. Β. (2008). *Εισαγωγή στη συμβολική λογική*. Θεσσαλονίκη: Βάνιας
- Περίκος, Ι. (2011). *Αλληλεπιδραστικό σύστημα μετατροπής προτάσεων φυσικής γλώσσας σε κατηγορηματική λογική πρώτης τάξης με αυτόματη εισαγωγή προτάσεων και δημιουργία υποδείξεων για το χρήστη*. Μεταπτυχιακή Εργασία. Πάτρα: Πανεπιστήμιο Πατρών.
- Πορτίδης, Δ., Ψύλλος, Σ., Αναπολιτάνος, Δ. (2007). *Λογική: η δομή του επιχειρήματος*. Αθήνα: Νεφέλη.
- Νοτόπουλος, Π. (2008). *Προγραμματίζοντας στη λογική prolog*. Θεσσαλονίκη: Ανικούλα.
- Kosovskaya, T. (2016). Multi-agent description of an object by means of a predicate calculus language. *International Journal on Information Theories & Applications*, 23(4), pp.338-346. Ανάκτηση 30/10/2020 από: <http://www.foibg.com/ijta/vol23/ijta23-04-p03.pdf>.