



Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής
Τμήμα Μηχανικών Τοπογραφίας και Γεωπληροφορικής
ΠΜΣ Γεωχωρικές Τεχνολογίες

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

*«Ανάλυση και επεξεργασία βαρυτημετρικών
δεδομένων για την προσέγγιση του γεοειδούς
και αξιολόγηση της ακρίβειάς τους»*

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΦΟΙΤΗΤΡΙΑ: ΒΙΟΛΕΤΤΑ ΚΥΡΓΙΑΝΝΑΚΗ
ΑΜ:1904
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΑΝΔΡΙΤΣΑΝΟΣ**

ΑΘΗΝΑ, ΜΑΡΤΙΟΣ, 2022



University of West Attica
Department of Surveying and Geoinformatics Engineering
MSc Geospatial Technologies

MASTER THESIS

***«Analysis and processing of gravity data for
geoid estimation and their accuracy
assessment»***

**MSc STUDENT: VIOLETTA KYRGIANNAKI
REGISTRATION NUMBER: 1904
SUPERVISING TEACHER: VASSILIOS ANDRITSANOS**

ATHENS, MARCH, 2022



Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής
Τμήμα Μηχανικών Τοπογραφίας και Γεωπληροφορικής
ΠΜΣ Γεωχωρικές Τεχνολογίες

ΤΙΤΛΟΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ: «Ανάλυση και επεξεργασία βαρυτημετρικών δεδομένων για την προσέγγιση του γεοειδούς και αξιολόγηση της ακρίβειάς τους»

Μέλη Εξεταστικής Επιτροπής συμπεριλαμβανομένου και του Εισηγητή

Η μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία εξετάστηκε επιτυχώς από την κάτωθι Εξεταστική Επιτροπή:

α/α	ΟΝΟΜΑ-ΕΠΩΝΥΜΟ	ΒΑΘΜΙΔΑ/ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΨΗΦΙΑΚΗ ΥΠΟΓΡΑΦΗ
1	ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΑΝΔΡΙΤΣΑΝΟΣ	Αναπληρωτής Καθηγητής	
2	ΜΙΧΑΗΛ ΓΙΑΝΝΙΟΥ	Αναπληρωτής Καθηγητής	
3	ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΠΑΓΟΥΝΗΣ	Καθηγητής	

ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

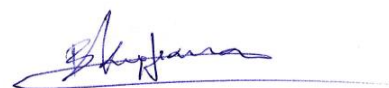
Η κάτωθι υπογεγραμμένη Βιολέττα Κυργιαννάκη του Ηλία, με αριθμό μητρώου 1904 φοιτήτρια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Γεωχωρικές Τεχνολογίες» του Τμήματος Μηχανικών Τοπογραφίας και Γεωπληροφορικής της Σχολής Μηχανικών του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής δηλώνω ότι:

«Είμαι συγγραφέας αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για της προετοιμασία της, είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, οι όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε ακριβώς είτε παραφρασμένες, αναφέρονται στο σύνολό τους, με πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων πηγών που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία έχει συγγραφεί από εμένα αποκλειστικά και αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου όσο και του Ιδρύματος.

Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του πτυχίου μου».

Η Δηλούσα

Βιολέττα Κυργιαννάκη



Επιβλέπων Καθηγητής

Βασίλειος Ανδριτσάνος

Copyright © Βιολέττα Κυργιαννάκη, 2022

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Η έγκριση της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας από το Τμήμα Μηχανικών Τοπογραφίας και Γεωπληροφορικής της Σχολής Μηχανικών του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής, δε δηλώνει απαραίτητως αποδοχή των γνώμών της συγγραφέως.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Πρωτίστως, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέπων καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας Δρ. Βασίλειο Ανδριτσάνο, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, την καθοδήγηση και την ευχάριστη συνεργασία μας.

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	13
ABSTRACT.....	15
ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ	17
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ.....	19
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ	21
ΜΕΡΟΣ Α: ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	23
1 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	25
1.1. Στόχοι – Περιγραφή Κεφαλαίων.....	25
1.2. Εισαγωγικά Στοιχεία.....	26
1.3. Περιοχή μελέτης – Δεδομένα – Όργανα Μετρήσεων.....	28
1.4. Ερευνητικό “Εκσυγχρονισμός του Ελληνικού Δικτύου Βαρύτητας”	30
1.4.1. Σταθμοί Μέτρησης Βαρύτητας.....	31
1.4.2. Προδιαγραφές Μετρήσεων Βαρύτητας.....	31
2 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΙΑ ΓΡΗΓΟΡΗ ΜΑΤΙΑ ΣΤΙΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ 33	
2.1 Σφαίρα.....	33
2.2 Έλλειψη – Ελλειψοειδές	34
2.3 Γεωειδές	36
2.4 Οριζόντιο Επίπεδο	39
3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΕ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ ..	41
3.1 Δυναμικό, Δύναμη και επιτάχυνση βαρύτητας	41
3.2 Βαρυτημετρία	43
3.3 Ισοδυναμικές Επιφάνειες	45
3.4 Υψόμετρο – Υψομετρία	46
ΜΕΡΟΣ Β: ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ.....	49
4 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΗΚΑΝ	51
4.1 Βέλτιστη Εκτίμηση Παραμέτρων.....	51
4.2 Διαδικασία της Συνόρθωσης Παρατηρήσεων.....	51
4.3 Μικτές Εξισώσεις.....	54
4.4 Βαθμοί Ελευθερίας	56
4.5 Κριτήρια Αξιοπιστίας.....	56
4.6 Έλεγχος της προσαρμογής (Goodness of Fit).....	59
4.7 Χωρική Παρεμβολή (Interpolation).....	61

4.8	Εκτίμηση Συνιστωσών Μεταβλητότητας.....	63
ΜΕΡΟΣ Γ: ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ		71
5	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΜΟΝΤΕΛΑ – ΔΕΔΟΜΕΝΑ – ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ.....	73
5.1	Προ-επεξεργασία Δεδομένων	73
5.2	Παραμετρικά Μοντέλα.....	74
5.3	Διαδικασία Απλής Συνόρθωσης Εξισώσεων Παρατήρησης.....	76
5.4	Δημιουργία Μαθηματικών Επιφανειών	82
5.5	Διαδικασία Συνόρθωσης Μικτών Εξισώσεων Συνθηκών	93
5.6	Ανάπτυξη Λογισμικού.....	111
6	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΕΛΕΓΧΟΣ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ	117
6.1	Έλεγχος Αξιοπιστίας – Γενική Υπόθεση.....	117
6.2	Goodness of Fit	121
6.3	Εκτίμηση συνιστωσών μεταβλητότητας	122
ΜΕΡΟΣ Δ: ΕΝ ΚΑΤΑΚΛΕΙΔΙ.....		127
7	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ	129
7.1	Συμπεράσματα.....	129
7.2	Προτάσεις	131
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....		133
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ		137

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία στόχος είναι η επεξεργασία βαρυτημετρικών μετρήσεων μέσω παραμετρικών μοντέλων και διαδικασιών συνόρθωσης με σκοπό την προετοιμασία τους για την προσέγγιση του γεωειδούς. Τα μοντέλα επιλέχθηκαν λόγω της ποικιλομορφίας τους, ώστε να αξιολογήσουμε ποια δομή είναι πιο αξιόπιστη.

Σε πρώτο στάδιο γίνεται μια εισαγωγή σε βασικές έννοιες και θεωρητικές επεξηγήσεις όρων, ώστε ο αναγνώστης να είναι σε θέση να κατανοήσει το σκοπό, το αποτέλεσμα αλλά και τη διαδικασία όλων των εφαρμογών.

Για τη δημιουργία των μαθηματικών επιφανειών χρειάστηκε να πραγματοποιηθεί απλή συνόρθωση εξισώσεων παρατήρησης αλλά και μικτών εξισώσεων. Επίσης πραγματοποιήθηκαν επιπλέον, αξιολογήσεις των συντελεστών των μοντέλων αλλά και των αποτελεσμάτων τους με διαδικασίες όπως η γενική υπόθεση και η αξιολόγηση της προσαρμογής (goodness of fit).

Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι πραγματοποιήθηκε η διαδικασία της εκτίμησης συνιστωσών μεταβλητότητας με σκοπό την εύρεση ενός πιο αξιόπιστου πίνακα βαρών, καθώς δεν υπήρχε πληροφορία για την ομάδα παρατηρήσεων που λήφθηκαν από τη ΓΥΣ.

ABSTRACT

In the present master thesis the aim is to process gravimetric measurements through parametric models and correction procedures in order to prepare them for the geoid approach. The models were chosen because of their diversity, in order to evaluate which structure is more reliable

In the first stage, an introduction is made to basic concepts and theoretical explanations of terms and procedures so that the reader is able to understand the purpose, result and process of all applications.

For a reliable estimation of the correction surface coefficients observation equation as well as combined equation adjustment model were used. Additional validation of the models and their results were also performed following statistical testing procedures as the general hypothesis and the goodness of fit.

Finally, it is worth noting that the process of variance component estimation was performed in order to determine a more reliable weight matrix, as there was no information about the group of observations received from the Hellenic Military Geographic Service (HMGS).

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΓΥΣ – Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού

VCE – Variance Component Estimation (Εκτίμηση Συνιστωσών Μεταβλητότητας)

GGM – Global Geopotential Model (Παγκόσμιο Γεωδυναμικό Μοντέλο)

MINQUE – Minimum norm quadratic unbiased estimation

RMS – Root mean square

GOCE – Gravity field and steady-state ocean circulation Explorer

EGM2008 – Earth Geopotential Model 2008

GNSS – Global navigation satellite system

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

ΕΙΚΟΝΑ 1:ΓΕΩΓΡΑΦΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ ΠΡΟΣ ΜΕΤΡΗΣΗ ΒΑΡΥΤΗΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ 1ΗΣ ΚΑΙ 2ΗΣ ΤΑΞΗΣ. (ΓΡΗΓΟΡΙΑΔΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ, 2019)	29
ΕΙΚΟΝΑ 2: ΣΦΑΙΡΑ	33
ΕΙΚΟΝΑ 3: ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ	34
ΕΙΚΟΝΑ 4: ΓΕΩΕΙΔΕΣ EGM2008 (ICGEM, N.D.)	36
ΕΙΚΟΝΑ 5:ΟΡΙΣΜΟΣ ΟΡΘΟΜΕΤΡΙΚΟΥ ΥΨΟΜΕΤΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ. (ΒΕΡΓΟΣ, 2006) .	47
ΕΙΚΟΝΑ 6: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΥ Α ΧΩΡΙΣ ΧΡΗΣΗ ΒΑΡΩΝ	82
ΕΙΚΟΝΑ 7: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΥ Α ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΒΑΡΩΝ	83
ΕΙΚΟΝΑ 8: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΥ Β ΧΩΡΙΣ ΧΡΗΣΗ ΒΑΡΩΝ	84
ΕΙΚΟΝΑ 9: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΥ Β ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΒΑΡΩΝ.....	85
ΕΙΚΟΝΑ 10:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΥ C ΧΩΡΙΣ ΧΡΗΣΗ ΒΑΡΩΝ. ...	86
ΕΙΚΟΝΑ 11: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΥ C ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΒΑΡΩΝ.....	87
ΕΙΚΟΝΑ 12: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΥ Ε ΧΩΡΙΣ ΧΡΗΣΗ ΒΑΡΩΝ. ..	87
ΕΙΚΟΝΑ 13: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΥ Ε ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΒΑΡΩΝ.....	88
ΕΙΚΟΝΑ 14: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΥ D ΧΩΡΙΣ ΧΡΗΣΗ ΒΑΡΩΝ... ..	89
ΕΙΚΟΝΑ 15: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΥ D ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΒΑΡΩΝ.....	89
ΕΙΚΟΝΑ 16: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΥ D2 ΧΩΡΙΣ ΧΡΗΣΗ ΒΑΡΩΝ. ..	90
ΕΙΚΟΝΑ 17: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΥ D2 ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΒΑΡΩΝ.....	91
ΕΙΚΟΝΑ 18: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΥ D3 ΧΩΡΙΣ ΧΡΗΣΗ ΒΑΡΩΝ. ..	91
ΕΙΚΟΝΑ 19: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΥ D3 ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΒΑΡΩΝ.....	92
ΕΙΚΟΝΑ 20: MODEL A.....	117
ΕΙΚΟΝΑ 21: MODEL B.....	117
ΕΙΚΟΝΑ 22: MODEL C.....	118
ΕΙΚΟΝΑ 23: MODEL E.....	118
ΕΙΚΟΝΑ 24:MODEL D.....	119
ΕΙΚΟΝΑ 25:MODEL D2.....	119
ΕΙΚΟΝΑ 26: MODEL D2.....	119
ΕΙΚΟΝΑ 27:MODEL D3.....	119
ΕΙΚΟΝΑ 28:ΚΑΤΑΝΟΜΗ χ^2 (ΔΕΡΜΑΝΗΣ Κ.Α., 1995).....	137
ΕΙΚΟΝΑ 29:ΚΑΤΑΝΟΜΗ χ^2 -ΣΥΝΕΧΕΙΑ (ΔΕΡΜΑΝΗΣ Κ.Α., 1995)	138
ΕΙΚΟΝΑ 30: ΚΑΤΑΝΟΜΗ F (ΔΕΡΜΑΝΗΣ Κ.Α., 1995).....	139

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ 1: ΤΥΠΙΚΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΕΙΣ 1ΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ	78
ΠΙΝΑΚΑΣ 2: DATA SNOORING	79
ΠΙΝΑΚΑΣ 3: ΤΥΠΙΚΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΕΙΣ 2ΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ	80
ΠΙΝΑΚΑΣ 4: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΑΠΛΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΣΥΝΘΗΚΩΝ.....	93
ΠΙΝΑΚΑΣ 5: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 1ΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΜΙΚΤΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ	93
ΠΙΝΑΚΑΣ 6: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 2ΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	94
ΠΙΝΑΚΑΣ 7: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ..	94
ΠΙΝΑΚΑΣ 8: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 1ΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΜΙΚΤΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ (ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ)	95
ΠΙΝΑΚΑΣ 9: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 2ΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΜΙΚΤΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ (ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ)	95
ΠΙΝΑΚΑΣ 10: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 3ΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΜΙΚΤΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ (ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ)	95
ΠΙΝΑΚΑΣ 11: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΑΠΛΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΣΥΝΘΗΚΩΝ.....	96
ΠΙΝΑΚΑΣ 12: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 1ΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΜΙΚΤΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ	96
ΠΙΝΑΚΑΣ 13: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 2ΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΜΙΚΤΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ	96
ΠΙΝΑΚΑΣ 14: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	97
ΠΙΝΑΚΑΣ 15: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 1ΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΜΙΚΤΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ (ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ)	97
ΠΙΝΑΚΑΣ 16: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 2ΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΜΙΚΤΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ (ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ)	97
ΠΙΝΑΚΑΣ 17: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 3ΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΜΙΚΤΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ (ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ)	98
ΠΙΝΑΚΑΣ 18: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΑΠΛΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΣΥΝΘΗΚΩΝ.....	98
ΠΙΝΑΚΑΣ 19: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 1ΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΜΙΚΤΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ	99
ΠΙΝΑΚΑΣ 20: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 2ΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΜΙΚΤΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ	99
ΠΙΝΑΚΑΣ 21: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	99
ΠΙΝΑΚΑΣ 22: : ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 1ΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΜΙΚΤΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ (ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ)	100
ΠΙΝΑΚΑΣ 23: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 2ΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΜΙΚΤΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ (ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ)	100
ΠΙΝΑΚΑΣ 24: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 3ΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΜΙΚΤΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ (ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ)	100
ΠΙΝΑΚΑΣ 25: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΑΠΛΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΣΥΝΘΗΚΩΝ.....	104
ΠΙΝΑΚΑΣ 26: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 1ΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΜΙΚΤΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ	104
ΠΙΝΑΚΑΣ 27: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	104

ΠΙΝΑΚΑΣ 28: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 1ΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΜΙΚΤΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ (ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ)	105
ΠΙΝΑΚΑΣ 29: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 2ΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΜΙΚΤΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ (ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ)	105
ΠΙΝΑΚΑΣ 30: ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ -MODEL A	105
ΠΙΝΑΚΑΣ 31: ΝΕΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ - MODEL A	106
ΠΙΝΑΚΑΣ 32: ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΤΗΣ ΑΠΛΗΣ ΕΙΣΩΣΗΣ ΣΥΝΘΗΚΩΝ	123
ΠΙΝΑΚΑΣ 33: ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΜΙΚΤΩΝ ΕΙΣΩΣΗΣ ΣΥΝΘΗΚΩΝ	125

ΜΕΡΟΣ Α: ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

1 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

1.1.Στόχοι – Περιγραφή Κεφαλαίων

Στόχος της παρούσας μελέτης είναι η επεξεργασία βαρυτημετρικών μετρήσεων για προσέγγιση γεωειδούς. Η επεξεργασία των μετρήσεων πραγματοποιήθηκε μέσω παραμετρικών μοντέλων αλλά και διαδικασιών συνόρθωσης. Παρακάτω αναλύεται το περιεχόμενο κάθε κεφαλαίου.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή σε βασικές έννοιες στις Γεωδαισιές. Επίσης επισημαίνεται ο σκοπός αλλά και τα περιεχόμενα των κεφαλαίων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια γρήγορη αναφορά στις επιφάνειες αναφοράς που χρησιμοποιούνται, τη σφαίρα, το ελλειψοειδές, το οριζόντιο επίπεδο και το γεωειδές. Επειδή το γεωειδές θα μας απασχολήσει παραπάνω γίνεται μνεία και μερικών υφιστάμενων μοντέλων γεωειδούς της Ελλάδας.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύονται βασικές έννοιες της γεωδαισιές που σχετίζονται με θέματα βαρύτητας και υψομέτρων. Ο λόγος που γίνεται μια αναλυτική αναφορά σε έννοιες όπως το δυναμικό η δύναμη η επιτάχυνση βαρύτητας, οι βαρυτημετρικές μετρήσεις, οι ισοδυναμικές επιφάνειες αλλά και τα υψόμετρα είναι το γεγονός ότι όλη η εργασία βασίζεται σε μετρήσεις βαρυτημετρικές, συνεπώς κρίθηκε απαραίτητο να υφίστανται κατανόηση εις βάθος.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναλύονται θεωρητικά έννοιες όπως η βέλτιστη εκτίμηση παραμέτρων, συνόρθωση παρατηρήσεων, κριτήρια αξιοπιστίας, χωρική παρεμβολή, συνόρθωση μικτών εξισώσεων και η εκτίμηση συνιστωσών μεταβλητότητας, οι οποίες αξιοποιήθηκαν στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας.

Στο πέμπτο κεφάλαιο πραγματοποιούνται, η προ-επεξεργασία των μετρήσεων, η ανάλυση των δεδομένων, η απλή συνόρθωση εξισώσεων παρατηρήσεων, δημιουργία μαθηματικών επιφανειών και η διαδικασία συνόρθωσης μικτών εξισώσεων. Στο τέλος του κεφαλαίου πραγματοποιείται η ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Στο έκτο κεφάλαιο, ένα από τα σημαντικότερα κεφάλαια της εργασίας, γίνεται μνεία στον έλεγχο και στην αξιολόγηση όλων των διαδικασιών που

πραγματοποιήθηκαν. Περιλαμβάνει τρία είδη ελέγχων, τον έλεγχο αξιοπιστίας (γενική υπόθεση), τον έλεγχο της προσαρμογής (Goodness of Fit) και τέλος την εκτίμηση συνιστωσών μεταβλητότητας.

Στο έβδομο κεφάλαιο αναφέρονται τα συμπεράσματα από τα αποτελέσματα τόσο των διαδικασιών όσο και των ελέγχων. Επίσης γίνεται σύγκριση τόσο των διαφορετικών παραμετρικών μοντέλων αλλά και των διαφορετικών διαδικασιών συνόρθωσης. Τέλος, προτείνεται το βέλτιστο μοντέλο μετασχηματισμού, όπως αυτό προέκυψε από την ανάλυση των αποτελεσμάτων της παρούσας μελέτης. Το προτεινόμενο μοντέλο θα χρησιμοποιηθεί για το μετασχηματισμό των δεδομένων της ΓΥΣ και τη χρησιμοποίησή τους σε συνδυασμό με νέες μετρήσεις βαρύτητας για την προσέγγιση ενός αναθεωρημένου τοπικού μοντέλου γεωειδούς στην περιοχή της Ελλάδας. Η επιλογή του παραμετρικού μοντέλου μετασχηματισμού κρίνεται σημαντική στην προσπάθεια συνδυασμού ετερογενών βάσεων δεδομένων βαρύτητας με σκοπό τη βελτιστοποίηση στην προσέγγιση της τελικής επιφάνειας του γεωειδούς και της αξιολόγησής της.

1.2.Εισαγωγικά Στοιχεία

Ο όρος Γεωδαισία προέρχεται από τις λέξεις “Γη” και “Δαίω” (Διαιρώ), πρόκειται για έναν όρο ο οποίος εντοπίζεται από την εποχή του Αριστοτέλη (384 π.Χ. - 322 π.Χ.). Ο Αριστοτέλης όρισε την Γεωδαισία ως “ Η τέχνη και η επιστήμη των μετρήσεων για την διανομή της γης”. Ο όρος Γεωδαισία χρησιμοποιείται διεθνώς και μπορούμε να τον συναντήσουμε ως “ Geodesy, Geodesie, Geodasie & Geodesia”. Σαν επιστήμη πραγματεύεται το σχήμα και το μέγεθος της γης (μορφή και διαστάσεις), το γήινο πεδίο βαρύτητας εντός και εκτός της επιφάνειας αυτής και τέλος τον προσδιορισμό σημείων αναφοράς στην γήινη επιφάνεια. Η Γεωδαισία απαριθμεί πληθώρα θεμελιωτών με σημαντικότερους τον Ερατοσθένη (276 π.Χ. - 194 π.Χ.), ο οποίος θεωρείται θεμελιωτής της Γεωδαισίας βάσει του σημερινού ορισμού και υπολόγισε γεωγραφικά την ακτίνα της γης με μεγάλη ακρίβειά και τον Friedrich Robert Helmert (1843-1917), ο οποίος όρισε τη γεωδαισία ως “ η Επιστήμη των μετρήσεων και της απεικόνισης της γήινης επιφάνειας” και εισήγαγε την κλίμακα βάσει της έκτασης.

Μια πολύ εύχρηστη επιφάνεια τόσο θεωρητικών μελετών όσο και πρακτικών εφαρμογών αποτελεί η ισοδυναμική επιφάνεια. Ως ισοδυναμική επιφάνεια ορίζεται εκείνη η επιφάνεια που για κάθε σημείο της ισχύει ότι $Wp = ct$ (σταθερό), συνεπώς κάθε σημείο της έχει την ίδια τιμή δυναμικού. Το πεδίο βαρύτητας αποτελείται από άπειρες ισοδυναμικές επιφάνειες με την ισοδυναμική επιφάνεια που σχετίζεται άρρηκτα με την επιφάνεια των ωκεανών, το γεωειδές, ως πιο ενδιαφέρουσα. Το γεωειδές ως ισοδυναμική επιφάνεια προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα τη μέση στάθμη της θάλασσας, θεωρώντας αμελητέα φαινόμενα μεταφορών θαλάσσιων μαζών, ρευμάτων και μεταβολών της στάθμης.

Μια από τις σημαντικότερες ενασχολήσεις της γεωδαισίας είναι ο προσδιορισμός του γεωειδούς, είναι δηλαδή η προσέγγιση εκείνης της ισοδυναμικής επιφάνειας που ανταποκρίνεται όσο το δυνατόν καλύτερα στην παγκόσμια μέση στάθμη των ωκεανών. Το γεωειδές δεν ανταποκρίνεται στην συμμετρία του ελλειψοειδούς που χρησιμοποιείται για την προσέγγιση του σχήματος της Γης, αντιθέτως είναι αρκετά ακανόνιστο σε σχέση με το ελλειψοειδές αλλά πολύ ομαλότερο σε σχέση με την πραγματική γήινη επιφάνεια. Χρησιμοποιείται ως επιφάνεια αναφοράς των κατακόρυφων συντεταγμένων (υψόμετρα) στη φυσική γεωδαισία.

Το υψόμετρο που έχει ευρεία χρήση στα κατακόρυφα συστήματα πλήθους χωρών είναι το ορθομετρικό υψόμετρο (H), το οποίο είναι η γεωμετρική απόσταση μεταξύ του γεωειδούς και την επιφάνεια της γης κατά μήκος μίας δυναμικής γραμμής. Το ορθομετρικό υψόμετρο συνήθως είναι αποτέλεσμα της διαδικασίας χωροστάθμησης, σαν διαδικασία δεν αποδίδει απευθείας ορθομετρικό υψόμετρο αντιθέτως είναι απαραίτητη η ορθομετρική διόρθωσή του. Το ορθομετρικό υψόμετρο είναι η διαφορά γεωμετρικού υψομέτρου (h), που μετράται βάσει της χωροστάθμησης, και της αποχής γεωειδούς (N). Ως αποχή γεωειδούς ορίζεται το ύψος από το ελλειψοειδές αναφοράς προς την ισοδυναμική επιφάνεια της μέσης στάθμης της θάλασσας (γεωειδές).

$$H = h - N$$

Eq: 1.1

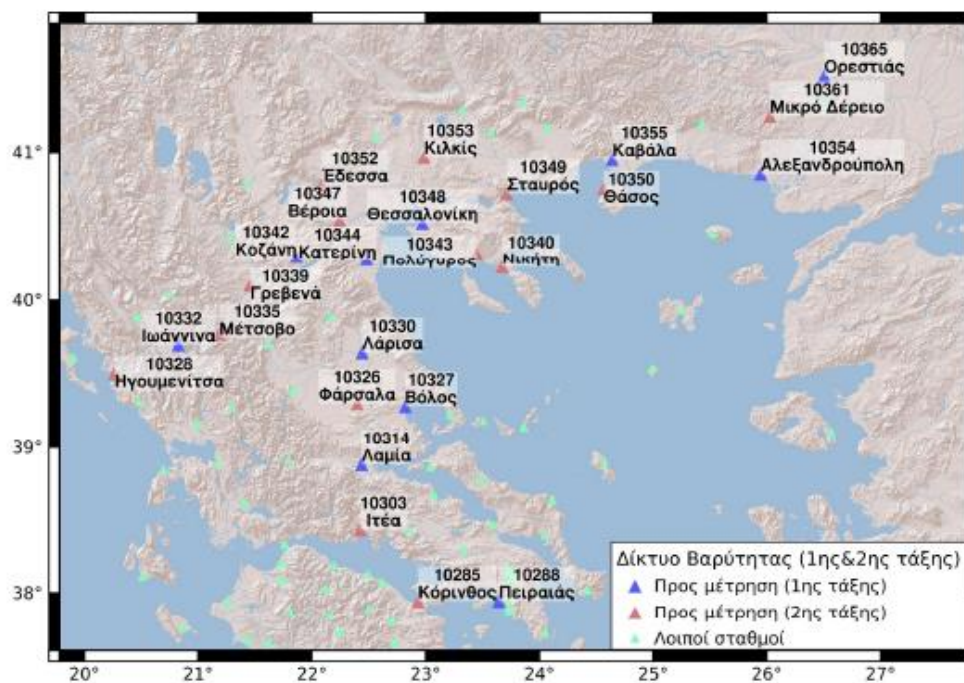
Η εύρεση του ορθομετρικού υψομέτρου είναι ένας εύκολος υπολογισμός βάσει της παραπάνω συνάρτησης με μία πρώτη ματιά. Το γεωμετρικό υψόμετρο παρέχεται εύκολα από συστήματα GPS (Global Positioning System), σε αντίθεση με την αποχή

γεωειδούς που ακόμα και σήμερα αποτελεί πρόκληση ως προς την ακρίβεια προσδιορισμού της. Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι με την πάροδο των χρόνων η χρήση GPS τείνει να αντικαταστήσει τη διαδικασία της χωροστάθμησης για την εύρεση του ορθομετρικού υψομέτρου, καθίστανται απαραίτητη η εύρεση ενός ακριβούς μοντέλου του γεωειδούς.

Η δημιουργία ενός μοντέλου γεωειδούς απαιτεί την χρήση βαρυτημετρικών μετρήσεων στην επιφάνεια της γης ή πάνω από αυτή, με κύριες συνιστώσες την έκταση, την απόσταση μεταξύ των σημείων μέτρησης και την ακρίβεια των μετρήσεων. Τις τελευταίες δεκαετίες έχει δημιουργηθεί πληθώρα μοντέλων γεωειδούς που βασίζονται σε βαρυτημετρικές μετρήσεις. Τα μοντέλα αυτά χωρίζονται σε δύο τύπους μοντέλων με κριτήριο τον τρόπο παραγωγής τους αλλά και το τελικό αποτέλεσμα. Η πρώτη κατηγορία αφορά τα μοντέλα που έχουν δομηθεί βάσει σφαιρικών αρμονικών, τα οποία μοντέλα χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση ολόκληρης της γης και η δεύτερη κατηγορία αφορά σε τοπικές προσεγγίσεις, όπως είναι η λύση του Stokes, η οποία αποτελεί μία από τις λύσεις του γεωδαιτικού προβλήματος συνοριακών τιμών. (DARAS, 2008)

1.3. Περιοχή μελέτης – Δεδομένα – Όργανα Μετρήσεων

Η παρούσα διπλωματική εργασία βασίστηκε σε δεδομένα από το ερευνητικό έργο “Εκσυγχρονισμός του Ελληνικού Δικτύου Βαρύτητας (Γρηγοριάδης Βασίλειος, 2019)”. Στο εν λόγω ερευνητικό έργο επιλέχθηκαν δύο περιοχές μελέτης, μία στη Νότια και μία στη Βόρεια Ελλάδα. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τα δεδομένα και των δύο αυτών περιοχών όπου πρόκειται και για περιοχές τόσο ορεινές όσο και πλησίον θάλασσας. Για τη Βόρεια και Νότια Ελλάδα μετρήθηκαν 25 σημεία όπου υπήρχαν ήδη βαρυτημετρικές μετρήσεις από τη Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού (ΓΥΣ). Τα σημεία που επιλέχθηκαν είναι τα κάτωθι : Ιωάννινα, Ηγουμενίτσα, Μέτσοβο, Γρεβενά-Εντός, Θάσος, Αλεξανδρούπολη, Μικρό Δερειο, Ορεστιάδα, Κοζάνη, Ριζάρι, Βέρροια, Κιλκίς, Σταυρός, Θεσσαλονίκη, Νικήτη, Πολύγυρος, Κατερίνη, Λάρισα, Φάρσαλα, Νέα Αγχίαλος, Κόρινθος, Πειραιάς, Ιτέα και Λαμία.



Εικόνα 1: Γεωγραφική Κατανομή των προς μέτρηση βαρυτημετρικών σημείων 1ης και 2ης τάξης. (Γρηγοριάδης Βασίλειος, 2019)

Πέραν των προαναφερθέντων σημείων της Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις σε παράκτιους σταθμούς, παλιρροιογράφους, πιο συγκεκριμένα μετρήθηκαν τρεις σταθμοί οι δύο σταθμοί ανήκουν στο δίκτυο παλιρροιογράφων του ΑΠΘ και ο τρίτος ανήκει στο δίκτυο παλιρροιογράφων του Πολεμικού Ναυτικού (Υδρογραφική Υπηρεσία του Πολεμικού Ναυτικού). Τα δεδομένα για κάθε σημείο ήταν οι συντεταγμένες (φ , λ), το γεωμετρικό υψόμετρο (h), το ορθομετρικό υψόμετρο (H) από το γεωδυναμικό μοντέλο EGM2008, η μέτρηση βαρύτητας (g), το σφάλμα των μετρήσεων βαρύτητας όπως αυτό πρόκυπτε από το όργανο (σ_g), οι μετρήσεις βαρύτητας που μετρήθηκαν από την ομάδα του ερευνητικού ($g(\text{έδαφος})$), οι βαρυτημετρικές μετρήσεις της Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού ($g(\text{ΓΥΣ})$) και τέλος η διαφορά των μετρήσεων της ομάδας του ερευνητικού με τις μετρήσεις της Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού. Για την υλοποίηση του παραπάνω ερευνητικού έργου χρησιμοποιήθηκαν τα παρακάτω όργανα:

- Βαρυτήμετρο απόλυτης τιμής A10
- Βαρυτήμετρα σχετικής τιμής CG-5
- Χωροβάτης και γραμμική σταδία με κώδικα (barcode)
- Δέκτες GNSS

Πιο συγκεκριμένα τα όργανα που χρησιμοποιήθηκαν για τις μετρήσεις κάθε περιοχής είναι τα παρακάτω:

- ❖ Για την περιοχή της Αττικής:
 - Ψηφιακός χωροβάτης : **GEOMAX ZDL-700**
 - Δέκτης GNSS : **JAVAD Triumph-1**
 - Βαρυτήμετρο σχετικής τιμής: **Scintrex CG-5**
- ❖ Για την περιοχή της Θεσσαλονίκης:
 - Ψηφιακός χωροβάτης : **Leica Spider 150**
 - Δέκτης GNSS : **Topcon HIPER-V**
 - Βαρυτήμετρο σχετικής τιμής: **Scintrex CG-5**

1.4. Ερευνητικό “Εκσυγχρονισμός του Ελληνικού Δικτύου Βαρύτητας”

Το ερευνητικό έργο “Εκσυγχρονισμός του Ελληνικού Δικτύου Βαρύτητας” με Επιστημονικό Υπεύθυνο τον Επίκουρο Καθηγητή Βασίλειο Γρηγοριάδη, πραγματεύεται την αξιολόγηση των υφιστάμενων δικτύων, κατακόρυφο και βαρύτητας, καθώς και την διερεύνηση του ενδεχομένου να γίνει ένας εκσυγχρονισμός των παραπάνω δικτύων. Οι κύριοι στόχοι του ερευνητικού έργου είναι τέσσερις:

1. Αξιολόγηση μέσω σχετικών και απόλυτων μετρήσεων βαρύτητας του υφιστάμενου δικτύου βαρύτητας.
2. Αξιολόγηση μέσω βαρυτημετρικών μετρήσεων, GNSS και χωροστάθμησης του δικτύου βαρύτητας και του κατακόρυφου δικτύου σε Βόρεια και Νότια Ελλάδα.
3. Τη προσέγγιση ενός γεωειδούς ως επιφάνειας αναφοράς, του Ελλαδικού χώρου, για το κατακόρυφο δίκτυο. Η αξιολόγηση του θα περατωθεί μέσω δεδομένων GNSS και χωροστάθμησης και με τα δεδομένα βαρύτητας που μετρήθηκαν.
4. Αξιολόγηση των πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων, της χρήσης του γεωειδούς ως επιφάνεια αναφοράς, μακροπρόθεσμα και βραχυπρόθεσμα.

Το παρόν ερευνητικό έργο αποτελεί καινοτομία στην Ελλάδα, καθώς θα εφαρμόσει για πρώτη φορά ένα γεωειδές ως επιφάνεια αναφοράς σε πραγματικές συνθήκες. Θα αποτελέσει έναν εκμοντερνισμό των υφιστάμενων ελληνικών δικτύων.

Τα αναμενόμενα αποτελέσματα, του ερευνητικού, είναι η δημιουργία ενός γεωειδούς υψηλής ανάλυσης για τον ευρύτερο ελλαδικό χώρο καθώς επίσης και την αξιολόγηση των υφιστάμενων δικτύων, εθνικού δικτύου βαρύτητας και εθνικού κατακόρυφου δικτύου. (ModernGravNet, 2019)

1.4.1. Σταθμοί Μέτρησης Βαρύτητας

Η επιλογή σημείων για τη διεξαγωγή μετρήσεων βαρύτητας πραγματοποιήθηκε βάσει των παρακάτω κριτηρίων:

- ο αριθμός του δείγματος να είναι στατιστικά σημαντικός
- χωρική κατανομή των σημείων με σκοπό την όσο το δυνατόν καλύτερη κάλυψη στην Ηπειρωτική Ελλάδα καθώς επίσης και προσδιορισμό κλίσεων του δικτύου, συγκριτικά με το πραγματικό πεδίο βαρύτητας
- έμφαση σε περιοχές με χαμηλή χωρική πυκνότητα, των σημείων του δικτύου
- η προσβασιμότητα των σημείων
- μέτρηση σημείου αναφοράς σε νησί με σκοπό την αξιολόγηση της σύνδεσης με την Ηπειρωτική Ελλάδα.

Το υφιστάμενο εθνικό δίκτυο βαρύτητας απαρτίζεται από 143 σημεία βαρύτητας 1^{ης} και 2^{ης} τάξης της ΓΥΣ. Βάσει των παραπάνω κριτηρίων επιλέχθηκαν μόλις 25 για να μετρηθούν με το απόλυτης τιμής βαρυντήμετρο A10 (ModernGravNet, 2019).

1.4.2. Προδιαγραφές Μετρήσεων Βαρύτητας

Για τις μετρήσεις με το απόλυτο βαρυντήμετρο A10, οι παράμετροι που καθορίστηκαν ήταν οι κάτωθι:

- Αριθμός Ελεύθερων πτώσεων : 120
- Ρυθμός Εκτέλεσης Ελεύθερων Πτώσεων (sec): 1
- Σειτ Μετρήσεων: 8
- Εφαρμογή Διορθώσεων λόγω Παλιρροιών: Ναι

Η αναμενόμενη αβεβαιότητα με το απόλυτο βαρυτήμετρο και βάση των παραπάνω προδιαγραφών είναι της τάξης των 10μGals.

Για τις μετρήσεις με το σχετικό βαρυτήμετρο CG-5, οι παράμετροι που καθορίστηκαν ήταν οι κάτωθι:

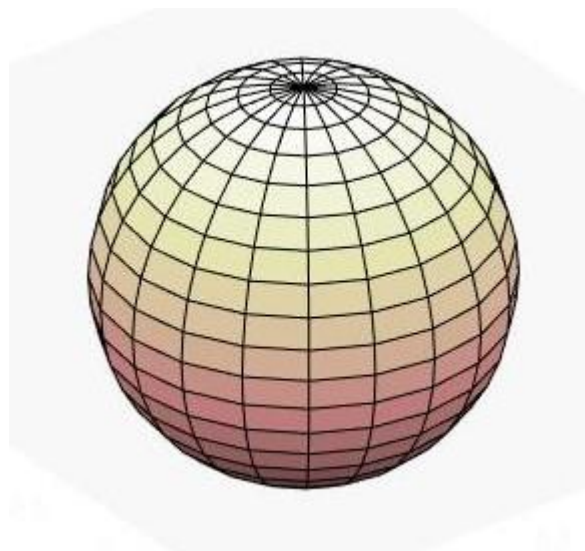
- Διάρκεια μέτρησης ανά σετ μετρήσεων : 60
- Ρυθμός Καταγραφής Σχετικών Μετρήσεων (sec): 1
- Σετ Μετρήσεων: 7
- Εφαρμογή σεισμικού φίλτρου: Ναι
- Εφαρμογή Διορθώσεων λόγω Παλιρροιών: Ναι

Οι μετρήσεις GNSS πραγματοποιήθηκαν με δέκτες Hiper-V (Topcon) και Triumph-1 (JAVAD) με την τεχνική μέτρησης VRS (Virtual Reference Station) του δικτύου Uranus. Προδιαγραφή για τις μετρήσεις GNSS ήταν η αναφορά τους στο σύστημα αναφοράς HTRS07 (Hellenic Terrestrial Reference System 2007) το οποίο αποτελεί το επίσημο σύστημα αναφοράς του HEPOS (Hellenic Positioning System) της Κτηματολόγιο Α.Ε. (Γρηγοριάδης Βασίλειος, 2019). Μια ακόμα προδιαγραφή ήταν η εσωτερική ακρίβεια του υπολογισμού της θέσης, έναντι της διάρκειας της μέτρησης, στη τάξη των 2mm. Αξίζει να σημειωθεί ότι η παραπάνω εσωτερική ακρίβεια είναι επιτεύξιμη μόνο όταν δεν υφίστανται εμπόδια κατά τη διάρκεια της μέτρησης (ModernGravNet, 2019).

2 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΙΑ ΓΡΗΓΟΡΗ ΜΑΤΙΑ ΣΤΙΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

2.1 Σφαίρα

Σφαίρα ονομάζεται εκείνη η μαθηματική επιφάνεια πάνω στην οποία κάθε σημείο απέχει ίση απόσταση από το κέντρο της. Πρόκειται για μία τρισδιάστατη κλειστή επιφάνεια με τέτοια καμπυλότητα που δεν της επιτρέπει την ύπαρξη αναπτύγματος επιπέδου.



Εικόνα 2: Σφαίρα

Η σφαίρα αποτέλεσε τρόπο αναπαράστασης της γήινης επιφάνειας και χρησιμοποιείται ακόμα ως επικρατέστερο σχήμα στην παραγωγή υδρόγειων σφαιρών που χρησιμοποιούνται ανά τον κόσμο για την ένταξη μαθητών στην γεωμετρία και στη γεωγραφία. Στην πραγματικότητα όπως είναι ευρέως

γνωστό η γη δεν είναι σφαιρική αντιθέτως μπορεί να χαρακτηριστεί ως ελλειψοειδής (θα αναλυθεί σε επόμενο κεφάλαιο).

Στην γεωδαισία η σφαίρα αποτελεί μια μαθηματικά απλοποιημένη επιφάνεια και χρησιμοποιείται ελάχιστα. Σε αντίθεση με τη Γεωδαισία, η σφαίρα χρησιμοποιείται ως επιφάνεια αναφοράς για άλλες εφαρμογές όπως αυτή της χαρτογραφίας και της ναυσιπλοΐας.

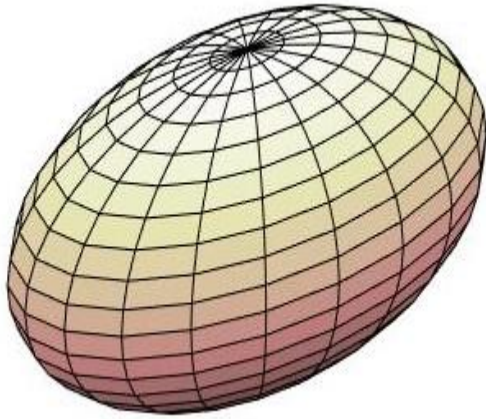
Μαθηματικά μπορούμε να εκφράσουμε τα σημεία πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας ως εξής :

$$X^2+Y^2+Z^2=R^2 \quad (2.1)$$

Οι υπολογισμοί στην επιφάνεια μιας σφαίρας γίνονται με τη χρήση τύπων σφαιρικής τριγωνομετρίας αλλά όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα η σύγχρονη Γεωδαισία τη χρησιμοποιεί σε ελάχιστες περιπτώσεις ως επιφάνεια αναφοράς λόγω της

χαμηλής της ακρίβειας σε σχέση με τη πραγματική γήινη επιφάνεια. (Μπιλλήρης, 2007)

2.2 Έλλειψη – Ελλειψοειδές



Εικόνα 3: Ελλειψοειδές

Η έλλειψη αποτελεί μια κωνική τομή και χαρακτηρίζεται από την ιδιαίτερη γεωμετρία της με δυο ημιάξονες αλλά και από την εκκεντρότητα της. Μια έλλειψη όπως είναι γνωστό απαρτίζεται από δύο εστίες, έναν μεγάλο ημιάξονα και έναν μικρό ημιάξονα.

Στην Γεωδαισία το ελλειψοειδές, τρισδιάστατη αναπαράσταση μιας έλλειψης, χρησιμοποιείται για μετρήσεις

ακρίβειας και για το υπολογισμό ορθομετρικών υψομέτρων βαρυτημετρικών μετρήσεων και δημιουργία ισοδυναμικών επιφανειών καθώς είναι σημαντικό να αναφερθούμε στο γεγονός ότι οι γεωδαιτικές συντεταγμένες (φ , λ) σχετίζονται με ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής (ΕΕΠ).

Το ελλειψοειδές εκ περιστροφής (ή ελλειψοειδές αναφοράς), λοιπόν, είναι για τη γεωδαισία μια μαθηματική επιφάνεια η οποία προσεγγίζει το γεωειδές με μεγαλύτερη ακρίβεια από ότι η σφαίρα. Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων οι εξίσωσεις του γεωδαιτικού ελλειψοειδούς και του τριαξονικού ελλειψοειδούς είναι (Μπιλλήρης, 2007):

$$\frac{X^2+Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1 \quad (2.2)$$

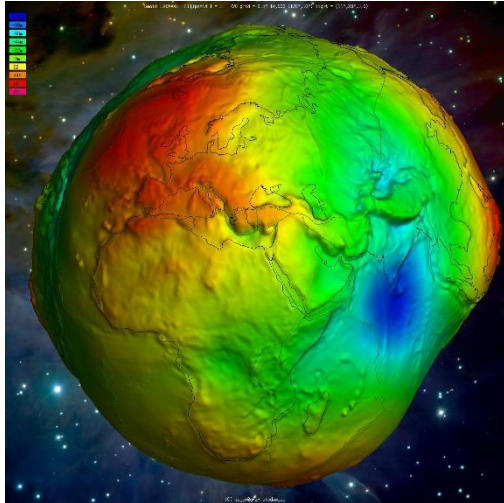
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1 \quad (2.3)$$

Στην Ελλάδα χρησιμοποιείται τον ελλειψοειδές Bessel στο ΠΕΓΣΑ (Παλαιό Ελληνικό Σύστημα Αναφοράς), το Hayford (Διεθνές) στο ED-50 (Ευρωπαϊκό Σύστημα Αναφοράς) και σήμερα πλέον Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς (ΕΓΣΑ 87) το GRS80 (Geodetic Reference System 1980). Το GRS80 θεωρείται το πλέον ρεαλιστικό ελλειψοειδές για χρήση σε γεωδαιτικά και γήινα συστήματα αναφοράς από τη Διεθνή Ένωση Γεωδαισίας (Μπιλλήρης, 2007).

Γεωκεντρικό ή γήινο ελλειψοειδές είναι εκείνο του οποίου το κέντρο ταυτίζεται με το κέντρο της γης καθώς επίσης και ο άξονας συμμετρίας του με ένα μέσο άξονα περιστροφής της γης, πρόκειται για το ελλειψοειδές που προσεγγίζει καλύτερα και πιο ρεαλιστικά το γεωειδές σε όλη την έκταση και όχι τμηματικά. Συνεπώς πρόκειται για ένα ελλειψοειδές που προσεγγίζει το γεωειδές σε παγκόσμιο επίπεδο το οποίο με τη σειρά του προσδιορίζεται μέσα από μια πληθώρα δυναμικών στοιχείων και παρατηρήσεων από τεχνητούς δορυφόρους. Σε αντίθεση με το γεωκεντρικό, το γεωδαιτικό ελλειψοειδές είναι εκείνο που ταυτίζεται πιο ρεαλιστικά με το γεωειδές μιας περιοχής, είναι μετατοπισμένο σε σχέση με το γήινο αλλά μπορεί να διατηρήσει ίσες διαστάσεις (τοπική προσέγγιση). (Μπιλλήρης, 2007)

Παρακάτω δίνονται τα κυρίως χρησιμοποιούμενα ελλειψοειδή (Μπιλλήρης, 2007):

- ◆ Everest (1830)
- ◆ Airy (1830)
- ◆ Bessel (1841)
- ◆ Clarke (1866)
- ◆ Clarke (1880)
- ◆ Helmert (1907)
- ◆ Hayford International (1924)\
- ◆ Krassowsky (1942)
- ◆ GRS (1967)
- ◆ WGS (1972)
- ◆ Gaposkin (1973)
- ◆ GRS (1980)



Εικόνα 4: Γεωειδές EGM2008
(ICGEM, n.d.)

2.3 Γεωειδές

Το γεωειδές είναι εκείνη η ισοδυναμική επιφάνεια που ταυτίζεται περισσότερο με την πραγματική γήινη επιφάνεια και προσαρμόζεται με μεγαλύτερη ακρίβεια στη μέση στάθμη των ωκεανών. Πρόκειται για μια επιφάνεια κλειστή που μοιάζει με ελλειψοειδές εκ περιστροφής. Βάση ορισμού η κατεύθυνση της κατακορύφου στο γεωειδές είναι κάθετη στην επιφάνεια του, σε όλα τα σημεία. Αποτελεί επιφάνεια αναφοράς για το αστρονομικό (φυσικό)

σύστημα αναφοράς καθώς επίσης και για τα ορθομετρικά υψόμετρα τα όποια έχουν ως αφετηρία τη μέση στάθμη της θάλασσας.

Η προσέγγιση του γεωειδούς αποτελεί έναν από τους μεγαλύτερους στόχους της γεωδαισίας και ειδικότερα της Φυσική Γεωδαισίας, η οποία στηρίζεται σε μετρήσεις γεωδαιτικές, ωκεανογραφικές, αστρονομικές, βαρυτημετρικές ή συνδυασμό όλων των προηγούμενων. Η προσέγγιση του όπως είναι αναμενόμενο δεν είναι απόλυτη συνεπώς τα μοντέλα που δημιουργούνται αναθεωρούνται και βελτιώνονται διαρκώς με τη πάροδο των χρόνων και την ραγδαία ανάπτυξη της τεχνολογίας (Μπιλλήρης, 2007).

2.3.1 Υφιστάμενα Μοντέλα Γεωειδούς στην Ελλάδα

«Η πρώτη απόπειρα για τον προσδιορισμό ενός ελληνικού μοντέλου γεωειδούς πραγματοποιήθηκε από τον Καθηγ. Μπαλοδήμο (Balodimos D.D., 1972) το 1972 οποίος χρησιμοποίησε τιμές από την απόκλιση του κατακορύφου ξ , η για τον προσδιορισμό ενός αστρογεωδυναμικού μοντέλου. Η συγκεκριμένη μέθοδος αναβαθμίστηκε το 1978 από συμπληρωματικές ξ , η τιμές. Στην αναβαθμισμένη πλέον μέθοδο χρησιμοποιήθηκε μια αστρογεωδαιτική χωροστάθμηση (leveling) με σύστημα αναφοράς το ED-50. Το 1980 ο Καθηγ. Αραμπέλος (Arabelos 1980) δημιούργησε ένα βαρυτημετρικό μοντέλο με τη χρήση της μεθόδου σημειακής προσαρμογής Ελάχιστων

Τετράγωνων συνδυάζοντας τη με ένα μοντέλο σφαιρικών αρμονικών και βαρυτημετρικές ανωμαλίες. Αποκλίσεις της τάξης των 77 cm προέκυψαν από τη σύγκριση με υψομετρικά δεδομένα του Geos-3.

Δύο συνδυασμένα μοντέλα γεωειδών κατασκευάστηκαν από τον Καθηγ. Τζιάβο (1984, 1987), με μέθοδο της σημειακής προσαρμογής Ελάχιστων Τετράγωνων (Katsabalos and Tziavos, 1991) στο GRS80. Για τη πρώτη λύση το μοντέλο GEM10B, 783 μέσες ανωμαλίες βαρύτητας ελεύθερου αέρα $10' \times 10'$ για την περιοχή $24^\circ \leq \phi \leq 52^\circ$, $8^\circ \leq \lambda \leq 52^\circ$, 4538 μέσες ανωμαλίες βαρύτητας ελεύθερου αέρα ενός $6' \times 10'$ πλέγμα για την περιοχή $33^\circ \leq \phi \leq 43^\circ$, $17^\circ \leq \lambda \leq 29^\circ$ και 200 σημεία με ξ και η τιμές χρησιμοποιήθηκαν από την Ελλάδα και τις γειτονικές χώρες. Η δεύτερη λύση χρησιμοποιεί τα ίδια δεδομένα με τη πρώτη (εκτός από τις ανωμαλίες μέσης βαρύτητας $10' \times 10'$) προσθέτοντας ένα παγκόσμιο γεωδυναμικό μοντέλο (Global Geopotential Model – GGM) σε βαθμό και τάξη 180 από τον Rapp (1981). Η πιο σημαντική διαφορά μεταξύ αυτών των δύο μοντέλων είναι ότι τα σφάλματα, στη δεύτερη λύση, θεωρούνται ασυσχέτιστα. Πραγματοποιήθηκαν συγκρίσεις μεταξύ των δύο λύσεων καθώς και με τα υψόμετρα γεωειδούς της αποστολής SEASAT, με ικανοποιητικά αποτελέσματα. Η εξωτερική ακρίβεια του δεύτερου συνδυασμένου μοντέλου γεωειδούς υπολογίστηκε στα 53 cm.

Το 1988 (Arabelos and Tziavos, 1989) παρουσιάστηκε μία βελτιωμένη λύση των δύο προηγούμενων συνδυασμένων μοντέλων γεωειδούς, όπου χρησιμοποιήθηκαν 14356 μέσες ανωμαλίες βαρύτητας ενός πλέγματος $6' \times 10'$ για την περιοχή $32^\circ \leq \phi \leq 46^\circ$, $12^\circ \leq \lambda \leq 30^\circ$, μαζί με 8000 σημειακές ανωμαλίες βαρύτητας, 120 σημεία με τιμές ξ , η με υψομετρικά δεδομένα, μέσο ύψος και βάθος ωκεανού, των αποστολών SEASAT και GEOSAT. Το αποτέλεσμα ήταν ένα συνδυασμένο γεωειδές μοντέλο σε πλέγμα $6' \times 10'$.

Το 1994 (Arabelos et al., 1994) παρουσίασαν ένα βαρυμετρικό γεωειδές μοντέλο της χωρών της Ανατολικής Μεσογείου (συμπεριλαμβανομένης της Ελλάδας), με τη χρήση του μοντέλου OSU 91A, σημεία βαρυτημετρικών ανωμαλιών για την περιοχή $30^\circ \leq \phi \leq 45^\circ$, $17^\circ \leq \lambda \leq 36^\circ$, ένα DTM ενός πλέγματος $5' \times 5'$ για το περιοχή $29^\circ \leq \phi \leq 43^\circ$, $16^\circ \leq \lambda \leq 37^\circ$ και συνδυασμένα υψομετρικά δεδομένα των αποστολών SEASAT, GEOSAT και ERS-1.

Το 2000 παρουσιάστηκε ένα νέο μοντέλο γεωειδούς συνδυασμού για την περιοχή της Ελλάδας (Ανδριτσάνος, 2000 και Tziavos and Andritsanos, 1999). Για την προσέγγισή του χρησιμοποιήθηκαν 75158 σημειακές τιμές βαρύτητας σε όλη την

επικράτεια, το ψηφιακό μοντέλο εδάφους GLOBE (30'' × 30'') για τον υπολογισμό των τοπογραφικών διορθώσεων και τα παγκόσμια γεωδυναμικά μοντέλα EGM96 και GPM98b ως μοντέλα αναφοράς. Η προσέγγιση στηρίχθηκε στην επίλυση του γεωδαιτικού προβλήματος συνοριακών τιμών σύμφωνα με τον Stokes, στην τεχνική απομάκρυνσης και επαναφοράς σήματος (remove – compute – restore technique) και στη θεωρία των συστημάτων εισόδου – εξόδου και την εφαρμογή τους στην προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας (Andritsanos and Tziavos, 2000). Από συγκρίσεις σε περιοχές της Ελλάδας με καλή κάλυψη σημείων GNSS/χωροστάθμησης η εξωτερική ακρίβεια προσέγγισης κυμάνθηκε από 5 έως 12 cm, πριν τη διαδικασία ενσωμάτωσης των δεδομένων αυτών στη λύση. Η εσωτερική ακρίβεια του αλγορίθμου προσέγγισης εκτιμήθηκε στο 1.5 cm.

Τον Σεπτέμβριο του 2002 υπολογίστηκε στο ΕΜΠ ένα αστρογεωδαιτικό μοντέλο (Tsinis, 2002), χρησιμοποιώντας 103 σημεία εντός της ελληνικής περιφέρειας και 93 σημεία από τις γειτονικές χώρες της Ελλάδας. Πραγματοποιήθηκε σύγκριση μεταξύ αυτού του αστρογεωδαιτικού γεωειδούς, το εξομαλυνθέν γεωειδές (Veis G., 1987) και το βαρυτημετρικό γεωειδές που υπολογίστηκαν σε αυτή τη μελέτη.

Το 1982, η Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού υπολόγισε ένα βαρυτημετρικό γεωειδές μοντέλο για την Ελλάδα από ανωμαλίες βαρύτητας ελεύθερου αέρα χρησιμοποιώντας την ολοκλήρωση του Stokes. Από τότε, υπήρξαν ορισμένες προσθήκες και βελτιώσεις σε αυτό το μοντέλο. Το 2005 το παλιό βαρυτημετρικό μοντέλο γεωειδούς συνδυάστηκε με τους 201 σταθμούς GPS του δικτύου πρώτης τάξης, με αποτέλεσμα το νέο συνδυασμένο βαρυτημετρικό μοντέλο γεωειδούς, με το όνομα FINGRAV-GPSOLAC. Μετά από σύγκριση του μοντέλου FINGRAV-GPSOLAC με τα δεδομένα GPS 201 του δικτύου πρώτης τάξης της Ελλάδας, υπολογίστηκε σφάλμα $\sigma \cong \pm 29\text{cm}$ για την συνδυασμένο γεωειδές μοντέλο.» (DARAS, 2008)

2.4 Οριζόντιο Επίπεδο

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα σχήματα το οριζόντιο επίπεδο δεν αποτελεί επιφάνεια χρήσιμη για τη γεωδαισία και αυτό έγκειται στο γεγονός ότι δεν θα μπορούσε το σχήμα της γης να αποδοθεί σε αυτό. Πάρα το γεγονός ότι το σχήμα της γης είναι οτιδήποτε άλλο παρά οριζόντιο, η οριζόντια επιφάνεια χρησιμοποιείται για μικρότερες εκτάσεις και πιο συγκεκριμένα αποτελεί επιφάνεια αναφοράς για την Τοπογραφία. Ο λόγος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στις εφαρμογές Τοπογραφίας είναι το γεγονός ότι σε μικρές εκτάσεις, όπως εκείνες που μπορεί να εφαρμοστεί η Τοπογραφία, η καμπυλότητα της γήινης επιφάνειας είναι εξαιρετικά μικρή και μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Κάθε οριζόντιο επίπεδο που χρησιμοποιείται για την παραγωγή τοπογραφικών εφαρμογών θεωρείται ότι είναι εφαπτόμενο στη γήινη επιφάνεια και είναι κάθετο στην κατεύθυνση της κατακόρυφου.

Όσο μεγαλώνει η έκταση της περιοχής μελέτης τόσο κρίνεται ακατάλληλο το οριζόντιο επίπεδο για υπολογισμούς οπότε χρησιμοποιείται η επιφάνεια της σφαίρας και όταν οι απαιτήσεις σε έκταση είναι εξαιρετικά μεγάλες είτε αφορούν το σύνολο της γήινης επιφάνειας τότε χρησιμοποιείται το ελλειψοειδές εκ περιστροφής. (Μπιλλήρης, 2007)

3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΕ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ

3.1 Δυναμικό, Δύναμη και επιτάχυνση βαρύτητας

3.1.1 Δυναμικό – Δυναμική Ενέργεια

Το δυναμικό με τη Δυναμική Ενέργεια δεν είναι ταυτόσημες έννοιες καθώς η δυναμική ενέργεια είναι εξαρτώμενη τόσο από το πεδίο όσο και από το σωματίδιο ή σωματίδια εντός αυτού ενώ το δυναμικό είναι εξαρτώμενο αποκλειστικά από το πεδίο. Πιο συγκεκριμένα όμως όταν μιλάμε για βαρυτικό πεδίο (το πεδίο που θα μας απασχολήσει κατά βάση σε αυτή τη διπλωματική εργασία), εάν συντηρητικό πεδίο, οι δύο παραπάνω έννοιες είναι ταυτόσημες. (Κωνσταντινίδης κ.α., 2007)

3.1.2 Δύναμη

Ως δύναμη λογίζεται μια διανυσματική φυσική ποσότητα η οποία ακολουθεί κανόνες διανυσματικού λογισμού. Για να περιγράψουμε μια δύναμη αρκεί να γνωρίζουμε το μέτρο και την κατεύθυνση της. Οι δυνάμεις μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε δύο υποκατηγορίες (Κωνσταντινίδης κ.α., 2007):

- Στις εξ ‘επαφής : πρόκειται για δυνάμεις που ασκούνται με μακροσκοπική επαφή
- Στις εξ ‘αποστάσεως : πρόκειται για δυνάμεις που ασκούνται χωρίς μακροσκοπική επαφή.

Αυτή τη στιγμή υπάρχουν τέσσερις θεμελιώσεις δυνάμεις:

- Οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις των φορτίων
- Η βαρυτική έλξη των σωμάτων
- Η ισχυρή πυρηνική δύναμη των σωμάτων
- Η ασθενής πυρηνική δύναμη όπου οφείλεται η ραδιενέργεια.

3.1.3 Νόμος της παγκόσμιας βαρυτικής Έλξης του Νεύτωνα

Σύμφωνα με τη γενική διατύπωση του Νεύτωνα ο ορισμός του νόμου της παγκόσμιας έλξης είναι ο παρακάτω:

“Κάθε υλικό σώμα στο σύμπαν έλκει κάθε άλλο σώμα με μία δύναμη που είναι ανάλογη με το γινόμενο των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογη προς το τετράγωνο της μεταξύ τους απόστασης.”

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (3.1)$$

όπου m_1 & m_2 οι μάζες των σωμάτων, r η μεταξύ τους απόσταση και G η παγκόσμια βαρυτική σταθερά. Η τιμή της βαρυτικής σταθεράς βρέθηκε πειραματικά απο τον παρακάτω τύπο:

$$G \cong 6.67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2} \quad (3.2)$$

Η επιτάχυνση βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης ή αλλιώς ένταση του πεδίου βαρύτητας εξαρτάται τόσο από τη μάζα (M) όσο και από την ακτίνα (R) της Γης.

$$g = G \frac{M}{R^2} \quad (3.3)$$

Η επιτάχυνση βαρύτητας (g) διαφέρει πάνω στην επιφάνεια της Γης. Αυτή η ανομοιογένεια στις τιμές της επιτάχυνσης βαρύτητας οφείλονται σε πρώτη φάση στην υψομετρική διαφορά κάθε σημείου καθώς η επιφάνεια της γης δεν είναι επίπεδη, στο γεγονός ότι το σχήμα της γης είναι ελλειψοειδές και όχι σφαιρικό συνεπώς υπάρχει μεγάλη διαφορά στις αποστάσεις των σημείων από το κέντρο της γης πχ ισημερινού και πόλων και τέλος στη ανομοιογένεια της πυκνότητας της γης από περιοχή σε περιοχή.

Για την εύρεση της επιτάχυνσης βαρύτητας σε γνωστό ύψος (h) από τη στάθμη της θάλασσας ο τύπος που χρησιμοποιείται είναι:

$$g_h = G \frac{M}{(R+h)^2} \quad (3.4)$$

Συνεπώς από τον παραπάνω τύπο μπορούμε να αντιληφθούμε ότι όσο μεγαλύτερο το ύψος τόσο η επιτάχυνση βαρύτητας τείνει στο μηδέν. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο συγκεκριμένος τύπος χρησιμοποιείται μόνο για σημεία πάνω από την μέση στάθμη της θάλασσας, οποιοδήποτε σημείο κάτω από τη μέση στάθμη της θάλασσα θεωρείται σημείο εντός του εσωτερικού φλοιού της γης. (Κωνσταντινίδης κ.α., 2007)

3.2 Βαρυτημετρία

Η Βαρυτημετρία αποτελεί μια επιστήμη με περίοδο ανάπτυξης από τον 16ο έως και τον 19ο αιώνα με σημαντικότερα πρόσωπα στην ανάπτυξή της τους Galileo Galilei, Sir Isaac Newton, Alexis Clairaut, George G. Stokes, Ernst Heinrich Bruns και Freidrich R. Helmert με πεδία έρευνας τη κλασική μηχανική, το σχήμα της γης και την κατανομή των μαζών στο εσωτερικό της, τις φυσικές μετρήσεις και τέλος τη Βαρυτημετρία.

Η Βαρυτημετρία αποτελεί κλάδο της εφαρμοσμένης Γεωφυσικής με αντικείμενο μελέτης την μέτρηση έντασης της βαρύτητας και σκοπό την προσέγγιση του βαρυτικού πεδίου της Γης. Για τις μετρήσεις χρησιμοποιούνται βαρυτήμετρα ή βαρυτόμετρα, με την χρήση των οποίων προσδιορίζεται το πεδίο βαρύτητας και το γεωειδές, με αποτέλεσμα να αποτελεί βαρυσήμαντο και αναπόσπαστο κομμάτι της Γεωδαισίας.

Οι γεωφυσικές, γεωδαιτικές και γεωδυναμικές μελέτες βασίζονται στην ύπαρξη βαρυτημετρικών δικτύων. Κάθε χώρα έχει ένα δίκτυο πρώτης τάξης το οποίο αποτελείται από κατάλληλα κατανεμημένων βαρυτημετρικών μετρήσεων. Η κατανομή των σταθμών που απαρτίζουν ένα τέτοιο δίκτυο είναι απαραίτητο να πληρούν τα παρακάτω κριτήρια (Αράμπελος, 2000):

- Σταθερότητα (μικροσεισμική, γεωλογική και υδρολογική)
- Πιθανότητα μετακίνησης μαζών

- Η μετάβαση στους σταθμούς με την μικρότερη δυνατή επίδραση του φαινομένου της ολίσθησης.

Υπάρχουν αρκετά Παγκόσμια Βαρυτημετρικά Δίκτυα αναφοράς από τα οποία ξεχωρίζουν τα παρακάτω:

- Vienna Gravity System (F.R.Helmert)
- Σύστημα αναφοράς του Potsdam
- International Gravity Standardization Network 1971 – I.G.S.N.71

3.2.1. Παρατηρήσεις Βαρυτημετρικών Μετρήσεων

Οι Βαρυτημετρικές μετρήσεις μπορούν να ανήκουν σε δύο κατηγορίες σε απόλυτες (προσδιορισμός του μέτρου του διανύσματος βαρύτητας) και σχετικές (η διαφορά μεταξύ του μέτρων βαρύτητας δύο σημείων), στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με την κατηγορία των σχετικών. Έτσι μαθηματικά οι σχετικές Βαρυτημετρικές μετρήσεις μπορούν να εκφραστούν με την μορφή του παρακάτω μοντέλου (Αράμπελος, 2000):

$$g_i = g_i^o + v_i \quad (3.5)$$

όπου g_i η παρατήρηση, g_i^o η προσεγγιστική τιμή της βαρύτητας για το σημείο I και v_i η διόρθωση (του φαινομένου των παλιρροιών).

Στην περίπτωση εύρεσης διαφοράς βαρυτημετρικών μετρήσεων δύο σημείων η παραπάνω εξίσωση παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\Delta g_{ij} = g_j - g_i = g_j^o - g_i^o + x_j - x_i \quad (3.6)$$

Εφόσον οι ενδείξεις των μετρήσεων έχουν μετατραπεί σε τιμές βαρύτητας διορθωμένες από τις αλλοιώσεις των παλιρροιών βάσει ενός πίνακα βαθμονόμησης του εκάστοτε κατασκευαστή η εξίσωση λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$\Delta g'_{ij} = (1 - \gamma)(g'_j - g'_i) - d(t_j - t_i) \quad (3.7)$$

όπου $\gamma = (1 + \gamma)$ ο συντελεστής κλίμακας του οργάνου, d ο συντελεστής ολίσθησης του οργάνου συναρτήσει του χρόνου.

3.3 Ισοδυναμικές Επιφάνειες

Μια πολύ εύχρηστη επιφάνεια τόσο θεωρητικών μελετών όσο και πρακτικών εφαρμογών αποτελεί η ισοδυναμική επιφάνεια. Ως ισοδυναμική επιφάνεια ορίζεται εκείνη η επιφάνεια που για κάθε σημείο της ισχύει ότι $Wp = ct$, συνεπώς κάθε σημείο της έχει την ίδια τιμή δυναμικού. Το πεδίο βαρύτητας αποτελείται από άπειρες ισοδυναμικές επιφάνειες με την ισοδυναμική επιφάνεια που σχετίζεται άρρηκτα με την επιφάνεια των ωκεανών, γεωειδές, ως πιο ενδιαφέρουσα. Το γεωειδές ως ισοδυναμική επιφάνεια προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα τη μέση στάθμη της θάλασσας, θεωρώντας αμελητέα φαινόμενα μεταφορών θαλάσσιων μαζών, ρευμάτων και μεταβολών της στάθμης.

Οι ισοδυναμικές επιφάνειες παρέχουν πληροφορία για την τρίτη διάσταση (ύψος και υψομετρική διαφορά). Η μορφή των ισοδυναμικών επιφανειών δεν είναι εφικτό να αποδοθεί βάσει αναλυτικής γεωμετρίας διότι τόσο το σχήμα της γης όσο και η κατανομή των διαταρακτικών μαζών δεν είναι αρκετά ακριβής. Μια ισοδυναμική επιφάνεια μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκη, αυτό έγκειται στο γεγονός ότι τόσο η μεταβολή των τεκτονικών πλακών όσο και οι διεργασίες στον εσωτερικό της γης, μεταβάλουν και περιπλέκουν το πεδίο βαρύτητας με αποτέλεσμα να μην υφίσταται ακριβές σχήμα για τις ισοδυναμικές επιφάνειες. Σε εκτάσεις μερικών χιλιάδων χιλιομέτρων η μορφή μιας ισοδυναμικής επιφάνειας προσεγγίζει εκείνη της σφαίρας και το κέντρο της προσεγγίζει το πραγματικό γεώκεντρο (Μπιλλήρης, 2007).

Για τις ισοδυναμικές επιφάνειες ισχύουν τα παρακάτω επιγραμματικά:

- Αποτελούν κλειστές επιφάνειες (με καμπυλότητα), δεν έχουν σταθερά γεωμετρικά χαρακτηριστικά όταν πρόκειται για το σύνολο της έκτασης της γης.
- Σε τοπικό επίπεδο προσεγγίζουν με ιδιαίτερα αυξημένη ακρίβεια την γήινη επιφάνεια.
- Η γεωμετρική απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών επιφανειών είναι μια μεταβαλλόμενη ποσότητα, ενώ η απόσταση ανάμεσα σε διαδοχικές ισοδυναμικές επιφάνειες που διαφέρουν κατά την ίδια ποσότητα σε τιμή δυναμικού αυξάνεται, όσο απομακρυνόμαστε από τις έλκουσες μάζες.

3.4 Υψόμετρο – Υψομετρία

Το υψόμετρο ως έννοια έχει ευρεία χρήση σε πολλές επιστήμες, στην Γεωδαισία και την Τοπογραφία όμως έχει ένα συγκεκριμένο εννοιολογικό διαχωρισμό, όπως για παράδειγμα το γεωμετρικό υψόμετρο (h), το οποίο χρησιμοποιείται για την έκφραση γεωμετρικών αποστάσεων δυο ή περισσότερων σημείων της γήινης επιφάνειας από ένα ελλειψοειδές ή μια σφαίρα με σκοπό τον ορισμό της κατακόρυφης συντεταγμένης στο εκάστοτε σύστημα συντεταγμένων. Παρόλα αυτά τα γεωμετρικά υψόμετρα δεν είναι ακριβή όσον αναφορά την κατακόρυφη θέση ενός σημείου εντός του γήινου πεδίου βαρύτητας. Το γεγονός ότι το πεδίο βαρύτητας έχει άπειρες ισοδυναμικές επιφάνειες, όπως προαναφέρθηκε, είναι απαγορευτικό για την χρήση καθαρά γεωμετρικών πρακτικών για τον προσδιορισμό θέσης ενός σημείου. Ένα ακόμα είδος υψομέτρου στη Γεωδαισία είναι το ορθομετρικό υψόμετρο (H), το οποίο ορίζεται σε μια ιδανική ισοδυναμική επιφάνεια που δεν είναι άλλη από το γεωειδές.

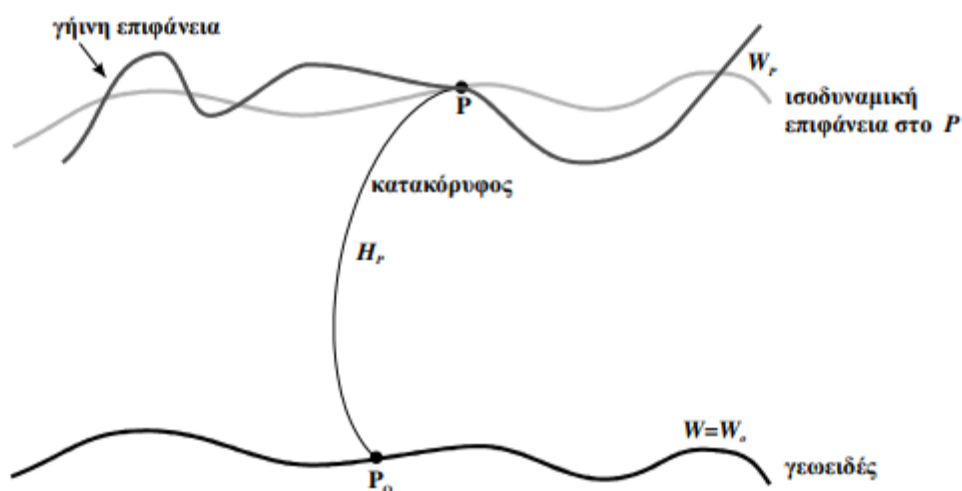
Στη πραγματικότητα μια πρώτη προσέγγιση του υψομέτρου ενός σημείου ως προς το γεωειδές δίνεται από τον γεωδυναμικό αριθμό C_p , και συνεπώς εκφράζει πιο αξιόπιστα και την υψομετρική διαφορά εντός του πεδίου βαρύτητας.

Παρά το γεγονός ότι οι γεωδυναμικοί αριθμοί είναι αναμφισβήτητα αξιόπιστοι σε ότι αφορά τα υψόμετρα παραμένουν μη αποδεκτοί, από άποψη ακρίβειας, για τη διάσταση του μήκους. Το γεγονός αυτό δεν τους καθιστά εύχρηστους σε πρακτικές εφαρμογές. Υπάρχουν αρκετά συστήματα υψών, τα οποία θα αναλυθούν παρακάτω, μετατρέπουν τους γεωδυναμικούς αριθμούς με σκοπό να τους δώσουν γεωμετρική ερμηνεία.

Ένα σύστημα υψών που θα αναλυθεί είναι τα δυναμικά υψόμετρα, τα οποία έχουν μετρητικό χαρακτήρα αλλά και πάλι δεν έχουμε γεωμετρική υπόσταση. Η πληροφορία που μπορεί να αντληθεί από αυτού του είδους τα υψόμετρα είναι ότι όσα σημεία έχουν ίδια τιμή δυναμικού υψομέτρου βρίσκονται στην ίδια ισοδυναμική επιφάνεια.

Στη συνέχεια ένα ακόμα σύστημα υψών είναι τα κανονικά υψόμετρα, τα οποία βασίζονται στο κανονικό δυναμικό ενός ελλειψοειδούς. Για τα εν λόγω υψόμετρα ως επιφάνεια αναφοράς του συστήματος τους ορίζεται μια ισοδυναμική επιφάνεια για την οποία ισχύει σταθερή τιμή του κανονικού δυναμικού της βαρύτητας $U = U_0$, η οποία ταυτίζεται με το ελλειψοειδές. Το κανονικό δυναμικό της βαρύτητας είναι το δυναμικό

που δημιουργείται από το γεωμετρικό μοντέλο της Γης, το ελλειψοειδές εκ περιστροφής, όταν αυτό χρησιμοποιηθεί και ως φυσικό μοντέλο (χωροσταθμικό ελλειψοειδές).



Εικόνα 5: Ορισμός Ορθομετρικού υψομέτρου σημείου. (Βέργος, 2006)

Αν για κάθε σημείο (P) μίας επιφάνειας (τοπογραφικής επιφάνειας) ορίσουμε ένα σημείο (Q) στην κάθετο του ελλειψοειδούς πάνω στην οποία βρίσκεται το σημείο P έχει την ιδιότητα $U_Q = W_P$ (κανονικό δυναμικό Q = πραγματικό δυναμικό P) τότε η επιφάνεια αυτή ονομάζεται τελουροειδές. Το τελουροειδές χρησιμοποιείται για την απεικόνιση των κανονικών υψομέτρων και η απόκλιση που έχει από τη γήινη επιφάνεια ονομάζεται ανωμαλία ύψους (ζ).

Το τελευταίο σύστημα υψών που θα αναλυθεί είναι τα κανονικά-ορθομετρικά υψόμετρα, πρόκειται για ένα υβριδικό μοντέλο που συνδυάζει ορθομετρικά και κανονικά υψόμετρα όπως προδίδει και το όνομα του.

Έχοντας πλέον μια πλήρη εικόνα, ο γεωδυναμικός αριθμός είναι μια καθαρά ορισμένη έννοια υψομέτρου διότι περιγράφει ακριβέστερα την σχετική θέση ενός σημείου στο πεδίο βαρύτητας (Βέργος, 2006).

ΜΕΡΟΣ Β: ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

4 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΗΚΑΝ

4.1 Βέλτιστη Εκτίμηση Παραμέτρων

Η επίλυση του προβλήματος προσδιορισμού των αγνώστων παραμέτρων είναι αδύνατη δεδομένου ότι η εύρεση τιμών για τους αγνώστους που να αποδίδουν τις ίδιες τιμές των παρατηρήσεων είναι μη πραγματοποιήσιμη λόγω των αναπόφευκτων σφαλμάτων που συμπεριλαμβάνονται στις τιμές των παρατηρήσεων. Έτσι λοιπόν κάθε τιμή που προσαρτάται σε μια άγνωστη παράμετρο καθώς διαφέρει από την πραγματική της τιμή θεωρείται εκτίμηση της, ουσιαστικά πρόκειται για μια τιμή μη προσδιορισμένη με αυθαίρετο τρόπο και προσαρμοσμένη όσο πιο κοντά στις αληθινές τιμές των αγνώστων του συστήματος. Η αναζήτηση των μικρότερων δυνάμει σφαλμάτων των εκτιμήσεων των παραμέτρων ονομάζεται κριτήριο βέλτιστης εκτίμησης το οποίο με δίνει τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται βέλτιστη εκτίμηση των παραμέτρων, το οποίο σημαίνει ότι έχουμε αυστηρά μία εκτιμώμενη τιμή για κάθε άγνωστη παράμετρο. (Ρωσσικόπουλος, 2001)

Με την εύρεση των βέλτιστών τιμών των αγνώστων παραμέτρων υπολογίζονται εκ νέου οι βέλτιστες πλέον τιμές των παρατηρήσεων. Οι οποίες αντικαθιστούν τις πρωτογενή, η διαδικασία αυτή ονομάζεται **συνόρθωση των παρατηρήσεων**.

4.2 Διαδικασία της Συνόρθωσης Παρατηρήσεων

Οι παρατηρήσεις που γίνονται στο πεδίο, είτε αυτές είναι γωνιομετρήσεις είτε μετρήσεις αποστάσεων είτε βαρυτημετρικές, δεν είναι απόλυτες καθώς υπάρχουν πολλοί παράγοντες που μπορούν να τις επηρεάσουν. Έτσι είναι απολύτως αποδεκτό ότι για κάθε παρατήρηση έχουμε και ένα σφάλμα, το οποίο όμως σε πρώτη φάση είναι άγνωστο. Η ύπαρξη των σφαλμάτων αυτών μας ωθεί στη διαδικασία της συνόρθωσης.

Σε δίκτυα που υπάρχει πλήθος παρατηρήσεων σε σχέση με τους αγνώστους τότε παρατηρείται ένας πλεονασμός βαθμών ελευθερίας ο οποίος όμως με τη σειρά του

προκαλεί την ασυμβατότητα του μοντέλου, με τον όρο ασυμβατότητα αναφερόμαστε στο γεγονός ότι αν χρησιμοποιήσουμε τις ελάχιστες δυνατές παρατηρήσεις για την επίλυση και συνεπώς την εύρεση των αγνώστων τότε χρησιμοποιώντας διαφορετικές παρατηρήσεις παρατηρείται διαφορά στα αποτελέσματα των αγνώστων. Η διαφορά αυτή των αποτελεσμάτων έχει να κάνει με τα σφάλματα των παρατηρήσεων που αναφέραμε παραπάνω. Μια λύση στο παραπάνω πρόβλημα των διαφορών των αποτελεσμάτων είναι η εύρεση των βέλτιστων εκτιμήσεων. (Ρωσσικόπουλος, 2001)

Συνεπώς η καλύτερη μέθοδος είναι εκείνη που χρησιμοποιεί όλες τις παρατηρήσεις, και ονομάζεται **κριτήριο βέλτιστης εκτίμησης**, ή αλλιώς για τις τοπογραφικές και γεωδαιτικές εφαρμογές **το κριτήριο ελαχίστων τετραγώνων**. Ισχύει ο παρακάτω τύπος (Ρωσσικόπουλος, 2001):

$$\mathbf{b}=\mathbf{Ax}+\mathbf{v} \quad (4.1)$$

όπου $\mathbf{b}=\mathbf{y}$ (παρατηρήσεων)- \mathbf{y} (προσεγγιστικό), \mathbf{A} ο πίνακας σχεδιασμού, \mathbf{x} ο πίνακας των αγνώστων και \mathbf{v} τα σφάλματα των παρατηρήσεων.

Ισχύει ότι:

$$\mathbf{v}^T\mathbf{Pv}=\min \quad (4.2)$$

Καταλήγουμε στο σύστημα κανονικών εξισώσεων \mathbf{N} :

$$\mathbf{Nx}=\mathbf{u} \quad (4.3)$$

Ο πίνακας \mathbf{N} παρουσιάζει αδυναμία βαθμού, η αδυναμία βαθμού διαφέρει ανάλογα με το είδος των παρατηρήσεων (αδυναμία βαθμού για : τριγωνομετρικό δίκτυο(4), μικτό δίκτυο(3) και για κατακόρυφο δίκτυο (1)).

Όπου :

$$\mathbf{N}=\mathbf{A}^T\mathbf{PA} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{u}=\mathbf{A}^T\mathbf{Pb} \quad (4.5)$$

Έτσι η λύση των κανονικών εξισώσεων γίνεται:

$$\mathbf{x}=\mathbf{N}^{-1}\mathbf{u}=(\mathbf{A}^T\mathbf{PA})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Pb} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{v}=\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{x}=(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{N}^{-1} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{v}=\mathbf{P}^{-1}-\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T \quad (4.10)$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T \quad (4.11)$$

Όταν ο πίνακας \mathbf{C}_v είναι γνωστός, και ισχύει ότι $\mathbf{P}=\mathbf{C}_v^{-1}$, οι παρακάτω πίνακες αποτελούν πίνακες συμμεταβλητότητας:

$$\mathbf{C}\mathbf{x}=\mathbf{Q}\mathbf{x} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{v}=\mathbf{Q}\mathbf{v} \quad (4.13)$$

Όταν είναι γνωστός ο πίνακας \mathbf{Q} , άγνωστο το σ^2 και $\mathbf{P}=\mathbf{Q}^{-1}$ δεν μπορούν να προσδιοριστούν οι πίνακες συμμεταβλητότητας. Η διαδικασία για αυτή τη περίπτωση είναι η ακόλουθη:

$$\sigma^2 = \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}}{s-m} = \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}}{f} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{x}=\sigma^2\mathbf{Q}\mathbf{x} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{v}=\sigma^2\mathbf{Q}\mathbf{v} \quad (4.16)$$

Στη συνέχεια αφού υπολογιστούν οι βέλτιστες εκτιμήσεις των συντελεστών του μοντέλου μπορούν να υπολογιστούν ξανά οι παρατηρήσεις σε ένα βέλτιστο μοντέλο με βάση τον τύπο:

$$\mathbf{L}=\mathbf{A}^T\mathbf{x}+\mathbf{v} \quad (4.17)$$

4.3 Μικτές Εξισώσεις

Η διαφορά μεταξύ των απλών εξισώσεων παρατηρήσεων και των μικτών εξισώσεων βρίσκεται στο σημείο όπου το φυσικό σύστημα των μικτών εξισώσεων συμπεριλαμβάνει τόσο τις παρατηρούμενες ποσότητες όσο και τις άγνωστες παραμέτρους είτε αυτό είναι τμηματικά είτε συνολικά. Αξίζει να σημειωθεί ότι με τη μέθοδο των μικτών εξισώσεων ουσιαστικά απαλείφονται μερικοί από τους αγνώστους στις εξισώσεις παρατηρήσεων.

Η χρήση των μικτών εξισώσεων χρησιμοποιείται όταν δεν είναι εφικτό οι παρατηρούμενες ποσότητες να εκφραστούν σε συνάρτηση με τις παραμέτρους του φυσικού συστήματος.

Σαν διαδικασία η συνόρθωση των μικτών εξισώσεων δεν διαφέρει από την απλή χρήση των ελάχιστων τετραγώνων των απλών εξισώσεων παρατηρήσεων, η μόνη διαφορά τους είναι ότι οι μικτές εξισώσεις έχουν δύο παραπάνω πίνακες τον πίνακα \mathbf{w} που περιέχει τα σφάλματα κλεισίματος και τον πίνακα \mathbf{B} που είναι παρόμοιας φιλοσοφίας με τον πίνακα σχεδιασμού \mathbf{A} . (Δερμάνης κ.α., 1995)

Τα βήματα για την συνόρθωση των μικτών εξισώσεων είναι τα παρακάτω:

1. επιλογή προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων παραμέτρων
2. υπολογισμός του πίνακα σφαλμάτων κλεισίματος \mathbf{w}
3. παραγωγή του μαθηματικού μοντέλου
4. υπολογισμός πίνακα σχεδιασμού \mathbf{A}
5. υπολογισμός πίνακα \mathbf{B}
6. υπολογισμός πινάκων συνόρθωση σε $\mathbf{M N u}$
7. υπολογισμός εκτιμήσεων των αγνώστων
8. εκτίμηση διανύσματος σφαλμάτων \mathbf{v}
9. εκτίμηση παρατηρούμενων παραμέτρων \mathbf{y}
10. εκτίμηση ακρίβειας των αγνώστων παραμέτρων των σφαλμάτων και των παρατηρούμενων παραμέτρων.

Η διαδικασία των μικτών εξισώσεων πραγματοποιείται με την παρακάτω ακολουθεία τύπων:

$$\mathbf{M}=\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T \quad (4.18)$$

$$\mathbf{N}=\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{u}=\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{w} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{N}^{-1}\mathbf{u}=(\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{w} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{v}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{w}-\mathbf{A}\mathbf{x}) \quad (4.22)$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{x}=(\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{N}^{-1} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{v}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{M}^{-1}-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1})\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{y}=\mathbf{P}^{-1}-\mathbf{Q}\mathbf{v} \quad (4.25)$$

Όταν ο πίνακας $\mathbf{C}\mathbf{v}$ είναι γνωστός, και ισχύει ότι $\mathbf{P}=\mathbf{C}\mathbf{v}^{-1}$, οι παρακάτω πίνακες αποτελούν πίνακες συµµεταβλητότητας:

$$\mathbf{C}\mathbf{x}=\mathbf{Q}\mathbf{x} \quad (4.26)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{v}=\mathbf{Q}\mathbf{v} \quad (4.27)$$

Όταν είναι γνωστός ο πίνακας \mathbf{Q} , άγνωστο το σ^2 και $\mathbf{P}=\mathbf{Q}^{-1}$ δεν µπορούν να προσδιοριστούν οι πίνακες συµµεταβλητότητας. Η διαδικασία για αυτή τη περίπτωση είναι η ακόλουθη:

$$\sigma^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{s-m} = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{f} \quad (4.28)$$

$$C_X = \sigma^2 Q_X \quad (4.29)$$

$$C_Y = \sigma^2 Q_Y \quad (4.30)$$

4.4 Βαθμοί Ελευθερίας

Βαθμοί Ελευθερίας ονομάζεται το πλήθος των επιπλέον του παραμετρικού βαθμού παρατηρήσεων και συμβολίζεται ως f . Στην περίπτωση των εξισώσεων παρατηρήσεων, όπου ο παραμετρικός βαθμός ταυτίζεται με τον αριθμό των αγνώστων m , οι βαθμοί ελευθερίας δίνονται από την εξίσωση:

$$f = n - m \quad (4.31)$$

όπου n είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων και m ο αριθμός των αγνώστων. Όσο περισσότεροι οι βαθμοί ελευθερίας ενός συστήματος τόσο πιο αξιόπιστα και πιο κοντά στις πραγματικές τιμές είναι τα αποτελέσματα της συνόρθωσης. (Δερμάνης κ.α., 1995)

4.5 Κριτήρια Αξιοπιστίας

Η ποιότητα της τελικής εκτίμησης των αγνώστων παραμέτρων μπορεί να διαπιστωθεί από τις αναλλοίωτες ποσότητες του φυσικού συστήματος οι οποίες είναι οι εκτιμήσεις των σφαλμάτων v το κριτήριο βελτιστοποίησης ϕ , η εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς σ^2 , καθώς και οι πίνακες C_v & C_y .

Πέρα όμως από τα παραπάνω υπάρχουν και κάποια κριτήρια ελέγχου της αξιοπιστίας της συνόρθωσης, τέλεια κριτήρια είναι ο ολικός έλεγχος αξιοπιστίας και η γενική υπόθεση. (Δερμάνης κ.α., 1995)

4.5.1 Ολικός έλεγχος αξιοπιστίας

Ο εν λόγω έλεγχος χρησιμοποιείται για τον εντοπισμό προβλημάτων σε ένα μοντέλο συνόρθωσης χωρίς όμως να δείχνει την πηγή του προβλήματος. Βασίζεται στην εκ των υστέρων μεταβλητότητα a-posteriori αλλά και στην αρχική εκτίμηση της μεταβλητότητας a-priori. Σε αυτό το μοντέλο ελέγχου, ελέγχεται η μηδενική υπόθεση $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ και η εναλλακτική υπόθεση $H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ η υπόθεση γίνεται δεκτή όταν ικανοποιείται η παρακάτω ανίσωση:

$$F_{f,\infty}^{1-\alpha/2} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \leq F_{f,\infty}^{\alpha/2} \quad (4.32)$$

Όπου σ^2 είναι η εκτίμηση μεταβλητότητας αναφοράς και σ_0^2 η αρχική μεταβλητότητα αναφοράς.

4.5.2 Έλεγχος Γενικής Υπόθεσης

Η εν λόγω μέθοδος ελέγχου αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων της συνόρθωσης εντοπίζει με ακρίβεια τα σφάλματα της συνόρθωσης. Κατά βάση ο έλεγχος αξιοπιστίας στατιστικά βασίζεται στους ελέγχους της γενικής υπόθεσης. Ουσιαστικά ο έλεγχος της γενικής υπόθεσης σχετίζεται με την σύγκριση δύο μοντέλων του αρχικού και ενός περιορισμένου για το οποίο ισχύουν κάποιες δεσμεύσεις (γνωστές σταθερές τιμές).

$$F = \frac{(f+k)\sigma_H^2 - f\sigma^2}{k\sigma^2} \leq F_{k,f}^a \quad (4.33)$$

Εξειδίκευση του ελέγχου της γενικής υπόθεσης, ιδιαίτερα δημοφιλής στην περίπτωση των τοπογραφικών μετρήσεων, αποτελεί ο έλεγχος της σάρωσης δεδομένων που θα αναλυθεί παρακάτω. Επιπλέον, στον έλεγχο της γενικής υπόθεσης, δηλαδή στην επέκταση του αρχικού μοντέλου σε σχέση με ένα περιορισμένο βασίζεται

και η διαδικασία ελέγχου της σημαντικότητας των συντελεστών των μοντέλων που θα αναλυθεί στην εφαρμογή (Δερμάνης κ.α., 1995).

4.5.3 Σάρωση δεδομένων (Data snooping)

Πρόκειται για μια διαδικασία εντοπισμού συστηματικών ή χονδροειδών σφαλμάτων στις παρατηρήσεις μιας συνόρθωσης. Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή στην ελληνική βιβλιογραφία ως σάρωση δεδομένων. Ουσιαστικά στην παρούσα διαδικασία ελέγχεται μια μηδενική υπόθεση, αν μια συγκεκριμένη παρατήρηση παρουσιάζει ή όχι συστηματικό ή χονδροειδές σφάλμα. Επίσης για την εν λόγω διαδικασία γίνεται η υπόθεση ότι όλες οι παρατηρήσεις του διακριτού συνόλου της συνόρθωσης έχουν τυχαία σφάλματα και ότι είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστες. Έτσι σύμφωνα με όλα τα παραπάνω η διαδικασία ανίχνευσης των χονδροειδών ή συστηματικών σφαλμάτων, υπολογίζεται το εξωτερικά ομαλοποιημένο σφάλμα:

$$t_i = r_i \sqrt{\frac{f-1}{f-r_i^2}} \quad (4.34)$$

όπου

$$r_i = \frac{\hat{v}_i}{\hat{\sigma}(\hat{v}_i)} \quad (4.35)$$

το οποίο είναι το εσωτερικά ομαλοποιημένο σφάλμα

$$\hat{\sigma}(\hat{v}_i) = \hat{\sigma} \sqrt{(P^{-1} - AN^g A^T)_{ii}} \quad (4.36)$$

η οποία είναι η τυπική απόκλιση, της εκτίμησης του σφάλματος και τέλος f είναι οι βαθμοί ελευθερίας της συνόρθωσης.

Σε επόμενο στάδιο της διαδικασίας γίνεται έλεγχος αν επαληθεύεται ή όχι η παρακάτω σχέση:

$$|t_i| \leq t_{f-1}^{a/2} \quad (4.37)$$

όπου εμφανίζεται το a είναι το επίπεδο σημαντικότητας. Οι πιο συχνές τιμές του επιπέδου σημαντικότητας για τοπογραφικά δίκτυα είναι 0,001 και για δίκτυα υψηλής ακρίβειας 0,01.

Η παρατηρήσεις που δεν ικανοποιούν την παραπάνω ανισότητα, κρίνονται ύποπτες είτε για συστηματικά σφάλματα είτε για χονδροειδή. Αν και εφόσον δεν είναι εφικτό να βρεθεί και να διορθωθεί το λάθος, τότε οι παρατηρήσεις αυτές για πρέπει να αφαιρεθούν από το σύνολο των παρατηρήσεων και να επαναληφθεί η διαδικασία της συνόρθωσης χωρίς αυτές. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται έως ότου η ανισότητα ισχύει για όλες τις παρατηρήσεις.

Αξίζει να σημειωθεί ότι όσο λιγότεροι είναι οι βαθμοί ελευθερίας της συνόρθωσης τόσο δυσκολότερη γίνεται η εύρεση των χονδροειδών ή συστηματικών σφαλμάτων μέσω της διαδικασίας της σάρωσης δεδομένων. Άλλες αιτίες που δυσκολεύουν τη διαδικασία είναι η ύπαρξη περισσότερων από μια παρατηρήσεων με χονδροειδή σφάλματα αλλά και από τη συσχέτιση των σφαλμάτων.

Η συσχέτιση των σφαλμάτων είναι πιθανό να μας δώσει εσφαλμένα αποτελέσματα της διαδικασίας της σάρωσης δεδομένων καθώς μπορεί τα σφάλματα άλλων μετρήσεων να επηρεάζουν μια παρατήρηση η οποία υπό κανονικές συνθήκες να ικανοποιούσε τον έλεγχο. Υπάρχει μια διαδικασία με την οποία είναι δυνατή η μείωση των πιθανοτήτων μιας εσφαλμένης απομάκρυνσης παρατηρήσεων που επηρεάζονται από τις εκτιμήσεις σφαλμάτων και αυτή εφαρμόζεται ως εξής: Εφόσον έχουν απομακρυνθεί όλες οι ύποπτες μετρήσεις και πλέον όλες οι παρατηρήσεις ικανοποιούν την ανισότητα, προσθέτουμε μία μία τις απορριφθείσες παρατηρήσεις και τρέχουμε τον έλεγχο από την αρχή.

Ένας άλλος τρόπος να μειώσουμε τις πιθανότητες να απορρίψουμε παρατηρήσεις που είναι σωστές είναι ο υπολογισμός των χονδροειδών σφαλμάτων των ύποπτων παρατηρήσεων. (Ρωσσικόπουλος, 2001)

4.6 Έλεγχος της προσαρμογής (Goodness of Fit)

Ένα στατιστικό μέτρο για την προσαρμοστικότητα ενός παραμετρικού μοντέλου με ένα διακριτό σύνολο είναι ο έλεγχος της προσαρμογής του (Goodness of Fit). Ο στατιστικός έλεγχος γίνεται βάσει του παρακάτω τύπου (Fotopoulos, 2003):

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m (l_i - \hat{v}_i)^2}{\sum_{i=1}^m (l_i - \bar{l}_i)^2} \quad (4.38)$$

όπου m είναι το πλήθος των παρατηρήσεων, v τα σφάλματα κάθε παρατήρησης και \bar{l}_i η μέση τιμή των παρατηρήσεων.

Στην ακραία περίπτωση όπου το παραμετρικό μοντέλο προσαρμόζεται απόλυτα στο διακριτό σύνολο τότε ο συντελεστής R^2 είναι ίσος με μονάδα. Η άλλη ακραία περίπτωση είναι το παραμετρικό μοντέλο να μην προσαρμόζεται στο διακριτό σύνολο και συνεπώς σε αυτή τη περίπτωση ο συντελεστής R^2 τείνει στο μηδέν.

Συνεπώς ο συντελεστής R^2 μπορεί να έχει τιμές μεταξύ του μηδέν και της μονάδας. Όσο πιο κοντά στη μονάδα βρίσκεται ο συντελεστής τόσο μικρότερα τα λάθη και συνεπώς τόσο καλύτερη η προσαρμοστικότητα του μοντέλου.

Είναι σημαντικό να έχουμε υπόψη μας ότι πρόκειται για έναν στατιστικό συντελεστή που εξ' ορισμού εμπεριέχει ιδιαιτερότητες των δεδομένων αλλά και τον παράγοντα τύχη. Έτσι θα ήταν πιο αξιόπιστα τα αποτελέσματα του στατιστικού ελέγχου αν πραγματοποιούνταν για ένα συγκεκριμένο εύρος, όπως το εύρος των βαθμών ελευθερίας ενός παραμετρικού μοντέλου. Έτσι έχει δημιουργηθεί ένας νέος δείκτης για την εύρεση του συντελεστή εντός ενός καλά ορισμένου συνόλου βάσει των βαθμών ελευθερίας και αυτός ο συντελεστής δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$R_a^2 = 1 - \frac{[\sum_{i=1}^m (l_i - \hat{v}_i)^2] / (m-u)}{[\sum_{i=1}^m (l_i - \bar{l}_i)^2] / (m-1)} \quad (4.39)$$

όπου u είναι το πλήθος των παραμέτρων του μοντέλου. Η σχέση μεταξύ των δύο στατιστικών συντελεστών δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$R_a^2 = 1 - \frac{(m-1)}{(m-u)} (1 - R^2) \quad (4.40)$$

4.7 Χωρική Παρεμβολή (Interpolation)

Ως χωρική παρεμβολή λογίζεται η διαδικασία εκείνη της εκτίμησης των τιμών εκείνων των σημείων για τα οποία δεν υπάρχει δείγμα και χωρική πληροφορία.

Από μελέτες που έχουν γίνει έχει παρατηρηθεί ότι η προσθήκη επιπλέον μεταβλητών επηρεάζει την προσομοίωση της παρεμβολής το οποίο έχει ως αποτέλεσμα οι πολύπλοκες παραμετρικές μέθοδοι να είναι αρκετά δημοφιλείς και αξιόπιστες.

Όσον αφορά την ακρίβεια μιας χωρικής παρεμβολής με σκοπό την προσομοίωση του τοπογραφικού ανάγλυφου της, πρέπει να υφίστανται συγκεκριμένες ιδιότητες, αυτές είναι, ικανοποιητική ακρίβεια των δεδομένων, η χρήση πολλών διαστάσεων, η εφαρμογή σε διαφορετικές μελέτες, η εφαρμογή της με πληθώρα δεδομένων, η υπολογιστική ικανότητα και τέλος η ευχρηστία της. Όπως είναι προφανές είναι αρκετά δύσκολο έως ακατόρθωτο να βρεθεί μία τέτοια μέθοδος η οποία να ικανοποιεί όλες τις παραπάνω ιδιότητες για ένα μεγάλο εύρος δεδομένων. (Νικολόπουλος κ.α., 2015)

Αυτή τη στιγμή υπάρχουν πολλά διαθέσιμα λογισμικά που υλοποιούν χωρική παρεμβολή οι σημαντικότερες είναι οι παρακάτω:

1. Μέθοδος τοπικής γειτνίασης (local neighborhood local estimation)

Η μέθοδος τοπικής γειτνίασης, βάζει ως προϋπόθεση ότι κάθε σημείο επηρεάζεται από τα γειτονικά σε αυτό σημεία εντός μιας ακτίνας. Συνεπώς τα σημεία που στερούνται τιμής, μπορούν να υπολογιστούν βάση αλγορίθμων και παραμετρικών μοντέλων που βασίζονται στην πληροφορία που παρέχεται από γειτονικά σημεία. Οι πιο γνώστες μέθοδοι τοπικής γειτνίασης είναι οι ακόλουθες:

- σταθμισμένη παρεμβολή αντίστροφης απόστασης
- παρεμβολή φυσικής γειτνίασης
- παρεμβολή ακανόνιστου τριγωνικού δικτύου.

2. Γεωστατικές μέθοδοι (kriging)

Οι γεωστατικές μέθοδοι βασίζονται σε εννοιολογική προσέγγιση, το αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής είναι μία συνάρτηση καθορισμένης χωρικής συνδιασποράς. Πυλώνας της παρούσας διαδικασίας είναι η εκτίμηση της μεταβολής της χωρικής διασποράς στα σημεία του δείγματος συναρτήσει της απόστασης. Πλεονεκτήματα της μεθόδου:

- στατιστική ποιότητα προβλέψεων
- πρόβλεψη της αβεβαιότητας της χωρικής κατανομής.

3. Μέθοδοι γενικευμένων προσεγγίσεων

Η μέθοδος αυτή, παρουσιάζει μια αισθητή διαφορά με τη μέθοδο τοπικής γειτνίασης, ο λόγος είναι ότι ενώ στη τοπική γειτνίαση αντλείται πληροφορία από τα γειτονικά σημεία εντός μιας ακτίνας από το σημείο ενδιαφέροντος, στη μέθοδο γενικευμένων προσεγγίσεων, αντλείται πληροφορία από το σύνολο των σημείων. Δεν αποτελεί μέθοδο με άμεση χρήση καθώς χρησιμοποιείται κυρίως βοηθητικά ως εργαλεία εξέτασης και απομάκρυνσης γενικευμένων χωρικών διαφοροποιήσεων που κατά κανόνα αναφέρονται στο σύνολο της περιοχής μελέτης. Οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο είναι οι ακόλουθοι:

- Τάση :
υψηλή τάση → επηρεάζει σημεία εντός μιας ακτίνας
χαμηλή τάση → επηρεάζει το σύνολο του πεδίου ενδιαφέροντος
- Εξομάλυνση → χρησιμοποιείται κυρίως για την απομάκρυνση θορύβου
- Ελάχιστη/μέγιστη απόσταση σημείων :
ελάχιστη απόσταση → εξάλειψη κοντινών σημείων
μέγιστη απόσταση → χρησιμοποιείται κατά βάση για ισοϋψείς και έχει την ιδιότητα να προσθέτει σημεία πάνω στην συνεχή γραμμή όταν αυτά είναι απομακρυσμένα.

- Ανισοτροπία → βασίζεται από τους κατακόρυφους άξονες και από την αναλογία της κλίμακας των αξόνων αυτών.

4.8 Εκτίμηση Συνιστωσών Μεταβλητότητας

Είναι εξαιρετικά σημαντικό να τονίσουμε την αναγκαιότητα ενός πίνακα βαρών των παρατηρήσεων σε μία συνόρθωση εξισώσεων παρατηρήσεων ή μικτών εξισώσεων, διότι πρόκειται για έναν πίνακα ο οποίος περιλαμβάνει τα βάρη που συνοδεύουν τις παρατηρήσεις στη διαδικασία της συνόρθωσης. Λανθασμένη επιλογή του πίνακα βαρών μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα συμπεράσματα σχετικά με τον έλεγχο αξιοπιστίας των τελικών αποτελεσμάτων. Παρά την εξαιρετική σημασία του πίνακα βαρών είναι πολύ συχνό το φαινόμενο που είτε παραλείπεται είτε απλοποιείται σε μεγάλο βαθμό. Η παράληψη ή η απλοποίηση του έχει να κάνει αρκετές φορές με έλλειψη πληροφοριών για τις εν λόγω μετρήσεις-παρατηρήσεις την τοπολογία, τα σφάλματα του οργάνου, και αρκετές φορές την αδυναμία παροχής αυτών των πληροφοριών από την αρμόδια υπηρεσία, όπως θα παρατηρήσουμε σε μεταγενέστερο στάδιο της παρούσας εργασίας.

Υφίστανται ποικιλία μεθόδων εκτίμησης των συνιστωσών μεταβλητότητας με ευρέως γνωστούς τους παρακάτω (Fotopoulos, 2003):

REFERENCE	FUNCTIONAL MODEL	STOCHASTIC MODEL	ESTIMATION PROCEDURE
Helmert (1924)	Gauss-Markov	$C = \sigma_i^2 Q_i$	Helmert's
Kubik (1970)	Gauss-Helmert	$C = \text{diag}[\sigma_i^2 I_i]$	Maximum likelihood
Rao (1971)	Gauss-Markov	$C = \sum_{i=1}^k \sigma_i Q_i$	MINQUE
Sjoberg (1983)	Condition-only Gauss-Helmert	$C = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 Q_i$	MINQUE
Sjoberg (1984)	Gauss-Helmert	$C = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 Q_i$	Iterative BIQUE NQMBNE BQUNE
Grafarend (1984)	Condition-only Gauss-Helmert	$C = \sum_{i=1}^k \sigma_i Q_i$	Helmert's
Koch (1986)	Gauss-Markov	No restriction	Iterative maximum likelihood
Koch (1987)	Gauss-Markov	No restriction	Approximate Bayesian inference
Koch (1988)	Gauss-Markov	$C = \sum_{i=1}^k \sigma_i Q_i$	Bayes estimators
Caspary (1987)	Gauss-Markov	$C = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 Q_i$	Iterative BIQUE

Ou Ziqiang (1989)	Gauss-Markov condition-only	$C = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 Q_{11} & \sigma_{12}^2 Q_{12} & \dots & \sigma_{1m}^2 Q_{1m} \\ \sigma_{21}^2 Q_{21} & \sigma_{22}^2 Q_{22} & \dots & \sigma_{2m}^2 Q_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{m1}^2 Q_{m1} & \sigma_{m2}^2 Q_{m2} & \dots & \sigma_{mm}^2 Q_{mm} \end{bmatrix}$	Iterative maximum likelihood
Ou Ziqiang (1991)	Gauss-Markov	$C = \text{diag}[\sigma_i^2 P_i^{-1}]$	Approximate Bayes & strict Bayes
Yu (1992)	Gauss-Helmert	$C = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 Q_{11} & \sigma_{12}^2 Q_{12} & \dots & \sigma_{1m}^2 Q_{1m} \\ \sigma_{21}^2 Q_{21} & \sigma_{22}^2 Q_{22} & \dots & \sigma_{2m}^2 Q_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{m1}^2 Q_{m1} & \sigma_{m2}^2 Q_{m2} & \dots & \sigma_{mm}^2 Q_{mm} \end{bmatrix}$	BIQUE
Sjoberg (1995)	Gauss-Markov	$C = \sigma_i^2 I + \sigma_2^2 F$	BQMBNE
Yu (1996)	Gauss-Helmert	$C = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 Q_{11} & \sigma_{12}^2 Q_{12} & \dots & \sigma_{1m}^2 Q_{1m} \\ \sigma_{21}^2 Q_{21} & \sigma_{22}^2 Q_{22} & \dots & \sigma_{2m}^2 Q_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{m1}^2 Q_{m1} & \sigma_{m2}^2 Q_{m2} & \dots & \sigma_{mm}^2 Q_{mm} \end{bmatrix}$	Maximum likelihood
Crocetto et al (2000)	No restriction	$C = \sum_{i=1}^k \sigma_i Q_i$ $C = \text{diag} \left[C_i = \sum_{j=1}^k \sigma_{ij}^2 \text{diag}(q_{ij}) \right]$	BIQUE
Schaffrin & Iz (2002)	Rank deficient Gauss-Markov	$C = \sigma_0^2 P^{-1}$	BLIMPBE
Tiberius and Kemselaar (2003)	Gauss-Markov	$C = \sum_{i=1}^k \sigma_i Q_i$ $C = Q_0 + \sigma_i^2 c_i c_i^T$ $C = Q_0 + \sigma_{ij} [c_i c_i^T + c_j c_j^T]$	BQUE & AUE
Kusche (2003)	Gauss-Markov	$C = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 V_i$ $V = \sum_{i=1}^k V_i = \text{diag}(P_i^{-1})$	Monte-Carlo

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε η μεθοδολογία MINQUE η οποία περιγράφεται παρακάτω. Η μέθοδος MINQUE θεωρείται μια προσέγγιση τετραγωνικής βάσης όπου γίνεται εύρεση μιας τετραγωνικής εκτίμησης που να ικανοποιεί το ελάχιστον κριτήριο μιας βέλτιστης κανονικότητας. Όπως μπορούμε να δούμε και από τον παραπάνω πίνακα η εν λόγω μέθοδος είναι απόρροια της μεθόδου Gauss-Markov για την οποία ισχύει το ακόλουθο μοντέλο (Fotopoulos, 2003):

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (4.41)$$

όπου $E\{\mathbf{v}\} = 0$ και το στοχαστικό μοντέλο για τον πίνακα δεδομένων CV είναι:

$$E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \mathbf{Q}_i = \mathbf{C}_l = \mathbf{C}_v \quad (4.42)$$

Στη μέθοδο MINQUE το πρόβλημα μπορεί να απλοποιηθεί με τη λύση του παρακάτω συστήματος:

$$\mathbf{S}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{q} \quad (4.43)$$

όπου $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ είναι ένα διάνυσμα που συμπεριλαμβάνει τις άγνωστες παραμέτρους, \mathbf{S} είναι ένας συμμετρικός πίνακας. Κάθε στοιχείο του πίνακα \mathbf{S} αποδίδεται με τον παρακάτω τύπο:

$$s_{ij} = \text{tr}(\mathbf{R}\mathbf{Q}_i\mathbf{R}\mathbf{Q}_j), \quad i, j = 1, \dots, k \quad (4.44)$$

όπου $\text{tr}()$ το ίχνος (trace) του αντίστοιχου πίνακα, όπου \mathbf{Q} ένας θετικός πίνακας για κάθε ομάδα παρατηρήσεων. Ο πίνακας \mathbf{R} είναι ένας συμμετρικός πίνακας που δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$\mathbf{R} = \mathbf{C}_l^{-1} \left[\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{C}_l^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}_l^{-1} \right] \quad (4.45)$$

όπου \mathbf{A} ο πίνακας σχεδιασμού \mathbf{C}_l ο πίνακας μεταβλητότητας των παρατηρήσεων. Το διάνυσμα \mathbf{q} δίνεται ως εξής:

$$\mathbf{q} = \{\mathbf{q}_i\}, \quad \mathbf{q}_i = \hat{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{Q}_i^{-1} \hat{\mathbf{v}}_i \quad (4.46)$$

Σύμφωνα με τους (Kostakis et.al, 1999), η διαδικασία της εκτίμησης συνιστωσών μεταβλητότητας είναι η παρακάτω.

Ο πρώτος πίνακας που θα βρεθεί για να προχωρήσουμε στην εφαρμογή της διαδικασίας είναι ο πίνακας W ο οποίος δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$W = I - A(A^T P A)^{-1} A^T P \quad (4.47)$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τα σφάλματα των ομάδων παρατηρήσεων, στην παρούσα εργασία τα V_{obs} και V_{gys} και το V (συνολικό σφάλμα).

$$\hat{v}_{obs} = P_{obs}^{-1} P W b \quad (4.48)$$

$$\hat{v}_{gys} = P_{gys}^{-1} P W b \quad (4.49)$$

$$v = B \hat{v} = W b \quad (4.50)$$

Σειρά έχει η εύρεση των μεταβλητοτήτων των δυο ομάδων παρατηρήσεων σύμφωνα με τον παρακάτω τύπο:

$$\hat{\sigma} = J^{-1} k \quad (4.51)$$

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{obs}^2 \\ \hat{\sigma}_{gys}^2 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} k_{obs} \\ k_{gys} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

$$K_{obs} = \hat{v}_{obs}^T P_{obs} \hat{v}_{obs} \quad (4.53)$$

$$K_{gys} = -\hat{v}_{gys}^T P_{gys} \hat{v}_{gys} \quad (4.54)$$

$$J_{i,j} = tr[P^{-1} W P_i P^{-1} W P_j] \quad (4.55)$$

Εφόσον οι μεταβλητότητες δεν είναι αρνητικές γίνεται εύρεση του νέου πίνακα βαρών με τον παρακάτω τύπο:

$$P_{new} = P_{gys}^{new} + P_{obs}^{new} \quad (4.56)$$

Στην περίπτωση που έστω και μία από τις μεταβλητότητες βρεθεί αρνητική, τότε η διαδικασία αναδιαμορφώνεται με προσεγγιστικές μεταβλητότητες αναφοράς. Παρακάτω περιγράφεται η διαδικασία:

Εφόσον έστω και μία από τις μεταβλητότητες αναφοράς είναι αρνητική παρακάμπτονται όλα τα παραπάνω και βρίσκουμε τις νέες μεταβλητότητες αναφοράς από τον τύπο:

$$\sigma_{new}^2 = \sigma_o^2 * k / (tr(W * P^{-1})) \quad (4.57)$$

$$\sigma_i^2 = \sigma_{new}^2 \sigma_o^2 \quad (4.58)$$

$$P_i = \mathbf{1} * P_o / \sigma_i^2 \quad (4.59)$$

Όπου σ_o^2 είναι η αρχική μεταβλητότητα αναφοράς (συνήθως ίση με μονάδα), οι επαναλήψεις της διαδικασίας χρησιμοποιούν κάθε φορά την προηγούμενη τιμή της μεταβλητότητας αναφοράς που βρέθηκε έως ότου να ικανοποιείται η συνθήκη που έχει οριστεί ανάλογα με την ακρίβεια και το είδος των παρατηρήσεων. Συνεπώς η παραπάνω εξίσωση για μια επαναληπτική διαδικασία θα είναι της μορφής:

$$\sigma_i^2 = \sigma_{i-1}^2 * k / (tr(W * P^{-1})) \quad (4.60)$$

$$P_i = \mathbf{1} * P_{i-1} / \sigma_i^2 \quad (4.61)$$

Τέλος, οι τελικοί πίνακες βαρών, βάση της συνθήκης που ορίσαμε, δίνονται από τον παρακάτω τύπο:

$$P_{final} = \mathbf{1} * P_i / (\text{sum}(\sigma_i^2)) \quad (4.62)$$

Η διαδικασία της εκτίμησης συνιστωσών μεταβλητότητας για μικτές εξισώσεις συνθηκών ακολουθεί την ίδια λογική με τη διαδικασία των απλών εξισώσεων συνθηκών με μόνη διαφορά τον σχηματισμό του πίνακα W .

$$W = B^T (M^{-1} - M^{-1} A P A^T M^{-1}) B \quad (4.63)$$

4.8.1 Αξιολόγηση της διαδικασίας της Εκτίμησης Συνιστωσών Μεταβλητότητας

Για την αξιολόγηση της διαδικασίας της εκτίμησης συνιστωσών μεταβλητότητας πραγματοποιήθηκε μονόπλευρος έλεγχος. Για τον έλεγχο αυτό ισχύουν οι παρακάτω τύποι (Δερμάνης κ.α., 1995).

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad , \quad H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2 \quad (4.64)$$

$$u \leq \chi_f^{2(a)} \quad (4.65)$$

$$u = \frac{f \hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \quad (4.66)$$

ΜΕΡΟΣ Γ: ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

5 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΜΟΝΤΕΛΑ – ΔΕΔΟΜΕΝΑ – ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ

5.1 Προ-επεξεργασία Δεδομένων

Μετά την απόκτηση των δεδομένων της εργασίας χρειάστηκε να γίνει μία αναγνώριση και προ-επεξεργασία των δεδομένων με σκοπό την αποφυγή χονδροειδών σφαλμάτων αλλά και την βαθύτερη κατανόηση των πληροφοριών που θα τεθούν υπό επεξεργασία για την προσέγγιση του γεωειδούς. Στον πίνακα με τα δεδομένα που παραχωρήθηκαν από το ερευνητικό έργο υπήρχαν οι παρακάτω πληροφορίες για κάθε σημείο ελέγχου:

Όνομασία	Κωδικός	φ	λ	h	H (EGM08)	$\Delta(g-g_{ΓΥΣ})$
Ιωάννινα	10332	39.693709575	20.824243120	506.0398	473.420	-15.10
Ηγουμενίτσα	10328	39.504527578	20.263051178	32.9689	2.586	-15.01
Μέτσοβο	10335	39.769321000	21.182616000	1179.0000	1143.688	-15.23
Γρεβενά-Εντός	10339	40.095614876	21.454940978	566.2952	527.157381	-15.01
Θάσος	10350	40.779496109	24.712503483	44.6263	3.902	-14.87
Αλεξανδρούπολη	10354	40.854387979	25.944753541	43.5963	3.568	-14.94
Μικρό Δέρειο	10361	41.350954288	26.157591046	355.4531	315.163828	-14.87
Ορεστιάδα	10365	41.49566232	26.50330189	76.6071	37.073621	-14.96

Πίνακας 1: Υπόδειγμα δομής των δεδομένων

- Ο κωδικός της θέσης
- Το γεωδαιτικό μήκος και πλάτος του σημείου στο γεωδαιτικό σύστημα WGS84 (φ , λ) σε δεκαδικές μοίρες (decimal degrees)
- Το γεωμετρικό υψόμετρο στο γεωδαιτικό σύστημα WGS84 (h) σε μέτρα (m)
- Το ορθομετρικό υψόμετρο όπως αυτό προέκυψε από το γεωδυναμικό μοντέλο EGM2008 ($H_{EGM2008} = h - N_{EGM2008}$) σε μέτρα (m)
- Η μέτρηση της βαρύτητας σε κάθε σημείο (g) στον αισθητήρα στο εσωτερικό του οργάνου σε (mGal)
- Το σφάλμα της βαρύτητας όπως προέκυψε από το βαρυτήμετρο (σ_g) σε (mGal)
- Το σφάλμα του οριζόντιας θέσης (HRMS) σε μέτρα (m)
- Το σφάλμα της κατακόρυφης θέσης (VRMS) σε μέτρα (m)

- Η μέτρηση βαρύτητας στο έδαφος ($g_{\text{εδάφους}}$) όπου είναι η μέτρηση βαρύτητας η οποία έχει υποστεί επεξεργασία μέσα από μία αναγωγή ελεύθερου αέρα σε (mGal)
- Η μέτρηση βαρύτητας που αντλήθηκε από τη Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού (ΓΥΣ) σε (mGal)
- Η διαφορά της βαρύτητας που μετρήθηκε από την ομάδα του ερευνητικού έργου με τη βαρύτητα που δόθηκε από τη Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού (Δg) σε (mGal)

5.2 Παραμετρικά Μοντέλα

Στην παρούσα εργασία θα εξετασθούν επτά (7) παραμετρικά μοντέλα. Σκοπός είναι η εύρεση εκείνου του μοντέλου που προσαρμόζεται καλύτερα στην υπάρχουσα πληροφορία και αποδίδει μία μαθηματική επιφάνεια διόρθωσης. Η επιφάνεια διόρθωσης συνδέει τα δεδομένα των τιμών της ΓΥΣ με τις μετρούμενες τιμές της βαρύτητας, ενώ η μορφή των επιφανειών οδηγεί σε συμπεράσματα σχετικά με τη φύση των διαφορών αυτών. Αντικειμενικό στόχος της παρούσας μελέτης είναι η εύρεση του βέλτιστου παραμετρικού μοντέλου, το οποίο περιγράφει καλύτερα τις διαφορές μεταξύ των τιμών της βάσης δεδομένων της ΓΥΣ και των μετρούμενων από το ερευνητικό πρόγραμμα τιμών της βαρύτητας. Τα παραμετρικά μοντέλα που θα χρησιμοποιηθούν περιγράφονται παρακάτω, αξίζει να σημειωθεί ότι δεν είναι όλα συναφή όσον αφορά τις μεταβλητές τους οπότε δεν αποτελούν και άμεσα συγκρίσιμες επιφάνειες καθώς εφόσον χρησιμοποιούν διαφορετικές πληροφορίες είναι ευκόλως εννοούμενο ότι θα υφίσταται ενδιαφέρουσες διαφορές όσον αφορά το ανάγλυφο της μαθηματικής επιφάνειας που θα προκύψει αλλά αυτό θα αναλυθεί σε μεταγενέστερο στάδιο.

- Model A:

$$g_{obs} = g_{GYS} + a + b \cos \varphi \cos \lambda + c \cos \varphi \sin \lambda + d \sin \varphi + v \quad (5.1)$$

- Model B:

$$g_{obs} = g_{GYS} + a + b \cos \varphi \cos \lambda + c \cos \varphi \sin \lambda + d \sin \varphi + e \sin^2 \varphi + v \quad (5.1)$$

- Model C:

$$g_{obs} = g_{GYS} + a + b(g_{GYS} - g_o) + c(\varphi - \varphi_o) + d(\lambda - \lambda_o) \cos \varphi + v \quad (5.3)$$

Τα μοντέλα D προέρχονται από την ίδια εξίσωση με διαφορά τον βαθμό ανάπτυξης. Η γενική εξίσωση των μοντέλων είναι :

$$g_{obs} = g_{GYS} + a + \sum_{m=0}^{m_{max}} \sum_{n=0}^{n_{max}} x_{(3m+n)} (\varphi - \varphi_o)^n (\lambda - \lambda_o)^m \cos^m \varphi + v \quad (5.4)$$

- Model D:

$$g_{obs} = g_{GYS} + a + b(g_{GYS} - g_o) + \sum_{m=0}^1 \sum_{n=0}^1 x_{(3m+n)} (\varphi - \varphi_o)^n (\lambda - \lambda_o)^m \cos^m \varphi + v \quad (5.5)$$

- Model D2:

$$g_{obs} = g_{GYS} + a + b(g_{GYS} - g_o) + \sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^2 x_{(3m+n)} (\varphi - \varphi_o)^n (\lambda - \lambda_o)^m \cos^m \varphi + v \quad (5.6)$$

- Model D3:

$$g_{obs} = g_{GYS} + a + b(g_{GYS} - g_o) + \sum_{m=0}^3 \sum_{n=0}^3 x_{(3m+n)} (\varphi - \varphi_o)^n (\lambda - \lambda_o)^m \cos^m \varphi + v \quad (5.7)$$

- Model E:

$$g_{obs} = g_{GYS} + a + b(g_{GYS} - g_o) + v \quad (5.8)$$

Όπου g_{obs} οι μετρήσεις βαρύτητας που έγιναν από την ομάδα του ερευνητικού, g_{GYS} οι τιμές βαρύτητας που δόθηκαν από την ΓΥΣ, (φ, λ) οι γεωδαιτικές συντεταγμένες των σημείων.

Τα μοντέλα διακρίνονται σε τρεις συγκρίσιμες κατηγορίες, η πρώτη κατηγορία έχει να κάνει με τα μοντέλα A και B όπου διαφέρουν κατά μία μεταβλητή ενώ οι υπόλοιπες παραμένουν ίδιες και συνεπώς μπορούν να συγκριθούν για το κατά πόσον αυτή η μία επιπλέον μεταβλητή είναι σημαντική για την καλύτερη αναπαράσταση της μαθηματικής επιφάνειας. Η δεύτερη κατηγορία μοντέλων είναι το C με το E όπου όπως φαίνεται και παραπάνω το μοντέλο του Torge (Torge, 1989) (Model E) χρησιμοποιεί μόνο μετρήσεις βαρύτητας ενώ το μοντέλο C χρησιμοποιεί δύο ακόμα μεταβλητές που βασίζονται και στις γεωδαιτικές συντεταγμένες των σημείων (φ , λ). Τέλος η τρίτη κατηγορία αναφέρεται στα μοντέλα D (τα μοντέλα αυτά προκύπτουν από τον ίδιο τύπο με μόνη διαφορά την δύναμη στην οποία υψώνονται, στην προκειμένη περίπτωση ο τύπος έχει αναλυθεί για βαθμούς 1, 2 και 3). Η εν λόγω σύγκριση θα πραγματοποιηθεί σε μεταγενέστερο στάδιο.

5.3 Διαδικασία Απλής Συνόρθωσης Εξισώσεων Παρατήρησης

Έχοντας τις μετρήσεις 24 σημείων ελέγχου και εφόσον αναπτύχθηκαν όλα τα μοντέλα και ελέγχθηκε αν υπάρχουν αρκετοί βαθμοί ελευθερίας για τη διαδικασία συνόρθωσης όλων των μοντέλων, πραγματοποιήθηκε η εύρεση των βέλτιστων εκτιμήσεων των συντελεστών των παραμετρικών μοντέλων βάσει της παρακάτω διαδικασίας. Αξίζει να σημειωθεί ότι όλες οι διαδικασίες επεξεργασίας των δεδομένων της παρούσας εργασίας πραγματοποιήθηκαν στο προγραμματιστικό περιβάλλον MatLaB, λόγω τόσο του όγκου των μετρήσεων, αλλά και για την μεγαλύτερη ακρίβεια που προσφέρουν τα υπολογιστικά συστήματα του προγραμματισμού.

Βήματα Συνόρθωσης :

- Δημιουργία Πίνακα Σχεδιασμού (**A**) : μεγάλη σημασία για την σωστή επεξεργασία και τα σωστά αποτελέσματα της συνόρθωσης έχει η δημιουργία του πίνακα σχεδιασμού. Οι πίνακες σχεδιασμού έχουν διαστάσεις $n \times x$ (πλήθος εξισώσεων παρατήρησης * πλήθος αγνώστων συντελεστών).
- Δημιουργία Διανύσματος Παρατηρήσεων (**b**) : το διάνυσμα παρατηρήσεων ουσιαστικά ισούται με την τιμή της μέτρησης μείον τις προσεγγιστικές τιμές για τα σημεία που μετρήθηκαν. Οι διαστάσεις του διανύσματος παρατηρήσεων

είναι $n \times 1$. Στη παρούσα εργασία ως διάνυσμα παρατηρήσεων θεωρούμε τη διαφορά της μετρημένης βαρύτητας από το ερευνητικό έργο μείον τις βαρυτημετρικές τιμές που αντλήθηκαν από τη βάση της ΓΥΣ.

- Δημιουργία Πίνακα Βαρών (**P**) : Ο πίνακας βαρών είναι ένας τετράγωνος πίνακας με ίσες διαστάσεις $n \times n$. Ουσιαστικά προσθέτει μια παραπάνω ακρίβεια στο αποτέλεσμα της συνόρθωσης καθώς δίνει διαφορετική βαρύτητα στις μετρήσεις ανάλογα το σφάλμα που έχουν ή ενδεχομένως την απόσταση που έχουν από ένα δεδομένο σημείο (ο πίνακας βαρών μπορεί να εμπεριέχει πληροφορία αναλόγως τι πραγματεύεται κάθε συνόρθωση). Στη παρούσα εργασία ως πληροφορία για τον πίνακα βαρών χρησιμοποιήθηκαν τα σφάλματα των μετρήσεων όπως αυτά προέκυψαν από το βαρυτήμετρο στο πεδίο. Αξίζει να σημειωθεί πως η ΓΥΣ δεν είχε στείλει τα σφάλματα των μετρήσεων και συνεπώς δεν μπόρεσαν να προστεθούν στον πίνακα βαρών. Σημειώνεται ότι, ακόμα και οι ακρίβειες μέτρησης του βαρυτημέτρου δεν αντιπροσωπεύουν πάντοτε το ιδανικό βάρος της μέτρησης, αφού παρουσιάζουν μόνο μία πληροφορία για την εσωτερική ακρίβεια κάθε μέτρησης. Η εύρεση του πίνακα των βαρών των παρατηρήσεων αποτελεί σημαντικό βήμα στη συνόρθωση των παρατηρήσεων, γιατί μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα σχετικά με την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της συνόρθωσης. Η αντιμετώπιση αυτού του λεπτού ζητήματος οδηγεί στη χρήση της εκτίμησης των συνιστωσών μεταβλητότητας.
- Δημιουργία Πίνακα Κανονικών εξισώσεων (**N**) : Οι διαστάσεις του πίνακα κανονικών εξισώσεων είναι $x \times x$. Πρόκειται για έναν τετραγωνικό πίνακα. Ο πίνακας **N** προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του αντίστροφου πίνακα σχεδιασμού με τον πίνακα σχεδιασμού ($\mathbf{N}=\mathbf{A}'*\mathbf{A}$).
- Δημιουργία Διανύσματος Κανονικών Εξισώσεων (**u**) : Το διάνυσμα κανονικών εξισώσεων προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του αντίστροφου πίνακα σχεδιασμού με το διάνυσμα παρατηρήσεων, συνεπώς οι διαστάσεις του πίνακα κανονικών εξισώσεων είναι $x \times 1$.

- Υπολογισμός των βέλτιστων εκτιμήσεων των συντελεστών (x_{est}): Με το πέρας της συνόρθωσης καταλήγουμε σε ένα πίνακα βέλτιστων εκτιμήσεων των συντελεστών των παραμετρικών μοντέλων ο οποίος προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του ανάστροφου πίνακα N^{-1} με το διάνυσμα κανονικών εξισώσεων (u).
- Υπολογισμός διανύσματος σφαλμάτων παρατηρήσεων (v): Τέλος προκύπτει ένα διάνυσμα σφαλμάτων των παρατηρήσεων βάσει των βέλτιστων εκτιμήσεων της συνόρθωσης με διαστάσεις $n*1$.

Όπου n το πλήθος των μετρημένων σημείων, όπου x το πλήθος των αγνώστων παραμέτρων της συνόρθωσης.

5.3.1 Πρώτη Συνόρθωση

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΩΤΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ	
ΜΟΝΤΕΛΑ	ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ
A	22.5840
B	22.7509
C	22.1035
D	22.1766
D2	17.0126
D3	16.6155
E	21.8779

Πίνακας 2: Τυπικές Αποκλίσεις 1ης Συνόρθωσης

Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία στο προγραμματιστικό περιβάλλον MatLab, πραγματοποιήθηκε μια πρώτη συνόρθωση για τα 24 σημεία ελέγχου. Με το πέρας της συνόρθωσης αποδόθηκαν τα παρακάτω αποτελέσματα τυπικής απόκλισης για όλα τα παραμετρικά μοντέλα. Αξίζει σε αυτό το σημείο να σημειωθεί ότι η αυξημένη τιμή της τυπικής απόκλισης σε όλα τα μοντέλα δημιούργησε υποψίες για ύπαρξη ύποπτων τιμών εντός του δείγματος. Για την επαλήθευση ή απόρριψη της υπόθεσης ύπαρξης ύποπτων τιμών πραγματοποιήθηκε έλεγχος σάρωσης δεδομένων (Data Snooping, η διαδικασία του ελέγχου αυτού αναλύεται στο κεφάλαιο 4). Το επίπεδο σημαντικότητας για τον έλεγχο σάρωσης δεδομένων ορίστηκε $\alpha=0.001$, βάση του παραπάνω επιπέδου σημαντικότητας ο έλεγχος δεν πρέπει να ξεπερνάει την τιμή **3,552**.

ΣΗΜΕΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	ΕΛΕΓΧΟΣ	ΘΕΣΗ ΤΩΝ ΥΠΟΠΤΩΝ ΤΙΜΩΝ
ΙΩΑΝΝΙΝΑ	0.0854	-
ΗΓΟΥΜΕΝΙΤΣΑ	0.2171	-
ΜΕΤΣΟΒΟ	0.0184	-
ΓΡΕΒΕΝΑ-ΕΝΤΟΣ	0.0516	-
ΘΑΣΟΣ	0.1223	-
ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥΠΟΛΗ	0.0373	-
ΜΙΚΡΟ ΔΕΡΕΙΟ	0.0673	-
ΟΡΕΣΤΙΑΔΑ	0.1327	-
ΚΟΖΑΝΗ	0.1097	-
ΡΙΖΑΡΙ	0.1640	-
ΒΕΡΟΙΑ	0.1574	-
ΚΙΑΚΙΣ	0.2073	-
ΣΤΑΥΡΟΣ	0.1826	-
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	0.1780	-
ΝΙΚΗΤΗ	0.1417	-
ΠΟΛΥΓΥΡΟΣ	0.1593	-
ΚΑΤΕΡΙΝΗ	0.1436	-
ΛΑΡΙΣΑ	0.0539	-
ΦΑΡΣΑΛΑ	4.5575	19
ΝΕΑ ΑΓΧΙΑΛΟΣ	0.0031	-
ΚΟΡΙΝΘΟΣ	0.3780	-
ΠΕΙΡΑΙΑΣ	0.3872	-
ΙΤΕΑ	3.8969	23
ΛΑΜΙΑ	0.1021	-

Πίνακας 3: Data Snooping

Παρακάτω παρατίθενται τα αποτελέσματα του ελέγχου όπου όπως φαίνεται δύο σημεία ελέγχου, τα Φάρσαλα και η Ιτέα, ξεχώρισαν μέσω του ελέγχου σάρωσης δεδομένων. Δύο περιπτώσεις θα μπορούσαν να ισχύουν στην παρούσα φάση είτε οι μετρήσεις του ερευνητικού στα δύο αυτά σημεία δεν είχαν πραγματοποιηθεί σωστά είτε οι τιμές που δόθηκαν από την Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού εμπεριείχαν κάποιο σφάλμα. Η ομάδα του ερευνητικού ζήτησε δεύτερη φορά τα σημεία ελέγχου από τη Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού και παρατηρήθηκε ότι εσφαλμένα η Υπηρεσία είχε

δώσει ανάποδα τις τιμές στα δύο

αυτά σημεία, συνεπώς η τιμή των Φαρσάλων άνηκε στο σημείο ελέγχου Ιτέα και αντίστροφα.

5.3.2 Δεύτερη Συνόρθωση

Στην συνέχεια έχοντας διορθώσει τις μετρήσεις στα δύο σημεία ελέγχου, πραγματοποιήθηκε εκ νέου η συνόρθωση των εικοσιτεσσάρων σημείων για όλα τα παραμετρικά μοντέλα. Στη δεύτερη διαδικασία της συνόρθωσης εν αντιθέσει με την πρώτη πραγματοποιήθηκε τόσο με τη χρήση ενός μοναδιαίου πίνακα βαρών, όσο και με τη χρήση ενός πίνακα βαρών με τα σφάλματα των μετρήσεων (πολύ σημαντικό είναι

το γεγονός ότι για τις βαρυτημετρικές τιμές της Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού δεν υπήρχαν δεδομένα σφάλματος, με αποτέλεσμα ο πίνακας βαρών να εμπεριέχει μόνο τα σφάλματα των μετρήσεων που πραγματοποιήθηκαν από την ομάδα του ερευνητικού).

5.3.3 Ανάλυση Αποτελεσμάτων της Συνόρθωσης

Από την διαδικασία της δεύτερης συνόρθωσης πήραμε τα αποτελέσματα που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Όπως γνωρίζουμε όσο πιο κοντά στο 0 η τυπική

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ		
ΜΟΝΤΕΛΑ	ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ	
	P=1	P=1/σ ²
A	0.0734	2.9387
B	0.0736	2.7964
C	0.0601	2.660
D	0.0597	2.5261
D2	0.0460	1.6325
D3	0.0519	1.0159
E	0.0965	3.7330

απόκλιση τόσο μικρότερες αποκλίσεις έχει το μοντέλο. Θα περιμέναμε λοιπόν οι τυπικές αποκλίσεις με τη χρήση του πίνακα βαρών να έχει καλύτερα αποτελέσματα από ότι εκείνη που χρησιμοποιεί ως πίνακα βαρών έναν

Πίνακας 4: Τυπικές αποκλίσεις 2ης Συνόρθωσης

μοναδιαίο. Ένας σημαντικός λόγος που θα μπορούσε να προκαλέσει μια τόσο αισθητή διαφορά των τυπικών αποκλίσεων είναι το γεγονός ότι για τις μετρήσεις της Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού δεν μας δόθηκαν οι ακρίβειες ή τα σφάλματα και συνεπώς δεν γνωρίζουμε πώς θα διαμορφωνόταν ο πίνακας βαρών σε αυτή τη περίπτωση. Ο πίνακας βαρών θα μας απασχολήσει και σε επόμενο στάδιο.

Αξίζει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο τα αποτελέσματα των μοντέλων και η αξιοπιστία τους. Καθώς αναφερόμαστε σε διαφορετικού τύπου μοντέλα διακρίνουμε αρκετές διαφοροποιήσεις στις τυπικές αποκλίσεις. Τα μοντέλα A & B είναι αρκετά απλά μοντέλα και συνεπώς όπως φαίνεται και από τις τυπικές τους αποκλίσεις σε σχέση με τα υπόλοιπα είναι λιγότερο αξιόπιστα και δεν έχουμε μεταξύ τους αισθητές διαφορές. Η επόμενη ομάδα μοντέλων που μπορούμε να συγκρίνουμε είναι εκείνη των μοντέλων C & E τα οποία μοιράζονται ίδια στοιχεία και διαφέρουν μόνο κατά μία μεταβλητή. Κρίνοντας από τα αποτελέσματα της τυπικής απόκλισης των μοντέλων

μπορούμε αν και σε πολύ πρώιμο στάδιο να υποθέσουμε ότι αυτή η επιπλέον μεταβλητή του μοντέλου C είναι μεγάλης σημασίας.

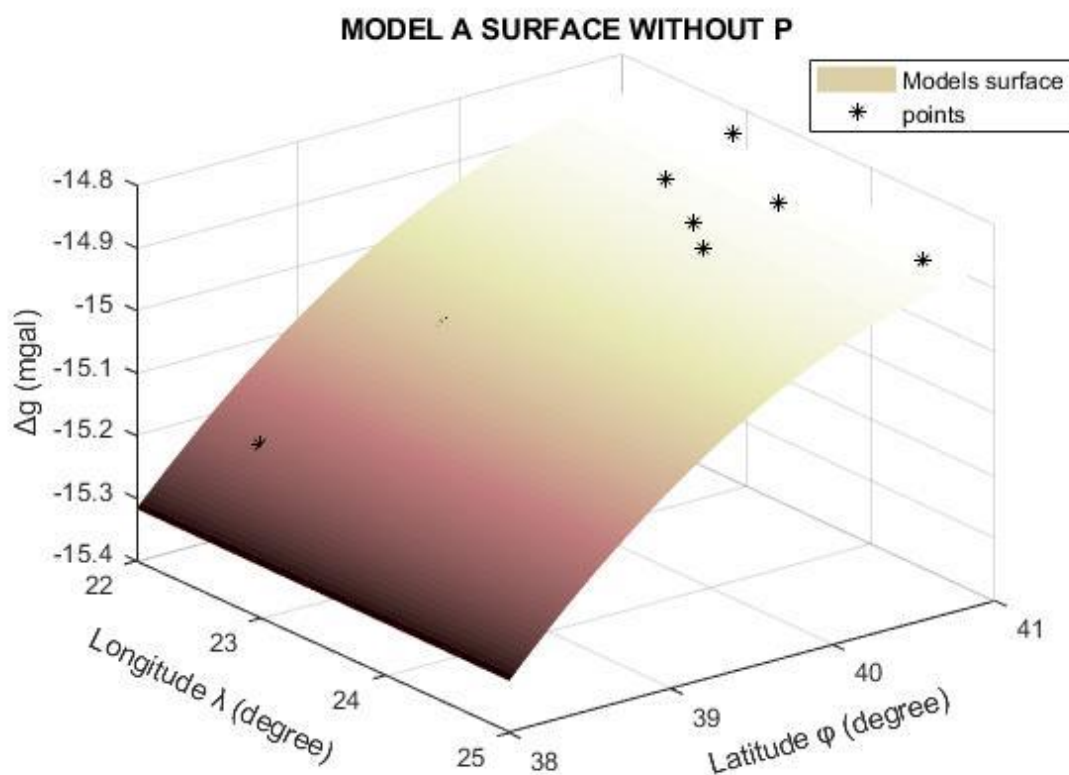
Τέλος η τρίτη και πιο μεγάλη κατηγορία μοντέλων είναι η κατηγορία των μοντέλων D (D1, D2 & D3) όπου πρόκειται για μοντέλα με διαφορετικό βαθμό δύναμης. Πριν αναλύσουμε τα αποτελέσματα βάσει των τυπικών αποκλίσεων θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι το μοντέλο με τον μεγαλύτερο βαθμό δύναμής και συνεπώς το πλέον αναλυτικότερο και πολυπλοκότερο θα είναι και πιο αντιπροσωπευτικό για την περιοχή μελέτης. Παρατηρούμε όμως με έκπληξη ότι το μοντέλο με τη μικρότερη τυπική απόκλιση είναι το μοντέλο D2 και όχι το μοντέλο D3. Μία πρώτη υπόθεση που θα μπορούσαμε να κάνουμε για αυτή την μη αναμενόμενη έκβαση των αποτελεσμάτων της συνόρθωσης είναι ότι λόγω του μεγάλου πλήθους των αγνώστων παραμετρικών συντελεστών του μοντέλου D3 (17 παραμετρικοί συντελεστές) οι βαθμοί ελευθερίας με τους οποίους επιλύθηκε η συνόρθωση δεν ήταν αρκετοί ώστε να υπολογιστούν οι παραμετρικοί συντελεστές με ακρίβεια. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι οι τυπικές αποκλίσεις με τη χρήση των σφαλμάτων των παρατηρήσεων (πάρα το γεγονός ότι δεν είναι ολοκληρωμένες και λείπουν τα αντίστοιχα σφάλματα των μετρήσεων της ΓΥΣ) ανατρέπουν τα αποτελέσματα που θέλουν το μοντέλο D2 πιο αξιόπιστο από το μοντέλο D3. Ο λόγος που το μοντέλο D3 έχει καλύτερη απόδοση με την χρήση του πίνακα βαρών δεν είναι άλλος από την πολυπλοκότητα του.

Στο παρόν στάδιο της εργασίας δεν μπορούμε με σιγουριά να έχουμε μια άποψη για το καλύτερο και πιο αξιόπιστο μοντέλο διότι είναι αρκετοί οι παράγοντες που επηρεάζουν το αποτέλεσμα.

5.4 Δημιουργία Μαθηματικών Επιφανειών

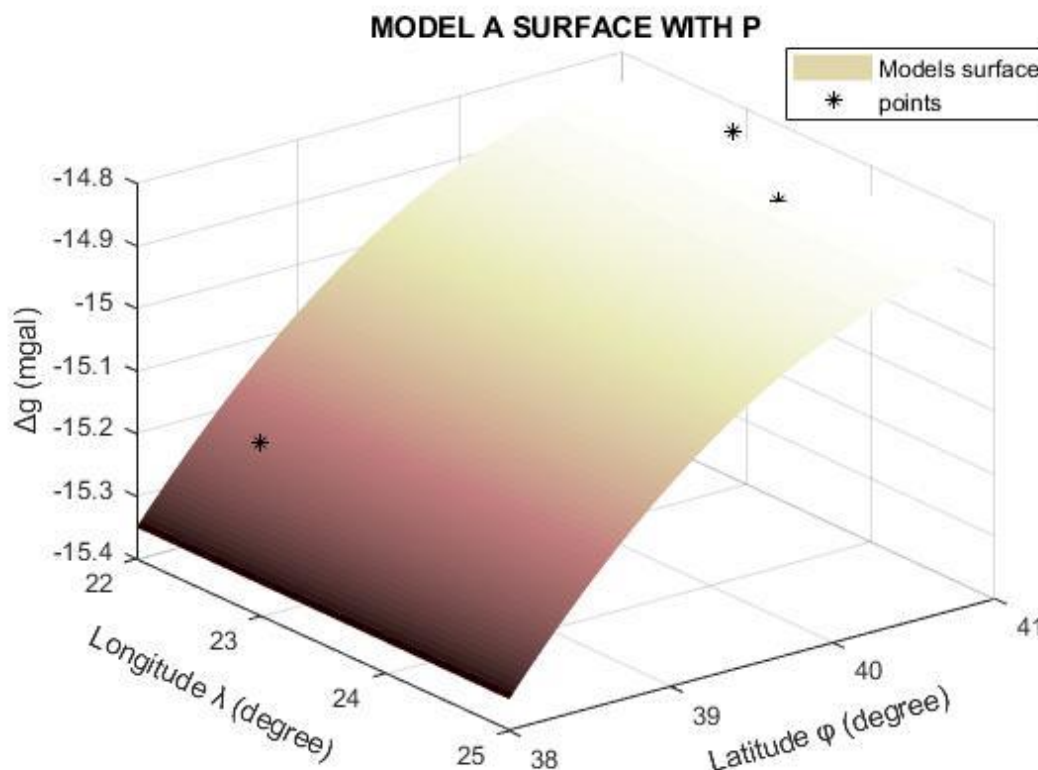
Σε επόμενο βήμα της παρούσας εργασίας δημιουργήθηκαν μαθηματικές επιφάνειες των παραμετρικών μοντέλων, με και χωρίς την χρήση του πίνακα βαρών. Η σύγκριση των επιφανειών όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο στάδιο θα πραγματοποιηθεί μεταξύ ομάδων μοντέλων. Λόγω της διαφορετικότητας τους αυτής είναι αναμενόμενο το μοντέλα πέραν των διαφορετικών τυπικών αποκλίσεων να έχουν και αρκετές οπτικές διαφοροποιήσεις όπως θα διαπιστώσουμε και με τις μαθηματικές επιφάνειες που δημιουργήθηκαν.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί σε αυτό το σημείο ότι για την δημιουργία των επιφανειών χρησιμοποιήθηκε το προγραμματιστικό περιβάλλον MatLab. Παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα των επιφανειών των πετά παραμετρικών μοντέλων.



Εικόνα 6: Μαθηματική Επιφάνεια Μοντέλου A χωρίς χρήση Βαρών

Παρατηρούμε στην παραπάνω επιφάνεια ότι το μοντέλο A έχει δημιουργήσει μια επιφάνεια χωρίς αιχμές και με εξαιρετικά απλοποιημένη πληροφορία για τα σημεία του κανάβου. Επίσης η επιφάνεια δεν ικανοποιεί όλα τα σημεία της συνόρθωσης καθώς αρκετά βρίσκονται πάνω ή κάτω από την επιφάνεια γεγονός που σημαίνει ότι η επιφάνεια παρεκκλίνει και από τα ήδη γνωστά σημεία, κάτι αναμενόμενο, αφού πρόκειται για μία διαδικασία βέλτιστης προσαρμογής ελαχίστων τετραγώνων.

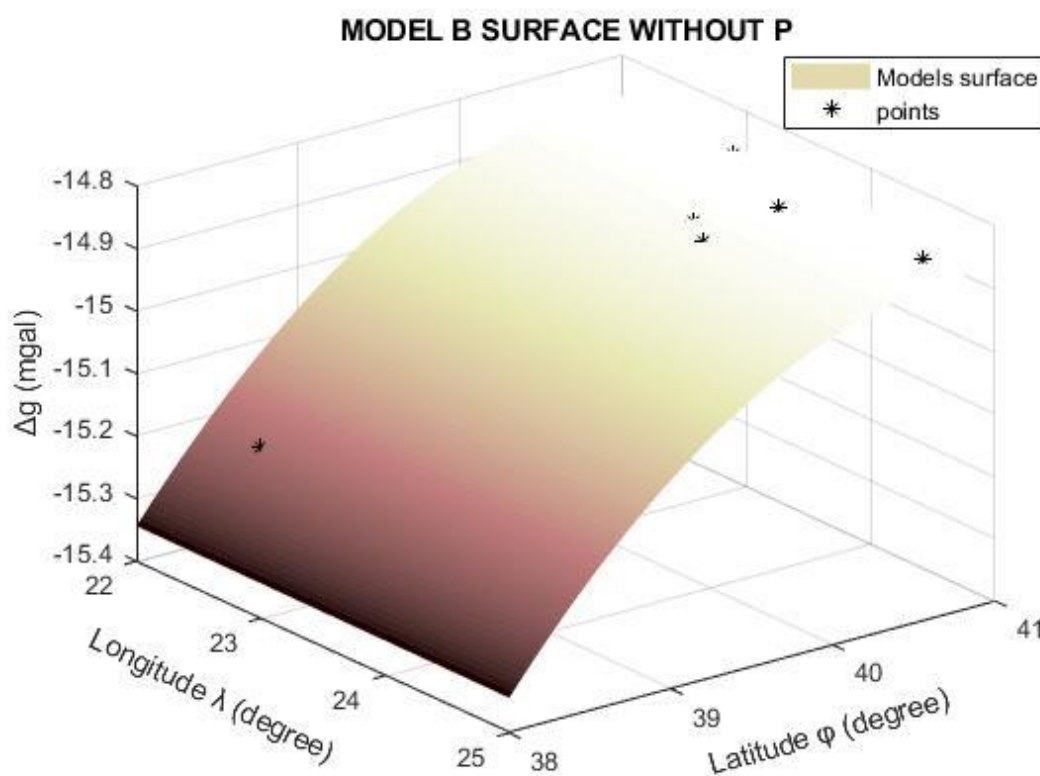


Εικόνα 7: Μαθηματική Επιφάνεια Μοντέλου A με χρήση Βαρών

Στην Εικόνα 7 παρουσιάζεται η εκτιμήσιμη επιφάνεια διόρθωσης που προέκυψε με τη χρήση του πίνακα με βάρη που υπολογίζονται από τις τυπικές αποκλίσεις των μετρούμενων τιμών της βαρύτητας. Η συγκεκριμένη επιφάνεια όπως και όλες οι επιφάνειες των μοντέλων που δημιουργήθηκαν με τα αποτελέσματα της συνόρθωσης που χρησιμοποιήσαμε τον πίνακα βαρών παρεκκλίνει από τα μετρημένα σημεία, αφού πρόκειται για βέλτιστη προσαρμογή. Παρά το γεγονός ότι πλέον η επιφάνεια βρίσκεται σε διαφορετική κλίση το οποίο γίνεται εύκολα αντιληπτό από τον αριθμό των σημείων παρατήρησης που είναι πάνω από την μαθηματική επιφάνεια,

παρατηρούμε ότι με γυμνό μάτι και χωρίς τα σημεία ελέγχου της εικόνας δεν θα ήταν εμφανής η απόκλιση από το μοντέλων με τον μοναδιαίο πίνακα βαρών.

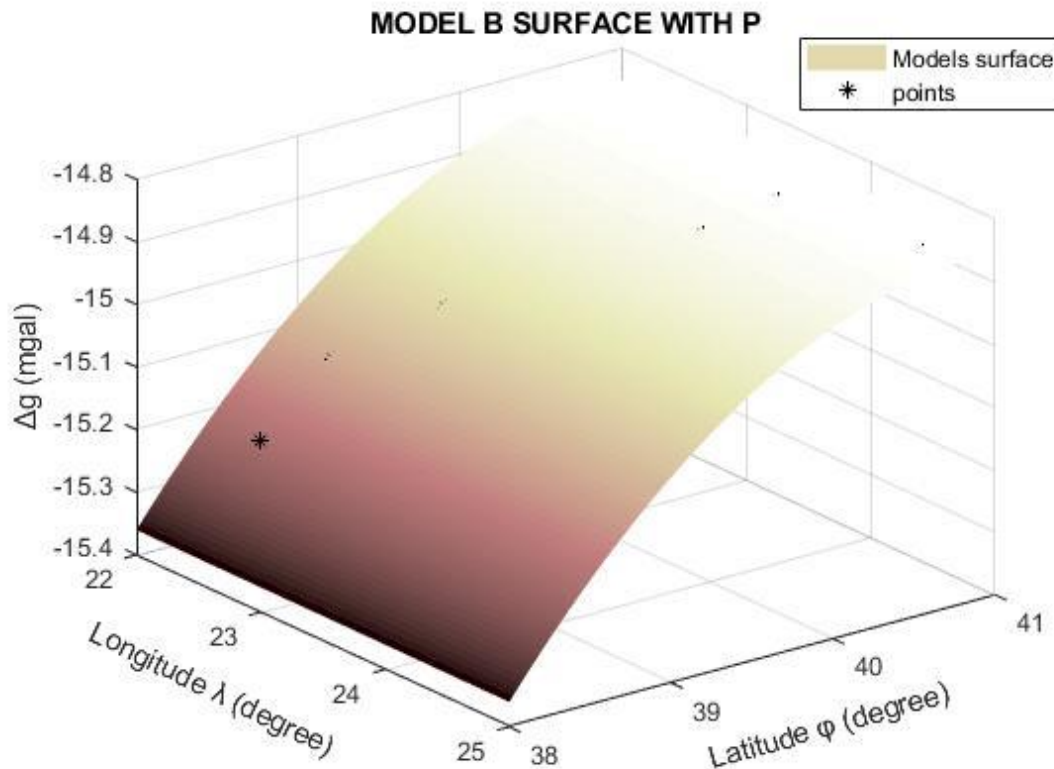
Παρακάτω θα δούμε τα αποτελέσματα των μαθηματικών επιφανειών του μοντέλου B το οποίο και περιμένουμε να είναι ελάχιστα πιο αξιόπιστο από το μοντέλο A δεδομένου ότι συμπεριλαμβάνει μια επιπλέον μεταβλητή. Η αξιοπιστία, βέβαια, των μοντέλων, καθώς και η στατιστική σημαντικότητα των συντελεστών που εκτιμήθηκαν θα ελεγχθούν περαιτέρω σε επόμενο στάδιο.



Εικόνα 8: Μαθηματική Επιφάνεια Μοντέλου B χωρίς χρήση Βαρων

Παρατηρώντας τις μαθηματικές επιφάνειες των μοντέλων A & B μπορούμε με ευκολία να διακρίνουμε μια σημαντική διαφορά, η διαφορά αυτή είναι ότι η δημιουργηθείσα επιφάνεια του μοντέλου B περνάει πάνω από περισσότερα σημεία σε σχέση με την μαθηματική επιφάνεια του μοντέλου A. Είναι εξαιρετικά σημαντικό βέβαια σε αυτό το σημείο να τονίσουμε ότι και το μοντέλο B όπως και το A αποτελούν εξαιρετικά απλοποιημένα μοντέλα, τα οποία περιγράφουν μόνο διαφορά συστημάτων (datum shift) και δε λαμβάνουν υπόψη διαφορές κλίμακας στις μετρούμενες τιμές

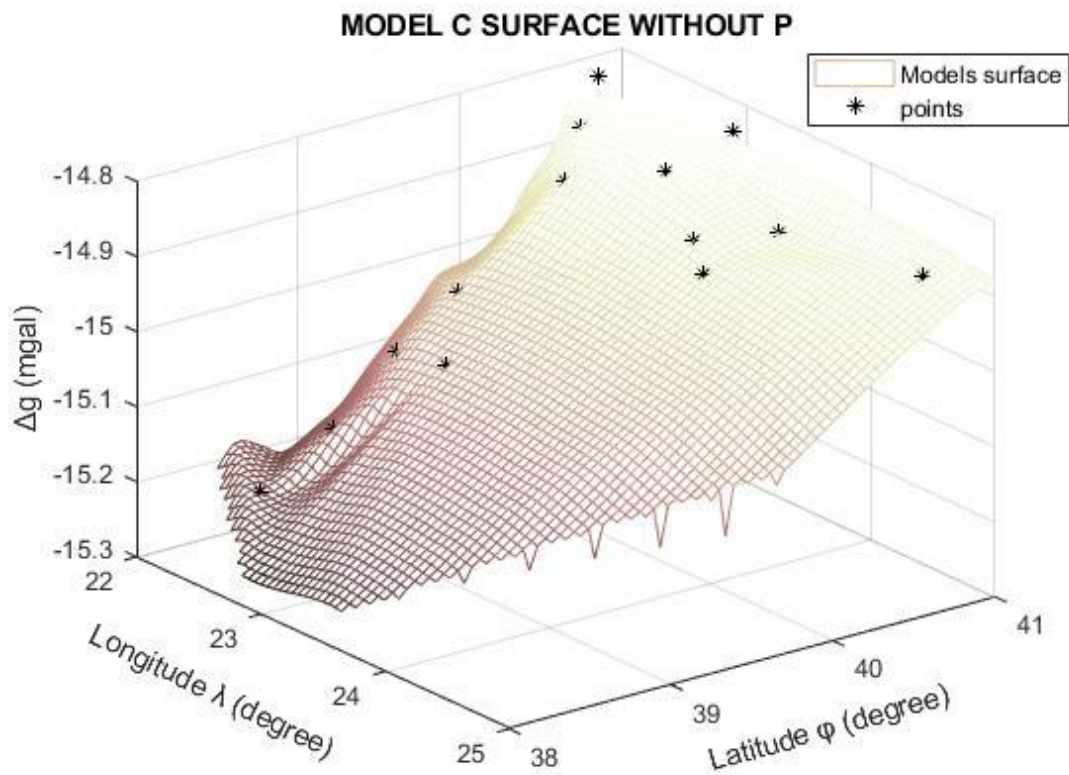
(Fotopoulos, 2003). Αυτό θα γίνει αντιληπτό σε επόμενο στάδιο με τις υπόλοιπες μαθηματικές επιφάνειες των υβριδικών μοντέλων (μοντέλα που χρησιμοποιούν τόσο μετρήσεις βαρύτητας όσο και γεωδαιτικές συντεταγμένες).



Εικόνα 9: Μαθηματική Επιφάνεια Μοντέλου B με χρήση Βαρών.

Στην Εικόνα 9 παρουσιάζεται η επιφάνεια του μοντέλου B με τη χρήση πίνακα βάρους διαφορετικό από το μοναδιαίο. Και πάλι όπως και στην προηγούμενη επιφάνεια με χρήση πίνακα βαρών παρατηρούμε ότι η επιφάνεια έχει μια ελαφρώς διαφοροποιημένη κλίση το οποίο και πάλι γίνεται αντιληπτό από τον τρόπο με τον οποίο απεικονίζονται τα σημεία της συνόρθωσης.

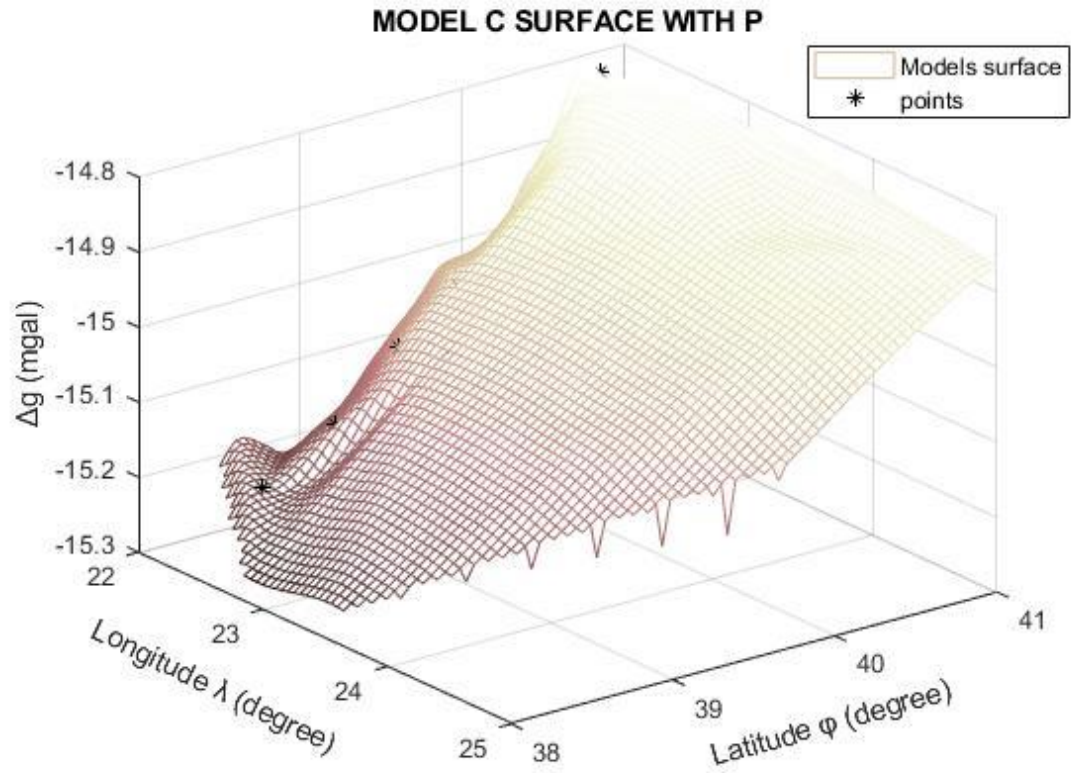
Το επόμενο ζευγάρι μοντέλων που θα συγκρίνουμε είναι τα μοντέλα C & E, τα οποία διαφέρουν κατά έναν και μοναδικό παραμετρικό συντελεστή. Λόγω της χρήσης των μετρήσεων βαρύτητας εντός του παραμετρικού μοντέλου αναμένουμε η μαθηματική επιφάνεια να είναι πιο ανώμαλη σε σχέση με τις μαθηματικές επιφάνειες των μοντέλων A & B.



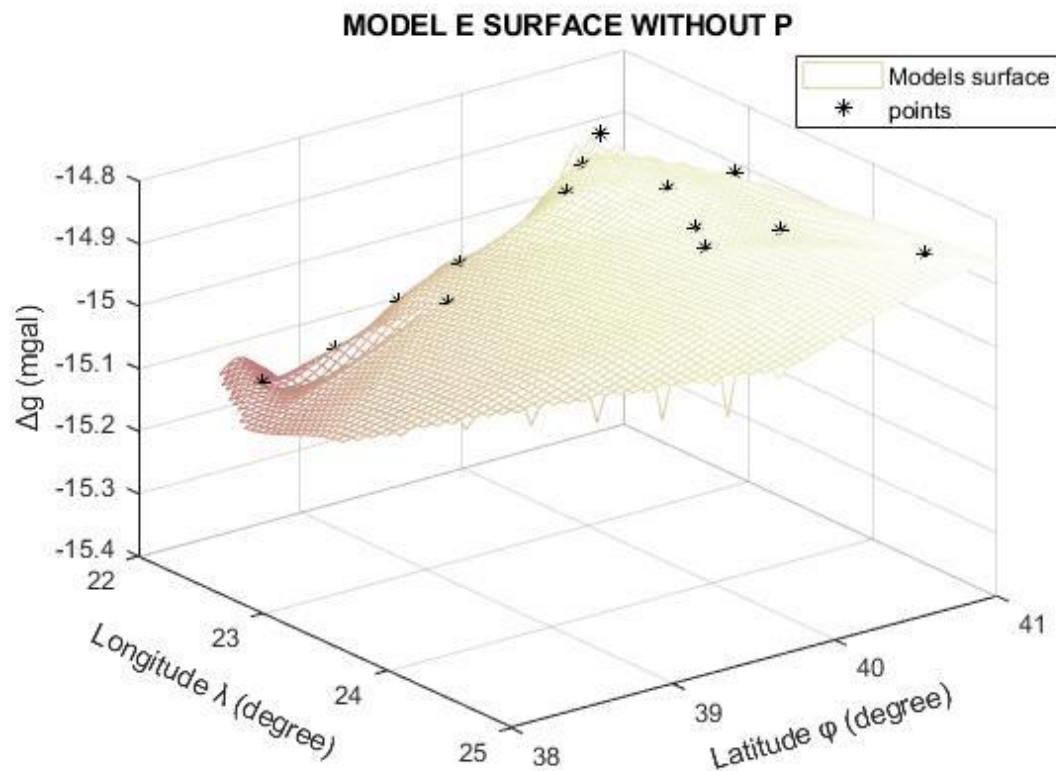
Εικόνα 10: Μαθηματική Επιφάνεια Μοντέλου C χωρίς χρήση Βαρών.

Όντως οι προσδοκίες μας για μια πιο ανώμαλη επιφάνεια επαληθεύτηκαν και παρατηρούμε ότι η εν λόγω μαθηματική επιφάνεια, προσαρμόζεται καλύτερα στα περισσότερα σημεία διαφορών παρατήρησης. Είναι σημαντικό βέβαια να τονίσουμε το γεγονός ότι πρόκειται για ένα αρκετά απλό μοντέλο που βασίζεται κυρίως στις μετρήσεις βαρύτητας. Κάνοντας μια ανασκόπηση της τυπικής απόκλισης του μοντέλου μπορούμε εύκολα να αντιληφθούμε ότι πρόκειται για ένα μοντέλο που συναγωνίζεται σε ακρίβεια τα μοντέλα της ομάδας D. Το εν λόγω μοντέλο αποτελεί ένα διευρυμένο μοντέλο εκείνου του Torge (Μοντέλο E).

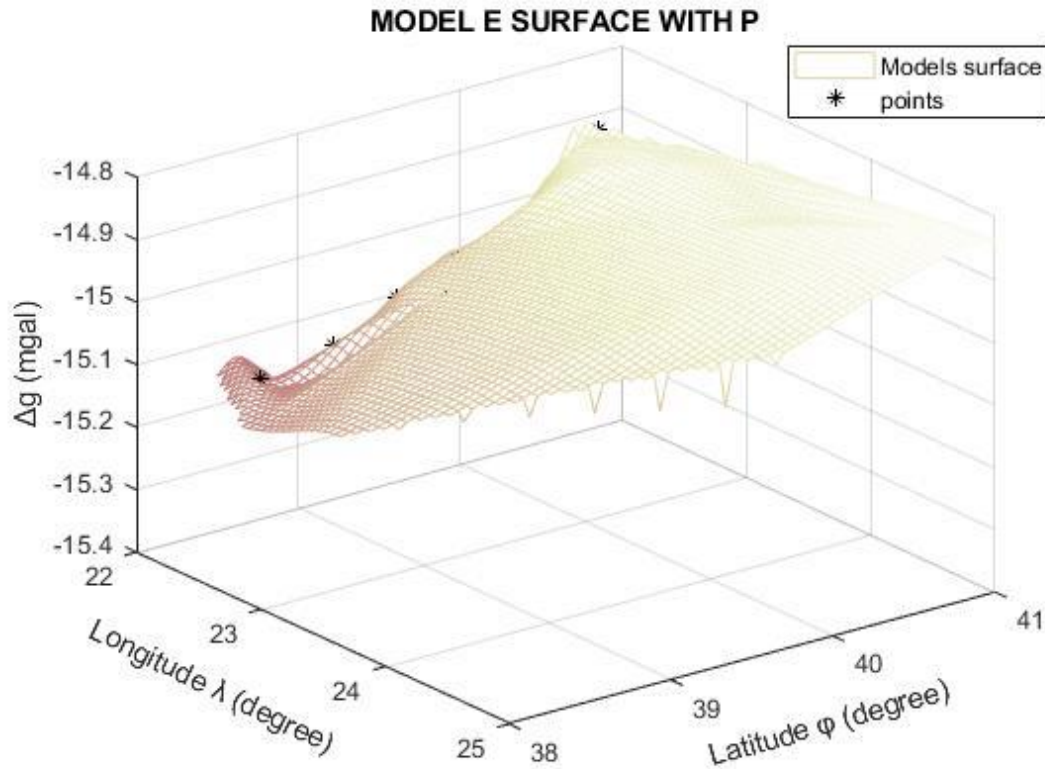
Στην Εικόνα 11 δίνεται και η μαθηματική επιφάνεια που δημιουργήθηκε με τη χρήση του πίνακα βαρών, η οποία αναμένουμε όπως και στα προηγούμενα μοντέλα να έχει διαφορές σε σχέση με την μαθηματική επιφάνεια που χρησιμοποιεί μοναδιαίο πίνακα βαρών.



Εικόνα 11: Μαθηματική Επιφάνεια Μοντέλου C με χρήση Βαρών.



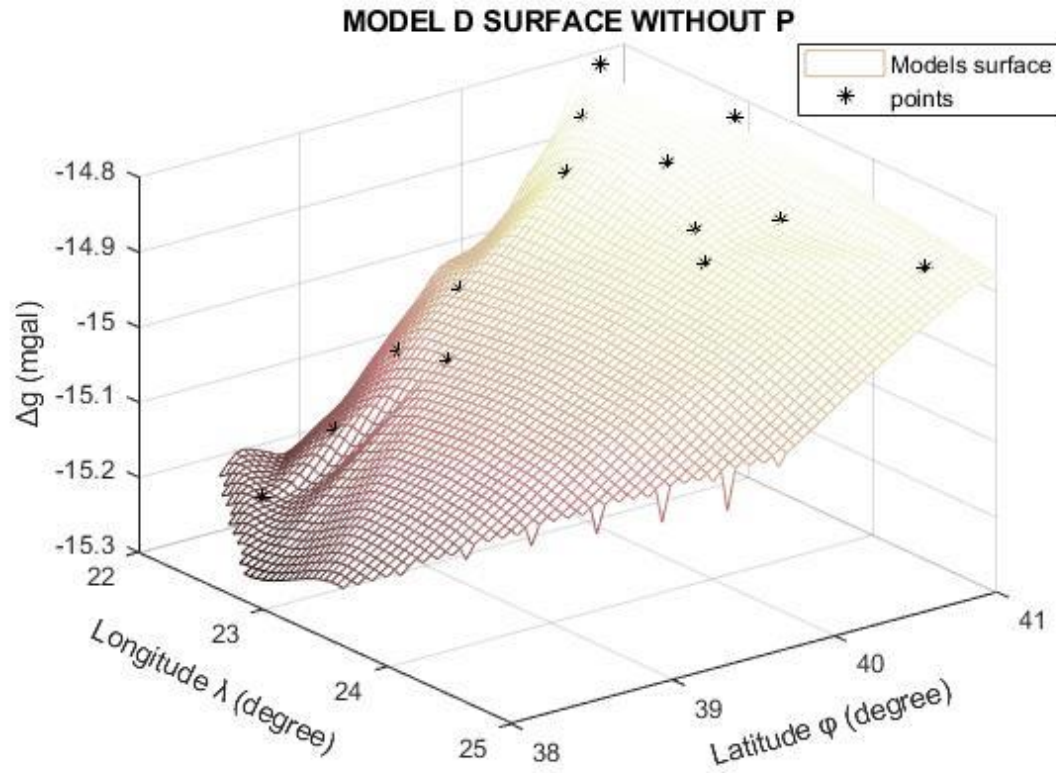
Εικόνα 12: Μαθηματική Επιφάνεια Μοντέλου E χωρίς χρήση Βαρών.



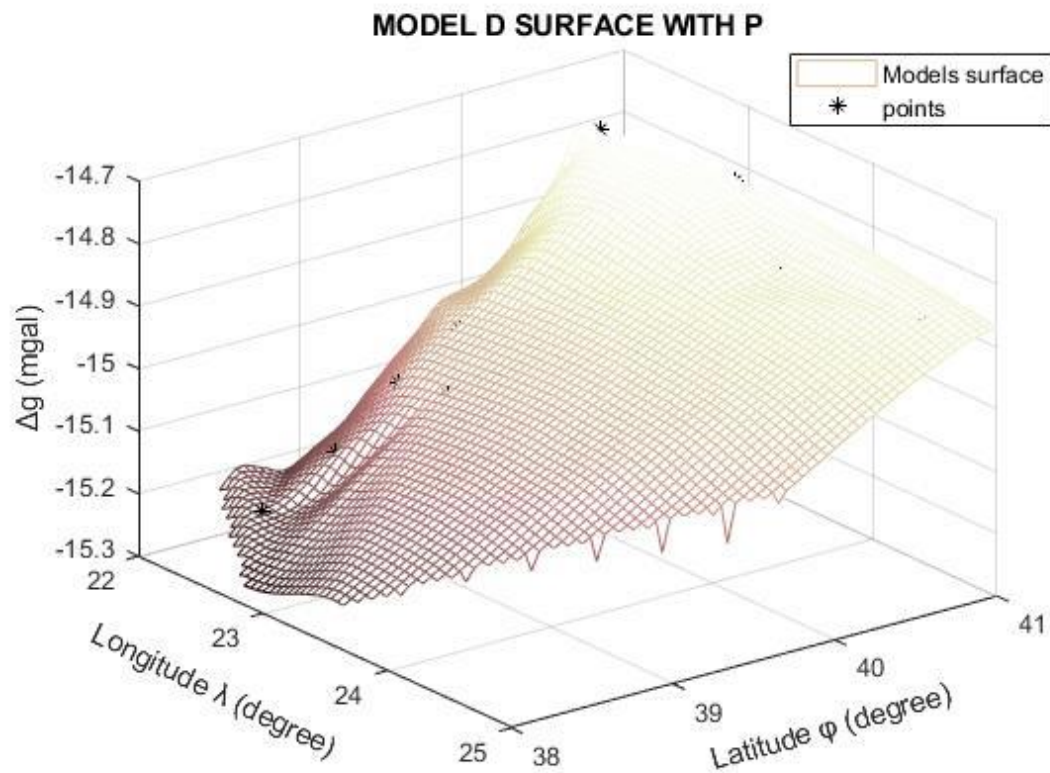
Εικόνα 13: Μαθηματική Επιφάνεια Μοντέλου E με χρήση Βαρών.

Η επιφάνεια του μοντέλου E δεν διαφέρει σχηματικά από την επιφάνεια C αλλά διαφέρει στην κλίση και στην τοποθέτηση της επιφάνειας εντός του Κανάβου, αυτό έγκειται στο γεγονός ότι το μοντέλο του Torge (Μοντέλο E) δεν χρησιμοποιεί πληροφορία από τις γεωδαιτικές συντεταγμένες σε αντίθεση με το μοντέλο C. Οι διαφορές της επιφάνειας με χρήση του πίνακα βαρών είναι αντίστοιχες με εκείνες των προηγούμενων μοντέλων και δεν υπάρχει κάποια αξιοσημείωτη διαφοροποίηση για να σχολιαστεί.

Η τελευταία ομάδα μοντέλων που θα αναλύσουμε είναι η ομάδα των μοντέλων D. Αναμένουμε οι επιφάνειες των μοντέλων D2 & D3 να είναι πιο λεπτομερείς, λόγω του μεγαλύτερου πλήθους των άγνωστων συντελεστών που εκτιμώνται.

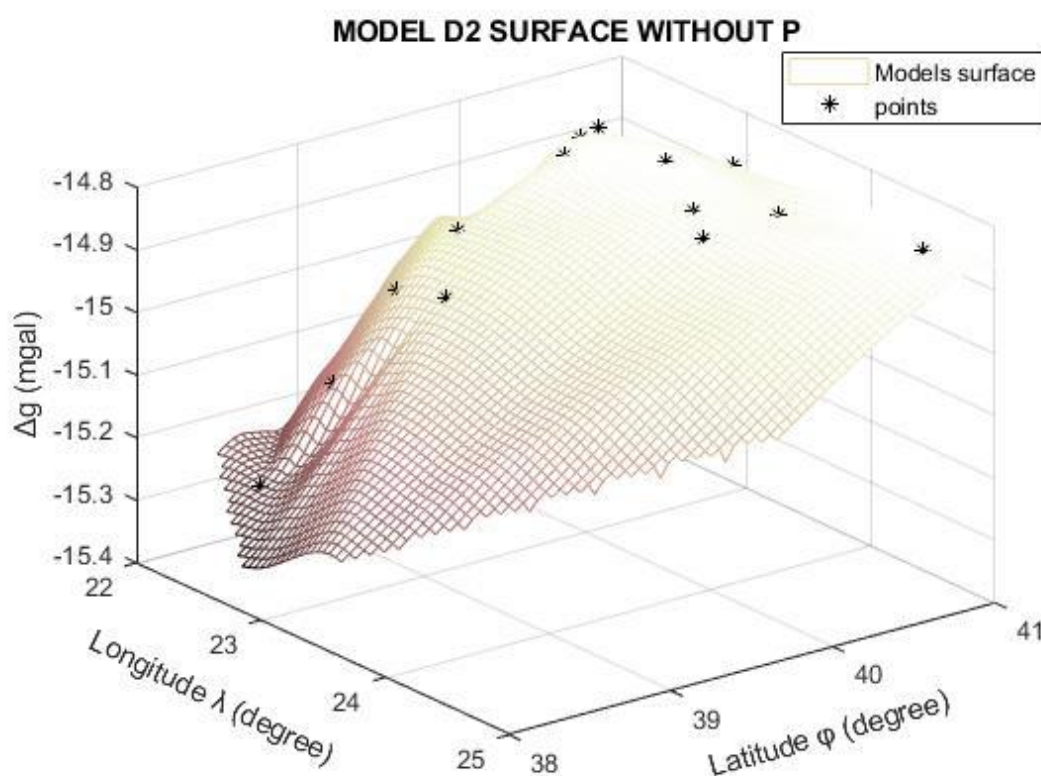


Εικόνα 14: Μαθηματική Επιφάνεια Μοντέλου D χωρίς χρήση Βαρών.



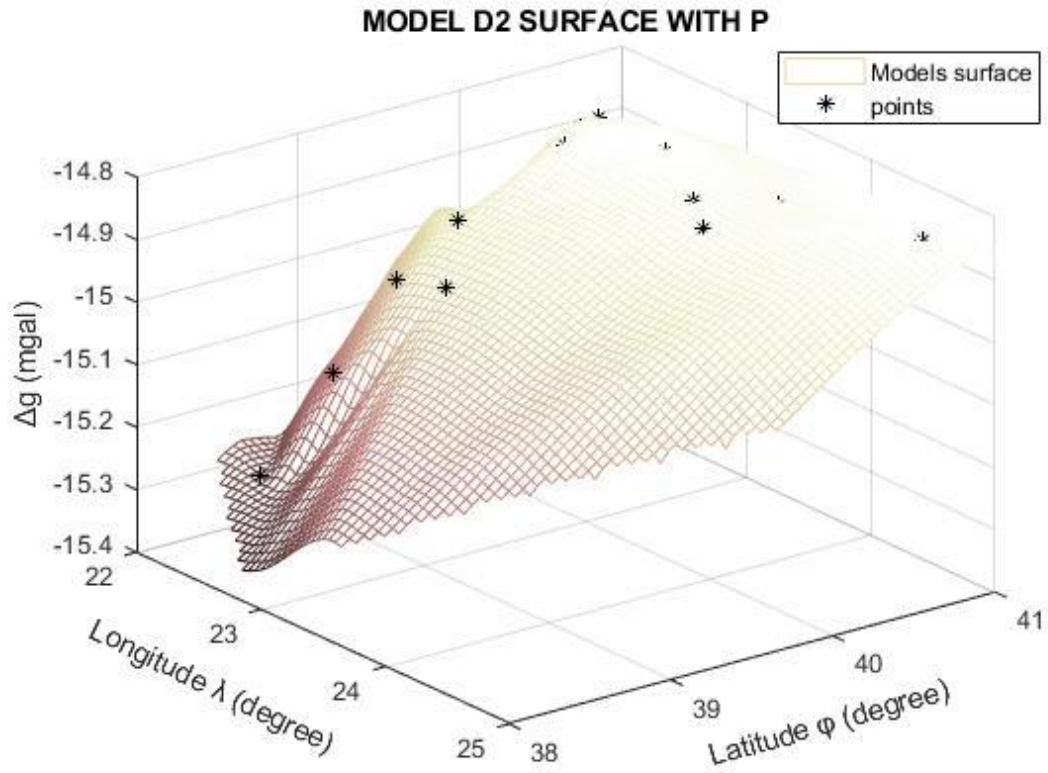
Εικόνα 15: Μαθηματική Επιφάνεια Μοντέλου D με χρήση Βαρών.

Οι επιφάνειες του μοντέλου D σχηματικά μοιάζουν αισθητά με τις επιφάνειες των μοντέλων C & E και αυτό είναι λογικό διότι σε αντίθεση με τα μοντέλα A & B χρησιμοποιούν ως πληροφορία και τις μετρήσεις βαρύτητας των σημείων. Μία σημαντική διαφοροποίηση με τα προηγούμενα μοντέλα είναι ότι η συγκεκριμένη επιφάνεια φαίνεται να προσεγγίζει λίγο περισσότερο τα πιο απομακρυσμένα σημεία, επίσης από την τυπική απόκλιση σε προηγούμενο στάδιο είμαστε σε θέση να ισχυριστούμε ότι όντως πρόκειται για μια επιφάνεια που προσαρμόζεται ελαφρώς καλύτερα στις παρατηρούμενες διαφορές σε σχέση με τις προηγούμενες.

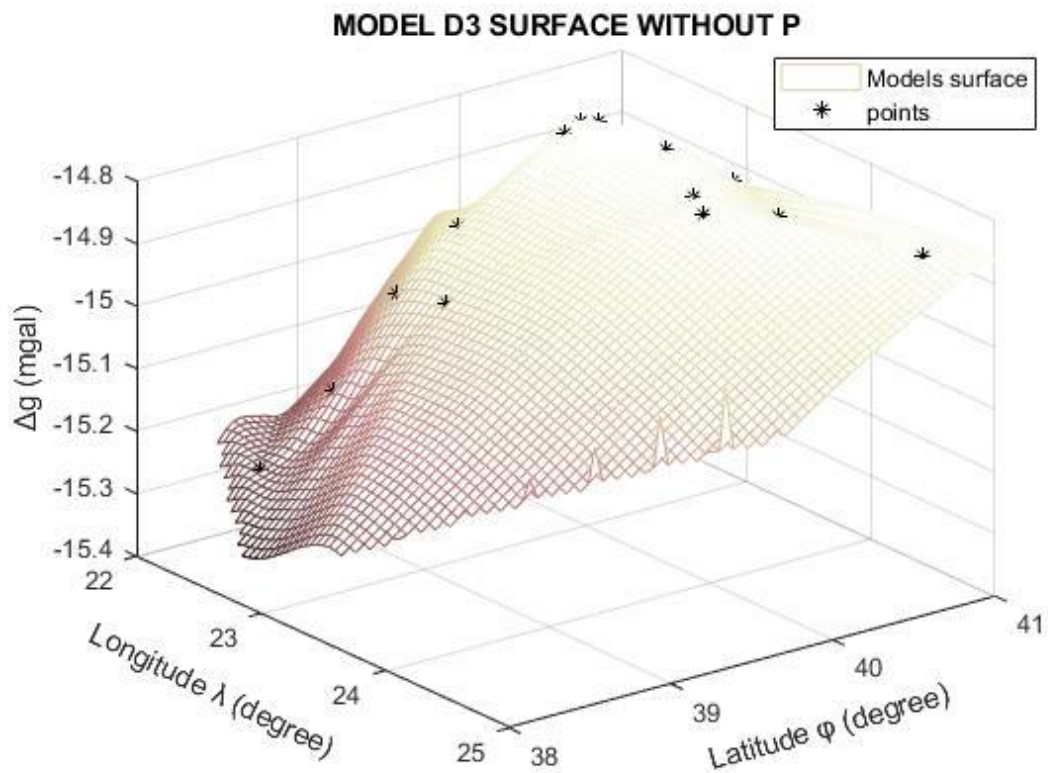


Εικόνα 16: Μαθηματική Επιφάνεια Μοντέλου D2 χωρίς χρήση Βαρών.

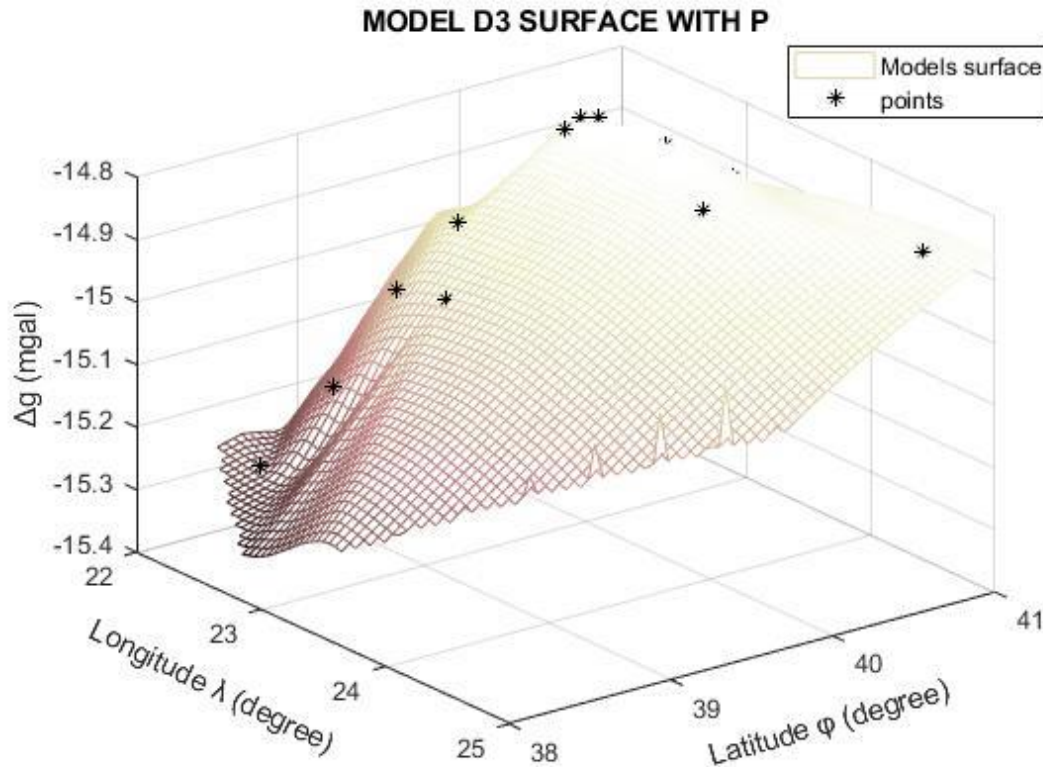
Στην Εικόνα 16, στο μοντέλο D2 διακρίνεται από μια ελαφρώς διαφοροποιημένη επιφάνεια και προσεγγίζει καλύτερα τα σημεία διαφορών παρατήρησης.



Εικόνα 17: Μαθηματική Επιφάνεια Μοντέλου D2 με χρήση Βαρών.



Εικόνα 18: Μαθηματική Επιφάνεια Μοντέλου D3 χωρίς χρήση Βαρών.



Εικόνα 19: Μαθηματική Επιφάνεια Μοντέλου D3 με χρήση Βαρών.

Τέλος βλέπουμε ότι η επιφάνεια του μοντέλου D3 προσεγγίζει βέλτιστα τα περισσότερα σημεία παρατήρησης. Συνεπώς φαίνεται να είναι το βέλτιστο προσαρμοζόμενο μοντέλο κρίνοντας και μόνο από τη μαθηματική επιφάνεια καθώς παρατηρούμε ότι προσεγγίζει τα σημεία παρατήρησης καλύτερα από ό,τι το μοντέλο D2. Είναι λοιπόν σημαντικό σε αυτό το σημείο να θυμηθούμε ότι βάσει τυπικής απόκλισης το μοντέλο D2 φαινόταν να είναι ακριβέστερο από το D3 αλλά η μαθηματική αναπαράσταση των μοντέλων δείχνει μια ενδεχομένως εσφαλμένη στατιστική σύγκριση, λόγω του μεγάλου αριθμού των αγνώστων στο μοντέλο D3 και των χαμηλών βαθμών ελευθερίας του προβλήματος συνόρθωσης ($f = 7$)

Σε επόμενο στάδιο θα γίνει έλεγχος και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων όλων των συνορθώσεων, οι οποίοι έλεγχοι αναμένουμε να μας αποδώσουν ένα πιο σαφές πόρισμα αναφορικά με την καταλληλότητα των μοντέλων. Θα εξεταστεί στατιστικά η σημαντικότητα κάθε συντελεστή των μοντέλων και θα αξιολογηθούν συνολικά οι επιφάνειες διόρθωσης που προέκυψαν.

5.5 Διαδικασία Συνόρθωσης Μικτών Εξισώσεων Συνθηκών

Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε η διαδικασία συνόρθωσης με τη μέθοδο των μικτών εξισώσεων για τα μοντέλα. Η διαδικασία αυτή είχε ως αποτέλεσμα μία διόρθωση για τις τιμές των αγνώστων παραμέτρων όπως αυτές βρέθηκαν είτε με τη διαδικασία της απλής συνόρθωσης παρατηρήσεων είτε με απλή επίλυση ενός ομογενούς συστήματος, για τον υπολογισμό των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων, οι οποίες στην περίπτωση αυτή είναι απαραίτητες για την ανάπτυξη του αλγορίθμου της συνόρθωσης. Τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα κάθε μοντέλου καθώς και η δημιουργία του πίνακα Β αναλύεται παρακάτω.

5.5.1 Μοντέλο Α

Το πρώτο μοντέλο στο οποίο πραγματοποιήθηκε η διαδικασία των μικτών εξισώσεων είναι το μοντέλο Α. Σκοπός στην παρούσα φάση είναι να συγκρίνουμε τα

MODEL A – ΑΠΛΗ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΣ	
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-189,9036
2	118,7339
3	51,9202
4	117,7749

Πίνακας 5: Αποτελέσματα Αγνώστων Απλής
Συνόρθωσης Παρατηρήσεων

αποτελέσματα της συνόρθωσης με τη μέθοδο των εξισώσεων παρατηρήσεων με τα αντίστοιχα της μεθόδου των μικτών εξισώσεων. Για λόγους ερευνητικού ενδιαφέροντος, η διαδικασία των μικτών εξισώσεων πραγματοποιήθηκε με προσεγγιστικές τιμές τις τιμές που δόθηκαν ως αποτέλεσμα από τη διαδικασία απλής

MODEL A – 1^Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-189,9036	-15,8000	-205,7037
2	118,7339	11,4224	130,1564
3	51,9202	5,5744	57,4947
4	117,7749	9,4641	127,2391

Πίνακας 6: Αποτελέσματα 1ης Συνόρθωσης Μικτών Συνθηκών

συνόρθωσης και με τις τιμές κατά προσέγγιση που δόθηκαν από την διαδικασία επίλυσης ενός ομογενούς συστήματος. Στον Πίνακα 5 βλέπουμε τα αποτελέσματα της συνόρθωσης απλών εξισώσεων παρατήρησης. Στον Πίνακα 6 φαίνονται τα αποτελέσματα της συνόρθωσης μικτών εξισώσεων με χρήση προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων τα αποτελέσματα της απλής συνόρθωσης. Στον

Πίνακα 6 φαίνονται τα αποτελέσματα μιας επαναληπτικής συνόρθωσης μικτών

MODEL A – 1^Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-205,7037	-1,3247	-207,0284
2	130,1564	1,0798	131,2062
3	57,4947	0,6025	58,0972
4	127,2391	0,6300	127,8691

Πίνακας 7: Αποτελέσματα 2ης Συνόρθωσης Μικτών Εξισώσεων

συνθηκών με τα αποτελέσματα της πρώτης συνόρθωσης μικτών συνθηκών.

Στην συνέχεια θα δούμε τα αποτελέσματα που δόθηκαν και με προσεγγιστικές τιμές των αγνώστων συντελεστές τα αποτελέσματα της επίλυσης ενός ομογενούς συστήματος. Για την επίλυση του ομογενούς συστήματος χρησιμοποιήθηκαν οι παρατηρήσεις 3, 10, 16 & 21. Στον Πίνακα 8 φαίνονται τα αποτελέσματα του

ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ	
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-38953,8669
2	58185,6264
3	-39333,5956
4	20086,6062

Πίνακας 8: Αποτελέσματα Αγνώστων Ομογενούς Συστήματος

ομογενούς συστήματος για τους αγνώστους. Στην πορεία επαναλήφθηκε η παραπάνω διαδικασία με προσεγγιστικές τιμές των αγνώστων τα αποτελέσματα του ομογενούς συστήματος, τα οποία είναι εμφανές ότι διαφέρουν αισθητά από εκείνα της απλής συνόρθωσης παρατηρήσεων. Παρατηρούμε ότι με την πρώτη επίλυση των μικτών εξισώσεων μετά τις διορθώσεις των

προσεγγιστικών τιμών, οι νέες τιμές των αγνώστων είναι κοντά σε εκείνες που είχαν δοθεί ως αποτέλεσμα από την απλή συνόρθωση, όπως φαίνεται στον Πίνακα 8. Συνεπώς αναμένουμε ότι μετά από δύο με τρεις επαναλήψεις η διαδικασία των μικτών εξισώσεων θα δώσει αποτελέσματα συναφή με εκείνα που δόθηκαν για την απλή συνόρθωση.

MODEL A – 1^H ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-38953,8669	38765,4325	-188,4344
2	58185,6264	-58067,9180	117,7083
3	-39333,5956	39385,05783	51,4622
4	20086,6062	-19969,7795	116,8267

Πίνακας 9: Αποτελέσματα 1ης Συνόρθωσης Μικτών Εξισώσεων (Ομογενούς Συστήματος)

MODEL A – 2^H ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-188,4344	-17,2178	-205,6522
2	117,7083	12,4078	130,1162
3	51,4622	6,0099	57,4720
4	116,8267	10,3868	127,2135

Πίνακας 10: Αποτελέσματα 2ης Συνόρθωσης Μικτών Εξισώσεων (Ομογενούς Συστήματος)

MODEL A – 3^H ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-205,6522	-1,3659	-207,0181
2	130,1162	1,0817	131,1979
3	57,4720	0,6205	58,0925
4	127,2135	0,6509	127,8644

Πίνακας 11: Αποτελέσματα 3ης Συνόρθωσης Μικτών Εξισώσεων (Ομογενούς Συστήματος)

5.5.2 Μοντέλο Β

MODEL B – ΑΠΛΗ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ	
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-214,3985
2	97,3483
3	43,5719
4	269,7822
5	-134,6237

*Πίνακας 12: Αποτελέσματα Αγνώστων
Απλής Συνόρθωσης Συνθηκών
εξισώσεων συνθηκών.*

Το δεύτερο μοντέλο (Μοντέλο Β) αποτελεί διευρυμένο μοντέλο του Α κατά έναν παραμετρικό συντελεστή. Στον Πίνακα 12 φαίνονται οι τιμές των αγνώστων παραμέτρων της συνόρθωσης απλών εξισώσεων παρατήρησης. Στον Πίνακα 14 φαίνονται τα αποτελέσματα των τιμών των αγνώστων παραμέτρων για το μοντέλο μετά από δυο επαναλήψεις της συνόρθωσης μικτών

MODEL B – 1^Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-214,3985	-17,2056	-231,6041
2	97,3483	-7,5164	89,8319
3	43,5719	-3,0558	40,5161
4	269,7822	80,7490	350,5312
5	-134,6237	-68,9210	-203,5447

Πίνακας 13: Αποτελέσματα 1ης Συνόρθωσης Μικτών Εξισώσεων

MODEL B – 2^Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-231,6041	-12,1070	-243,7111
2	89,8319	12,2212	102,0531
3	40,5161	4,8970	45,4130
4	350,5312	-4,9952	345,5360
5	-203,5447	12,6782	-190,86665

Πίνακας 14: Αποτελέσματα 2ης Συνόρθωσης Μικτών Εξισώσεων

Στη συνέχεια πραγματοποιείται η ίδια διαδικασία και για προσεγγιστικές τιμές των αγνώστων παραμέτρων τις τιμές της επίλυσης ενός ομογενούς συστήματος.

ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ	
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	19670,5070
2	-28799,7925
3	19135,2550
4	-10028,4077
5	7,2082

Πίνακας 15: Αποτελέσματα Αγνώστων Ομογενούς Συστήματος

Αναμένουμε, εφόσον οι προσεγγιστικές τιμές από το ομογενές σύστημα δεν είναι της ίδιας ακρίβειας με εκείνες από την επίλυση της συνόρθωσης παρατηρήσεων, οι επανάλψεις της διαδικασίας των μικτών εξισώσεων να είναι περισσότερες.

Στον Πίνακα 15 φαίνονται τα αποτελέσματα της επίλυσης του ομογενούς συστήματος του μοντέλου Β.

MODEL B – 1^Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	19670,5070	-19884,3923	-213,8854
2	-28799,7925	28896,0316	96,2392
3	19135,2550	-19092,1605	43,0945
4	-10028,4077	10300,5023	272,0947
5	7,2082	-144,4330	-137,2248

Πίνακας 16: Αποτελέσματα 1ης Συνόρθωσης Μικτών Εξισώσεων (Ομογενούς Συστήματος)

MODEL B – 2^Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-213,8854	-17,4450	-231,333
2	96,2392	-6,3017	89,9375
3	43,0945	-2,5446	40,5499
4	272,0947	77,22,13	349,3160
5	-137,2248	-65,2969	-202,5217

Πίνακας 17: Αποτελέσματα 2ης Συνόρθωσης Μικτών Εξισώσεων (Ομογενούς Συστήματος)

Στους Πίνακες 16,17 και 18 φαίνονται οι διορθώσεις και τα αποτελέσματα των επαναλήψεων της διαδικασίας των μικτών εξισώσεων. Παρατηρούμε ότι μετά από μία επιπλέον επανάληψη της διαδικασίας τα αποτελέσματα των τιμών των αγνώστων προσεγγίζουν εκείνα του Πίνακα 14, όπου οι αρχικές προσεγγιστικές τιμές ήταν αποτέλεσμα συνόρθωσης παρατηρήσεων.

MODEL B – 3^Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-231,333	-12,2942	-243,6245
2	89,9375	11,8446	101,7821
3	40,5499	4,7502	45,3001
4	349,3160	-3,0964	346,2196
5	-202,5217	10,9266	-191,5952

Πίνακας 18: Αποτελέσματα 3ης Συνόρθωσης Μικτών Εξισώσεων (Ομογενούς Συστήματος)

5.5.3 Μοντέλο C

MODEL C – ΑΠΛΗ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΣ	
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-15,0108
2	0,0009
3	4,4225
4	-3,2254

Πίνακας 19: Αποτελέσματα Αγνώστων Απλής Συνόρθωσης

Το τρίτο μοντέλο είναι το μοντέλο C το οποίο βασίζεται πέραν των γεωδαιτικών συντεταγμένων και στις μετρήσεις βαρύτητας. Στον Πίνακα 19 φαίνονται οι προσεγγιστικές τιμές για την πρώτη επίλυση των μικτών εξισώσεων. Στους Πίνακες 20 και 21 δίνονται τα αποτελέσματα και οι διορθώσεις των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων παραμέτρων για τις δύο πρώτες

επαναλήψεις της διαδικασίας.

MODEL C – 1^Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-15,0108	0,0006	-15,0107
2	0,0009	-0,00003	0,0009
3	4,4225	0,0134	4,4359
4	-3,2254	0,0303	-3,1951

Πίνακας 20: Αποτελέσματα 1ης Συνόρθωσης Μικτών Εξισώσεων

MODEL C – 2^Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-15,0107	-0,0000009	-15,0107
2	0,0009	0,00000004	0,0009
3	4,4359	-0,00017	4,4358
4	-3,1951	-0,00037	-3,1955

Πίνακας 21: Αποτελέσματα 2ης Συνόρθωσης Μικτών Εξισώσεων

ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ	
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-401,7084
2	1254,3442
3	-1557,1300
4	689,2643

Πίνακας 22: Αποτελέσματα Αγνώστων Ομογενούς Συστήματος

Στον Πίνακα 22 δίνονται τα αποτελέσματα της επίλυσης του ομογενούς συστήματος για το μοντέλο C. Στους Πίνακες 23,24 και 25 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα και οι διορθώσεις των προσεγγιστικών τιμών. Παρατηρούμε ότι όπως και στα προηγούμενα μοντέλα, μία επιπλέον επανάληψη αρκεί για να καλύψει την μεγάλη απόκλιση της ακρίβειας προσεγγιστικών τιμών που δίνονται από λιγότερο αξιόπιστες διαδικασίες από εκείνη της συνόρθωσης,

MODEL C – 1Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-401,7084	386,6977	-15,0108
2	1254,3442	-1254,3000	0,0009
3	-1557,1300	1561,6000	4,4277
4	689,2643	-692,4780	-3,2138

Πίνακας 23: : Αποτελέσματα 1ης Συνόρθωσης Μικτών Εξισώσεων (Ομογενούς Συστήματος)

MODEL C – 2Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-15,0108	0,00004	15,0107
2	0,0009	-0,000002	0,0009
3	4,4277	0,0082	4,4359
4	-3,2138	0,0185	-3,1952

Πίνακας 24: Αποτελέσματα 2ης Συνόρθωσης Μικτών Εξισώσεων (Ομογενούς Συστήματος)

MODEL C – 3Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	15,0107	-0,0000005	15,0107
2	0,0009	0,00000002	0,0009
3	4,4359	-0,0001	4,4358
4	-3,1952	-0,0002	-3,1955

Πίνακας 25: Αποτελέσματα 3ης Συνόρθωσης Μικτών Εξισώσεων (Ομογενούς Συστήματος)

5.5.4 Μοντέλο D

MODEL D – ΑΠΛΗ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ	
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-14,9998
2	0,0008
3	5,0157
4	-2,3662
5	-63,3934

Στον Πίνακα 26 δίνονται τα αποτελέσματα της απλής συνόρθωσης παρατηρήσεων ως προσεγγιστικές για την επίλυση των μικτών εξισώσεων του μοντέλου D. Στους πίνακες 27 και 28 δίνονται τα αποτελέσματα για τους αγνώστους καθώς και οι διορθώσεις κάθε επίλυσης όπως και σε προηγούμενο στάδιο

*Πίνακας 26: Αποτελέσματα Αγνώστων Απλής
Συνόρθωσης Παρατηρήσεων*

παρατηρούμε ότι οι διορθώσεις μειώνονται αισθητά με κάθε επιπλέον επανάληψη. Επίσης

κρίθηκε ότι δεν ήταν μεγάλης σημασίας η επίλυση του εν λόγω μοντέλου με ομογενές σύστημα καθώς από προηγούμενα μοντέλα παρατηρήσαμε ότι η διαδικασία των μικτών εξισώσεων εξομαλύνει τη διαφορά των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων όσο μεγάλη και αν είναι με μία επιπλέον επανάληψη.

MODEL D – 1^Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-14,9998	0,0041	-14,9956
2	0,0008	-0,00003	0,0008
3	5,0157	0,4329	5,4486
4	-2,3662	0,1083	-2,2579
5	-63,3934	-18,6895	-82,0828

Πίνακας 27: Αποτελέσματα 1ης Συνόρθωσης Μικτών Εξισώσεων

MODEL D – 2^Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-14,9956	0,0015	-14,9942
2	0,0008	-0,00002	0,0008
3	5,4486	0,1027	5,5513
4	-2,2579	0,0807	-2,1772
5	-82,0828	-5,0291	-87,1119

Πίνακας 28: Αποτελέσματα 2ης Συνόρθωσης Μικτών Εξισώσεων

5.5.5 Μοντέλο D3

MODEL D3 – ΑΠΛΗ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ	
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-14,9436
2	0,0010
3	1,8257
4	-2,3309
5	-381,5921
6	-316,7341
7	23218,0832
8	166,2690
9	-40823,5585
10	960238,9135
11	-4191,9595
12	1076865,5353
13	54044393,2060
14	-1486002377,8604
15	9646,3580
16	-348056,9378
17	-430997,5662

*Πίνακας 29: Αποτελέσματα Αγνώστων
Απλής Συνόρθωσης Παρατηρήσεων*

Στον Πίνακα 29 δίνονται οι προσεγγιστικές τιμές για τους άγνωστους παραμετρικούς συντελεστές που χρησιμοποιήθηκαν για την συνόρθωση των μικτών εξισώσεων του μοντέλου D3. Το παρόν μοντέλο αποτελεί το πιο περίπλοκο μοντέλο που αναλύθηκε και χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία με 17 παραμετρικούς συντελεστές. Πρόκειται για το μοντέλο D με βαθμό ανάπτυξης 3. Η διαδικασία επαναλήφθηκε 2 φορές όπως και για τα προηγούμενα μοντέλα. Σε επόμενο κεφάλαιο θα αναλυθεί περαιτέρω ο ακριβής αριθμός των επαναλήψεων που χρειάστηκε κάθε μοντέλο για να ικανοποιεί την απαιτούμενη ακρίβεια. Στους Πίνακες 30 και 31 μπορούμε εύκολα να διακρίνουμε ότι οι διορθώσεις στις αρχικές προσεγγιστικές φθίνουν με γρήγορο ρυθμό, θα μπορούσαμε

να υποθέσουμε ότι το συγκεκριμένο μοντέλο δεν θα χρειαστεί μεγάλο αριθμό επαναλήψεων μέχρι να ικανοποιεί την ακρίβεια που έχουμε ορίσει.

MODEL D- 2^H ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-14,9436	-0,0326	-14.9763
2	0,0010	0,0005	0.0015
3	1,8257	-1,3907	0.4349
4	-2,3309	-0,8717	-3.2027
5	-381,5921	224,6862	-156.9059
6	-316,7341	32,03664	-284.6974
7	23218,0832	-2449,3336	20768.7496
8	166,2690	-150,9152	15.3538
9	-40823,5585	-12719,3640	-53542.9225
10	960238,9135	728,597,84811	1688836.7616
11	-4191,9595	385,7329	-3806.2266
12	1076865,5353	347869,2763	1424734.8117
13	54044393,2060	40353678,1227	94398071.3287
14	-1486002377,8604	-4982572584,0888	-6468574961.9493
15	9646,3580	-14772,9269	-5126.5690
16	-348056,9378	-318710,1719	-666767.1097
17	-430997,5662	1323940774,4096	131963076.8435

Πίνακας 30: Αποτελέσματα 1ης Συνόρθωσης Μικτών Εξισώσεων

MODEL D- 2^H ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-14.9763	-0,0000	-14.9763
2	0.0015	0,0000	0.0015
3	0.4349	-0,0000	0.4349
4	-3.2027	-0,0000	-3.2027
5	-156.9059	-0,0009	-156.9067
6	-284.6974	0,0026	-284.6948
7	20768.7496	0,4018	20769.1513
8	15.3538	0,0060	15.3598
9	-53542.9225	-1,0407	-53543.9633
10	1688836.7616	24,2291	1688860.9908
11	-3806.2266	0,0749	-3806.1517
12	1424734.8117	21,7909	1424756.6026
13	94398071.3287	1853,0471	94399924.3759
14	-6468574961.9493	-76100,3009	-6468651062.2503
15	-5126.5690	0,0109	-5126.5580
16	-666767.1097	-26,02870	-666793.1384
17	131963076.8435	1588,9346	131964665.7781

Πίνακας 31: Αποτελέσματα 2ης Συνόρθωσης Μικτών Εξισώσεων

5.5.6 Μοντέλο E

Το τελευταίο μοντέλο είναι το μοντέλο του Torge το οποίο αποτελεί μια πιο

MODEL E – ΑΠΛΗ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ	
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-15,0109
2	9,2193e-04

απλοποιημένη μορφή του μοντέλου C.

Αποτελεί το πιο απλό μοντέλο που διερευνήθηκε με μόνο δύο άγνωστους παραμετρικούς συντελεστές. Στον Πίνακα 32 έχουμε τις προσεγγιστικές τιμές, όπως αυτές δόθηκαν από τη συνόρθωση

Πίνακας 32: Αποτελέσματα Αγνώστων Απλής Συνόρθωσης Συνθηκών

εξισώσεων παρατήρησης και στον Πίνακα 33 την μία και μοναδική επανάληψη που

χρειάστηκε να πραγματοποιηθεί η διαδικασία των μικτών εξισώσεων για να ικανοποιηθεί η απαιτούμενη ακρίβεια.

MODEL E – 1Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-15,0109	1,8983e-14	-15,0109
2	9,2193e-04	5,5284e-18	0,0009

Πίνακας 33: Αποτελέσματα 1ης Συνόρθωσης Μικτών Συνθηκών

ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ	
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-15,2300
2	-14,8900

Πίνακας 34: Αποτελέσματα Αγνώστων Ομογενούς Συστήματος

Λόγω της απλότητας του μοντέλου κρίθηκε ενδιαφέρον να εξεταστεί και πάλι η διαπίστωση που έγινε σε προηγούμενο στάδιο της εργασίας, ότι η διαδικασία των μικτών εξισώσεων χρειάζεται μια και μόνο επιπλέον επανάληψη για να προσεγγίσει τα αποτελέσματα προσεγγιστικών τιμών

ακριβείας έναντι τιμών με χαμηλότερη ακρίβεια. Όπως φαίνεται και παρακάτω από τους πίνακες 35 και 36, χρειάστηκε μόνο μια επιπλέον επανάληψη για προσεγγιστικές τιμές από την επίλυση ενός ομογενούς συστήματος.

MODEL E – 1Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-15,2300	0,2191	-15,0109
2	-14,8900	14,8909	0,0009

Πίνακας 35: Αποτελέσματα 1ης Συνόρθωσης Μικτών Συνθηκών (Ομογενούς Συστήματος)

MODEL E – 2Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-15,0109	8,8259e-14	-15,0109
2	0,0009	-6,6023e-15	0,0009

Πίνακας 36: Αποτελέσματα 2ης Συνόρθωσης Μικτών Συνθηκών (Ομογενούς Συστήματος)

5.5.7 Ανάλυση Αποτελεσμάτων της Συνόρθωσης

Παρατηρούμε από τα παραπάνω αποτελέσματα ότι οι διορθώσεις των προσεγγιστικών τιμών μειώνονται με κάθε επανάληψη και τείνουν στο μηδέν. Για ερευνητικούς λόγους πραγματοποιήθηκε επαναληπτικά η διαδικασία της συνόρθωσης έως ότου οι διορθώσεις των προσεγγιστικών τιμών των παραμέτρων να είναι μικρότερες από 0,001. Από το προηγούμενο κεφάλαιο έγινε αντιληπτό ότι με καλύτερες αρχικές προσεγγιστικές τιμές έχουμε λιγότερες επαναλήψεις. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα της επαναληπτικής διαδικασίας.

Για το μοντέλο A χρειάστηκε να επαναληφθεί η διαδικασία 8 φορές. Αξίζει να σημειωθεί ότι στο παρόν κεφάλαιο αναλύονται μόνο τα αποτελέσματα και οι επαναλήψεις με προσεγγιστικές τα αποτελέσματα της συνόρθωσης παρατηρήσεων.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ -ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ- MODEL A						
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	1η	2η	3η	...	7η	8η
1	-15,800	-1,3247	-0,3160	...	-0,0015	-0,0004
2	11,4224	1,0498	0,2518	...	0,0012	0,0004
3	5,5744	0,6026	0,1404	...	0,0006	0,0002
4	9,4641	0,6301	0,1504	...	0,0008	0,0002

Πίνακας 37: Διορθώσεις Παραμέτρων -Model A

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ -ΝΕΕΣ ΤΙΜΕΣ- MODEL A						
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	1η	2η	3η	...	7η	8η
1	-205,70	-207,03	-207,34	...	-207,46	-207,46
2	130,156	131,206	131,458	...	131,550	131,550
3	57,495	58,0972	58,238	...	58,287	58,287
4	127,239	127,869	128,019	...	128,077	120,077

Πίνακας 38:Νέες Τιμές των Παραμέτρων - Model A

Παρατηρούμε ότι μετά από οκτώ επαναλήψεις ικανοποιείται η συνθήκη που ορίσαμε για προσεγγιστικές τις τιμές που βρήκαμε από την απλή συνόρθωση εξισώσεων. Στην συνέχεια πραγματοποιήθηκε η ίδια διαδικασία και για το μοντέλο Β όπου και σε αυτό οι επαναλήψεις της διαδικασίας ήταν 8 έως ότου να ικανοποιείται η απαιτούμενη ακρίβεια για τις τελικές τιμές των αγνώστων παραμέτρων.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ -ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ- MODEL B						
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	1η	2η	3η	...	7η	8η
1	-17.2056	-12.1070	-2.6878	...	0.0011	-0.0008
2	-7.5164	12.2212	-8.8481	...	-0.0033	0.0024
3	-3.0558	4.8970	-3.7481	...	-0.0014	0.0010
4	80.7490	-4.9952	39.5870	...	0.0083	-0.0060
5	-68.9210	12.6782	-37.2613	...	-0.0089	0.0064

Πίνακας 39:Διορθώσεις Παραμέτρων -Model B

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ -ΝΕΕΣ ΤΙΜΕΣ- MODEL B						
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	1η	2η	3η	...	7η	8η
1	-231.6041	-243.7111	-246.3989	...	-247.7040	-247.7047
2	89.8319	102.0531	93.2049	...	95.1232	95.1255
3	40.5161	45.4130	41.6649	...	42.3132	42.3141
4	350.5312	345.5360	385.1230	...	382.5036	382.4976
5	-203.5447	-190.8665	-228.1277	...	-224.6363	-224.6299

Πίνακας 40:Νέες Τιμές των Παραμέτρων - Model B

Στην συνέχεια πραγματοποιήθηκε η επαναληπτική διαδικασία και για το μοντέλο C όπου παρατηρούμε ότι μετά από δύο επαναλήψεις ικανοποιείται η απαιτούμενη ακρίβεια.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ -ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ- MODEL C		
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	1η	2η
1	6,4832e-05	-8,7323e-07
2	-3,1268e-06	3,8382e-08
3	0.0134	-0.0002
4	0.0303	-0.0004

Πίνακας 41:Διορθώσεις Παραμέτρων -Model C

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ -ΝΕΕΣ ΤΙΜΕΣ- MODEL C		
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	1η	2η
1	-15.0107	-15.0107
2	0.0009	0.0009
3	4.4359	4.4358
4	-3.1951	-3.1955

Πίνακας 42:Νεες Τιμές των Παραμέτρων - Model C

Για λόγους συγκριτικούς παρακάτω δίνονται το απλούστερο και το πολυπλοκότερο μοντέλο της ομάδας 3, των μοντέλων D. Παρατηρούμε στους Πίνακες 43 και 44 ότι το μοντέλο D χρειάστηκε 13 επαναλήψεις ώστε να ικανοποιεί την συνθήκη που ορίστηκε ως επιθυμητή ακρίβεια των τελικών τιμών των άγνωστων συντελεστών. Ενώ στους Πίνακες 45 και 46 βλέπουμε ότι το πολυπλοκότερο μοντέλο, D3, χρειάζεται εμφανώς λιγότερες επαναλήψεις (4).

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ -ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ- MODEL D						
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	1η	2η	3η	...	12η	13η
1	0.0041	0.0015	0.0005	...	4,5735e-08	1,6379e-08
2	-2,9973e-05	-1,5921e-05	-5,9805e-06	...	-5,8914e-10	-2,1099e-10
3	0.4329	0.1027	0.0304	...	2,7798e-06	9,9554e-07
4	0.1083	0.0807	0.0317	...	3,1417e-06	1,1251e-06
5	-18.6895	-5.0291	-1.6506	...	-0.0002	-5,5308e-05

Πίνακας 43:Διορθώσεις Παραμέτρων -Model D

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ -ΝΕΕΣ ΤΙΜΕΣ- MODEL D						
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	1η	2η	3η	...	12η	13η
1	-14.9956	-14.9942	-14.9937	...	-14.9934	-14.9934
2	0.0008	0.0008	0.0007	...	0.0007	0.0007
3	5.4486	5.5513	5.5817	...	5.5979	5.5979
4	-2.2579	-2.1772	-2.1454	...	-2.1274	-2.1274
5	-82.0828	-87.1119	-88.7625	...	-89.6595	-89.6596

Πίνακας 44:Νέες Τιμές των Παραμέτρων - Model D

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ -ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ- MODEL D3				
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	1η	2η	3 ^η	12η
1	-0.0327	-1,2664e-06	7,0326e-12	-1,520e-16
2	0.0005	1,3731e-08	-7,8337e-14	1,8443e-18
3	-1.3907	-7,1993e-05	4,7068e-10	-3,7008e-15
4	-0.8717	-3,0972e-05	3,3131e-10	-2,079e-14
5	224.6862	-0.0009	2,3259e-08	4,0826e-12
6	32.0366	0.0026	-1,8183e-08	2,6435e-13
7	-2449.3337	0.4018	-5,8650e-06	-5,9731e-11
8	-150.9152	0.0060	-8,1910e-08	-2,7041e-13
9	-12719.3640	-1.0408	5,3777e-06	3,2130e-10
10	728597.8481	24.2292	2,6476e-05	-1,5525e-08
11	385.7330	0.0749	-5,0006e-07	-2,5071e-12
12	347869.2763	21.7909	-0.0001	-8,410e-09
13	40353678.1227	1853.0472	-0.0046	-6,571e-07
14	-4982572584.0889	-76100.3010	-0.5006	3,5512e-05
15	-14772.9270	0.0110	-2,2416e-06	-2,7484e-11
16	-318710.1719	-26.0287	0.0002	3,9891e-10
17	132394074.4097	1588.9346	0.0129	-3,6073e-07

Πίνακας 45:Διορθώσεις Παραμέτρων -Model D3

Στον Πίνακα 45 παρατηρούμε ότι οι διορθώσεις που γίνονται στους αγνώστους σε κάθε επανάληψη μειώνονται αισθητά από την πρώτη κιόλας επανάληψη. Θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε συγκρίνοντας τα μοντέλα D και D3 ότι όσο πιο πολύπλοκο ένα μοντέλο τόσο λιγότερες επαναλήψεις χρειάζεται για να αποκτήσει την εκάστοτε θεμιτή ακρίβεια. Ένας λόγος, που ενδεχομένως το πιο πολύπλοκο μοντέλο, με τους περισσότερους συντελεστές, να χρειάζεται λιγότερες επαναλήψεις, θα μπορούσε να είναι το γεγονός ότι λόγω της πληθώρας των συντελεστών δεν υφίσταται μεγάλη ανοχή για ακραίες τιμές στις προσεγγιστικές εκτιμήσεις, ειδικά όταν πρόκειται για εκτιμήσεις που έχουν δοθεί από συνόρθωση παρατηρήσεων.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ -ΝΕΕΣ ΤΙΜΕΣ- MODEL D3				
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	1η	2η	3η	12^η
1	-14.9763	-14.9763	-14.9763	-14.9763
2	0.0015	0.0015	0.0015	0.0015
3	0.4349	0.4349	0.4349	0.4349
4	-3.2027	-3.2027	-3.2027	-3.2027
5	-156.9059	-156.9067	-156.9067	-156.9067
6	-284.6974	-284.6948	-284.6948	-284.6948
7	20768.7496	20769.1513	20769.1513	20769.1513
8	15.3538	15.3598	15.3598	15.3598
9	-53542.9225	-53543.9633	-53543.9633	-53543.9633
10	1688836.7616	1688860.9908	1688860.9909	1688860.9909
11	-3806.2266	-3806.1517	-3806.1517	-3806.1517
12	1424734.8117	1424756.6026	1424756.6024	1424756.6024
13	94398071.3287	94399924.3759	94399924.3712	94399924.3712
14	-6468574961.9493	-6468651062.2503	-6468651062.7509	-6468651062.7508
15	-5126.5690	-5126.5580	-5126.5580	-5126.5580
16	-666767.1097	-666793.1384	-666793.1382	-666793.1382
17	131963076.8435	131964665.7781	131964665.7910	131964665.7910

Πίνακας 46:Νεες Τιμές των Παραμέτρων – Model D3

Το μοντέλο Ε επανέλαβε την διαδικασία των μικτών εξισώσεων μόνο μία φορά και συνεπώς τα αποτελέσματα δίνονται σε έναν ενιαίο πίνακα και όχι ξεχωριστά όπως σε όλα τα προηγούμενα μοντέλα.

MODEL E – 1Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΜΙΚΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ			
ΑΓΝΩΣΤΟΙ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ	ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
1	-15,0109	1,8983e-14	-15,0109
2	9,2193e-04	5,5284e-18	0,0009

Πίνακας 47: Αποτελέσματα 1ης Συνόρθωσης Μικτών Συνθηκών

Με βάση όλα τα παραπάνω αποτελέσματα των μικτών εξισώσεων για τα μοντέλα παρατηρούμε ότι τα μοντέλα με τους λιγότερους συντελεστές και τα μοντέλα με τους περισσότερους συντελεστές τείνουν να χρειάζονται λιγότερες επαναλήψεις. Αυτό θα μπορούσε να είναι αποτέλεσμα διάφορων παραγόντων όπως, οι καλές προσεγγιστικές τιμές, το είδος του μοντέλου κτλ. Σημειώνεται επίσης ότι παρατηρήθηκε και επιβεβαιώθηκε το γεγονός της ταχύτατης σύγκλισης των αποτελεσμάτων της συνόρθωσης στην περίπτωση καλών προσεγγιστικών τιμών για τις

άγνωστες παραμέτρους. Στην γεωδαιτική πρακτική η διαδικασία των επαναλήψεων δεν είναι συνήθης, διότι η ύπαρξη καλών προσεγγιστικών με την εφαρμογή των γνωστών μαθηματικών μοντέλων που συνδέουν παρατηρήσεις και άγνωστες παραμέτρους, συμβάλλει στην άμεση σύγκλιση των αποτελεσμάτων.

5.6 Ανάπτυξη Λογισμικού

Όπως έχει αναφερθεί και σε προηγούμενα στάδια της διπλωματικής οι διαδικασίες για την επεξεργασία και τους ελέγχους των βαρυτημετρικών δεδομένων πραγματοποιήθηκαν σε περιβάλλον MATLAB. Στο παρόν κεφάλαιο θα δοθούν αποσπάσματα από τους κώδικες και τις εφαρμογές που δημιουργήθηκαν.

Λόγω της πολυπλοκότητας και του πλήθους των μοντέλων και των διαδικασιών, των επαναλήψεων των ονομασιών των αποτελεσμάτων καθώς επίσης και για την αποφυγή σφαλμάτων, ο κώδικας δεν ήταν εφικτό να δημιουργηθεί σε ένα μόνο αρχείο. Κρίθηκε βάσει των παραπάνω ότι για την αποφυγή σφαλμάτων στις διαδικασίες συνόρθωσης θα ήταν εύχρηστο να δημιουργηθούν συναρτήσεις (functions), τα οποία μπορούμε να τρέχουμε στον βασικό κώδικα χωρίς να καταναλώνουμε εγγραφές, και τα οποία θα είναι ίδια για όλους τους κώδικες και τα μοντέλα με αποτέλεσμα να μην περάσουν τυπογραφικά λάθη στους κώδικες.

Επίσης η δημιουργία εξωτερικών functions, του βασικού κώδικα, ήταν εύχρηστο σαν διαδικασία ώστε να μπορέσουμε να μειώσουμε πιθανά λάθη της εφαρμογής, αποκλειστικά στη δημιουργία πινάκων, όπως ο πίνακας σχεδιασμού A στην απλή συνόρθωση εξισώσεων παρατήρησης και του πίνακα B και w στις μικτές εξισώσεις. Το οποίο αποδείχθηκε πολύ χρήσιμο.

Τα Functions για τη λειτουργία τους χρειάζονται, ορισμό της μεταβλητής εξόδου, ονομασία του Function ώστε να μπορείς να το καλείς εντός ενός βασικού κώδικα και τέλος ορισμό των μεταβλητών που χρειάζεται να τραβάει από τον βασικό κώδικα ώστε να τρέχει την εκάστοτε διαδικασία. Μπορείς να εισάγεις πληροφορία σε αρχική μορφή όπως για παράδειγμα ένα αρχείο κειμένου (.txt) ή να ορίσεις της επεξεργασμένες πληροφορίες που σε ενδιαφέρει να περάσεις.

Παρακάτω παρατίθενται αποσπάσματα των function που δημιουργήθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν:

- Function Συνόρθωσης Εξισώσεων Παρατήρησης

```

function Ax=synorthosi_xoris(DATA,SELECTED_DATA,A,P)

% DATA IMPORT

Data=readtable('DATA.txt');
data=table2array(Data);

Selected_Data=readtable('DATA.txt');
selected_data=table2array(Selected_Data);

PointCode=data(:,1);

% Conversion from Grad to Rad

latitude=data(:,2).*(pi/180);
longitude=data(:,3).*(pi/180);

h=data(:,4);
H_EGM08=data(:,5);
SG=data(:,7);

g_measured=data(:,10);
g_GYS=data(:,11);

Dg=data(:,12);

% MEAN GEODETIC LATITUDE AND LONGTITUDE

len=length(data);

mean_latitude=sum(latitude)/len;
mean_longitude=sum(longitude)/len;

mean_g=sum(g_measured)/len;

A1=A.';
b=Dg;
x=x_estA(Selected_Data,P,A);
v=b-A*x;
v1=v.';
L=A*x+v;
Ax=A*x;

end

```


Σημειώνεται σε αυτό το σημείο ότι στο παρόν Function μπορούμε να τραβήξουμε τα δεδομένα από το αρχείο κειμένου (.txt) χωρίς να χρειάζεται να τα έχουμε ανοίξει στον βασικό μας κώδικα.

- Function Μικτών Εξισώσεων

```
function x_corr=combined_x_corr_A(latitude,longitude,Dg,A,P,x)

bf=x(2,1).*sin(latitude).*cos(longitude)+x(3,1).*sin(latitude).*sin(longitude)-
x(4,1).*cos(latitude);
bl=x(2,1).*cos(latitude).*sin(longitude)-x(3,1).*cos(latitude).*cos(longitude);
B=[diag(ones(length(latitude),1)) diag(bf) diag(bl)];
B1=B.';

w=[Dg-x(1,1)-x(2,1).*cos(latitude).*cos(longitude)-
x(3,1).*cos(latitude).*sin(longitude)-x(4,1).*sin(latitude)];

M=B*(inv(P))*(B. ');
N=(A. ')*(inv(M))*A;
u=(A. ')*(inv(M))*w;
x_corr= -(inv(N))*u;

x_new=x+x_corr;

v=(inv(P))*(B. ')*(inv(M))*(w+A*x_corr);

std=((v. ')*P*v)/(length(latitude)-length(x));

end
```

Το παρόν απόσπασμα αποτελεί τη διαδικασία μικτών εξισώσεων για το μοντέλο A, στη διαδικασία των μικτών εξισώσεων υπήρξε ένα πρόβλημα με την εισαγωγή του πίνακα B και w και συνεπώς οι πίνακες για κάθε μοντέλο χρειάστηκε να περαστούν εντός του Function

- Function Σάρωσης δεδομένων (Data Snooping)

```
function F=data_snooping(V,met_anaforas,len)

i=1;
x_s=zeros(24,2);

for i=1:len

    klj=0;
    r2=V(i,1).^2/met_anaforas;
    r=sqrt(r2);
    klj=r*sqrt((len-5)/(len-4-r2));
    if klj>3.552
        x_s(i,1)=r;
        x_s(i,2)=i;
    end
end
F=x_s;
end
```

- Function Συντελεστή Προσαρμογής R^2

```
function R=R_cod(Dg,Ax,x)
%COEFFICIENT OF DETERMINATION R^2

ms=Dg-Ax;
Ladj=Dg-Ax;

%Compute system condition number and coef. of determination
lmean=mean(Dg);
msmean=Dg-lmean;
mssquare=ms.*ms;
msmeansquare=msmean.*msmean;

R1=sum(mssquare);
R2=sum(msmeansquare);

R1a=R1*(length(Dg)-length(x));
R2a=R2*(length(Dg)-1);

R=1-R1/R2
Ra=1-R1a/R2a
end
```

- Function Εκτίμησης Συνιστωσών Μεταβλητότητας (Απλές Εξισώσεις)

```
function S=S_vce_simple(A,Q,Dg,P,P1)

W=ones(length(A),length(A))-A*(inv((A.)*(inv(Q))*A))*(A.)*(inv(Q));

V_obs=(inv(Q))*Q*W*Dg;
V_gys=-(inv(P))*Q*W*Dg;

V=W*Dg;

a=trace(Q*W*(inv(P1))*Q*W*(inv(P1)));
b=trace(Q*W*(inv(P1))*Q*W*(inv(P)));
c=trace(Q*W*(inv(P))*Q*W*(inv(P1)));
d=trace(Q*W*(inv(P))*Q*W*(inv(P)));

J=[a b;c d];

K=[(V_obs.)*(inv(P1))*V_obs; (V_gys.)*(inv(P))*V_gys];

S=(inv(J))*K;
end
```

```
function P_obs=pobs (K, W, Q, V_obs)

sobs=1;
sobs_n=sobs*K(1,1)/trace(W*(inv(Q)));
Sobs_n=sobs*sobs_n;

if abs(Sobs_n-sobs)>0.00001

    Sobs_new(2)=Sobs_n;
    Sobs_new(1)=1;
    Pobs_n=Q;

end
i=3;
while abs(Sobs_new(i-1)-Sobs_new(i-2))>0.00001

    Pobs_n=(1/(Sobs_new(i-1)))*Pobs_n;
    Sobs_new(i)=(V_obs.)*Pobs_n*V_obs;
    i=i+1;

end
sobs_final=1;
j=1;
len_obs=length(Sobs_new);
for j=1:len_obs
    sobs_final=sobs_final*Sobs_new(j);
    j=j+1;
end
P_obs=(1/(sobs_final))*Q;

end
```

- Function Εκτίμησης Συνιστωσών Μεταβλητότητας (Μικτές Εξισώσεις)

```

function S=S_vce_comb(A,B,P1,P,P_obs,P_gys,Q,M,b)

W=(B.)*((inv(M))-(inv(M))*A*(A.)*P1*(inv(M)))*B;

V_obs=(inv(Q))*Q*W*b;
V_gys=-(inv(P))*Q*W*b;

V=W*b;

a=trace(Q*W*(inv(Q))*Q*W*(inv(Q)));
b=trace(Q*W*(inv(Q))*Q*W*(inv(P)));
c=trace(Q*W*(inv(P))*Q*W*(inv(Q)));
d=trace(Q*W*(inv(P))*Q*W*(inv(P)));

J=[a b;c d];

K=[(V_obs.)*(inv(Q))*V_obs; (V_gys.)*(inv(Q))*V_gys];

S=(inv(J))*K;

end

```

- Function Μονόπλευρου Ελέγχου

```

function E=evaluation(Data,Selected_Data,A,Q_FINAL,F)

Ax=Ax_synorthosi(Data,Selected_Data,A,Q_FINAL);
V=V_synorthosi(Data,Selected_Data,A,Q_FINAL);
x=x_estA(Selected_Data,Q_FINAL,A);

met_anaforas=((V.)*Q_FINAL*V)/(length(Ax)-length(x))
typ_apoklishfinal=sqrt(met_anaforas)

u=(20*met_anaforas)/1

if u<=F
    E='ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙΤΑΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ'
end

end

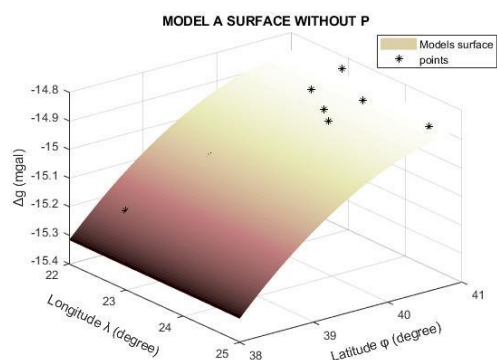
```

6 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΕΛΕΓΧΟΣ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

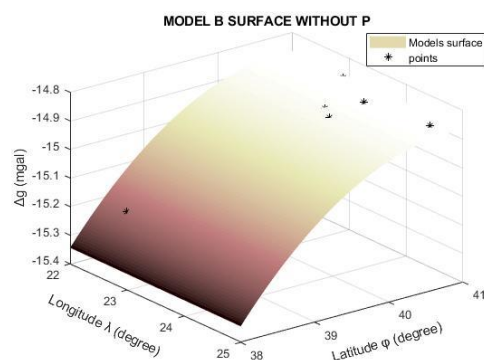
6.1 Έλεγχος Αξιοπιστίας – Γενική Υπόθεση

Ήδη σε προηγούμενο στάδιο της εφαρμογής της συνόρθωσης μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ποιο μοντέλο για κάθε ομάδα είναι το ακριβέστερο με μια χονδρική εκτίμηση από την τυπική τους απόκλιση. Σε μοντέλα που διαφέρουν κατά μόνο έναν παραμετρικό συντελεστή είναι απολύτως ικανοποιητικό αφού αμέσως μπορούμε να λάβουμε την πληροφορία ότι αυτός ο μοναδικός επιπλέον συντελεστής βελτιώνει ή όχι την ακρίβεια της προσαρμογής. Όπως είναι λογικό αναμένουμε τα μοντέλα με τις περισσότερες παραμέτρους να είναι πιο αξιόπιστα λόγω της πολυπλοκότητας τους. Αυτό όμως δεν ισχύει πάντοτε: η σημαντικότητα κάθε επιπλέον συντελεστή θα πρέπει να εξεταστεί στατιστικά, ούτως ώστε αυτός να δίδει επιπλέον σημαντική πληροφορία στο συγκεκριμένο δείγμα παρατηρήσεων. Η διαδικασία του ελέγχου σχετίζεται με μία επέκταση ή/και περιορισμό του αρχικού μοντέλου και στατιστική αξιολόγησης της λύσης της συνόρθωσης, η οποία σχετίζεται στον έλεγχο της γενικής υπόθεσης. Παρακάτω θα δούμε τα αποτελέσματα που δόθηκαν μετά τους ελέγχους αξιοπιστίας των συγκρίσιμων ομάδων όπως αυτές έχουν προαναφερθεί, γενικά αλλά και για κάθε συντελεστή ξεχωριστά με σκοπό τόσο την αξιολόγηση των μοντέλων όσο και τη σημαντικότητα κάθε επιπλέον συντελεστή.

Η πρώτη ομάδα αποτελείται από τα μοντέλα A & B, τα οποία διαφέρουν κατά έναν και μόνο παραμετρικό συντελεστή.



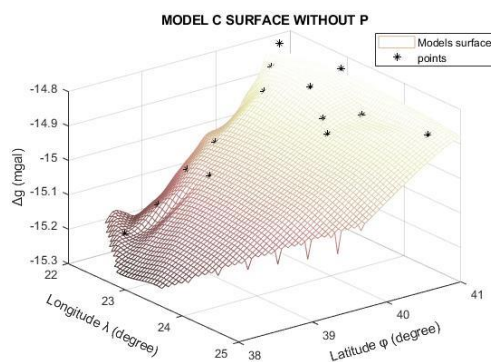
Εικόνα 20: Model A



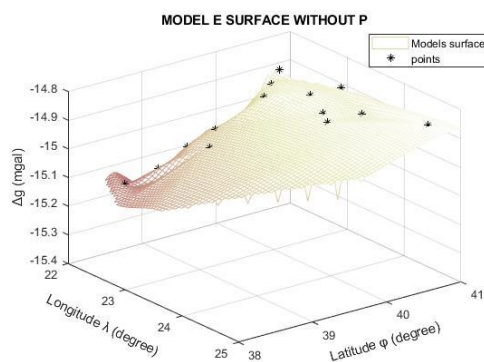
Εικόνα 21: Model B

Εύκολα μπορούμε να διακρίνουμε οπτικά ότι το μοντέλο Β έχει μια πιο κυρτή επιφάνεια σε σχέση με το μοντέλο Α, το οποίο είναι και η μεγαλύτερη τους διαφορά με τους μέχρι τώρα ελέγχους, καθώς η εκ των υστέρων (μετά τη συνόρθωσης) τυπική απόκλιση είναι κοντά και στα δύο μοντέλα. Χρησιμοποιώντας την γενική υπόθεση ερχόμαστε στο αποτέλεσμα ότι $F=3,08 \leq F_a(8,18)$. Συνεπώς το μοντέλο Β δίνει επιπλέον πληροφορία σε σύγκριση με το μοντέλο Α και αυτός ο επιπλέον παραμετρικός συντελεστής είναι μεγάλης βαρύτητας.

Η δεύτερη ομάδα αποτελείται από τα μοντέλα C & E, τα οποία διαφέρουν κατά δύο παραμετρικούς συντελεστές.



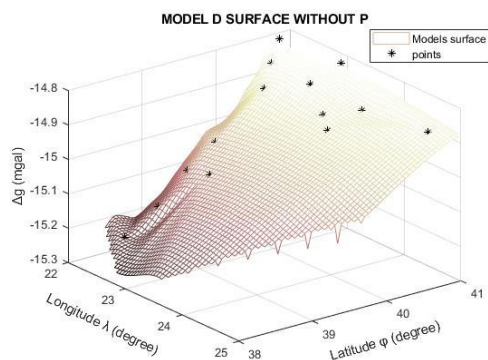
Εικόνα 22: Model C



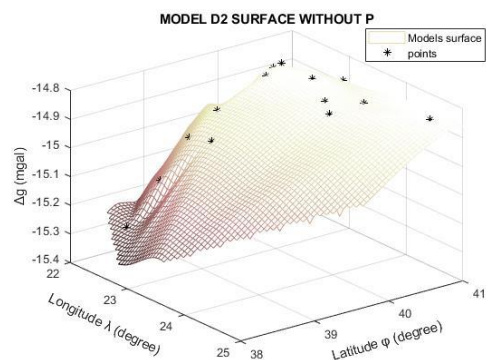
Εικόνα 23: Model E

Συγκρίνοντας τις επιφάνειες οπτικά και μόνο μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα δυο αυτά μοντέλα έχουν μεγάλες διαφορές και θα μπορούσαμε με σιγουριά να πούμε ότι το μοντέλο C φαίνεται να προσαρμόζεται καλύτερα στις διαφορές των τιμών βαρύτητας. Από προηγούμενο στάδιο από τις εκ των υστέρων τυπικές αποκλίσεις μπορούμε επίσης να διαπιστώσουμε ότι το μοντέλο C είναι πιο ακριβές καθώς η τυπική απόκλιση του C είναι 0,0601 ενώ η τυπική απόκλιση του μοντέλου E είναι 0,0965. Εφαρμόζοντας τη γενική υπόθεση για τα δύο αυτά μοντέλα παρατηρούμε ότι $F=11,6685$ το οποίο δεν ικανοποιεί την ανισότητα ($\geq 5,85$). Συνεπώς το μοντέλο E φαίνεται με βάση τον γενικό έλεγχο να είναι πιο αξιόπιστο από το μοντέλο C. Οι επιπλέον συντελεστές του μοντέλου E που αφορούν τις γεωδαιτικές συντεταγμένες των σημείων μετρήσεων συνεισφέρουν στην καλύτερη μοντελοποίηση των διαφορών, καθώς κρίθηκαν σημαντικοί στον έλεγχο που πραγματοποιήθηκε.

Η τρίτη ομάδα αποτελείται από τα μοντέλα D, D2 & D3, τα οποία διαφέρουν κατά αρκετούς παραμετρικούς συντελεστές.

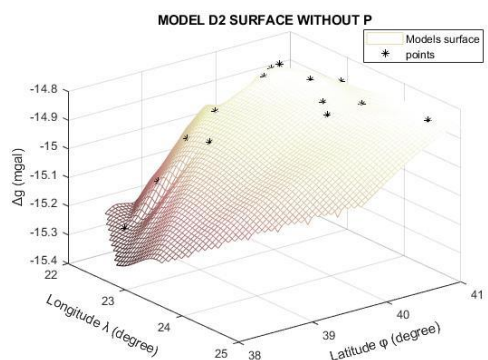


Εικόνα 24: Model D

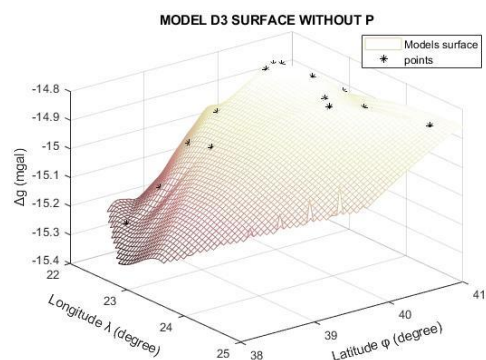


Εικόνα 25: Model D2

Σε πρώτο στάδιο πραγματοποιείται ο έλεγχος της γενικής υπόθεση για όλους τους επιπλέον παραμετρικούς συντελεστές (συνεπώς αξιολογούνται τα μοντέλα ως έχουν) για να δούμε σε πρώτη φάση αν το διευρυμένο μοντέλο είναι πιο αξιόπιστο από το απλό. Η ανισότητα που βρέθηκε για τα συγκεκριμένα μοντέλα είναι $F=6.2929 \geq 4,69$ όπου βλέπουμε ότι η ανισότητα δεν ικανοποιείται γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το μοντέλο D είναι πιο αξιόπιστο από το μοντέλο D2..



Εικόνα 26: Model D2



Εικόνα 27: Model D3

Σε αυτό το σημείο θα συγκρίνουμε το μοντέλο D με το μοντέλο D3. Όπως και πριν θα εφαρμόσουμε την γενική υπόθεση στο σύνολο των επιπλέον παραμετρικών συντελεστών. Πριν όμως αναλύσουμε τα αποτελέσματα της γενικής υπόθεσης θα ανατρέξουμε στην τυπική απόκλιση των δύο μοντέλων όπου το μοντέλο D2 (0,0597) δεν είχε καλύτερη εκ των υστέρων τυπική απόκλιση από το μοντέλο D3 (0,0519), επομένως θεωρείται πιο ακριβές το μοντέλο D3. Συνεπώς, θα ελέγξουμε μέσω του στατιστικού ελέγχου της γενικής υπόθεσης αν το μοντέλο D3 είναι και αξιόπιστο. Ο έλεγχος της γενικής υπόθεσης έδειξε ότι το πλέον αξιόπιστο μοντέλο εκ των δύο είναι εκείνο του D3 και συγκεκριμένα η ανισότητα που ικανοποιείται είναι $F=9.1796 \leq 13.71$.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθούμε τη διαφορά της τυπικής απόκλισης με την γενική υπόθεση. Ενώ η τυπική απόκλιση εκφράζει την προσαρμογή των δεδομένων αλλά και την αβεβαιότητα του μηχανισμού της συνόρθωσης (ακρίβεια τελικού αποτελέσματος), ο έλεγχος της γενικής υπόθεσης εστιάζει στην καταλληλότητα του μοντέλου και τη στατιστική σημαντικότητα των συντελεστών.

6.2 Goodness of Fit

Με αφορμή τα διαφορετικά αποτελέσματα αξιοπιστίας της τυπικής απόκλισης με την γενική υπόθεση θα πραγματοποιηθεί άλλος ένας έλεγχος αξιοπιστίας, πρόκειται για έναν στατιστικό έλεγχο, ο οποίος είναι ο έλεγχος της προσαρμογής του μοντέλου (Assesing the Goodness of Fit).

Επίσης θα πραγματοποιηθεί εύρεση ενός προσαρμοσμένου συντελεστή προσδιορισμού R^2_a ο οποίος συμπεριλαμβάνει και τους βαθμούς ελευθερίας.

Τα αποτελέσματα των στατιστικών ελέγχων φαίνονται στον παρακάτω πίνακα για τα 7 παραμετρικά μοντέλα.

GOODNESS OF FIT		
MODEL	R2	R2a
A	0.7960	0.8226
B	0.8051	0.8390
C	0.8631	0.8809
D	0.8720	0.8942
D2	0.9439	0.9658
D3	0.9644	0.9892
E	0.6125	0.6293

Πίνακας 48: Πίνακας Αποτελεσμάτων του ελέγχου Goodness of Fit

Είναι εύκολό πλέον να διαπιστώσουμε ότι το μοντέλο D3 είναι το πλέον αξιόπιστο και κατάλληλο σε σχέση με όλα τα υπόλοιπα γεγονόσ που ήταν φυσικό καθώς εκτός του ότι πρόκειται για υβριδικό μοντέλο, βαρυτημετρικών μετρήσεων και συντεταγμένων, πρόκειται επίσης και για μοντέλο ιδιαίτερα αναπτυγμένο. Η σημαντικότητα των συντελεστών του μοντέλου αξιολογήθηκε στατιστικά βάσει της σύγκρισης περιορισμένου μοντέλου και επέκτασής του με επιπλέον συντελεστές.

6.3 Εκτίμηση συνιστωσών μεταβλητότητας

Στη συνέχεια κρίθηκε σημαντικό να πραγματοποιηθεί η διαδικασία εκτίμησης συνιστωσών μεταβλητότητας με σκοπό να δημιουργηθεί ένας νέος πίνακας βαρών, ο οποίος να μην είναι μοναδιαίος για τις βαρυτημετρικές μετρήσεις που χρησιμοποιήθηκαν από τη ΓΥΣ. Παρακάτω γίνεται ανάλυση της διαδικασίας της εκτίμησης συνιστωσών μεταβλητότητας για τη συνόρθωση απλών εξισώσεων παρατήρησης (Kotsakis, 1999, Fotopoulos, 2003).

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου να ικανοποιεί μια συνθήκη. Η συνθήκη διαφέρει από εφαρμογή σε εφαρμογή, στην παρούσα εργασία η συνθήκη ήταν η διαφορά των μεταβλητοτήτων των ομάδων παρατήρησης να είναι μικρότερη του 0,00001.

Αξίζει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι για τα μοντέλα της εργασίας δεν ικανοποιούταν η αρχική συνθήκη, να μην είναι αρνητικές τιμές οι μεταβλητότητες, και συνεπώς ακολουθήθηκε μια διαφορετική διαδικασία εύρεσης των πινάκων βαρών, όπως αυτή περιγράφεται στη θεωρία σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Παρακάτω φαίνονται συγκριτικά τα αποτελέσματα όλων των διαδικασιών πριν και μετά τη διαδικασία της εκτίμησης συνιστωσών μεταβλητότητας.

SIMPLE ADJUSTMENTS							
MODEL	X	X_P	X_vce	std	std_P	std_vce	evaluation
A	-189.9036	-155.0100	-155.0278	0.0734	2.9387	4.1405e-05	OK
	118.7339	94.3712	94.3835				
	51.9202	41.1686	41.1741				
	117.7749	95.2003	95.2118				
B	-214.3985	-211.9003	-211.8885	0.0736	2.7964	3.94E-005	OK
	97.3483	56.3405	56.3640				
	43.5719	26.7762	26.7855				
	269.7822	407.0135	406.8936				
	-134.6237	-272.0010	-271.8899				
C	-15.0108	-15.0174	-15.0174	0.0601	2.6600	3.75E-005	OK
	0.0009	0.0008	0.0008				
	4.4225	4.4941	4.4941				
	-3.2254	-2.8050	-2.8054				
E	-15.0109	-15.0170	-15.0170	0.0965	3.7330	5.26E-005	OK
	0.0009	0.0008	0.0008				
D	-14.9998	-14.9975	-14.9975	0.0597	2.5261	3.56E-005	OK
	0.0008	0.0007	0.0007				
	5.0157	5.3525	5.3524				
	-2.3662	-1.4246	-1.4251				
D2	-63.3934	-85.5274	-85.5184	0.0460	1.6325	2.30E-005	OK
	-14.9626	-14.9647	-14.9647				
	0.0010	0.0010	0.0010				
	1.1562	0.1011	0.1025				
	-3.9131	-3.8399	-3.8439				
	140.6463	237.2417	237.4429				
	-166.4345	-161.4436	-161.4103				
	13773.8678	15340.3879	15351.8494				
	-52.3056	-16.2506	-16.4033				
3547.6604	7879.5344	7876.2526					
-405816.8578	-733219.3926	-733204.8426					
D3	-14.9436	-14.9436	-14.9436	0.0519	1.0159	1.43E-005	OK
	0.0010	0.0012	0.0012				
	1.8257	1.3353	1.3342				
	-2.3309	-5.4575	-5.4443				
	-381.5921	-457.6014	-457.5352				
	-316.7341	-327.3152	-327.1645				
	23218.0832	36712.6301	36662.4536				
	166.2690	338.0177	337.4854				
	-40823.5585	-72750.8586	-72638.3049				
	960238.9135	1483450.1052	1481751.2439				
	-4191.9596	-4545.2058	-4538.5320				
	1076865.5353	1475791.5314	1474611.4859				
	54044393.2060	94880468.5163	94730212.0761				
	-1486002377.8604	-1467388229.2229	-1467352423.8109				
	9646.3580	22054.0913	22010.1802				
-348056.9378	-713061.7497	-711859.6088					
-430997.5662	-26776723.1672	-26685752.2664					

Πίνακας 49: Πίνακας Αποτελεσμάτων της διαδικασίας της Απλής Εξίσωσης Συνθηκών

Στον Πίνακα 49, όπου :

- **X** → είναι οι τιμές των αγνώστων παραμέτρων των μοντέλων μετά τη διαδικασία της συνόρθωσης παρατηρήσεων χωρίς τη χρήση πίνακα βαρών,
- **X_P** → είναι οι τιμές των αγνώστων παραμέτρων των μοντέλων μετά τη διαδικασία της συνόρθωσης παρατηρήσεων με τη χρήση πίνακα βαρών,
- **X_vce** → είναι οι τιμές των αγνώστων παραμέτρων των μοντέλων μετά τη διαδικασία της εκτίμησης των συνιστωσών μεταβλητότητας και ενός νέου πίνακα βαρών,
- **std** → είναι η τυπική απόκλιση των μοντέλων μετά τη συνόρθωση χωρίς πίνακα βαρών
- **std_P** → είναι η τυπική απόκλιση των μοντέλων μετά τη συνόρθωση με τη χρήση πίνακα βαρών
- **std_vce** → είναι η τυπική απόκλιση των μοντέλων μετά τη διαδικασία της εκτίμησης συνιστωσών μεταβλητότητας
- **evaluation** → μονόπλευρος έλεγχος της διαδικασίας της εκτίμησης συνιστωσών μεταβλητότητας

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι μετά τη διαδικασία της εκτίμησης συνιστωσών μεταβλητότητας και την εύρεση του νέου πίνακα βαρών οι τιμές των αγνώστων συντελεστών των παραμετρικών μοντέλων είναι πιο κοντά στα αποτελέσματα της διαδικασίας με τον πίνακα βαρών. Είναι πλέον ευκολά αντιληπτό ότι η απουσία πίνακα βαρών για τις παρατηρήσεις της ΓΥΣ. Επιπλέον, όταν η εσωτερική ακρίβεια των μετρήσεων βαρύτητας χρησιμοποιηθεί ως η μόνο πληροφορία για τον πίνακα των βαρών, τα αποτελέσματα χειροτερεύουν αναδεικνύοντας την έλλειψη της πληροφορίας για την ακρίβεια της βάσης της ΓΥΣ και την υπερβολικά αισιόδοξη τιμή του βάρους των νέων παρατηρήσεων.

COMBINED ADJUSTMENT							
MODEL	X	X_new	X_vce	std	std_new	std_vce	evaluation
A	-189.9036	-207.4609	-227.2935	0.0734	0.0001	2.36E-014	OK
	118.7339	131.5498	145.1199				
	51.9202	58.2871	63.7068				
	117.7749	128.0771	141.5335				
B	-214.3985	-247.7047	-263.4507	0.0736	0.0002	0.0022	OK
	97.3483	95.1255	137.3702				
	43.5719	42.3141	60.7799				
	269.7822	382.4976	281.7335				
	-134.6237	-224.6299	-115.2195				
C	-15.0108	-15.0107	-15.0071	0.0601	0.0002	1.98E-021	OK
	0.0009	0.0009	0.0009				
	4.4225	4.4358	4.4931				
	-3.2254	-3.1955	-3.3800				
E	-15.2300	-15.0109	-15.0010	0.0965	0.0093	4.83E-023	OK
	-14.8900	0.0009	0.0010				
D	-14.9998	-14.9934	-14.9982	0.0597	0.0001	4.96E-025	OK
	0.0008	0.0007	0.0008				
	5.0157	5.5979	5.0659				
	-2.3662	-2.1274	-2.6763				
	-63.3934	-89.6596	-62.0175				
D3	-14.9436	-14.9763	-14.9763	0.0519	3.86E-015	3.08E-018	OK
	0.0010	0.0015	0.0015				
	1.8257	0.4349	0.4349				
	-2.3309	-3.2027	-3.2027				
	-381.5921	-156.9067	-156.9067				
	-316.7341	-284.6948	-284.6948				
	23218.0832	20769.1513	20769.1513				
	166.2690	15.3598	15.3598				
	-40823.5585	-53543.9633	-53543.9633				
	960238.9135	1688860.9909	1688860.9907				
	-4191.9596	-3806.1517	-3806.1517				
	1076865.5353	1424756.6024	1424756.6023				
	54044393.2060	94399924.3712	94399924.3638				
	-1486002377.8604	-6468651062.7508	-6468651062.3073				
	9646.3580	-5126.5580	-5126.5580				
	-348056.9378	-666793.1382	-666793.1382				
-430997.5662	131964665.7910	131964665.7842					

Πίνακας 50: Πίνακας Αποτελεσμάτων της διαδικασίας Μικτών Εξίσωσης Συνθηκών

Στον Πίνακα 50, όπου :

- $X \rightarrow$ είναι οι προσεγγιστικές τιμές των αγνώστων των μοντέλων (ως προσεγγιστικές χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές της συνόρθωσης χωρίς χρήση του πίνακα βαρών),
- $X_{new} \rightarrow$ είναι οι τιμές των αγνώστων των μοντέλων μετα τη διαδικασία των μικτών εξισώσεων και για ακρίβεια 0,001,

- **X_vce** → είναι οι τιμές των αγνώστων παραμέτρων των μοντέλων μετά τη διαδικασία της εκτίμησης των συνιστωσών μεταβλητότητας και ενός νέου πίνακα βαρών(χρησιμοποιώντας τις τιμές που βρήκαμε με τη διαδικασία των μικτών εξισώσεων , X_new),
- **std** → είναι η τυπική απόκλιση των μοντέλων μετά τη συνόρθωση χωρίς πίνακα βαρών
- **std_new** → είναι η τυπική απόκλιση των μοντέλων μετά τη συνόρθωση μικτών εξισώσεων
- **std_vce** → είναι η τυπική απόκλιση των μοντέλων μετά τη διαδικασία της εκτίμησης συνιστωσών μεταβλητότητας
- **evaluation** → μονόπλευρος έλεγχος της διαδικασίας της εκτίμησης συνιστωσών μεταβλητότητας

Από τον Πίνακα 50, παρατηρούμε ότι η συνόρθωση των μικτών εξισώσεων φέρει αρκετά διαφορετικά αποτελέσματα από εκείνα της απλής συνόρθωσης παρατηρήσεων, το οποίο και ήταν αναμενόμενο καθώς η διαδικασία των μικτών εξισώσεων είναι μια επαναληπτική διαδικασία με σκοπό την προσέγγιση της πραγματικής τιμής των αγνώστων, για επίπεδο ακρίβειας ανάλογα με την εφαρμογή για την οποία προορίζονται οι μετρήσεις. Επίσης εύκολα παρατηρούμε ότι μετά τη διαδικασία της εκτίμησης συνιστωσών μεταβλητότητας και του νέου πίνακα βαρών, οι τιμές των αγνώστων παραμέτρων αλλάζουν δραστικά, γεγονός που επαληθεύει την προηγούμενη διατύπωση που έγινε για τις τιμές της ΓΥΣ, όπως και για τα βάρη των μετρημένων τιμών της βαρύτητας. Η εύρεση του βέλτιστου πίνακα βαρών των παρατηρούμενων παραμέτρων μέσω μίας μεθόδου εκτίμησης συνιστωσών μεταβλητότητας είναι απαραίτητη για τη χρήση των δεδομένων σε εφαρμογές και έρευνες με μεγάλες απαιτήσεις ακρίβειας.

ΜΕΡΟΣ Δ: ΕΝ ΚΑΤΑΚΛΕΙΔΙ

7 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

7.1 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκαν μέθοδοι αξιολόγησης των επίγειων βαρυτημετρικών δεδομένων και δοκιμάστηκαν διαφορετικά μοντέλα διόρθωσης των υπαρχουσών βάσεων μετρήσεων. Ο έλεγχος στη φάση της προεπεξεργασίας των δεδομένων βαρύτητας που έχουν μετρηθεί παλαιότερα στην περιοχή της Ελλάδας βασίστηκε στη σύγκριση σε σημεία του Ελληνικού Βαρυτημετρικού Δικτύου της ΓΥΣ. Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν στο πλαίσιο του ερευνητικού προγράμματος ModernGravNet (ModernGravNet, 2019), στο οποίο συμμετέχει και το Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής (Επιστ. Υπεύθυνος Αναπλ. Καθ. Β. Γρηγοριάδης, Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών, ΑΠΘ). Τόσο απόλυτες, όσο και σχετικές μετρήσεις βαρύτητας χρησιμοποιήθηκαν για την αξιολόγηση των υπαρχουσών βάσεων δεδομένων και μελετήθηκαν τρόποι αντιμετώπισης των ασυμφωνιών που παρατηρήθηκαν.

Κατά τη σύγκριση των δεδομένων παλαιότερων βάσεων της ΓΥΣ με τις νέες παρατηρήσεις που πραγματοποιήθηκαν στο πλαίσιο του ερευνητικού προγράμματος εντοπίστηκε η παρουσία μίας κλίσης στις τιμές των διαφορών Νοτιοδυτικού – Βορειοανατολικού προσανατολισμού. Η παρουσία αυτού του συστηματικού σφάλματος αντιμετωπίστηκε με τη χρήση κατάλληλων παραμετρικών μοντέλων επιφανειών διόρθωσης. Διαφορετικές επιφάνειες διόρθωσης δοκιμάστηκαν και αξιολογήθηκαν μέσω αυστηρών στατιστικών μεθόδων (αξιολόγηση ακρίβειας, αξιοπιστίας, έλεγχοι σημαντικότητας, έλεγχοι προσαρμογής επιφανειών, κ.α.). Μετά την επεξεργασία των μετρήσεων του ερευνητικού και των τιμών της ΓΥΣ, μπορούμε με σιγουριά να διατυπώσουμε τη μεγάλη σημασία της διόρθωσης των τιμών για την περαιτέρω χρήση των δεδομένων. Η χρήση βαρυτημετρικών δεδομένων με τη διατήρηση παρόμοιων συστηματικών σφαλμάτων στην προσέγγιση της επιφάνειας του γεωειδούς μεταδίδεται στις τελικές αποχές, εισάγοντας γεωγραφικώς συσχετισμένα σφάλματα στις εκτιμήσεις του τελικού προϊόντος. Μία παρόμοια συστηματική διαφορά έχει παρατηρηθεί και σε προηγούμενες μελέτες με διαφορετικά δεδομένα (Andritsanos et al., 2017), όπου συγκρίθηκαν αποχές γεωμετρικής μορφής που προέκυψαν από GNSS / χωροστάθμηση και υψόμετρα γεωειδούς από νέα γεωδυναμικά μοντέλα του

δορυφόρου GOCE. Επίσης, γίνεται αντιληπτό ότι όσο πιο περίπλοκο είναι το παραμετρικό μοντέλο, με το οποίο θα πραγματοποιηθεί η διαδικασία της συνόρθωσης, τόσο πιο ακριβή είναι τα αποτελέσματα και οι διορθώσεις.

Δοκιμάστηκαν, επίσης, διαφορετικά μοντέλα συνόρθωσης (μοντέλο εξισώσεων παρατηρήσεων και μικτών εξισώσεων) και επισημάνθηκε η βελτίωση στην εκτίμηση των επιφανειών διόρθωσης με την εισαγωγή επιπλέον μεταβλητών στο πρόβλημα. Το βασικό μειονέκτημα στις μεθόδους βέλτιστης εκτίμησης παραμένει η χρήση ενός πίνακα βαρών που να αντικατοπτρίζει τις ακρίβειες των παρατηρούμενων παραμέτρων. Κάτι τέτοιο δεν είναι πάντοτε εφικτό, όπως στην περίπτωση της παρούσας εργασίας, όπου απουσιάζουν οι πληροφορίες για τις ακρίβειες των δεδομένων της ΓΥΣ. Επιπλέον, η ύπαρξη των εσωτερικών ακριβειών των νέων μετρήσεων βαρύτητας που πραγματοποιήθηκαν δεν εγγυάται πάντοτε την ορθή επιλογή του πίνακα βαρών. Αυτό φάνηκε από τη σύγκριση των λύσεων με τη χρήση του μοναδιαίου πίνακα βαρών. Απαραίτητη για τον λόγο αυτόν κρίνεται η εκτίμηση των συνιστωσών μεταβλητότητας των μετρήσεων για την ορθή επιλογή του πίνακα βάρους. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος MINQUE, ενώ δε μελετήθηκαν διαφορετικές μέθοδοι εκτίμησης. Η βέλτιστη εκτίμηση ενός πίνακα βαρών για τις παρατηρούμενες παραμέτρους κρίνεται απαραίτητή, καθώς η έλλειψη της πληροφορίας της ακρίβειας των μετρήσεων προκαλεί ακραίες μεταβολές στις τελικές εκτιμήσεις.

Τέλος, μελετήθηκε η επίδραση των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων παραμέτρων στην περίπτωση της συνόρθωσης μικτών εξισώσεων. Επιβεβαιώθηκε η ανάγκη πολλαπλού αριθμού επαναλήψεων, λόγω της χρήσης κακών προσεγγιστικών τιμών, ενώ επισημάνθηκε και η ταχεία σύγκλιση των τελικών εκτιμήσεων.

Πέραν των παραπάνω, από τη δημιουργία μαθηματικών επιφανειών παρατηρήθηκε ότι τα μοντέλα έχουν μία κλίση, κυρίως ως προς το γεωδαιτικό πλάτος (φ) των σημείων ελέγχου, γεγονός που πιθανόν οφείλεται σε λάθη στις διορθώσεις των αρχικών μετρήσεων λόγω παλιρροιών. Είναι γνωστό ότι, η μετρούμενη τιμή της βαρύτητας πρέπει να διορθωθεί από την επίδραση των παλιρροιών, οι οποίες εξαρτώνται κυρίως από το γεωδαιτικό πλάτος. Λόγω της απουσίας τεκμηρίωσης των μετρήσεων της ΓΥΣ δεν είναι δυνατή η εύρεση του τρόπου και της μεθόδου διόρθωσης των πρωτογενών μετρήσεων από την επίδραση των παλιρροιών. Η κλίση των επιφανειών διόρθωσης πιθανόν να οφείλεται σε λανθασμένη εφαρμογή διόρθωσης

λόγω παλιρροιών. Παρόλ' αυτά η κλίση των διαφορών που ανιχνεύθηκε πρέπει να αποτελέσει αντικείμενο περαιτέρω μελέτης.

7.2 Προτάσεις

Σε συνέχεια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, η μελέτη του συνόλου της βάσης δεδομένων βαρύτητας για την Ελλάδα κρίνεται απαραίτητη. Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι η τιμή αναφοράς στο θεμελιώδες βάθρο της ΓΥΣ προέκυψε από μεταφορά, μέσω σχετικών μετρήσεων, τιμών αναφοράς από την Ιταλία. Για πρώτη φορά, στο πλαίσιο του ερευνητικού έργου ModernGravNet, μετρήθηκαν απόλυτες μετρήσεις βαρύτητας στην περιοχή της Ελλάδας και συγκρίθηκαν με τις μετρήσεις του υπάρχοντος δικτύου. Η κλίση που ανιχνεύθηκε αντιμετωπίστηκε αρχικώς με τη χρήση επιφανειών διόρθωσης, ενώ έχει εξαιρετικό ενδιαφέρον, μετά τη διόρθωση των μετρήσεων, να πραγματοποιηθεί ο έλεγχος της επίδρασης της συστηματικής αυτής κλίσης στην προσέγγιση της επιφάνειας του γεωειδούς. Μέχρι στιγμής, σύμφωνα με τις πληροφορίες που είχαμε στη διάθεσή μας, σε όλες τις βαρυτημετρικές προσεγγίσεις γεωειδούς στην περιοχή της Ελλάδας δεν έχει ληφθεί υπόψη η κλίση που ανιχνεύθηκε, αφού το σύνολο των βάσεων δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν αναφέρονται στο δίκτυο της ΓΥΣ. Επιπλέον, ενδιαφέρον παρουσιάζει στο μέλλον μια προσέγγιση γεωειδούς του ελλαδικού χώρου με πυκνότερο δίκτυο μετρήσεων, αξιοποιώντας τα δεδομένα των απόλυτων μετρήσεων του δικτύου ModernGravNet. Η εκτίμηση μίας νέας τιμής αναφοράς των μετρήσεων βαρύτητας, η οποία θα στηριχθεί σε απόλυτες μετρήσεις αποτελεί προϋπόθεση για την αξιόπιστη εκτίμηση ενός τοπικού μοντέλου γεωειδούς στην περιοχή της Ελλάδας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική Βιβλιογραφία

- Ανδριτσάνος Β. Δ. (2000) *Βέλτιστος συνδυασμός επίγειων και δορυφορικών δεδομένων με τη χρήση φασματικών τεχνικών για εφαρμογές στη γεωδαισία και την ωκεανογραφία*. Διδακτορική Διατριβή. Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών. Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.
- Αραμπέλος, Δ., (2000). *Βαρυτημετρία. Θεσσαλονίκη: Ζήτη*.
- Βέργος Σ. Γεώργιος,(2006): *Μελέτη του πεδίου βαρύτητας και της θαλάσσιας τοπογραφίας στον Ελληνικό χώρο με συνδυασμό επίγειων δεδομένων και δεδομένων των νέων δορυφορικών αποστολών CHAMP και GRACE*. Διδακτορική Διατριβή. Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών. Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.
- Γλαμπεδάκης, Μ., (2004).*Μαθηματική ανάλυση*. Μακεδονικές Εκδόσεις.
- Γρηγοριάδης Βασίλειος, Ανδριτσάνος Βασίλειος, Νατσιόπουλος Δημήτριος,(2020): *Μετρήσεις απόλυτης Βαρύτητας*. Τεχνική Αναφορά του παραδοτέου D2.1. Εκσυγχρονισμός του Ελληνικού Δικτύου Βαρύτητας. Προσωπική Επικοινωνία.
- Γρηγοριάδης Βασίλειος, Ανδριτσάνος Βασίλειος, Νατσιόπουλος Δημήτριος,(2020): *Μετρήσεις σχετικής τιμής βαρύτητας*. Τεχνική Αναφορά του παραδοτέου D3.1. Εκσυγχρονισμός του Ελληνικού Δικτύου Βαρύτητας. Προσωπική Επικοινωνία.
- Δερμάνης, Α., (1986). *Συνορθώσεις παρατηρήσεων και θεωρία εκτίμησης*. Τόμος 1. Θεσσαλονίκη: Ζήτη.
- Δερμάνης, Α., (1987). *Συνορθώσεις παρατηρήσεων και θεωρία εκτίμησης*. Τόμος 2. Θεσσαλονίκη: Ζήτη.
- Δερμάνης, Α., Φωτίου, Α. (1992). *Μέθοδοι και εφαρμογές συνόρθωσης παρατηρήσεων*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη.
- Μπιλλήρης. Χ., κ.α., (2007) “Εισαγωγή στη Γεωδαισία”. Σημειώσεις. Αθήνα. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο Σχολή Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών Τομέας Τοπογραφίας-Εργαστήριο Ανώτερης Γεωδαισίας.

- Νικολακόπουλος, Κατσάνου, Λαμπράκης, (2015): *Υδρολογία με χρήση γεωγραφικών συστημάτων πληροφοριών και δεδομένων τηλεπισκόπησης*. [ηλεκτρ. βιβλ.] Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών. Διαθέσιμο στο: <http://hdl.handle.net/11419/2520>
- Κωνσταντινίδης, Σ., Ντρίβας, Ν., Πρελορέντζος, Λ., (2007). *Φυσική Ι: Μηχανική & Σύγχρονη Φυσική*. Αθήνα: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Αράκυνθος.
- Ρωσσικόπουλος, Δ.,(1999).*Τοπογραφικά Δίκτυα και Υπολογισμοί*. (2η εκδ). Θεσσαλονίκη: Ζήτη.
- Hofmann-Wellenhof B., (2016) *Φυσική Γεωδαισία*. Επιμ.: Δ.Δεληκαράογλου - Γ.Πάνου. (2η εκδ). Αθήνα: Τζιόλα.

Διεθνής Βιβλιογραφία

- Al-Karargy, E., Hosny, M. and Dawod, G. (2015) *Investigating the Precision of Recent Global Geoid Models and Global Digital Elevation Models for Geoid Modelling in Egypt*. The Regional Conference on Surveying and Development, 3–6. Sharm El-Sheikh, Egypt.
- Andritsanos, V.D. and I.N. Tziavos (2000) Estimation of gravity field parameters by a multiple input/output system. *Physics and Chemistry of the Earth*, 25(1), pp. 39-46.
- Andritsanos VD, Grigoriadis VN, Natsiopoulou DA, Vergos GS, Gruber T, Fecher T (2017) GOCE Variance and Covariance Contribution to Height System Unification. In: International Association of Geodesy Symposia. Springer, Berlin, Heidelberg. doi: 10.1007/1345_2017_12
- Arabelos, D., (1980): Untersuchungen zur gravimetrischen Geoidbestimmung dargestellt am Testgebiet Griechenland, *Wiss. Arb. Univ. Hann.*, Nr. 98, Dissertation
- Arabelos D., (1989): Gravity field approximation in the area of Greece with emphasis on the local characteristics. *Boll. Geod.* 63, 69-84

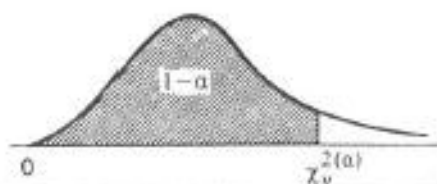
- Arabelos D, Tziavos I.N. (1994): Analysis of IERS-1 and TOPEX altimeter data in the Mediterranean Sea. Presented at the XIX General Assembly of EGS, Grenoble 1994
- Balodimos D.D., (1972): Geoidal Studies in Greece, PhD Dissertation, Oxford
- Claessens, S.J., Featherstone, W.E., Barthelmes, F., (2001). *Experiments with point-mass gravity field modelling in the Perth region, Western Australia*. Geomatics Res Australas 75, pp. 53–86.
- Daras I.,(2008): *Determination of a gravimetric geoid model of Greece using the method of KTH*. Master's of Science Thesis in Geodesy. Sweden: Royal Institute of Technology (KTH), School of Architecture and the Built Environment.
- Erol, B., and Erol, S., (2013). *Learning-based computing techniques in geoid modeling for precise height transformation*; Comput. Geosci. 52 pp. 95–107.
- Featherstone, W.E., (2002). *Expected contributions of dedicated satellite gravity field missions to regional geoid determination with some examples from Australia*, J. Geospatial Eng., 4, pp. 1–19.
- Fotopoulos, G., (2003). *An analysis on the optimal combination of geoid, orthometric and ellipsoidal height data*, PhD thesis, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, Alberta, Calgary.
- Hipkin, R., (2000). Modelling the geoid and sea-surface topography in coastal areas, Physics and Chemistry of the Earth - Series A, vol. 25, no. 1, pp. 9-16.
- Hwang, J.S., Han H. C., Han S. C., Kim K. O., Kim J. H., & Kang M. H.(2012). Gravity and geoid model in South Korea and its vicinity by spherical cap harmonic analysis, Journal of Geodynamics, vol. 53, pp. 27-33.
- Hyo Jin Yang, (2013): *Geoid Determination Based on a Combination of Terrestrial and Airborne Gravity Data in South Korea*. Geodetic Science. The Ohio State University.
- Ihde, J., U. Schirmer, F. Stefani and F. Toppe.,(1998). *Geoid modelling with point masses*. Proceedings of the Second Continental Workshop on the Geoid in Europe, Budapest, March, pp. 199-204.
- Kiani M., (2020). *Local geoid height approximation and interpolation using moving least squares approach*, J of geodesy and Geodynamics. pp. 120-126.

- Pashova,L.,and Jovev,I.,(2007). *Geoid modelling for the Black Sea and future prospects*. In: Guedes Soares, Kolev (eds) Maritime industry, ocean engineering and coastal resources. Taylor & Francis Group, London, pp. 761–768.
- Rapp RH and Pavlis NK (1990): The development and analysis of geopotential coefficients models to spherical harmonic degree 360, J. Geophys. Res., 95(B13)21885-21911
- Torge, W. (1989): Gravimetry. W. de Gruyter, Berlin-New York
- Torge, W. (2001): Geodesy. 3rd. ed., W. de Gruyter, Berlin-New York.
- Tsinis D., (2002): Determination of an astrogeodetic geoid model for the Greek region, Postgraduate dissertation, NTUA, School of Rural and Surveying Engineering, Dep. Of Geoinformatics, Athens, Greece
- Tziavos I.N. (1984): A study of optimum combination of heterogeneous data for the determination of the geoid: A case study of Greece (PhD Dissertation), Thessaloniki, Greece
- Veis G. (1987): The Hellenic Geodetic Reference System. Cadastre and Cartography Agency of Greece, Athens, Greece.
- Tziavos IN, Vergos GS, Mertikas SP, Daskalakis A, Grigoriadis VN, Tripolitsiotis A., (2013). *The contribution of local gravimetric geoid models to the calibration of satellite altimetry data and an outlook of the latest GOCE GGM performance in GAVDOS*. Adv Space Res 51(8) pp. 1502–1522.
- Tziavos, I.N. and V.D. Andritsanos (1999) Recent geoid computations in the Hellenic area. Physics and Chemistry of the Earth, 24(1), pp. 91-96.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Πίνακας Γ4: Εκατοστιαία σημεία της κατανομής χ^2

$$\int_{-\infty}^{\chi_v^{2(\alpha)}} f_{\chi_v}(u) du = P(u \leq \chi_v^{2(\alpha)}) = 1 - \alpha$$



$1-\alpha$	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500
α	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.750	0.500
$v = 1$	0.00004	0.00016	0.00098	0.00393	0.01579	0.1015	0.4549
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	0.5754	1.386
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	1.213	2.366
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.064	1.923	3.357
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.145	1.610	2.675	4.351
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.635	2.204	3.455	5.348
7	0.9893	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	10.34
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	11.34
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.041	9.299	12.34
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.17	13.34
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.04	14.34
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.91	15.34
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	12.79	16.34
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	13.68	17.34
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	14.56	18.34
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	15.45	19.34
21	8.034	8.897	10.28	11.59	13.24	16.34	20.34
22	8.643	9.542	10.98	12.34	14.04	17.24	21.34
23	9.260	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.34
24	9.886	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.34
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.34
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.84	25.34
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.75	26.34
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	27.34
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	28.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	29.34
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	33.66	39.34
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	42.94	49.33
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	52.29	59.33
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	61.70	69.33
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	71.14	79.33
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	80.62	89.33
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	90.13	99.33

Τιμές του $\chi_v^{2(\alpha)}$ για διάφορες τιμές του συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$ και των βαθμών ελευθερίας v .

Εικόνα 28: Κατανομή χ^2 (Δερμάνης κ.α., 1995)

Πίνακας Γ4 (συνέχεια)

$1-\alpha$	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
α	0.250	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
$\nu=1$	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.83
2	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60	13.82
3	4.108	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84	16.27
4	5.385	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86	18.47
5	6.626	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52
6	7.841	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46
7	9.037	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32
8	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96	26.12
9	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88
10	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59
11	13.70	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76	31.26
12	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91
13	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53
14	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12
15	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70
16	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25
17	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79
18	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31
19	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82
20	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.32
21	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80
22	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27
23	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73
24	28.24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18
25	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62
26	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05
27	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64	55.48
28	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89
29	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30
30	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70
40	45.62	51.80	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40
50	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66
60	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61
70	77.58	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2	112.3
80	88.13	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3	124.8
90	98.65	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	137.2
100	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	149.4

Εικόνα 29: Κατανομή χ^2 -συνέχεια (Δερμάνης κ.α., 1995)

Πίνακας Γ5 (συνέχεια)



$1 - \alpha = 0.99 \quad \alpha = 0.01$

$v_1 \backslash v_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	
1	4053	4898.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6023	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366	
2	96.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.56	26.41	26.32	26.27	26.22	26.13	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.96	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.92	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.29	10.87	10.62	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88	6.88
7	12.25	9.65	8.45	7.85	7.46	7.19	6.95	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31	4.31
10	10.04	7.56	6.56	6.00	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.50	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.46	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.13	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.32	2.23	2.14	2.03	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80	1.80
50	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.96	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.70	1.60	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.95	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00	1.00

Εικόνα 30: Κατανομή F (Δερμάνης κ.α., 1995)