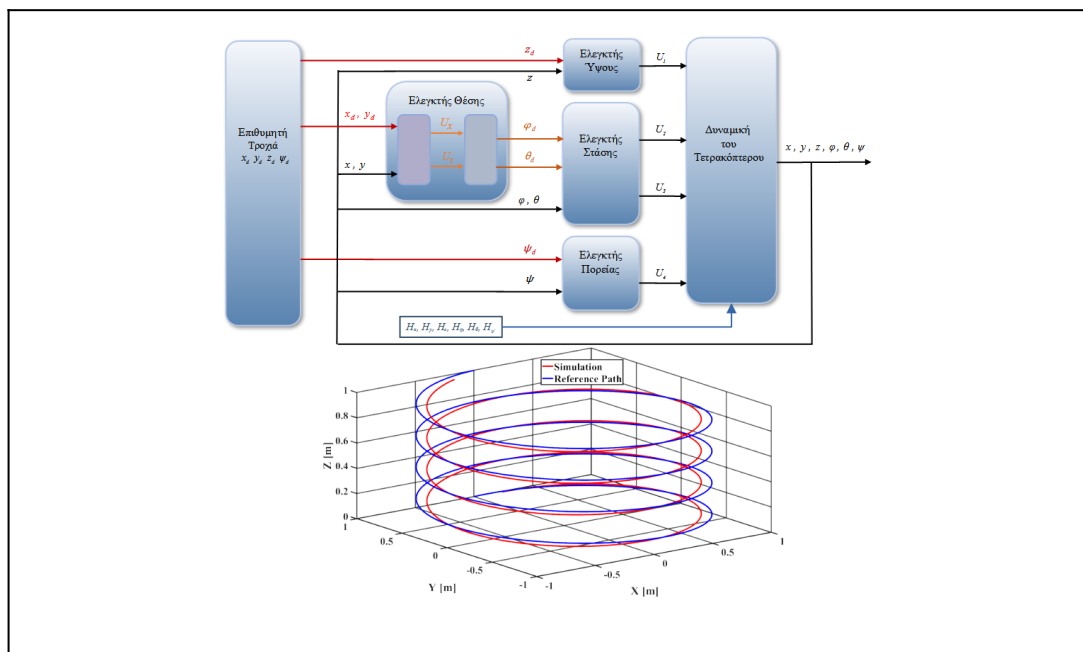


Διπλωματική Εργασία

Μη γραμμικός αυτόματος έλεγχος για μη επανδρωμένα εναέρια οχήματα με τη μέθοδο backstepping



Φοιτητής: Χαράλαμπος Καζακίδης
ΑΜ: 212017149

Επιβλέπων Καθηγητής

Αλέξανδρος Αλεξανδρίδης
Καθηγητής

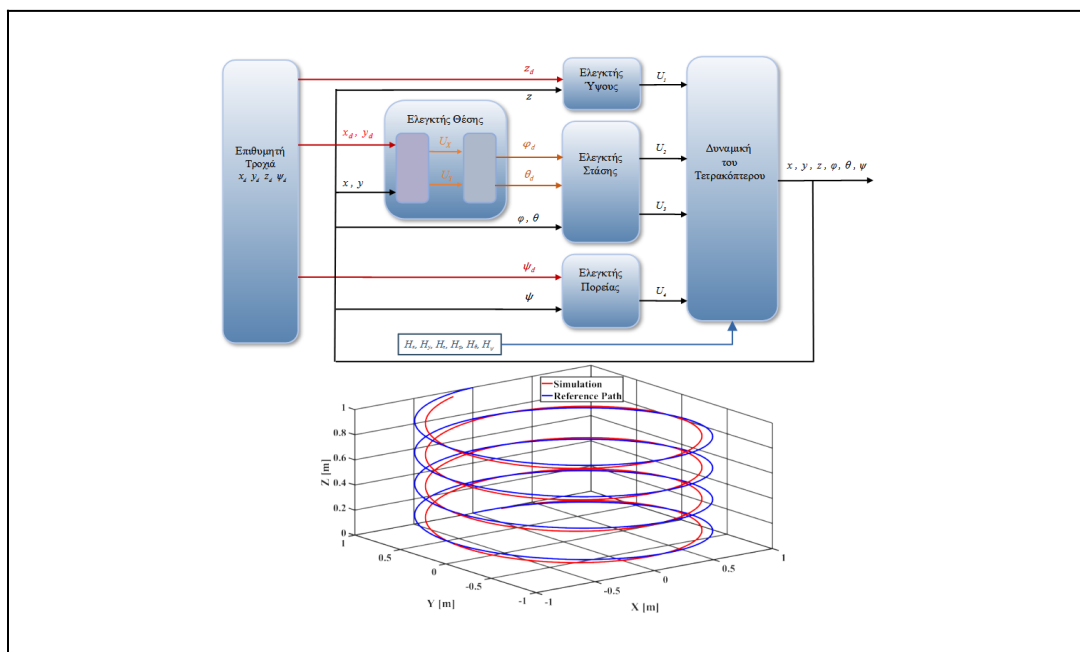
ΑΘΗΝΑ - ΑΙΓΑΛΕΩ, Οκτώβριος 2022



UNIVERSITY OF WEST ATTICA
FACULTY OF ENGINEERING
DEPARTMENT OF ELECTRICAL & ELECTRONICS ENGINEERING

Diploma Thesis

Nonlinear automatic control for unmanned aerial vehicles using backstepping



Student: Charalampos Kazakidis
Registration Number: 212017149

Supervisor

Alex Alexandridis
Professor

ATHENS - EGALEO, October 2022

Η Διπλωματική Εργασία έγινε αποδεκτή και βαθμολογήθηκε από την εξής τριμελή επιτροπή:

Αλεξανδρίδης Αλέξανδρος, Καθηγητής	Μαλατέστας Παντελής, Καθηγητής	Ξενοφών-Διονύσιος Κανδής, Καθηγητής

Copyright © Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ και Χαράλαμπος Καζακίδης,
Οκτώβριος, 2022.**

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τους συγγραφείς.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον/την συγγραφέα του και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις θέσεις του επιβλέποντος, της επιτροπής εξέτασης ή τις επίσημες θέσεις του Τμήματος και του Ιδρύματος.

ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο κάτωθι υπογεγραμμένος Χαράλαμπος Καζακίδης του Δημητρίου, με αριθμό μητρώου 212017149 φοιτητής του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής της Σχολής ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ του Τμήματος ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ,

δηλώνω υπεύθυνα ότι:

«Είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, οι όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε ακριβώς είτε παραφρασμένες, αναφέρονται στο σύνολό τους, με πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία έχει συγγραφεί από μένα αποκλειστικά και αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου, όσο και του Ιδρύματος.

Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του διπλώματός μου.

Επιθυμώ την απαγόρευση πρόσβασης στο πλήρες κείμενο της εργασίας μου μέχρι και έπειτα από αίτησή μου στη Βιβλιοθήκη και έγκριση του επιβλέποντος καθηγητή.»

Ο Δηλών
Χαράλαμπος Καζακίδης



Αφιερώνεται
στην οικογένειά μου,
την Ευαγγελία τον Δημήτρη
την Δέσποινα

Ευχαριστίες

Από αυτή την θέση θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής εργασίας Καθηγητή Αλέξανδρο Αλεξανδρίδη, για την ευκαιρία που μου έδωσε αποδεχόμενος το αίτημά μου για ανάληψη αυτής της διπλωματικής εργασίας. Τον ευχαριστώ ιδιαίτερα για αυτά που έμαθα κατά την διάρκεια της ενασχόλησης μου με το θέμα της διπλωματικής εργασίας. Πλέον ο κόσμος μου δεν είναι γραμμικός. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα κ. Αριστοτέλη Καπνόπουλο για την βοήθειά του και για την υπομονή του τις τελευταίες δύσκολες ημέρες, καλή συνέχεια Αριστοτέλη.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Εμμανουήλ Σμαραγδάκη την κ. Νίκη Τζάνη και την κ. Βικτώρια Μπελίτσου και τον Βαγγέλη Μυτάκη για την βοήθειά τους στον χώρο της εργασίας μου.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου την οποία τα τελευταία χρόνια την έχω αμελήσει. Χωρίς την κατανόηση και την συμπαράστασή που δείξανε όλα αυτά τα χρόνια δεν θα είχα καταφέρει να φτάσω εδώ. Σας ευχαριστώ.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή μελετήθηκε το πρόβλημα παρακολούθησης πηγαίας τροχιάς για το μη γραμμικό σύστημα του τετρακόπτερου χρησιμοποιώντας διάφορες μεθόδους ελέγχου. Ο έλεγχος ενός τετρακόπτερου αποτελεί ένα δύσκολο πρόβλημα καθώς η δυναμική του συμπεριφορά, η οποία σε αυτή την εργασία εξάγεται μέσω των εξισώσεων Newton Euler παρουσιάζει μη γραμμικούς και ισχυρά συζευγμένους όρους πολλαπλών εισόδων - εξόδων.

Ο έλεγχος του τετρακόπτερου υλοποιήθηκε με την μέθοδο *backstepping*. Η μέθοδος *backstepping* ανήκει στην κατηγορία των μη γραμμικών μεθόδων ελέγχου. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στη διαμόρφωση δύο μη γραμμικών μεθοδολογιών ελέγχου που χρησιμοποιούν τη μέθοδο *backstepping* για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα παρακολούθησης πηγαίας τροχιάς για το εξεταζόμενο σύστημα, έχοντας παράλληλα εξασφαλιστεί και η θεωρητική ευστάθεια για τα σήματα ελέγχου. Ο πρώτος ελεγκτής *backstepping* που υλοποιείται αντιμετωπίζει το πρόβλημα παρακολούθησης πηγαίας τροχιάς για το σύστημα του τετρακόπτερου, ενώ ο δεύτερος εκτελεί παρακολούθηση πηγαίας τροχιάς υπό διαταραχές. Οι διαταραχές υπό μελέτη είναι μικρού και μεγάλου πλάτους. Σε ένα σενάριο είναι γνωστές στον ελεγκτή ενώ σε άλλο σενάριο είναι άγνωστες στον ελεγκτή.

Επιπλέον υλοποιήθηκε και ένας ελεγκτής LQR για την παρακολούθηση πηγαίας τροχιάς για το σύστημα του τετρακόπτερου. Ο LQR είναι γραμμική μέθοδος ελέγχου και υλοποιήθηκε για σύγκριση με την μη γραμμική μέθοδο *backstepping*. Επιπρόσθετα υλοποιήθηκε και ένας ελεγκτής PID για τον έλεγχο της στάσης και του ύψους του τετρακόπτερου.

Πραγματοποιήθηκαν προσομοιώσεις στο Matlab και τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων επιβεβαιώνουν την αποδοτικότητα της αναπτυσσόμενης μεθοδολογίας.

Λέξεις – κλειδιά

αλγόριθμοι, ελεγκτής LQR, ελεγκτής PID, θεώρημα *Lyapunov*, μέθοδος *backstepping*, μη γραμμικά συστήματα, μη επανδρωμένα εναέρια οχήματα, παρακολούθηση πηγαίας τροχιάς, τετρακόπτερο.

Abstract

In this thesis the trajectory tracking problem for the nonlinear quadcopter system was studied using various control methods. The control of a quadcopter is a difficult problem due to its dynamic behavior, which in this paper is established using Newton Euler formalism equations. The quadcopter is a multiple input – output system with strongly coupled terms. Due to the nonlinear dynamical model the control of the quadcopter is a difficult problem.

The control of the quadcopter was implemented using the backstepping method that is a nonlinear method. Emphasis was given to the formulation of two nonlinear control methods using the backstepping method to address the trajectory tracking problem for the system under consideration while ensuring the theoretical stability of the control signals. The first backstepping controller implemented addresses the quadcopter trajectory tracking problem while the second one performs trajectory tracking under disturbances. The disturbances under consideration are of small and large amplitude. In a scenario the disturbances are known to the controller while in another scenario the disturbances are unknown to the controller.

Additionally an LQR controller was implemented to control the trajectory tracking for the quadcopter system. The LQR is a linear control methodology and it was implemented to compare it with the backstepping method. Moreover a PID controller was implemented to control the attitude and the height of the controller.

Simulations were carried out in Matlab and the results confirm the efficiency of the methodology.

Keywords

algorithm, backstepping method, linear quadratic regulator, Lyapunov theorem, nonlinear systems, PID controller, quadcopter, trajectory tracking, Unmanned aerial vehicle.

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	13
Κεφάλαιο 2 Το μαθηματικό μοντέλο του τετρακόπτερου.....	16
2.1 Το τετρακόπτερο.....	16
2.2 Παραδοχές και υποθέσεις στις οποίες βασίζεται το μοντέλο.....	17
2.3 Συστήματα αναφοράς.....	17
2.3.1 Το αδρανειακό σύστημα αναφοράς.....	18
2.3.2 Το σωματόδετο σύστημα αναφοράς.....	18
2.4 Στροφή διανύσματος στον χώρο.....	19
2.4.1 Πολλαπλές στροφές.....	21
2.5 Γωνίες Euler ή Tait - Bryan.....	21
2.5.1 Μετασχηματισμοί των γωνιακών ταχυτήτων.....	22
2.6 Το κινηματικό μοντέλο του τετρακόπτερου.....	24
2.7 Το δυναμικό μοντέλο του τετρακόπτερου.....	25
2.7.1 Μεταφορική κίνηση.....	25
2.7.2 Περιστροφική κίνηση.....	26
2.8 Υπολογισμός των δυνάμεων.....	29
2.8.1 Η δύναμη του βάρους.....	29
2.8.2 Η οπισθέλκουσα δύναμη D.....	29
2.8.3 Η δύναμη της ώθησης T.....	29
2.8.4 Η ολική δύναμη.....	30
2.9 Υπολογισμός των ροπών.....	31
2.9.1 Ροπή λόγω της ώθησης των ελίκων MT.....	31
2.9.2 Ροπή λόγω της τριβής των ελίκων MD.....	31
2.9.3 Γυροσκοπική ροπή λόγω της περιστροφής των ελίκων MG.....	31
2.9.4 Ροπή λόγω αεροδυναμικών τριβών στο σώμα του τετρακόπτερου MF.....	32
2.9.5 Η συνολική ροπή.....	32
2.10 Μοντελοποίηση των κινητήρων.....	33
2.11 Σχέση τάσης – ώθησης.....	35
2.12 Δυνάμεις και ροπές ως συνάρτηση των τάσεων των κινητήρων.....	36
2.13 Οι δυναμικές εξισώσεις του μοντέλου.....	36
2.14 Περιγραφή του συστήματος με εξισώσεις κατάστασης.....	37
Κεφάλαιο 3 Ελεγκτές PID και LQR.....	38
3.1 Ο PID Ελεγκτής.....	38
3.1.1 Ο αναλογικός ελεγκτής P (Proportional controller).....	38
3.1.2 Ο ολοκληρωτικός ελεγκτής I (Integral controller).....	38
3.1.3 Ο διαφορικός ελεγκτής D (Derivative control).....	39
3.1.4 Ο PID ελεγκτής.....	39
3.1.5 Υλοποίηση στον υπολογιστή.....	40
3.1.6 Ρύθμιση των παραμέτρων του PID ελεγκτή.....	41
3.2 Ο γραμμικός τετραγωνικός ελεγκτής (Linear Quadratic Regulator LQR).....	42
3.2.1 Γραμμικοποίηση του συστήματος.....	43
Κεφάλαιο 4 Μέθοδος Backstepping.....	46
4.1 Σημείο ισορροπίας.....	46
4.2 Ευστάθεια.....	46
4.2.1 Ευσταθές σημείο ισορροπίας.....	46
4.2.2 Ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.....	47
4.2.3 Ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.....	47
4.2.4 Εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.....	48

4.2.5 Ασταθές σύστημα.....	48
4.3 Θετικά – αρνητικά ορισμένες συναρτήσεις.....	49
4.3.1 Θετικά ημιορισμένες συναρτήσεις.....	49
4.3.2 Θετικά ορισμένες συναρτήσεις.....	49
4.3.3 Αρνητικά ημιορισμένες - ορισμένες συναρτήσεις.....	49
4.4 Συνάρτηση Lyapunov.....	49
4.4.1 Παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov $V(x)$	49
4.5 Θεώρημα ευστάθειας Lyapunov.....	49
4.6 Η μέθοδος Backstepping.....	50
4.7 Η μέθοδος Backstepping στο τετρακόπτερο.....	52
4.7.1 Περιγραφή του ελεγκτή.....	52
4.7.2 Εφαρμογή του αλγόριθμου Backstepping - Σχεδιασμός ελεγκτή Backstepping U	52
4.8 Εισαγωγή διαταραχών.....	55
4.8.1 Έλεγχος με γνωστές διαταραχές.....	55
4.8.2 Έλεγχος με άγνωστες διαταραχές.....	57
Κεφάλαιο 5 Προσομοιώσεις – Αποτελέσματα.....	58
5.1 Εισαγωγικά.....	58
5.1.1 Περιγραφή της πειραματικής διαδικασίας.....	59
5.2 Προσομοιώσεις για τον ελεγκτή PID.....	59
5.2.1 Επιθυμητές μεταβλητές ϕ , θ , ψ και z	59
5.3 Προσομοιώσεις για τον ελεγκτή LQR.....	61
5.4 Ελεγκτής Backstepping.....	63
5.4.1 Ελεγκτής Backstepping χωρίς διαταραχές, B1.....	63
5.4.2 Backstepping με διαταραχές.....	67
5.4.2.1 Ελεγκτής Backstepping για μικρές διαταραχές γνωστές στον ελεγκτή, B2a.....	67
5.4.2.2 Ελεγκτής Backstepping για μικρές διαταραχές γνωστές στον ελεγκτή, B2b.....	69
5.4.2.3 Ελεγκτής Backstepping για μικρές διαταραχές άγνωστες στον ελεγκτή B3a.....	72
5.4.2.4 Ελεγκτής Backstepping για μικρές διαταραχές άγνωστες στον ελεγκτή B3b.....	73
5.4.2.5 Ελεγκτής Backstepping για μεγάλες διαταραχές γνωστές στον ελεγκτή, B4.....	74
5.4.3 Σχολιασμός των αποτελεσμάτων.....	77
Κεφάλαιο 6 Συμπεράσματα.....	78
Βιβλιογραφικές αναφορές.....	79

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 4.1: Ζεύγη μεταβλητών κατάστασης.....	53
Πίνακας 5.1: Σταθερές για το μοντέλο προσομοίωσης.....	59
Πίνακας 5.2: Παράμετροι των τεσσάρων ελεγκτών.....	61
Πίνακας 5.3: Τιμές των διαγωνίων στοιχείων των πινάκων Q και R.....	62
Πίνακας 5.4: Επίδοση του ελεγκτή LQR.....	63
Πίνακας 5.5: Συντελεστές του ελεγκτή Backstepping B1.....	64
Πίνακας 5.6: Επίδοση του ελεγκτή Backstepping B1.....	64
Πίνακας 5.7: Συνοπτικός πίνακας επιδόσεων για τους ελεγκτές LQR και B1.....	67
Πίνακας 5.8: Συντελεστές του ελεγκτή Backstepping B2a.....	68
Πίνακας 5.9: Επίδοση του ελεγκτή Backstepping B2a.....	69
Πίνακας 5.10: Συντελεστές για τον ελεγκτή B2b.....	71
Πίνακας 5.11: Επίδοση του ελεγκτή B2b.....	72
Πίνακας 5.12: Συντελεστές για τον ελεγκτή B3a.....	73
Πίνακας 5.13: Συντελεστές για τον ελεγκτή B3b.....	74
Πίνακας 5.14: Επίδοση του ελεγκτή B3.....	75
Πίνακας 5.15: Συντελεστές για τον ελεγκτή B4.....	77
Πίνακας 5.16: Επίδοση του ελεγκτή B4.....	78

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 2.1: Διάταξη των κινητήρων του τετρακόπτερου.....	16
Σχήμα 2.2: Οι άξονες του σωματόδετου συστήματος αναφοράς.....	17
Σχήμα 2.3: Το αδρανειακό O_{Exyz} και το σωματόδετο O_{Bxyz} σύστημα αναφοράς.....	18
Σχήμα 2.4: Στροφή διανύσματος γύρω από τον άξονα Oz	20
Σχήμα 2.5: Συστήματα συντεταγμένων σε γωνία θ μεταξύ τους.....	21
Σχήμα 2.6: Ισοδύναμο κύκλωμα του κινητήρα συνεχούς ρεύματος.....	34
Σχήμα 3.1: Σύστημα αυτόματου ελέγχου κλειστού βρόχου.....	38
Σχήμα 3.2: Σύστημα αυτόματου ελέγχου κλειστού βρόχου με αναλογικό ελεγκτή P.....	38
Σχήμα 3.3: Σύστημα αυτόματου ελέγχου κλειστού βρόχου με ολοκληρωτικό ελεγκτή I.....	39
Σχήμα 3.4: Σύστημα αυτόματου ελέγχου κλειστού βρόχου με διαφορικό ελεγκτή D.....	39
Σχήμα 3.5: Ο PID ελεγκτής.....	40
Σχήμα 3.6: Ελεγκτής γραμμικής ανάδρασης της πλήρους κατάστασης του συστήματος.....	42
Σχήμα 4.1: Ευσταθές σημείο ισορροπίας.....	47
Σχήμα 4.2: Ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.....	47
Σχήμα 4.3: Ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.....	48
Σχήμα 4.4: Ασταθές σημείο ισορροπίας.....	48
Σχήμα 4.5: Το διάγραμμα ελέγχου κλειστού βρόχου.....	52
Σχήμα 4.6: Το διάγραμμα ελέγχου κλειστού βρόχου με γνωστές διαταραχές.....	56
Σχήμα 4.7: Το διάγραμμα ελέγχου κλειστού βρόχου με άγνωστες διαταραχές.....	57
Σχήμα 5.1: Σχήμα ελέγχου με PID ελεγκτές.....	60
Σχήμα 5.2: Αποτελέσματα της προσομοίωσης του τετρακόπτερου με PID ελεγκτή.....	60
Σχήμα 5.3: Απόκριση του τετρακόπτερου με LQR ελεγκτή και $T_s=10ms$	62
Σχήμα 5.4: Τρισδιάστατη απεικόνιση της τροχιάς.....	62
Σχήμα 5.5: Απόκριση της θέσης και της στάσης του τετρακόπτερου για τον ελεγκτή B1a.....	64
Σχήμα 5.6: Τρισδιάστατη απεικόνιση της θέσης του τετρακόπτερου για τον ελεγκτή B1a.....	64
Σχήμα 5.7: Ελεγκτής B1b με χρόνο δειγματοληψίας 20ms.....	65
Σχήμα 5.8: Ελεγκτής B1b με χρόνο δειγματοληψίας 20ms.....	65
Σχήμα 5.9: Ελεγκτής B1c με χρόνο δειγματοληψίας 40ms.....	66

Σχήμα 5.10: Ελεγκτής B1c με χρόνο δειγματοληψίας 40ms.....	66
Σχήμα 5.11: Δυνάμεις από μικρές, γνωστές διαταραχές B2a.....	67
Σχήμα 5.12: Ροπές από μικρές, γνωστές διαταραχές B2a.....	67
Σχήμα 5.13: Θέση και στάση για μικρές, γνωστές διαταραχές B2a.....	68
Σχήμα 5.14: Τρισδιάστατη απεικόνιση της θέσης για μικρές, γνωστές διαταραχές B2a.....	68
Σχήμα 5.15: Δυνάμεις από μικρές, γνωστές διαταραχές B2b.....	69
Σχήμα 5.16: Ροπές από μικρές, γνωστές διαταραχές B2b.....	69
Σχήμα 5.17: Θέση και στάση για μικρές, γνωστές διαταραχές B2b.....	71
Σχήμα 5.18: Τρισδιάστατη απεικόνιση της θέσης για μικρές, γνωστές διαταραχές B2b.....	71
Σχήμα 5.19: Θέση και στάση για μικρές, γνωστές διαταραχές B3a.....	72
Σχήμα 5.20: Τρισδιάστατη απεικόνιση της θέσης για μικρές, γνωστές διαταραχές B3a.....	73
Σχήμα 5.21: Θέση και στάση για μικρές, γνωστές διαταραχές B3b.....	74
Σχήμα 5.22: Τρισδιάστατη απεικόνιση της θέσης για μικρές, γνωστές διαταραχές B3b.....	74
Σχήμα 5.23: Δυνάμεις από μεγάλες, γνωστές διαταραχές B4.....	75
Σχήμα 5.24: Ροπές από μεγάλες, γνωστές διαταραχές B4.....	75
Σχήμα 5.25: Θέση και στάση για μεγάλες, γνωστές διαταραχές B4.....	76
Σχήμα 5.26: Τρισδιάστατη απεικόνιση της θέσης για μεγάλες, γνωστές διαταραχές B4.....	77

Κεφάλαιο 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αντικείμενο αυτής της εργασίας αποτελεί ο αυτόματος έλεγχος ενός μη επανδρωμένου εναέριου οχήματος (Unmanned Aerial Vehicle - UAV) με κατακόρυφη απογείωση και προσγείωση (Vertical Take off and Landing - VTOL). Ένα όχημα που ανήκει σε αυτή την κατηγορία είναι το τετρακόπτερο. Τα τετρακόπτερα ελέγχονται είτε με τηλεχειρισμό είτε εκτελούν αυτόνομη πτήση ακολουθώντας μια προκαθορισμένη τροχιά.

Τα πρώτα τετρακόπτερα κατασκευάστηκαν στις αρχές του 1900 [1] και από τότε εξελίσσονται συνεχώς όσον αφορά το μέγεθός τους και τον έλεγχο της πτήσης. Οι εξελίξεις στους τομείς της μηχανικής όσο αφορά τα υλικά και η αλματώδης εξέλιξη στον τομέα των μικροϋπολογιστών έδωσαν τεράστια ώθηση στην ανάπτυξη του τετρακόπτερου. Σήμερα αναπτύσσονται τετρακόπτερα για συγκεκριμένες εφαρμογές, καθώς διευρύνεται συνεχώς το πεδίο εφαρμογών του τετρακόπτερου. Οι εφαρμογές ξεκινάνε από πολιτικές εφαρμογές όπως επιτήρηση δασών [2], γεωργία ακριβείας [3], φωτογράφιση, διάσωση και καταλήγουν σε στρατιωτικές εφαρμογές [4].

Τα τετρακόπτερα είναι ελικοφόρα οχήματα με τέσσερις έλικες οι οποίοι κινούνται από τέσσερις αντίστοιχους κινητήρες. Οι κινητήρες είναι συνήθως συνεχούς ρεύματος. Το τετρακόπτερο είναι μια συμμετρική κατασκευή με δύο επίπεδα συμμετρίας καθώς οι κινητήρες είναι τοποθετημένοι σε διάταξη σταυρού, με τους βραχίονες να είναι όμοιοι μεταξύ τους. Η παραπάνω διάταξη διευκολύνει την μαθηματική μοντελοποίηση του τετρακόπτερου.

Η κατάσταση του τετρακόπτερου, η θέση του και η στάση του στον χώρο περιγράφεται από έξι μεταβλητές. Αυτό όμως που ελέγχεται είναι η γωνιακή ταχύτητα των τεσσάρων κινητήρων του, με αποτέλεσμα το τετρακόπτερο να αποτελεί ένα υποδιεγερόμενο μη γραμμικό σύστημα πολλαπλών εισόδων - εξόδων (Multiple Input Multiple Output - MIMO) με ισχυρά συζευγμένους όρους. Ως συνέπεια των παραπάνω, η επιτυχής αντιμετώπιση του προβλήματος ελέγχου του τετρακόπτερου συνιστά ένα δύσκολο εγχείρημα.

Για την επίλυση του προβλήματος του ελέγχου του τετρακόπτερου έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι από ερευνητές. Οι πρώτες προσπάθειες ελέγχου εστίασαν στη χρήση γραμμικών μεθοδολογιών ελέγχου. Πιο συγκεκριμένα έχουν προταθεί ελεγκτές τύπου PID [4-5] οι οποίοι απορρίπτουν τους μη γραμμικούς όρους και γίνεται προσπάθεια να μηδενιστεί το σφάλμα στις μεταβλητές που ελέγχονται. Μια άλλη κατηγορία γραμμικών ελεγκτών στους οποίους αντιμετωπίζεται το πρόβλημα ελέγχου για το σύστημα του τετρακόπτερου είναι οι γραμμικοί τετραγωνικοί ελεγκτές (Linear Quadratic Regulator - LQR) [6-7]. Σε αυτούς το σύστημα γραμμικοποιείται σε συνθήκες αιώρησης, ενώ ο έλεγχος του συστήματος επιτυγχάνεται με ανάδραση του διανύσματος κατάστασης, πολλαπλασιασμένο με έναν κατάλληλο πίνακα κερδών, έτσι ώστε το σύστημα να γίνει ευσταθές. Στην εργασία [8] προτείνεται η μεθοδολογία H_∞ για την γραμμικοποίηση και την εύρεση του νόμου ελέγχου για το σύστημα του τετρακόπτερου. Οι γραμμικές μέθοδοι ελέγχου έχουν το μειονέκτημα της απώλειας μη γραμμικών όρων του συστήματος οι οποίοι σε ορισμένες συνθήκες κυριαρχούν. Πολλά από τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι γραμμικοί ελεγκτές μπορούν να ξεπεραστούν χρησιμοποιώντας μη γραμμικούς ελεγκτές με αποτέλεσμα την βελτίωση της ευστάθειας και της ελεγκσιμότητας του τετρακόπτερου.

Άλλοι ερευνητές έχουν εφαρμόσει μη γραμμικές μεθόδους ελέγχου για την επίλυση του προβλήματος ελέγχου του τετρακόπτερου. Μια μη γραμμική μέθοδος είναι και ο προβλεπτικός έλεγχος (Model Predictive Control - MPC) [9] ο οποίος έχει εφαρμοστεί στις εργασίες [10 - 13] με νευρωνικά δίκτυα (Neural Networks - NN) [14] και συναρτήσεις ακτινικής βάσης (Radial Basis Functions - RBF). Ο MPC βασίζεται στην ιδέα της χρήσης ενός δυναμικού μοντέλου που περιγράφει το σύστημα για την πρόβλεψη και τη βελτιστοποίηση της μελλοντικής συμπεριφοράς του

συστήματος. Οι συντελεστές της συνάρτησης ελέγχου προσδιορίζονται με μεθόδους βελτιστοποίησης [15] με σκοπό την ελαχιστοποίηση του προβλεπόμενου σφάλματος των μεταβλητών κατάστασης. Στην εργασία [16] έχει εφαρμοστεί MPC για παρακολούθηση τροχιάς όπου η βελτιστοποίηση βασίστηκε σε αλγόριθμο ευφυΐας σμήνους (Particle Swarm Optimization – PSO) [17-19]. Μια ακόμη μη γραμμική μέθοδος είναι ο έλεγχος ολίσθησης επί επιφάνειας (Sliding Mode Control - SMC) [20]. Η βασική αρχή αυτής της μεθόδου ελέγχου είναι ο προσδιορισμός μιας τροχιάς των ελεγχόμενων μεταβλητών επάνω στην οποία είναι επιθυμητό να κινούνται οι ελεγχόμενες μεταβλητές. Ο SMC, βάσει της συνάρτησης ελέγχου οδηγεί τις ελεγχόμενες μεταβλητές σε μια ειδική τροχιά “ολίσθησης”, περιορίζοντάς τες να κινούνται μόνο εκεί. Η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε στην εργασία [21] για τον έλεγχο της στάσης ενός μικρού ελικοπτερου. Στην εργασία [22] αναδεικνύονται τα πλεονεκτήματα ενός ελεγκτή SMC για τον έλεγχο του ύψους και της στάσης, ρυθμίζοντας τις παραμέτρους του με νευρωνικά δίκτυα [23-25]

Μειονέκτημα του SMC είναι η διακοπτική λειτουργία, η οποία εισάγει ταλαντώσεις υψηλής συχνότητας και μικρού πλάτους [26] ενώ αντίστοιχα μειονέκτημα του γραμμικού MPC αποτελεί η χρήση γραμμικοποιημένου συστήματος στην συνάρτηση βελτιστοποίησης. Ο έλεγχος Backstepping αντιμετωπίζει τα παραπάνω μειονεκτήματα καθώς η λειτουργία είναι συνεχής και επιπλέον λαμβάνεται υπόψη το μη γραμμικό μοντέλο κατά τη φάση της σχεδίασης. Η μέθοδος Backstepping βασίζεται στο θεώρημα *Lyapunov* [27]. Στη μέθοδο αυτή, ο έλεγχος του συστήματος γίνεται σε μικρά βήματα, από την έξοδο προς την είσοδο του συστήματος. Σε κάθε βήμα απαιτούμε το κάθε σύστημα να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Στο τέλος αφού όλα τα υποσυστήματα είναι ασυμπτωτικά ευσταθή τότε και ολόκληρο το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Στην εργασία [28] ο έλεγχος backstepping χρησιμοποιήθηκε για τον έλεγχο τετρακόπτερου για αυτόνομη απογείωση, προσγείωση, αιώρηση και αποφυγή εμποδίων.

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία πραγματοποιείται η υλοποίηση έξι ελεγκτών τύπου backstepping, για τον επιτυχή έλεγχο της παρακολούθησης πηγαίας τροχιάς για το σύστημα του τετρακόπτερου. Ο προσδιορισμός των απαιτούμενων συντελεστών σχεδιασμού του ελεγκτή είναι ένα δύσκολο και χρονοβόρο έργο το οποίο απαιτεί συνήθως την διαδικασία δοκιμής και ελέγχου. Για την εύρεση των συντελεστών χρησιμοποιούνται μέθοδοι βελτιστοποίησης, στην εργασία αυτή χρησιμοποιήθηκε η διαφορική εξέλιξη (Differential Evolution - DE) [29-30], η οποία ανήκει στην κατηγορία των εξελικτικών αλγορίθμων [31].

Επιπλέον υλοποιήθηκαν ελεγκτές για να αντιμετωπίσουν διαταραχές οι οποίες οφείλονται σε φαινόμενα όπως ο αέρας. Οι διαταραχές αυτές δίνονται ως συναρτήσεις γραμμικών και γωνιακών επιταχύνσεων οι οποίες εισάγονται στο βρόχο ελέγχου και διαταράσσουν την ηρεμία. Οι διαταραχές είναι δύο κατηγοριών, η πρώτη κατηγορία είναι διαταραχές μικρού πλάτους αλλά συνεχείς στον χρόνο, ενώ στην δεύτερη κατηγορία είναι απότομες, μεγάλου πλάτους αλλά μικρής χρονικής διάρκειας. Υλοποιήθηκαν δύο κατηγορίες ελεγκτών για την κάθε διαταραχή, στη μια κατηγορία οι διαταραχές είναι γνωστές κατά την σχεδίαση του ελεγκτή ενώ στη δεύτερη είναι άγνωστες και εισάγονται μόνο στο μοντέλο κατά την προσομοίωση. Οι προσομοιώσεις έδειξαν ότι η μέθοδος είναι αποτελεσματική και συγκρινόμενη με τον ελεγκτή LQR φαίνεται ότι δίνει καλύτερα αποτελέσματα όσον αφορά την παρακολούθηση πηγαίας τροχιάς.

Η δομή της υπόλοιπης εργασίας οργανώνεται ως εξής:

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται το τετρακόπτερο και οι παραδοχές πάνω στις οποίες θα εξαχθεί το μαθηματικό μοντέλο. Το μαθηματικό μοντέλο του τετρακόπτερου εξάγεται μέσω των εξισώσεων Newton Euler, επιπλέον γίνεται η μοντελοποίηση των κινητήρων συνεχούς ρεύματος.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι ελεγκτές PID και LQR, για τον ελεγκτή PID παράγεται και η εξίσωση διακριτού χρόνου η οποία θα χρησιμοποιηθεί για τον προγραμματισμό στον υπολογιστή. Για τον ελεγκτή LQR παράγεται το γραμμικοποιημένο μοντέλο του συστήματος.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι έννοιες της ευστάθειας, της ευστάθειας κατά *Lyapunov* και στην συνέχεια παρουσιάζεται η μέθοδος backstepping, στο τέλος του κεφαλαίου γίνεται εφαρμογή στο σύστημα του τετρακόπτερου υλοποιώντας έναν ελεγκτή.

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνονται οι προσομοιώσεις και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα. Υλοποιήθηκαν προσομοιώσεις για έλεγχο παρακολούθησης πηγαίας τροχιάς με τις μεθόδους backstepping και LQR καθώς και έλεγχος της στάσης και του ύψους του τετρακόπτερου με ελεγκτή PID. Ειδικά για την μέθοδο backstepping έγιναν προσομοιώσεις με σενάρια όπου το τετρακόπτερο υπόκειται σε διαταραχές. Στο τέλος του κεφαλαίου σχολιάζονται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων.

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα από την εργασία για την μέθοδο ελέγχου backstepping.

Κεφάλαιο 2 Το μαθηματικό μοντέλο του τετρακόπτερου

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξεταστεί το μαθηματικό μοντέλο του τετρακόπτερου και ότι αφορά την κινηματική και την δυναμική αυτού.

2.1 Το τετρακόπτερο

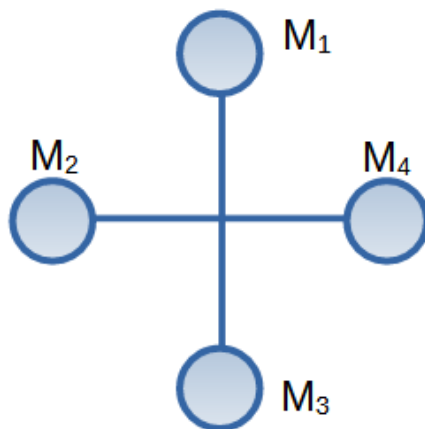
Σήμερα για την εκτέλεση κάποιων εργασιών οι οποίες χαρακτηρίζονται ως ανιαρές, δύσκολες ή επικίνδυνες χρησιμοποιούνται αυτόματες μηχανές. Μία κατηγορία αυτόματων μηχανών είναι και οι ιπτάμενες μηχανές οι οποίες ονομάζονται μη επανδρωμένα εναέρια οχήματα. Τα οχήματα αυτά δεν μεταφέρουν τον χειριστή του οχήματος, αλλά ελέγχονται από απόσταση μέσω συστήματος τηλεπισκόπησης – τηλεκατεύθυνσης ή ελέγχονται από υπολογιστικό σύστημα. Το υπολογιστικό σύστημα είναι ενσωματωμένο στο όχημα και επικουρείται από συστήματα τηλεπισκόπησης, και αδρανειακών μονάδων μέτρησης.

Ένα είδος UAV είναι και το τετρακόπτερο (Quadcopter), το τετρακόπτερο έχει τέσσερα πανομοιότυπα συστήματα κινητήρα – έλικα τα οποία είναι υπεύθυνα για την κίνηση του τετρακόπτερου στον χώρο. Οι ταχύτητες περιστροφής των τεσσάρων ελίκων προσδιορίζουν επακριβώς την θέση του τετρακόπτερου στον χώρο κάθε χρονική στιγμή.

Οι τέσσερις κινητήρες του τετρακόπτερου μπορούν να διαταχθούν σε δύο σχηματισμούς:

1. Σχηματισμός όπου οι τέσσερις κινητήρες έχουν τοποθετηθεί στις άκρες δύο κάθετων μεταξύ τους δοκών σχηματίζοντας το σύμβολο του αθροίσματος +.
2. Σχηματισμός όπου οι τέσσερις κινητήρες έχουν τοποθετηθεί στις άκρες δύο δοκών που σχηματίζουν το γράμμα X.

Στην παρούσα εργασία έχει επιλεγθεί ο σχηματισμός (+) όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1



Σχήμα 2.1: Διάταξη των κινητήρων του τετρακόπτερου

Η προς τα εμπρός κίνηση του τετρακόπτερου ταυτίζεται με την κατεύθυνση την οποία δείχνει ο κινητήρας M_1 και η προς τα αριστερά κίνηση ταυτίζεται με την κατεύθυνση που δείχνει ο M_2 .

Το πλεονέκτημα του τετρακόπτερου και γενικά όλων των ελικοπτέρων σε σχέση με τα αεροσκάφη σταθερών πτερυγίων είναι η δυνατότητα για κατακόρυφη απογείωση και προσγείωση με επακόλουθο την μικρή απαιτούμενη επιφάνεια για την απογείωση και την προσγείωση.

Το τετρακόπτερο έχει έξι βαθμούς ελευθερίας, οι τρεις αναφέρονται στην θέση του στον χώρο, ενώ οι άλλες τρεις αναφέρονται στην στάση του (attitude), δηλαδή την περιστροφή του στον χώρο. Τα τετρακόπτερα είναι μη γραμμικά δυναμικά συστήματα με ισχυρά συζευγμένους όρους. Η θέση τους

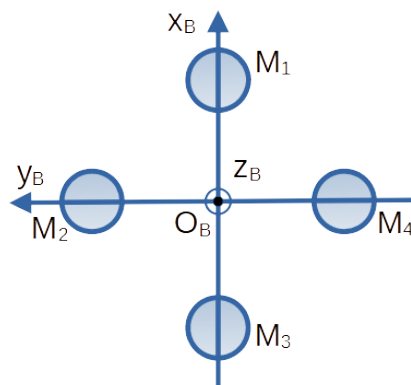
εξαρτάται από την στάση τους και είναι υποδιεγειρόμενα αφού έχουν έξι βαθμούς ελευθερίας και ελέγχουμε τις γωνιακές ταχύτητες των τεσσάρων ελίκων.

Για να ελεγχθεί το τετρακόπτερο πρέπει να μεταβληθούν οι ταχύτητες των τεσσάρων ελίκων. Το τετρακόπτερο αιωρείται όταν οι έλικες περιστρέφονται με τέτοια γωνιακή ταχύτητα ώστε να παράγουν ώθηση ίση ακριβώς με την δύναμη του βάρους του. Το τετρακόπτερο απογειώνεται (κατακόρυφη άνοδος) όταν οι έλικες περιστρέφονται με μεγαλύτερη ταχύτητα από την ταχύτητα αιώρησης. Το τετρακόπτερο προσγειώνεται (κατακόρυφη κάθοδος) όταν οι έλικες κινούνται με ταχύτητα μικρότερη από την ταχύτητα αιώρησης. Η προς τα εμπρός κίνηση επιτυγχάνεται όταν ο κινητήρας M_3 περιστρέφεται με μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα από την ταχύτητα που περιστρέφεται ο κινητήρας M_1 και το αντίστροφο για κίνηση προς τα πίσω. Η κίνηση προς τα αριστερά επιτυγχάνεται όταν ο κινητήρας M_4 περιστρέφεται με μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα από την ταχύτητα που περιστρέφεται ο κινητήρας M_2 και το αντίστροφο για κίνηση προς τα δεξιά.

2.2 Παραδοχές και υποθέσεις στις οποίες βασίζεται το μοντέλο

Για την ανάλυση που ακολουθεί έχουν γίνει οι εξής παραδοχές:

- Το σώμα του τετρακόπτερου θεωρείται άκαμπτο.
- Οι έλικες θεωρούνται άκαμπτες.
- Το τετρακόπτερο θεωρείται ότι είναι μια ιδανικά συμμετρική κατασκευή έτσι ώστε η μήτρα αδράνειας να είναι διαγώνια, με δύο επίπεδα συμμετρίας το $z_B O_B x_B$ και το $z_B O_B y_B$.
- Χρησιμοποιούμε δύο ορθογώνια συστήματα αναφοράς, ένα αδρανειακό (σταθερό) σύστημα αναφοράς E και ένα προσδεδεμένο στο σώμα του σκάφους κινούμενο με αυτό, το σωματόδετο σύστημα αναφοράς B .
- Το κέντρο βάρους του τετρακόπτερου συμπίπτει με την αρχή των αξόνων του σωματόδετου συστήματος αναφοράς, επιπλέον οι άξονες του σωματόδετου συστήματος αναφοράς συμπίπτουν με τους κύριους κεντροβαρικούς άξονες του τετρακόπτερου σχήμα 2.2. Τα επίπεδα $z_B O_B x_B$ και $z_B O_B y_B$ είναι τα επίπεδα συμμετρίας του τετρακόπτερου.

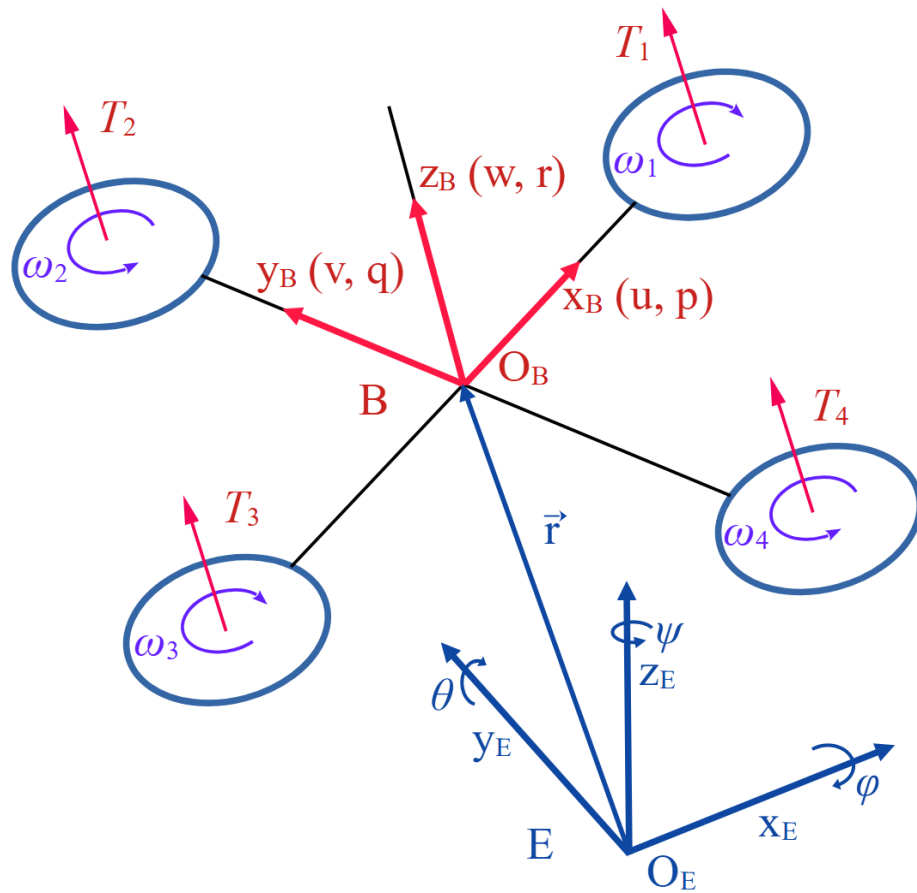


Σχήμα 2.2: Οι άξονες του σωματόδετου συστήματος αναφοράς

2.3 Συστήματα αναφοράς

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω για την ανάλυση της κίνησης του τετρακόπτερου χρησιμοποιούνται δύο συστήματα αναφοράς. Το ένα σύστημα αναφοράς είναι σταθερό και για τον σκοπό αυτής της εργασίας θεωρείται αδρανειακό. Το άλλο σύστημα αναφοράς θεωρείται ότι είναι σταθερά τοποθετημένο επάνω στο σώμα του τετρακόπτερου, με αποτέλεσμα να κινείται και να περιστρέφεται στον χώρο μαζί με το τετρακόπτερο.

Τα δύο συστήματα αναφοράς φαίνονται στο σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3: Το αδρανειακό $O_E x y z$ και το σωματόδετο $O_B x y z$ σύστημα αναφοράς

2.3.1 Το αδρανειακό σύστημα αναφοράς

Το σταθερό σύστημα αναφοράς E , $O_E x_E y_E z_E$ θεωρείται ότι είναι αδρανειακό για την συγκεκριμένη εφαρμογή και το έχουμε τοποθετήσει σταθερά επάνω στην γη. Ο προσανατολισμός είναι ως εξής, ο άξονας $O_E x_E$ δείχνει τον Βορρά, ο άξονας $O_E y_E$ δείχνει την Δύση και ο άξονας $O_E z_E$ δείχνει προς τα επάνω, αντίθετα με το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας της Γης. Το αδρανειακό σύστημα αναφοράς χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του διανύσματος θέσης Γ^E [m] του τετρακόπτερου καθώς και των γωνιών περιστροφής Θ^E [rad] αυτού στον χώρο, φαίνονται στην σχέση (2.1)

$$\begin{aligned} \Gamma^E &= [x \quad y \quad z]^T \\ \Theta^E &= [\varphi \quad \theta \quad \psi]^T \end{aligned} \quad (2.1)$$

2.3.2 Το σωματόδετο σύστημα αναφοράς

Το σωματόδετο σύστημα αναφοράς B , $O_B x y z$ βρίσκεται σταθερά επάνω στο σώμα του τετρακόπτερου κινείται και περιστρέφεται μαζί με αυτό. Ο άξονας $O_B x_B$ δείχνει την κίνηση προς τα εμπρός, ο άξονας $O_B y_B$ δείχνει την κίνηση προς τα αριστερά και ο άξονας $O_B z_B$ συμπληρώνει το δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων, όταν το τετρακόπτερο δεν έχει κλίση στον χώρο τότε αυτός ο άξονας δείχνει την κίνηση προς τα επάνω. Η αρχή των αξόνων O_B συμπίπτει με το κέντρο βάρους του τετρακόπτερου.

Το διάνυσμα της γραμμική ταχύτητα v^B [$m \cdot s^{-1}$] δίνεται από την σχέση (2.2)

$$\mathbf{v}^B = [u \quad v \quad w]^T \quad (2.2)$$

Η γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}^B$ [rad·s⁻¹] δίνεται από την σχέση (2.3)

$$\boldsymbol{\omega}^B = [p \quad q \quad r]^T \quad (2.3)$$

Οι δυνάμεις οι οποίες εξασκούνται στο τετρακόπτερο συμβολίζονται με \mathbf{F}^B [N].

Οι ροπές οι οποίες εξασκούνται στο τετρακόπτερο συμβολίζονται με \mathbf{M}^B [N·m] και δίνονται από την σχέση (2.4)

$$\mathbf{M}^B = [L \quad M \quad N]^T \quad (2.4)$$

Οι λόγοι για τους οποίους οι μεταβλητές x, y, z, u, v και w εκφράζονται σε αυτό το σύστημα αναφοράς είναι ότι η μήτρα αδράνειας είναι πάντοτε διαγώνια, με αποτέλεσμα οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το σύστημα να καταστρώνονται πιο εύκολα. Οι μετρήσεις οι οποίες λαμβάνονται από το σκάφος του τετρακόπτερου εύκολα μετατρέπονται στο σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων και τέλος οι δυνάμεις οι οποίες δρουν στο τετρακόπτερο στις περισσότερες περιπτώσεις δίνονται ως προς το σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων.

2.4 Στροφή διανύσματος στον χώρο

Έστω διάνυσμα α με συνιστώσες $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$, σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με αρχή O. Εάν το διάνυσμα περιστραφεί σύμφωνα με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού (clockwise CW) κρατώντας το σταθερά προσδεδεμένο στον άξονα Oz, (περιστρέφουμε τον άξονα z γύρω από τον εαυτό του) τότε θα καταλήξει σε ένα καινούριο διάνυσμα α' με συνιστώσες, α'_x, α'_y και α'_z . Η περιστροφή του διανύσματος α ως προς τον άξονα Oz φαίνεται στο σχήμα 2.4.

Η προβολή του διανύσματος α στο επίπεδο xOy είναι ίση με την αντίστοιχη προβολή του διανύσματος α' στο επίπεδο xOy, έστω η προβολή αυτή είναι η α_{xy} .

Οι συνιστώσες στους άξονες Ox και Oy θα είναι:

Ox:

$$\alpha_x = \alpha_{xy} \cdot \cos\varphi$$

$$\alpha'_x = \alpha_{xy} \cdot \cos(\varphi - \theta) = \alpha_{xy} \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta + \alpha_{xy} \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta = \alpha_x \cdot \cos\theta + \alpha_y \cdot \sin\theta = \alpha_x \cdot \cos\theta + \alpha_y \cdot \sin\theta$$

Oy:

$$\alpha_y = \alpha_{xy} \cdot \sin\varphi$$

$$\alpha'_y = \alpha_{xy} \cdot \sin(\varphi - \theta) = \alpha_{xy} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta - \alpha_{xy} \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta = \alpha_y \cdot \cos\theta - \alpha_x \cdot \sin\theta = -\alpha_x \cdot \sin\theta + \alpha_y \cdot \cos\theta$$

Η τελευταία σχέση γράφεται σε μορφή πίνακα ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \alpha'_x \\ \alpha'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

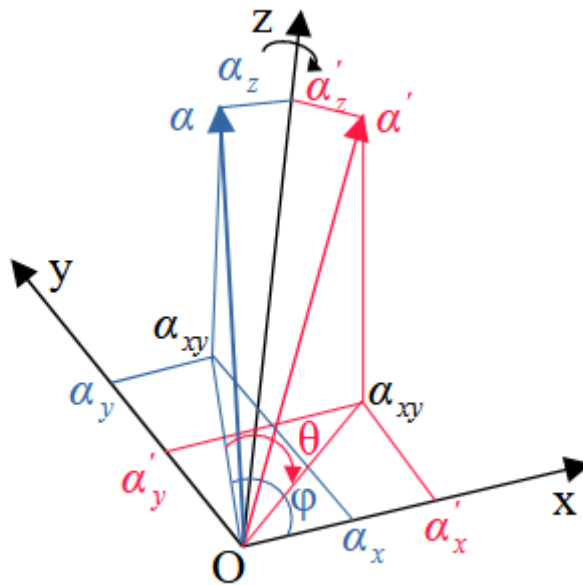
Οι προβολές των διανυσμάτων α και α' στον άξονα Oz είναι α_z , και α'_z , οι προβολές αυτές είναι ίσες μεταξύ τους δηλαδή $\alpha'_z = \alpha_z$, οπότε ο πίνακας της σχέσης (2.5) με συνιστώσες και για τους τρεις άξονες δίνεται από την σχέση (2.6)

$$\begin{bmatrix} \alpha'_x \\ \alpha'_y \\ \alpha'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Με την ίδια λογική κατασκευάζουμε και τον πίνακα για περιστροφή διανύσματος κρατώντας το προσδεδμεμένο στον άξονα O_y , ο πίνακας αυτός φαίνεται στην σχέση (2.7)

$$\begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Ομοίως έχουμε και τον πίνακα για περιστροφή γύρω από τον άξονα O_x , ο πίνακας αυτός φαίνεται στην σχέση (2.8)



Σχήμα 2.4: Στροφή διανύσματος γύρω από τον άξονα O_z

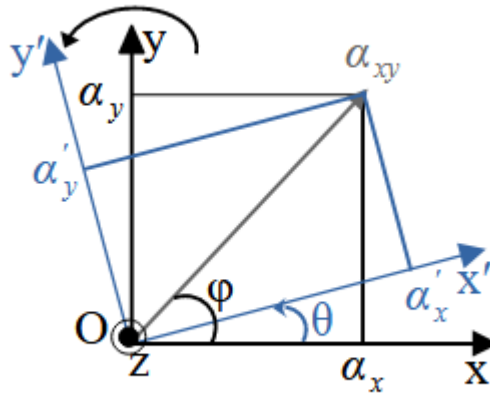
$$\begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Τα παραπάνω ισχύουν και όταν είναι απαραίτητο να προσδιοριστούν οι συνιστώσες ενός διανύσματος, σε ένα σύστημα συντεταγμένων, το οποίο έχει περιστραφεί κατά γωνία θ ανθωρολογιακά (counterclockwise CCW) ως προς το αρχικό σύστημα συντεταγμένων, όπως αυτά φαίνονται στο σχήμα 2.4.

Στο σχήμα 2.5 φαίνεται η περίπτωση όπου ο άξονας O_z έχει περιστραφεί κατά γωνία θ .

Έστω ότι οι πίνακες των σχέσεων (2.6) - (2.8) ονομάζονται \mathbf{R} τότε για τυχαίο διάνυσμα a θα ισχύει η σχέση (2.9)

$$a' = \mathbf{R} \cdot a \quad (2.9)$$



Σχήμα 2.5: Συστήματα συντεταγμένων σε γωνία θ μεταξύ τους

2.4.1 Πολλαπλές στροφές

Όταν το σύστημα περιστρέφεται διαδοχικά τότε εφαρμόζονται διαδοχικοί πολλαπλασιασμοί των διανυσμάτων τα οποία προκύπτουν από το αρχικό διάνυσμα r_i .

Έστω ότι ένα σύστημα περιστρέφεται με τις εξής, σε τυχαία σειρά, στροφές, στην σχέση (2.10)

Στροφή με σταθερό άξονα τον Oy .

Στροφή με σταθερό άξονα τον Oz .

Στροφή με σταθερό άξονα τον Ox .

$$\begin{aligned} r_i^y &= R_y \cdot r_i \\ r_y^z &= R_z \cdot r_i^y \\ r_z^f &= R_x \cdot r_y^z \end{aligned} \quad (2.10)$$

Στην τελευταία σχέση της (2.10) χρησιμοποιήθηκε ως δείκτης ο f αντί του x διότι είναι η τελική θέση του διανύσματος ή του συστήματος αναφοράς. Εάν οι σχέσεις της (2.10) γραφτούν σε μία μόνο σχέση τότε το αποτέλεσμα δίνεται από την σχέση (2.11)

$$r_i^f = R_x \cdot r_y^z = R_x \cdot R_z \cdot r_i^y = R_x \cdot R_z \cdot R_y \cdot r_i \Rightarrow r_i^f = R_{xzy} \cdot r_i \quad (2.11)$$

Από την σχέση (2.11) φαίνεται ότι για αυθαίρετες στροφές είναι δυνατό να κατασκευαστεί ένας μόνο πίνακας ο οποίος θα πολλαπλασιάσει το αρχικό διάνυσμα για να προκύψει το τελικό διάνυσμα.

2.5 Γωνίες Euler ή Tait - Bryan

Μια αυθαίρετη στροφή ενός διανύσματος ή του συστήματος συντεταγμένων μπορεί να υλοποιηθεί με τρεις κατάλληλες στροφές με γωνίες φ , θ και ψ όπως δείχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Οι γωνίες αυτές ονομάζονται γωνίες *Euler* ή *Tait - Bryan*. Η τελική θέση δίνεται από μια σειρά πολλαπλασιασμών τριών πινάκων όπως στην σχέση (2.11). Στην αεροναυπηγική γενικά προτιμάται η εξής σειρά, πρώτα στροφή κατά γωνία ψ γύρω από τον άξονα z , έπειτα στροφή κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα y και τέλος στροφή κατά γωνία φ γύρω από τον άξονα x . Με αυτό τον τρόπο προκύπτει ο πίνακας R_{ZYX} όπως φαίνεται στην σχέση (2.12). Ο πίνακας R_{ZYX} δίνει τις συντεταγμένες σε σύστημα συντεταγμένων F το οποίο έχει στραφεί ως προς το αρχικό σύστημα συντεταγμένων I .

$$\mathbf{R}_I^F = \begin{bmatrix} \cos\psi \cdot \cos\theta & \cos\theta \cdot \sin\psi & -\sin\theta \\ \cos\psi \cdot \sin\phi \cdot \sin\theta - \cos\phi \cdot \sin\psi & \cos\phi \cdot \cos\psi + \sin\phi \cdot \sin\psi \cdot \sin\theta & \cos\theta \cdot \sin\phi \\ \sin\phi \cdot \sin\psi + \cos\phi \cdot \cos\psi \cdot \sin\theta & \cos\phi \cdot \sin\psi \cdot \sin\theta - \cos\psi \cdot \sin\phi & \cos\phi \cdot \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες στο περιστραμμένο σύστημα συντεταγμένων F και χρειάζεται να προσδιοριστούν οι συντεταγμένες στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων I τότε αυτές λαμβάνονται εάν πολλαπλασιαστούν οι συντεταγμένες με τον αντίστροφο του πίνακα \mathbf{R}_I^F , έτσι λαμβάνουμε τον πίνακα $(\mathbf{R}_I^F)^{-1} = \mathbf{R}_F^I$

$$(\mathbf{R}_I^F)^{-1} = \mathbf{R}_F^I = \begin{bmatrix} \cos\psi \cdot \cos\theta & \cos\psi \cdot \sin\phi \cdot \sin\theta - \cos\phi \cdot \sin\psi & \sin\phi \cdot \sin\psi + \cos\phi \cdot \cos\psi \cdot \sin\theta \\ \cos\theta \cdot \sin\psi & \cos\phi \cdot \cos\psi + \sin\phi \cdot \sin\psi \cdot \sin\theta & \cos\phi \cdot \sin\psi \cdot \sin\theta - \cos\psi \cdot \sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta \cdot \sin\phi & \cos\phi \cdot \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Εάν αντικατασταθούν οι δείκτες I, F με τους E, B αντίστοιχα, τότε προκύπτουν τα εξής για τους πίνακες μετατροπής, $\mathbf{R}_I^F = \mathbf{R}_E^B$ και $\mathbf{R}_F^I = \mathbf{R}_B^E$ σχέση (2.14).

Οι γωνίες ϕ , θ , ψ σύμφωνα με την εργασία [32] ονομάζονται γωνία περιστροφής (Roll), γωνία πρόνευσης (Pitch) και γωνία εκτροπής (Yaw) αντίστοιχα.

Οι γωνίες ψ , θ και ϕ ορίζονται ως θετικές, βλέπε εργασία [33], όπως αυτές φαίνονται στο σχήμα 2.3, το πεδίο τιμών για την κάθε γωνία είναι, βλέπε και την εργασία [34]:

$$\psi \in (-\pi, \pi]$$

$$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\phi \in (-\pi, \pi]$$

$$\mathbf{R}_B^E = \begin{bmatrix} \cos\psi \cdot \cos\theta & \cos\psi \cdot \sin\phi \cdot \sin\theta - \cos\phi \cdot \sin\psi & \sin\phi \cdot \sin\psi + \cos\phi \cdot \cos\psi \cdot \sin\theta \\ \cos\theta \cdot \sin\psi & \cos\phi \cdot \cos\psi + \sin\phi \cdot \sin\psi \cdot \sin\theta & \cos\phi \cdot \sin\psi \cdot \sin\theta - \cos\psi \cdot \sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta \cdot \sin\phi & \cos\phi \cdot \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

2.5.1 Μετασχηματισμοί των γωνιακών ταχυτήτων

Η περιστροφική κίνηση εκφράζεται με τα διανύσματα $\dot{\boldsymbol{\theta}}^E$ και $\boldsymbol{\omega}^B$, όπως δίνεται από την σχέση (2.15)

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\theta}}^E &= [\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^T \\ \boldsymbol{\omega}^B &= [p \quad q \quad r]^T \end{aligned} \quad (2.15)$$

Όπου p, q και r είναι οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του σωματόδετου πλαισίου αναφοράς B, με τις συνιστώσες στο πλαίσιο αναφοράς B.

Όπως και προηγουμένως είναι απαραίτητος ο μετασχηματισμός από το ένα σύστημα αναφοράς στο άλλο. Οι ταχύτητες του $\dot{\boldsymbol{\theta}}^E$ αναλύονται με βάση την εργασία [35] στους άξονες του συστήματος

αναφοράς B. Όταν το πλαίσιο E στρέφεται κατά θετική γωνία ψ με άξονα περιστροφής τον Oz_E τότε το διάνυσμα $\dot{\psi}$ της γωνιακής ταχύτητας είναι ομόρροπο με τον Oz_E . Το πλαίσιο που προκύπτει είναι το E_1 $O_{ExE1}y_{E1}z_{E1}$. Στρέφοντας το E_1 κατά θετική γωνία θ με άξονα περιστροφής τον Oy_{E1} προκύπτει το σύστημα E_2 με $O_{ExE2}y_{E2}z_{E2}$. Η συνιστώσα του $\dot{\psi}$ στον O_{ExE2} δίνεται από την σχέση (2.16)

$$\dot{\psi}_{O_{ExE2}} = -\dot{\psi} \cdot \sin\theta \quad (2.16)$$

Η συνιστώσα του $\dot{\psi}$ στον O_{EzE2} δίνεται από την σχέση (2.17)

$$\dot{\psi}_{O_{EzE2}} = \dot{\psi} \cdot \cos\theta \quad (2.17)$$

Στρέφοντας το E_2 κατά θετική γωνία φ με άξονα περιστροφής τον Ox_{E2} προκύπτει το σύστημα E_3 με $O_{ExE3}y_{E3}z_{E3}$. Η συνιστώσα του $\dot{\psi}_{O_{EzE2}}$ στον O_{EyE3} δίνεται από την σχέση (2.18)

$$\dot{\psi}_{O_{EyE3}} = \dot{\psi}_{O_{EzE2}} \cdot \sin\varphi \Rightarrow \dot{\psi}_{O_{EyE3}} = \dot{\psi} \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \quad (2.18)$$

Η συνιστώσα του $\dot{\psi}_{O_{EzE2}}$ στον O_{EzE3} δίνεται από την σχέση (2.19)

$$\dot{\psi}_{O_{EzE3}} = \dot{\psi}_{O_{EzE2}} \cdot \cos\varphi \Rightarrow \dot{\psi}_{O_{EzE3}} = \dot{\psi} \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \quad (2.19)$$

Όταν το πλαίσιο E_1 στρέφεται κατά γωνία θ CCW με άξονα περιστροφής τον Oy_{E1} τότε το διάνυσμα $\dot{\theta}$ της γωνιακής ταχύτητας είναι ομόρροπο με τον Oy_{E1} ή τον Oy_{E2} διότι ταυτίζονται. Η συνιστώσα του $\dot{\theta}$ στον O_{yE3} δίνεται από την σχέση (2.20)

$$\dot{\theta}_{O_{yE3}} = \dot{\theta} \cdot \cos\varphi \quad (2.20)$$

Η συνιστώσα του $\dot{\theta}$ στον O_{EzE3} δίνεται από την σχέση (2.21)

$$\dot{\theta}_{O_{EzE3}} = -\dot{\theta} \cdot \sin\varphi \quad (2.21)$$

Όταν το πλαίσιο E_2 στρέφεται κατά γωνία φ CCW με άξονα περιστροφής τον Ox_{E2} τότε το διάνυσμα $\dot{\varphi}$ της γωνιακής ταχύτητας είναι ομόρροπο με τον Ox_{E2} ή τον Ox_{E3} διότι ταυτίζονται. Η συνιστώσα του $\dot{\varphi}$ στον Ox_{E3} δίνεται από την σχέση (2.22)

$$\dot{\varphi}_{O_{ExE3}} = \dot{\varphi} \quad (2.22)$$

Στο σωματόδετο πλαίσιο B η γωνιακή ταχύτητα p είναι στον άξονα O_{BxB} , οπότε για να υπολογιστεί το διάνυσμα p θα πρέπει να αθροιστούν όλες οι συνιστώσες στον άξονα Ox_{E3} έτσι από τις σχέσεις (2.16) και (2.22) προκύπτει η σχέση (2.23)

$$p = \dot{\varphi} - \dot{\psi} \cdot \sin\theta \quad (2.23)$$

Στο σωματόδετο πλαίσιο B η γωνιακή ταχύτητα q είναι στον άξονα O_{ByB} οπότε για να υπολογιστεί το διάνυσμα q θα πρέπει να αθροιστούν όλες οι συνιστώσες στον άξονα Oy_{E3} έτσι από τις σχέσεις (2.18) και (2.20) προκύπτει η σχέση (2.24)

$$q = \dot{\theta} \cdot \cos\varphi + \dot{\psi} \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \quad (2.24)$$

Στο σωματόδετο πλαίσιο B η γωνιακή ταχύτητα r είναι στον άξονα O_{BzB} οπότε για να προσδιοριστεί το διάνυσμα r θα πρέπει να αθροιστούν όλες τις συνιστώσες στον άξονα Oz_{E3} έτσι από τις (2.19) και (2.21) προκύπτει η σχέση (2.25)

$$r = -\dot{\theta} \cdot \sin\varphi + \dot{\psi} \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \quad (2.25)$$

Οι σχέσεις (2.23) και (2.25) σε συμπαγή μορφή γράφονται όπως φαίνεται στην σχέση (2.26)

$$\boldsymbol{\omega}^B = \mathbf{T}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Theta}^E \Rightarrow \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\varphi & \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\theta \cdot \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Με τον πίνακα \mathbf{T} της σχέσης (2.27) υπολογίζονται οι συντεταγμένες στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων E όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες στο σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων B.

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}}^E = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\omega}^B \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin\varphi \cdot \sin\theta}{\cos\theta} & \frac{\cos\varphi \cdot \sin\theta}{\cos\theta} \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \frac{\sin\varphi}{\cos\theta} & \frac{\cos\varphi}{\cos\theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

2.6 Το κινηματικό μοντέλο του τετρακόπτερου

Από την σχέση (2.1) οι ταχύτητες ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς δίνονται από την σχέση (2.28)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^E &= \dot{\boldsymbol{\Gamma}}^E = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}]^T \\ \boldsymbol{\omega}^E &= \dot{\boldsymbol{\Theta}}^E = [\dot{\varphi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^T \end{aligned} \quad (2.28)$$

Οπότε οι σχέσεις από το σωματόδετο B στο αδρανειακό σύστημα E σύστημα συντεταγμένων δίνονται από την σχέση (2.29)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^E &= \mathbf{R}_B^E \cdot \mathbf{v}^B \\ \boldsymbol{\omega}^E &= \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\omega}^B \end{aligned} \quad (2.29)$$

Με τις σχέσεις (2.1), (2.2) και (2.3) ορίζεται το γενικευμένο διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{\xi}$ το οποίο περιέχει την γραμμική $\boldsymbol{\Gamma}^E$ και γωνιακή $\boldsymbol{\Theta}^E$ θέση του τετρακόπτερου, εκφρασμένες στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων E όπως φαίνεται στην σχέση (2.30)

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}^E \\ \boldsymbol{\Theta}^E \end{bmatrix} = [x \quad y \quad z \quad \varphi \quad \theta \quad \psi]^T \quad (2.30)$$

Όμοια ορίζεται και το διάνυσμα των ταχυτήτων \mathbf{v} το οποίο περιλαμβάνει την γραμμική και γωνιακή ταχύτητα εκφρασμένες στο σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων E, όπως δίνεται από την σχέση (2.31)

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^B \\ \boldsymbol{\omega}^B \end{bmatrix} = [u \quad v \quad w \quad p \quad q \quad r]^T \quad (2.31)$$

Από τις σχέσεις (2.27), (2.28), (2.29), (2.30) και (2.31) προκύπτει η σχέση (2.32)

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_B^E & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}^B \\ \boldsymbol{\omega}^B \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} \quad (2.32)$$

2.7 Το δυναμικό μοντέλο του τετρακόπτερου

Ο ρυθμός μεταβολής της γραμμικής ορμής L ενός σώματος μάζας m ισούται με την δύναμη F η οποία ασκείται στο σώμα, σχέση (2.33)

$$F = \frac{dL}{dt} \Rightarrow F = \frac{d}{dt}(m \cdot v) \quad (2.33)$$

Αντίστοιχα ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής H ενός σώματος μάζας m ισούται με την ροπή M η οποία ασκείται στο σώμα, σχέση (2.34)

$$M = \frac{dH}{dt} \quad (2.34)$$

2.7.1 Μεταφορική κίνηση

Για την περίπτωση του τετρακόπτερου στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς E , ισχύουν τα εξής:

$$F^E = \frac{dL^E}{dt} = \frac{d}{dt}[m \cdot v^E] = m \cdot \dot{v}^E = m \cdot \ddot{\Gamma}^E \Rightarrow F^E = m \cdot \ddot{\Gamma}^E$$

Η δύναμη F^E έχει συνιστώσες στα x^E, y^E και z^E , για την μετάβαση σε συνιστώσες στο σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων ισχύουν τα εξής:

$$F^E = m \cdot \ddot{\Gamma}^E \Rightarrow R_E^B \cdot F^E = R_E^B \cdot m \cdot \ddot{\Gamma}^E \Rightarrow F^B = m \cdot R_E^B \cdot \ddot{\Gamma}^E = m \cdot R_E^B \cdot \frac{d}{dt} \dot{\Gamma}^E = m \cdot R_E^B \cdot \frac{d}{dt} (R_B^E \cdot v^B) \Rightarrow$$

$$F^B = m \cdot (R_E^B \cdot \dot{R}_B^E \cdot v^B + R_E^B \cdot R_B^E \cdot \dot{v}^B) = m \cdot (\dot{v}^B + R_E^B \cdot \dot{R}_B^E \cdot v^B)$$

$$F^B = m \cdot (\dot{v}^B + R_E^B \cdot \dot{R}_B^E \cdot v^B) \quad (2.35)$$

Η σχέση (2.35) από το θεώρημα 1 εξίσωση (3) στην εργασία [36] για την παράγωγο του πίνακα περιστροφής καταλήγει στην σχέση (2.36)

$$F^B = m \cdot (\dot{v}^B + R_E^B \cdot \dot{R}_B^E \cdot v^B) \Rightarrow F^B = m \cdot (\dot{v}^B + R_E^B \cdot R_B^E \cdot S(\omega^B) \cdot v^B) = m \cdot (\dot{v}^B + S(\omega^B) \cdot v^B) \Rightarrow$$

$$F^B = m \cdot (\dot{v}^B + \omega^B \times v^B) \quad (2.36)$$

όπου $S(\omega^B)$ δίνεται από την σχέση (2.37)

$$S(\omega^B) = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Το εξωτερικό γινόμενο $\omega^B \times v^B$ αναλύεται όπως φαίνεται στην σχέση (2.38)

$$\omega^B \times v^B = \begin{bmatrix} q \cdot w - r \cdot v \\ r \cdot u - p \cdot w \\ p \cdot v - q \cdot u \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (2.2) προκύπτει η σχέση (2.39)

$$\dot{v}^B = [\dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w}]^T \quad (2.39)$$

Η σχέση (2.36) λόγω των (2.38) και (2.39) καταλήγει στην εξίσωση (2.40)

$$F^B = m \cdot \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \cdot w - r \cdot v \\ r \cdot u - p \cdot w \\ p \cdot v - q \cdot u \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Επιλύοντας ως προς το διάνυσμα \dot{v}^B προκύπτει η σχέση (2.41)

$$F^B = m \cdot \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \cdot w - r \cdot v \\ r \cdot u - p \cdot w \\ p \cdot v - q \cdot u \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} F_{x_b} \\ F_{y_b} \\ F_{z_b} \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \cdot w - r \cdot v \\ r \cdot u - p \cdot w \\ p \cdot v - q \cdot u \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \cdot \begin{pmatrix} F_{x_b} \\ F_{y_b} \\ F_{z_b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q \cdot w - r \cdot v \\ r \cdot u - p \cdot w \\ p \cdot v - q \cdot u \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

2.7.2 Περιστροφική κίνηση

Για να χρησιμοποιηθεί η σχέση (2.34) παραπέρα θα πρέπει να βρεθεί μια έκφραση για την στροφορμή ως προς το κέντρο βάρους του τετρακόπτερου. Η στροφορμή εξ ορισμού δίνεται από την σχέση (2.42)

$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times m \cdot \mathbf{v} \quad (2.42)$$

Όπου \mathbf{r} είναι η απόσταση του σώματος μάζας m από το σημείο ως προς το οποίο υπολογίζεται η στροφορμή και \mathbf{v} είναι η ταχύτητα του σώματος.

Όταν ένα άκαμπτο σώμα εκτελεί μεταφορική και περιστροφική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}_{B/E}$ σε σχέση με αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων E περί το κέντρο βάρους O_B τότε η ταχύτητα \mathbf{v}_P ενός σταθερού σημείου P επάνω στο σώμα με διάνυσμα θέσης \mathbf{r}_P δίνεται από την σχέση (2.43)

$$\mathbf{v}_P^B = \mathbf{v}_{O_B}^B + \boldsymbol{\omega}_{B/E}^B \times \mathbf{r}_P^B \quad (2.43)$$

Ο πρώτος όρος προέρχεται από την μεταφορική κίνηση του σώματος ενώ ο δεύτερος όρος προέρχεται από την περιστροφική κίνηση.

Έστω η στοιχειώδης μάζα dm με διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}_{i/O_B}^B = \mathbf{r}_i^B$ στο σωματόδετο σύστημα αναφοράς B . Η στοιχειώδης στροφορμή dH ορίζεται από το κέντρο βάρους του τετρακόπτερου ή την αρχή των συντεταγμένων O_B . Ολοκληρώνοντας με μεταβλητή την μάζα m , λαμβάνεται η στροφορμή για όλη την μάζα του τετρακόπτερου, όπως φαίνεται στην σχέση (2.44)

$$\mathbf{H}_{O_B}^B = \int_m dH^B = \int_m \mathbf{r}_i^B \times \mathbf{v}_i^B \cdot dm \quad (2.44)$$

λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (2.43) η σχέση (2.44) γίνεται:

$$\mathbf{H}_{O_B}^B = \int_m dH^B = \int_m \mathbf{r}_i^B \times \mathbf{v}_i^B \cdot dm = \int_m \mathbf{r}_i^B \times (\mathbf{v}_{O_B}^B + \boldsymbol{\omega}_{B/E}^B \times \mathbf{r}_i^B) \cdot dm =$$

$$\int_m (\mathbf{r}_i^B \times \mathbf{v}_{O_B}^B) \cdot dm + \int_m (\mathbf{r}_i^B \times \boldsymbol{\omega}_{B/E}^B \times \mathbf{r}_i^B) \cdot dm = \int_m S(\mathbf{r}_i^B) \cdot \mathbf{v}_{O_B}^B \cdot dm + \int_m S(\mathbf{r}_i^B) \cdot S(\boldsymbol{\omega}_{B/E}^B) \cdot \mathbf{r}_i^B \cdot dm$$

Επειδή η ταχύτητα $\mathbf{v}_{O_B}^B$ είναι σταθερά βγαίνει έξω από το πρώτο ολοκλήρωμα, οπότε προκύπτει:

$$\mathbf{H}_{O_B}^B = \mathbf{v}_{O_B}^B \cdot \int_m S(\mathbf{r}_i^B) \cdot d\mathbf{m} + \int_m S(\mathbf{r}_i^B) \cdot S(\boldsymbol{\omega}_{B/E}^B) \cdot \mathbf{r}_i^B \cdot d\mathbf{m}$$

Επειδή η αρχή των διανυσμάτων θέσης των διαφορικών μαζών είναι το κέντρο βάρους του τετρακώπτερου το πρώτο ολοκλήρωμα είναι μηδέν εξ' ορισμού.

$$\mathbf{H}_{O_B}^B = \int_m S(\mathbf{r}_i^B) \cdot S(\boldsymbol{\omega}_{B/E}^B) \cdot \mathbf{r}_i^B \cdot d\mathbf{m} \quad (2.45)$$

Εκτελώντας τους πολλαπλασιασμούς μέσα στο ολοκλήρωμα προκύπτει ότι:

$$S(\mathbf{r}_i^B) \cdot S(\boldsymbol{\omega}_{B/E}^B) \cdot \mathbf{r}_i^B = \begin{bmatrix} 0 & -z_B & y_B \\ z_B & 0 & -x_B \\ -y_B & x_B & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \cdot (y_B^2 + z_B^2) - q \cdot x_B \cdot y_B - r \cdot x_B \cdot z_B \\ -p \cdot x_B \cdot y_B + q \cdot (x_B^2 + z_B^2) - r \cdot y_B \cdot z_B \\ -p \cdot x_B \cdot z_B - q \cdot y_B \cdot z_B + r \cdot (x_B^2 + y_B^2) \end{bmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι διάνυσμα, το διάνυσμα αυτό μπορεί να γραφτεί ως το γινόμενο ενός πίνακα με το διάνυσμα $\boldsymbol{\omega}^B$, σύμφωνα με την σχέση (2.46)

$$S(\mathbf{r}_i^B) \cdot S(\boldsymbol{\omega}_{B/E}^B) \cdot \mathbf{r}_i^B = \begin{bmatrix} y_B^2 + z_B^2 & -x_B \cdot y_B & -x_B \cdot z_B \\ -x_B \cdot y_B & x_B^2 + z_B^2 & -y_B \cdot z_B \\ -x_B \cdot z_B & -y_B \cdot z_B & x_B^2 + y_B^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega}_{B/E}^B \quad (2.46)$$

Από τις σχέσεις (2.45) και (2.46) και αναγνωρίζοντας ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{\omega}^B$ είναι σταθερά για το ολοκλήρωμα προκύπτει η σχέση (2.47)

$$\mathbf{H}_{O_B}^B = \int_m \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega}_{B/E}^B \cdot d\mathbf{m} = \int_m \mathbf{A} \cdot d\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}_{B/E}^B \Rightarrow \mathbf{H}_{O_B}^B = \begin{bmatrix} \int_m (y_B^2 + z_B^2) \cdot d\mathbf{m} & -\int_m x_B \cdot y_B \cdot d\mathbf{m} & -\int_m x_B \cdot z_B \cdot d\mathbf{m} \\ -\int_m x_B \cdot y_B \cdot d\mathbf{m} & \int_m (x_B^2 + z_B^2) \cdot d\mathbf{m} & -\int_m y_B \cdot z_B \cdot d\mathbf{m} \\ -\int_m x_B \cdot z_B \cdot d\mathbf{m} & -\int_m y_B \cdot z_B \cdot d\mathbf{m} & \int_m (x_B^2 + y_B^2) \cdot d\mathbf{m} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\omega}_{B/E}^B \quad (2.47)$$

Τα περιεχόμενα του πίνακα στην σχέση (2.47) είναι οι ορισμοί των ροπών αδράνειας καθώς και των γινομένων αδράνειας δηλαδή.

$$\begin{bmatrix} I_{xx} = \int_m (y_B^2 + z_B^2) \cdot d\mathbf{m} & -I_{xy} = -\int_m x_B \cdot y_B \cdot d\mathbf{m} & -I_{xz} = -\int_m x_B \cdot z_B \cdot d\mathbf{m} \\ -I_{yx} = -\int_m x_B \cdot y_B \cdot d\mathbf{m} & I_{yy} = \int_m (x_B^2 + z_B^2) \cdot d\mathbf{m} & -I_{yz} = -\int_m y_B \cdot z_B \cdot d\mathbf{m} \\ -I_{zx} = -\int_m x_B \cdot z_B \cdot d\mathbf{m} & -I_{zy} = -\int_m y_B \cdot z_B \cdot d\mathbf{m} & I_{zz} = \int_m (x_B^2 + y_B^2) \cdot d\mathbf{m} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Οπότε προκύπτει ο πίνακας $\mathbf{I}_{O_B}^B = \mathbf{I}^B$ ο οποίος ονομάζεται πίνακας αδράνειας, σχέση (2.49)

$$\mathbf{I}^B = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Από τις υποθέσεις και τις παραδοχές προκύπτει ότι το τετρακόπτερο έχει δύο επίπεδα συμμετρίας, και έτσι τα εξής στοιχεία του πίνακα \mathbf{I}^B είναι μηδέν, $I_{xy}=I_{yx}=I_{xz}=I_{zx}=I_{yz}=I_{zy}=0$, με αποτέλεσμα ο πίνακας \mathbf{I}^B να δίνεται από την σχέση (2.50)

$$\mathbf{I}^B = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Η σχέση (2.50) σε συμπαγή μορφή δίνεται από την σχέση (2.51) ως

$$\mathbf{H}_{O_b}^B = \mathbf{I}^B \cdot \boldsymbol{\omega}_{B/E}^B \quad (2.51)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (2.51) η σχέση (2.34) γίνεται:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{I}^B \cdot \boldsymbol{\omega}_{B/E}^B) = \mathbf{I}^B \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{B/E}^B + \boldsymbol{\omega}_{B/E}^B \times (\mathbf{I}^B \cdot \boldsymbol{\omega}_{B/E}^B) \quad (2.52)$$

Η παράγωγος του $\boldsymbol{\omega}_{B/E}^B$ της σχέσης (2.15), δίνεται από την σχέση (2.53)

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{B/E}^B = [\dot{p} \quad \dot{q} \quad \dot{r}] \quad (2.53)$$

Επιλύοντας την σχέση (2.52) ως προς την γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{B/E}^B$ προκύπτει η σχέση (2.54)

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{B/E}^B = (\mathbf{I}^B)^{-1} \cdot (\mathbf{M} - \boldsymbol{\omega}_{B/E}^B \times (\mathbf{I}^B \cdot \boldsymbol{\omega}_{B/E}^B)) \quad (2.54)$$

Ο αντίστροφος του πίνακα \mathbf{I}^B δίνεται από την σχέση (2.55)

$$(\mathbf{I}^B)^{-1} = \mathbf{I}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Το εξωτερικό γινόμενο της σχέσης (2.54) αναπτύσσεται παρακάτω, σχέση (2.56)

$$\boldsymbol{\omega}_{B/E}^B \times (\mathbf{I}^B \cdot \boldsymbol{\omega}_{B/E}^B) = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx} \cdot p \\ I_{yy} \cdot q \\ I_{zz} \cdot r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_{zz} - I_{yy}) \cdot q \cdot r \\ (I_{xx} - I_{zz}) \cdot p \cdot r \\ (I_{yy} - I_{xx}) \cdot p \cdot q \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Τελικά η γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{B/E}^B$ δίνεται από την σχέση (2.57)

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{B/E}^B = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (I_{zz} - I_{yy}) \cdot q \cdot r \\ (I_{xx} - I_{zz}) \cdot p \cdot r \\ (I_{yy} - I_{xx}) \cdot p \cdot q \end{bmatrix} \right) =$$

$$\dot{\omega}_{B/E}^B = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{I_{xx}} \\ \frac{M}{I_{yy}} \\ \frac{N}{I_{zz}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{(I_{zz} - I_{yy}) \cdot q \cdot r}{I_{xx}} \\ \frac{(I_{xx} - I_{zz}) \cdot p \cdot r}{I_{yy}} \\ \frac{(I_{yy} - I_{xx}) \cdot p \cdot q}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

2.8 Υπολογισμός των δυνάμεων

2.8.1 Η δύναμη του βάρους

Η δύναμη του βάρους στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων έχει συνιστώσα μόνο στην διεύθυνση z_E έτσι το διάνυσμα του βάρους δίνεται από την σχέση (2.58)

$$W^E = [0 \quad 0 \quad -m \cdot g]^T \quad (2.58)$$

Στο σωματόδετο σύστημα αναφοράς η δύναμη του βάρους δίνεται από την σχέση (2.59)

$$W^B = R_E^B \cdot W^E \quad (2.59)$$

2.8.2 Η οπισθέλκουσα δύναμη D

Η οπισθέλκουσα δύναμη D είναι η δύναμη η οποία αντιτίθεται στην κίνηση του αεροσκάφους. Η δύναμη αυτή είναι ανάλογη της ταχύτητας του αεροσκάφους πολλαπλασιασμένη με ένα συντελεστή αναλογίας $k_{DT(x,y,z)}$ για την κάθε διεύθυνση (x , y και z), ο οποίος αποτελεί τον συντελεστή οπισθέλκουσας για τη μεταφορική κίνηση. Η οπισθέλκουσα δύναμη στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων δίνεται από την σχέση (2.60) ενώ στο σωματόδετο δίνεται από την σχέση (2.61)

$$D^E = \begin{bmatrix} D_{x_E} \\ D_{y_E} \\ D_{z_E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{DTx} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{DTy} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{DTz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$D^B = R_E^B \cdot D^E \quad (2.61)$$

2.8.3 Η δύναμη της ώθησης T

Η δύναμη της ώθησης οφείλεται στην περιστροφή των ελίκων με ταχύτητα ω_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ο κάθε έλικας. Η δύναμη αυτή είναι πάντα κάθετη στο επίπεδο $x_B O_{ByB}$. Η δύναμη αυτή σύμφωνα με την εργασία [37] είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας περιστροφής των ελίκων πολλαπλασιασμένη με ένα συντελεστή αναλογίας k_F . Ο συντελεστής αυτός εξαρτάται από την πυκνότητα του αέρα ρ , τα χαρακτηριστικά του έλικα, όπως η διάμετρος, το προφίλ και η κλίση. Η ολική ώθηση είναι το άθροισμα των ωθήσεων και των τεσσάρων ελίκων όπως αποτυπώνεται στην σχέση (2.62)

$$T^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_1^4 T_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_F \cdot \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

2.8.4 Η ολική δύναμη

Η ολική δύναμη είναι το άθροισμα των παραπάνω δυνάμεων, και δίνεται από την σχέση (2.63)

$$\mathbf{F}^B = \mathbf{W}^B + \mathbf{R}_E^B \cdot \mathbf{D}^E + \mathbf{T}^B \quad (2.63)$$

Η δύναμη στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων υπολογίζεται εάν πολλαπλασιάσουμε την δύναμη στο σωματόδετο σύστημα αναφοράς με τον πίνακα στροφής \mathbf{R}_B^E έτσι έχουμε

$$\mathbf{F}^E = \mathbf{R}_B^E \cdot \mathbf{F}^B = \mathbf{R}_B^E \cdot (\mathbf{W}^B + \mathbf{R}_E^B \cdot \mathbf{D}^E + \mathbf{T}^B) = \mathbf{R}_B^E \cdot \mathbf{R}_E^B \cdot \mathbf{W}^E + \mathbf{R}_B^E \cdot \mathbf{R}_E^B \cdot \mathbf{D}^E + \mathbf{R}_B^E \cdot \mathbf{T}^B = \mathbf{W}^E + \mathbf{D}^E + \mathbf{R}_B^E \cdot \mathbf{T}^B$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \cdot g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_{DTx} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{DTy} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{DTz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} \cos\psi \cdot \cos\theta & \cos\psi \cdot \sin\phi \cdot \sin\theta - \cos\phi \cdot \sin\psi & \sin\phi \cdot \sin\psi + \cos\phi \cdot \cos\psi \cdot \sin\theta \\ \cos\theta \cdot \sin\psi & \cos\phi \cdot \cos\psi + \sin\phi \cdot \sin\psi \cdot \sin\theta & \cos\phi \cdot \sin\psi \cdot \sin\theta - \cos\psi \cdot \sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta \cdot \sin\phi & \cos\phi \cdot \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_F \cdot \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ & \mathbf{F}^E = m \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_E \\ \ddot{y}_E \\ \ddot{z}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{DTx} \cdot \dot{x}_E + (\sin\phi \cdot \sin\psi + \cos\phi \cdot \cos\psi \cdot \sin\theta) \cdot k_F \cdot \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 \\ -k_{DTy} \cdot \dot{y}_E + (\cos\phi \cdot \sin\psi \cdot \sin\theta - \cos\psi \cdot \sin\phi) \cdot k_F \cdot \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 \\ -m \cdot g - k_{DTz} \cdot \dot{z}_E + \cos\phi \cdot \cos\theta \cdot k_F \cdot \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ & \begin{bmatrix} \ddot{x}_E \\ \ddot{y}_E \\ \ddot{z}_E \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \cdot \begin{bmatrix} -k_{DTx} \cdot \dot{x}_E + (\sin\phi \cdot \sin\psi + \cos\phi \cdot \cos\psi \cdot \sin\theta) \cdot k_F \cdot \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 \\ -k_{DTy} \cdot \dot{y}_E + (\cos\phi \cdot \sin\psi \cdot \sin\theta - \cos\psi \cdot \sin\phi) \cdot k_F \cdot \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 \\ -m \cdot g - k_{DTz} \cdot \dot{z}_E + \cos\phi \cdot \cos\theta \cdot k_F \cdot \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 \end{bmatrix} = \\ & \frac{1}{m} \cdot \begin{bmatrix} -k_{DTx} \cdot \dot{x}_E + (\sin\phi \cdot \sin\psi + \cos\phi \cdot \cos\psi \cdot \sin\theta) \cdot U_z \\ -k_{DTy} \cdot \dot{y}_E + (\cos\phi \cdot \sin\psi \cdot \sin\theta - \cos\psi \cdot \sin\phi) \cdot U_z \\ -m \cdot g - k_{DTz} \cdot \dot{z}_E + \cos\phi \cdot \cos\theta \cdot U_z \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \ddot{x}_E \\ \ddot{y}_E \\ \ddot{z}_E \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \cdot \begin{bmatrix} -k_{DTx} \cdot \dot{x}_E + (\sin\phi \cdot \sin\psi + \cos\phi \cdot \cos\psi \cdot \sin\theta) \cdot U_1 \\ -k_{DTy} \cdot \dot{y}_E + (\cos\phi \cdot \sin\psi \cdot \sin\theta - \cos\psi \cdot \sin\phi) \cdot U_1 \\ -m \cdot g - k_{DTz} \cdot \dot{z}_E + \cos\phi \cdot \cos\theta \cdot U_1 \end{bmatrix} \quad (2.64) \end{aligned}$$

2.9 Υπολογισμός των ροπών

Οι ροπές οι οποίες αναπτύσσονται οφείλονται στην περιστροφή των ελίκων με ταχύτητες ω_i , καθώς και στην περιστροφή του τετρακόπτερου με ταχύτητα ω_B και τέλος στις δυνάμεις τριβής με τον αέρα.

2.9.1 Ροπή λόγω της ώθησης των ελίκων M_T

Το τετρακόπτερο έχει δύο ζεύγη ελίκων τα οποία περιστρέφονται προς την ίδια κατεύθυνση, το ένα ζεύγος CW και το άλλο CCW. Εάν οι έλικες του ενός ζεύγους περιστρέφονται με ίσες γωνιακές ταχύτητες τότε παράγουν ίσες ωθήσεις T . Οι ροπές οι οποίες παράγονται είναι ίσες και αντίθετες άρα η συνολική ροπή είναι μηδέν. Εάν οι ταχύτητες είναι διαφορετικές τότε θα αναπτυχθεί ροπή ως προς το κέντρο βάρους του τετρακόπτερου. Τα ζεύγη των ελίκων και οι παραγόμενες ροπές φαίνονται παρακάτω:

- Ζεύγος 2 - 4, άξονας περιστροφής O_{Bx_B}

Όταν υπάρχει διαφορά ανάμεσα στις ωθήσεις T_2 και T_4 ως προς τον ίδιο άξονα του τετρακόπτερου μέτρου l τότε η ροπή M_{Tx_B} δίνεται από την σχέση (2.65)

$$M_{Tx_B} = l \cdot (T_2 - T_4) \Rightarrow M_{Tx_B} = l \cdot k_F \cdot (\omega_2^2 - \omega_4^2) \quad (2.65)$$

- Ζεύγος 1 - 3, άξονας περιστροφής O_{By_B}

Όμοια για τους έλικες 1 και 3 η ροπή M_{Ty_B} δίνεται από την σχέση (2.66)

$$M_{Ty_B} = l \cdot (T_3 - T_1) \Rightarrow M_{Ty_B} = l \cdot k_F \cdot (\omega_3^2 - \omega_1^2) \quad (2.66)$$

Έτσι συνολικά η ροπή λόγω της ώθησης δίνεται από την σχέση (2.67)

$$\mathbf{M}_T = \begin{bmatrix} M_{Tx_B} \\ M_{Ty_B} \\ M_{Tz_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \cdot k_F \cdot (\omega_2^2 - \omega_4^2) \\ l \cdot k_F \cdot (\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}_T = \begin{bmatrix} U_\varphi \\ U_\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

2.9.2 Ροπή λόγω της τριβής των ελίκων M_D

Η ροπή λόγω της τριβής των ελίκων δίνεται σύμφωνα με την εργασία [38] από την σχέση (2.68)

$$\mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} M_{dx_B} \\ M_{dy_B} \\ M_{dz_B} \end{bmatrix} = -k_M \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \sum_{i=1}^4 (-1)^i \cdot \omega_i^2 = k_M \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

2.9.3 Γυροσκοπική ροπή λόγω της περιστροφής των ελίκων M_G

Η ροπή αυτή οφείλεται στην ταυτόχρονη περιστροφή των ελίκων με ταχύτητα ω_i και του σώματος του τετρακόπτερου με ταχύτητα ω^B . Η ροπή αυτή δίνεται από την σχέση (2.69)

$$\mathbf{M}_G = \sum_{i=1}^4 \omega^B \times I_R \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (-1)^i \cdot \omega_i \end{bmatrix} = I_R \cdot \begin{bmatrix} q \cdot (-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4) \\ -p \cdot (-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4) \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}_G = \begin{bmatrix} I_R \cdot q \cdot \bar{\omega} \\ -I_R \cdot p \cdot \bar{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

όπου I_R είναι η ροπή αδράνειας του συστήματος της έλικας και του ρότορα του κινητήρα.

Όταν η σχέση (2.69) μεταφερθεί στο σώμα του τετρακόπτερου τότε θα πρέπει τα πρόσημα να αλλαχθούν επειδή οι ροπές πλέον είναι αντίθετες (όταν ο δρομέας ενός κινητήρα κρατείται σταθερός

τότε ο στάτης θα περιστρέφεται αντίθετα από την περιστροφή που θα έκανε ο δρομέας). Οπότε η σχέση (2.69) γίνεται

$$\mathbf{M}_G = \begin{bmatrix} -I_R \cdot q \cdot \bar{\omega} \\ I_R \cdot p \cdot \bar{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

2.9.4 Ροπή λόγω αεροδυναμικών τριβών στο σώμα του τετρακόπτερου \mathbf{M}_F

Η ροπή αυτή σύμφωνα με την εργασία [37] δίνεται από την σχέση (2.71)

$$\mathbf{M}_F = k_{DR} \cdot \boldsymbol{\omega}_B^2 \Rightarrow \mathbf{M}_F = \begin{bmatrix} -k_{DR\phi} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{DR\theta} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{DR\psi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p^2 \\ q^2 \\ r^2 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

όπου $k_{DR\phi}$, $k_{DR\theta}$ και $k_{DR\psi}$ είναι οι συντελεστές αεροδυναμικής τριβής.

2.9.5 Η συνολική ροπή

Η συνολική ροπή είναι το άθροισμα των ροπών οι οποίες παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, σχέσεις (2.67), (2.68), (2.70) και (2.71)

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_T + \mathbf{M}_D + \mathbf{M}_G + \mathbf{M}_F \quad (2.72)$$

Αναλυτικά έχουμε τα εξής:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} l \cdot k_F \cdot (\omega_2^2 - \omega_4^2) \\ l \cdot k_F \cdot (\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ 0 \end{bmatrix} - k_M \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \sum_{i=1}^4 (-1)^i \cdot \omega_i^2 + \begin{bmatrix} -I_R \cdot q \cdot \bar{\omega} \\ I_R \cdot p \cdot \bar{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_{DR\phi} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{DR\theta} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{DR\psi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p^2 \\ q^2 \\ r^2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I_R \cdot q \cdot \bar{\omega} \\ I_R \cdot p \cdot \bar{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{DR\phi} \cdot p^2 \\ k_{DR\theta} \cdot q^2 \\ k_{DR\psi} \cdot r^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 - I_R \cdot q \cdot \bar{\omega} - k_{DR\phi} \cdot p^2 \\ U_3 + I_R \cdot p \cdot \bar{\omega} - k_{DR\theta} \cdot q^2 \\ U_4 - k_{DR\psi} \cdot r^2 \end{bmatrix}$$

οπότε για η συνολική ροπή δίνεται από την σχέση (2.73)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 - I_R \cdot q \cdot \bar{\omega} - k_{DR\phi} \cdot p^2 \\ U_3 + I_R \cdot p \cdot \bar{\omega} - k_{DR\theta} \cdot q^2 \\ U_4 - k_{DR\psi} \cdot r^2 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (2.73) στην σχέση (2.57) προκύπτουν τα εξής:

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_{B/E}^B = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{L}{I_{xx}} \\ \frac{M}{I_{yy}} \\ \frac{N}{I_{zz}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{(I_{zz} - I_{yy}) \cdot q \cdot r}{I_{xx}} \\ \frac{(I_{xx} - I_{zz}) \cdot p \cdot r}{I_{yy}} \\ \frac{(I_{yy} - I_{xx}) \cdot p \cdot q}{I_{zz}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_2 - I_R \cdot q \cdot \bar{\omega} - k_{DR\phi} \cdot p^2}{I_{xx}} \\ \frac{U_3 + I_R \cdot p \cdot \bar{\omega} - k_{DR\theta} \cdot q^2}{I_{yy}} \\ \frac{U_4 - k_{DR\psi} \cdot r^2}{I_{zz}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{(I_{zz} - I_{yy}) \cdot q \cdot r}{I_{xx}} \\ \frac{(I_{xx} - I_{zz}) \cdot p \cdot r}{I_{yy}} \\ \frac{(I_{yy} - I_{xx}) \cdot p \cdot q}{I_{zz}} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{(I_{yy} - I_{zz}) \cdot q \cdot r + U_2 - I_R \cdot q \cdot \bar{\omega} - k_{DR\phi} \cdot p^2}{I_{xx}} \\ \frac{(I_{zz} - I_{xx}) \cdot p \cdot r + U_3 + I_R \cdot p \cdot \bar{\omega} - k_{DR\theta} \cdot q^2}{I_{yy}} \\ \frac{(I_{xx} - I_{yy}) \cdot p \cdot q + U_4 - k_{DR\psi} \cdot r^2}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (2.74)
 \end{aligned}$$

Για να απλοποιηθεί η σχέση (2.74) χρησιμοποιείται η σχέση (2.26) η οποία ξαναγράφεται παρακάτω

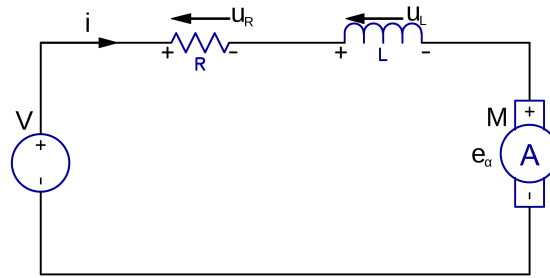
$$\omega^B = T^{-1} \cdot \Theta^E \Rightarrow \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\varphi & \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\theta \cdot \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Θεωρώντας ότι οι γωνίες φ , θ και ψ είναι μικρές τότε ο πίνακας T^{-1} γίνεται ο $I_{3 \times 3}$ οπότε το διάνυσμα ω^B ταυτίζεται με το διάνυσμα $\dot{\Theta}^E$ οπότε η σχέση (2.74) γίνεται σχέση (2.75)

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(I_{yy} - I_{zz}) \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\psi} + U_2 + I_R \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{\omega} - k_{DR\phi} \cdot \dot{\phi}^2}{I_{xx}} \\ \frac{(I_{zz} - I_{xx}) \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\psi} + U_3 - I_R \cdot \dot{\phi} \cdot \bar{\omega} - k_{DR\theta} \cdot \dot{\theta}^2}{I_{yy}} \\ \frac{(I_{xx} - I_{yy}) \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\theta} + U_4 - k_{DR\psi} \cdot \dot{\psi}^2}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

2.10 Μοντελοποίηση των κινητήρων

Η κίνηση του τετρακόπτερου επιτυγχάνεται με τέσσερις ηλεκτρικούς κινητήρες οι οποίοι είναι συνήθως κινητήρες συνεχούς ρεύματος. Το ισοδύναμο κύκλωμα ενός κινητήρα συνεχούς ρεύματος φαίνεται στο σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6: Ισοδύναμο κύκλωμα του κινητήρα συνεχούς ρεύματος

Όπου R είναι η συνολική ωμική αντίσταση του κυκλώματος, L είναι η συνολική αυτεπαγωγή σκέδασης στο κύκλωμα, e_a είναι η τάση εξ' επαγωγής από το κύκλωμα του ρότορα στον στάτη και V είναι η τάση διέγερσης του κινητήρα.

Εφαρμόζοντας τον νόμο των τάσεων του Kirchhoff προκύπτει η σχέση (2.76).

$$V = u_R + u_L + e_a = i \cdot R + L \dot{i} + k_e \cdot \omega \quad (2.76)$$

όπου k_e είναι κατασκευαστική σταθερά του κινητήρα και ω είναι η ταχύτητα περιστροφής του κινητήρα.

Στην σχέση (2.76) η παράγωγος του ρεύματος i μπορεί να παραλειφθεί για τους λόγους που αναφέρονται στην εργασία [33] και επαναλαμβάνονται παρακάτω:

- Οι κινητήρες αυτοί έχουν πολύ μικρή αυτεπαγωγή επειδή τους έχουν βελτιστοποιήσει όσον αφορά την αυτεπαγωγή σκέδασης.
- Η απόκριση του ηλεκτρικού μέρους είναι πολύ πιο γρήγορη από την απόκριση του μηχανικού συστήματος με αποτέλεσμα η συνεισφορά του ηλεκτρικού να είναι μη υπολογίσιμη.
- Είναι πολύ πιο εύκολο να λυθεί μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης από μια εξίσωση δεύτερης τάξης.

Οπότε η σχέση (2.76) μπορεί πιο απλά να γραφτεί ως εξής:

$$V = i \cdot R + k_e \cdot \omega \quad (2.77)$$

Ο δρομέας σε έναν κινητήρα επιταχύνεται όταν υπάρχει μια ροπή η οποία εφαρμόζεται στον δρομέα, όπως φαίνεται στην σχέση (2.78)

$$I_R \cdot \dot{\omega} = M_{EM} - M_{LD} \quad (2.78)$$

όπου M_{LD} είναι η ροπή του συνολικού φορτίου του δρομέα, η ροπή αυτή σύμφωνα με την εργασία [33] είναι ανάλογη του τετραγώνου της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος δρομέα - έλικα θεωρώντας ότι ο έλικας είναι απευθείας προσαρμοσμένος επάνω στον δρομέα, σχέση (2.79).

$$M_{LD} = k_M \cdot \omega^2 \quad (2.79)$$

Η ηλεκτρομαγνητική ροπή δίνεται από την σχέση (2.80)

$$M_{EM} = k_q \cdot i \quad (2.80)$$

Από τις σχέσεις (2.78) και (2.80) προκύπτει η σχέση (2.81)

$$i = \frac{I_R \cdot \dot{\omega} + M_{LD}}{k_q} \quad (2.81)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (2.81) και την σχέση (2.80) στην σχέση (2.77) προκύπτει η σχέση (2.82)

$$V = \frac{I_R \cdot \dot{\omega} + M_{LD}}{k_q} \cdot R + k_e \cdot \omega \Rightarrow V = \frac{I_R \cdot R}{k_q} \cdot \dot{\omega} + \frac{k_M \cdot R}{k_q} \cdot \omega^2 + k_e \cdot \omega \quad (2.82)$$

Λύνοντας ως προς $\dot{\omega}$ την σχέση (2.82) προκύπτει η σχέση (2.83)

$$\dot{\omega} = -\frac{k_M}{I_R} \cdot \omega^2 - \frac{k_q \cdot k_e}{I_R \cdot R} \cdot \omega - \frac{k_q}{I_R \cdot R} \cdot V \quad (2.83)$$

2.11 Σχέση τάσης – ώθησης

Η είσοδος σε έναν σύστημα κινητήρα – έλικα είναι η τάση τροφοδοσίας V του κινητήρα και το αποτέλεσμα είναι η ώθηση T η οποία παράγεται.

Η ηλεκτρομαγνητική ροπή του κινητήρα δίνεται από την σχέση (2.80) οπότε το ρεύμα του τυμπάνου δίνεται από την σχέση (2.84)

$$I = \frac{M_{EM}}{k_q} \quad (2.84)$$

Η ηλεκτρική ισχύς δίνεται από την σχέση (2.85)

$$P = I \cdot V = \frac{M_{EM}}{k_q} \cdot V \quad (2.85)$$

Θεωρώντας ότι ο κινητήρας λειτουργεί με απόδοση η τότε η μηχανική ισχύς δίνεται από την σχέση (2.86)

$$P_M = \eta \cdot P = \frac{\eta \cdot M_{EM}}{k_q} \cdot V \quad (2.86)$$

Θεωρώντας τον συντελεστή ποιότητας του έλικα f ως τον λόγο της επαγόμενης ισχύος στον αέρα P_h προς την μηχανική ισχύ P_m σύμφωνα με την εργασία [39] προκύπτουν τα εξής:

$$f = \frac{P_h}{P_m} \quad (2.87)$$

Ιδανικά η επαγόμενη ισχύς στον αέρα P_h σύμφωνα με την εργασία [40] είναι το γινόμενο της ώθησης T του έλικα και της ταχύτητας u_h του ρεύματος του αέρα στην κατάσταση αιώρησης (hover), όπως φαίνεται στην σχέση (2.88)

$$P_h = T \cdot u_h \quad (2.88)$$

Από τις σχέσεις (2.86), (2.87) και (2.88) προκύπτει η σχέση (2.89)

$$\frac{f \cdot \eta \cdot M_{EM}}{k_q} \cdot V = T \cdot u_h \quad (2.89)$$

Σύμφωνα με την εργασία [41] η ταχύτητα του αέρα δίνεται από την σχέση (2.90)

$$u_h = \sqrt{\frac{T}{2 \cdot \rho_a \cdot A}} \quad (2.90)$$

όπου ρ_a είναι η πυκνότητα του αέρα και $A = \pi R^2$ η επιφάνεια του δίσκου που δημιουργεί ο περιστρεφόμενος έλικας και R είναι η ακτίνα του έλικα. Από τις σχέσεις (2.89) και (2.90) προκύπτει η σχέση (2.91)

$$\frac{f \cdot \eta \cdot M_{EM}}{k_q} \cdot V = T \cdot \sqrt{\frac{T}{2 \cdot \rho_a \cdot A}} \quad (2.91)$$

Σύμφωνα με την εργασία [40] η ηλεκτρομαγνητική ροπή είναι ίση με την ώθηση που παράγεται πολλαπλασιασμένη με ένα συντελεστή αναλογίας k_t , όπως δίνεται από την σχέση (2.92)

$$M_{EM} = k_t \cdot T \quad (2.92)$$

Από τις σχέσεις (2.91) και (2.92) προκύπτει η σχέση (2.93)

$$\begin{aligned} \frac{f \cdot \eta \cdot k_t \cdot T}{k_q} \cdot V = T \cdot \sqrt{\frac{T}{2 \cdot \rho_a \cdot A}} &\Rightarrow \frac{f \cdot \eta \cdot k_t}{k_q} \cdot V = \sqrt{\frac{T}{2 \cdot \rho_a \cdot A}} \Rightarrow \\ T = 2 \cdot \rho_a \cdot A \cdot \left(\frac{f \cdot \eta \cdot k_t}{k_q} \right)^2 \cdot V^2 &\quad (2.93) \end{aligned}$$

2.12 Δυνάμεις και ροπές ως συνάρτηση των τάσεων των κινητήρων

Η σχέση (2.62) αξιοποιώντας την σχέση (2.93) γίνεται όπως φαίνεται στην σχέση (2.94)

$$\mathbf{T}^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_1^4 T_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \cdot \rho_a \cdot A \cdot \left(\frac{f \cdot \eta \cdot k_t}{k_q} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^4 V_i^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_1 \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

Η σχέση (2.67) αξιοποιώντας την σχέση (2.93) γίνεται όπως φαίνεται στην σχέση (2.95)

$$\mathbf{M}_T = \begin{bmatrix} M_{Tx_B} \\ M_{Ty_B} \\ M_{Tz_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \cdot 2 \cdot \rho_a \cdot A \cdot \left(\frac{f \cdot \eta \cdot k_t}{k_q} \right)^2 \cdot (V_2^2 - V_4^2) \\ l \cdot 2 \cdot \rho_a \cdot A \cdot \left(\frac{f \cdot \eta \cdot k_t}{k_q} \right)^2 \cdot (V_3^2 - V_1^2) \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}_T = \begin{bmatrix} U_\varphi \\ U_\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

Η σχέση (2.68) αξιοποιώντας την σχέση (2.93) γίνεται όπως φαίνεται στην σχέση (2.96)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} M_{dx_B} \\ M_{dy_B} \\ M_{dz_B} \end{bmatrix} = -k_t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \sum_{i=1}^4 (-1)^i \cdot T_i = k_t \cdot 2 \cdot \rho_a \cdot A \cdot \left(\frac{f \cdot \eta \cdot k_t}{k_q} \right)^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V_1^2 - V_2^2 + V_3^2 - V_4^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_4 \end{bmatrix} &\quad (2.96) \end{aligned}$$

2.13 Οι δυναμικές εξισώσεις του μοντέλου

Οι δυναμικές εξισώσεις του μοντέλου του τετρακόπτερου προκύπτουν από τις σχέσεις (2.64) και (2.75) και (2.83) όπως αυτές τροποποιούνται ή συμπληρώνονται από τις σχέσεις (2.94), (2.95) και (2.96), όπως φαίνονται στην σχέση (2.97)

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= -\frac{k_M}{I_R} \cdot \omega^2 - \frac{k_q \cdot k_e}{I_R \cdot R} \cdot \omega \frac{k_q}{I_R \cdot R} \cdot V \\ \ddot{x}_E &= \frac{-k_{DTx} \cdot \dot{x}_E + (\sin\varphi \cdot \sin\psi + \cos\varphi \cdot \cos\psi \cdot \sin\theta) \cdot U_1}{m} \\ \ddot{y}_E &= \frac{-k_{DTy} \cdot \dot{y}_E + (\cos\varphi \cdot \sin\psi \cdot \sin\theta - \cos\psi \cdot \sin\varphi) \cdot U_1}{m} \\ \ddot{z}_E &= \frac{-m \cdot g - k_{DTz} \cdot \dot{z}_E + \cos\varphi \cdot \cos\theta \cdot U_1}{m} \\ \ddot{\varphi} &= \frac{(I_{yy} - I_{zz}) \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\psi} + U_2 + I_R \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{\omega} - k_{DR\varphi} \cdot \dot{\varphi}^2}{I_{xx}} \\ \ddot{\theta} &= \frac{(I_{zz} - I_{xx}) \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\psi} + U_3 - I_R \cdot \dot{\varphi} \cdot \bar{\omega} - k_{DR\theta} \cdot \dot{\theta}^2}{I_{yy}} \\ \ddot{\psi} &= \frac{(I_{xx} - I_{yy}) \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\theta} + U_4 - k_{DR\psi} \cdot \dot{\psi}^2}{I_{zz}}\end{aligned}\tag{2.97}$$

Οι εξισώσεις αυτές θα χρησιμοποιηθούν στην παρούσα εργασία. Οι εξισώσεις αυτές είναι ισχυρά συζευγμένες. Οι μεταβλητές ελέγχου του τετρακόπτερου είναι οι τάσεις στον κάθε κινητήρα. Οι τάσεις περιλαμβάνονται στις μεταβλητές U_1 , U_2 , U_3 και U_4 οπότε αυτές θα χρησιμοποιηθούν στις σχέσεις ελέγχου του τετρακόπτερου. Ορίζουμε ως διάνυσμα εισόδου του τετρακόπτερου το \mathbf{u} , σχέση (2.98).

$$\mathbf{u} = [U_1, U_2, U_3, U_4]^T\tag{2.98}$$

2.14 Περιγραφή του συστήματος με εξισώσεις κατάστασης

Η θέση και η στάση του τετρακόπτερου περιγράφονται όπως είδαμε από δώδεκα (12) μεταβλητές. Οι μεταβλητές αυτές αποτελούν το διάνυσμα κατάστασης \mathbf{x} του συστήματος, σχέση (2.99)

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= [x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}, \varphi, \dot{\varphi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}] \Rightarrow \\ \mathbf{x} &= [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}]\end{aligned}\tag{2.99}$$

Η παράγωγος του διανύσματος κατάστασης \mathbf{x} ως προς τον χρόνο δίνεται από την σχέση (2.100)

$$\dot{\mathbf{x}} = [x_2, \dot{x}_2, x_4, \dot{x}_4, x_6, \dot{x}_6, x_8, \dot{x}_8, x_{10}, \dot{x}_{10}, x_{12}, \dot{x}_{12}]\tag{2.100}$$

Μη γραμμικός αυτόματος έλεγχος για μη επανδρωμένα εναέρια οχήματα με τη μέθοδο *backstepping*

Οι σχέσεις (2.99) και (2.100) μπορούν να περιγραφούν γενικά από την σχέση (2.101)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.101)$$

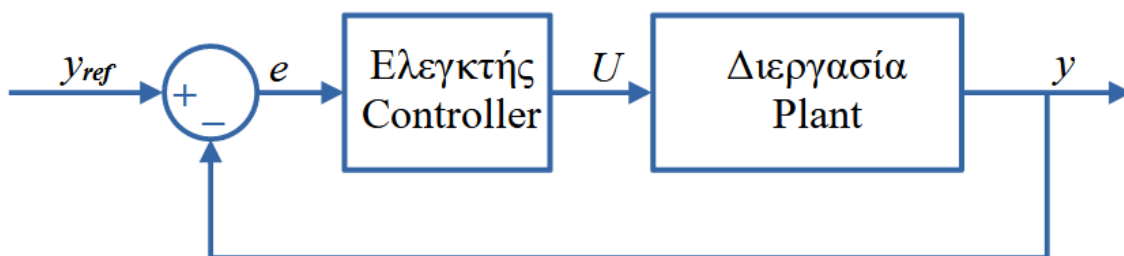
Κεφάλαιο 3 Ελεγκτές PID και LQR

3.1 Ο PID Ελεγκτής

Ένας πολύ διαδεδομένος αλγόριθμος για έλεγχο γραμμικών συστημάτων είναι ο αναλογικός (proportional) και ολοκληρωτικός (integral) και διαφορικός (derivative) έλεγχος ή αλλιώς PID έλεγχος. Ο έλεγχος αυτός βασίζεται στην επιμέρους συνεισφορά τριών ελεγκτών δηλαδή του αναλογικού, ολοκληρωτικού και διαφορικού. Παρακάτω θα εξεταστεί το κάθε κομμάτι του ελεγκτή ξεχωριστά και στην συνέχεια η σύνθεσή τους για να προκύψει ο ελεγκτής PID.

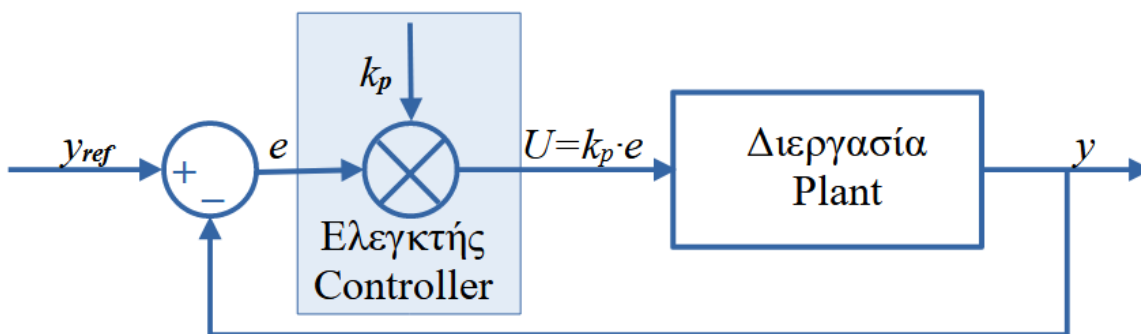
3.1.1 Ο αναλογικός ελεγκτής P (Proportional controller)

Στα κλειστά συστήματα αυτόματου ελέγχου κάθε χρονική στιγμή υπολογίζεται το σφάλμα e , δηλαδή η απόκλιση της υπό έλεγχο μεταβλητής y από την επιθυμητή τιμή αυτής ή τιμή αναφοράς y_{ref} . Η είσοδος U στο υπό έλεγχο σύστημα (διεργασία) είναι συνάρτηση του σφάλματος e . Ο αναλογικός ελεγκτής αναπαρίσταται στο σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1: Σύστημα αυτόματου ελέγχου κλειστού βρόχου

Στον αναλογικό ελεγκτή η είσοδος στο σύστημα είναι ανάλογη του σφάλματος, τα παραπάνω φαίνονται σχηματικά στο σχήμα 3.2.

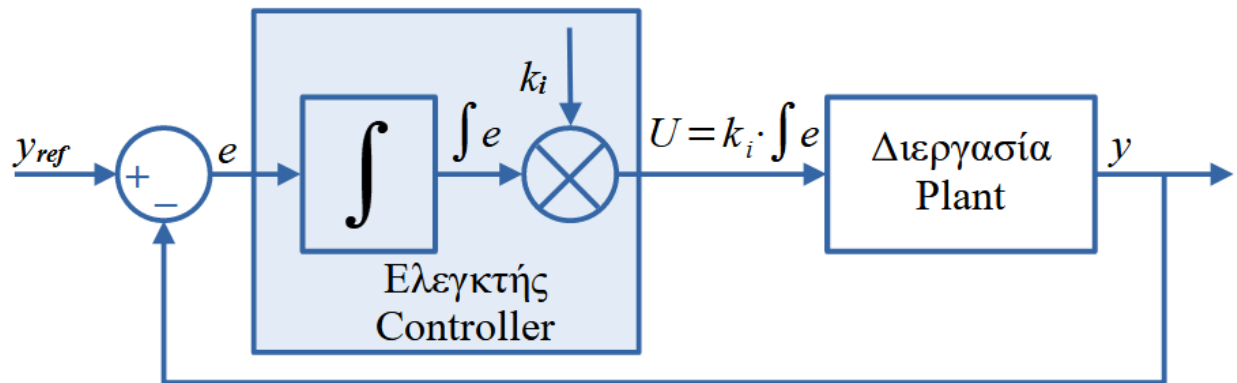


Σχήμα 3.2: Σύστημα αυτόματου ελέγχου κλειστού βρόχου με αναλογικό ελεγκτή P

Η σταθερά k_p ονομάζεται σταθερά ενίσχυσης και όσο αυξάνεται η τιμή της τόσο μικρότερο γίνεται το σφάλμα στην έξοδο. Η τιμή της σταθεράς k_p δεν μπορεί να γίνει πολύ μεγάλη διότι το σύστημα γίνεται ασταθές. Η αστάθεια οφείλεται στην δημιουργία πόλων στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο επειδή ο γεωμετρικός τόπος των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης μετατοπίζεται προς τα δεξιά.

3.1.2 Ο ολοκληρωτικός ελεγκτής I (Integral controller)

Η έξοδος του ολοκληρωτικού ελεγκτή είναι ανάλογη του ολοκληρώματος του σφάλματος e . Σε αυτό τον ελεγκτή ουσιαστικά λαμβάνεται υπόψη και η προϊστορία του σφάλματος. Ο ελεγκτής αυτός φαίνεται στο σχήμα 3.3.

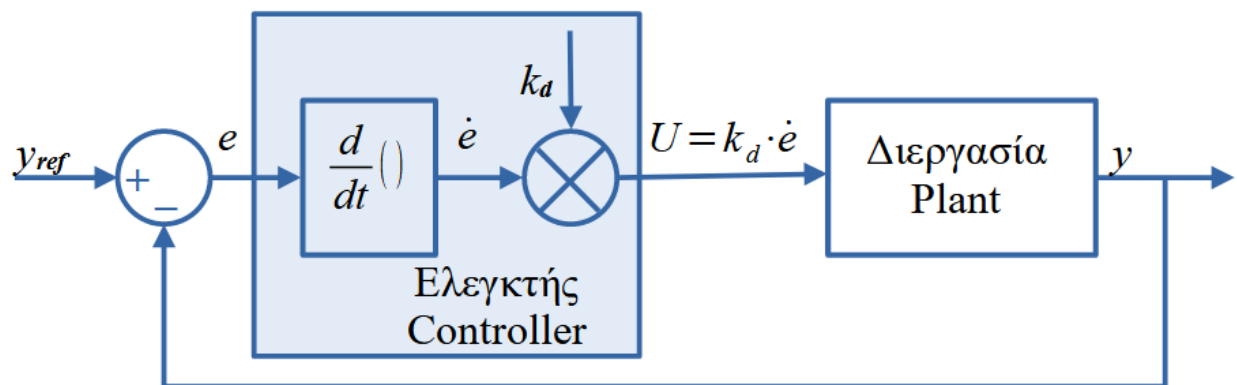


Σχήμα 3.3: Σύστημα αυτόματου ελέγχου κλειστού βρόχου με ολοκληρωτικό ελεγκτή I

Ο ελεγκτής αυτός ουσιαστικά εισάγει έναν επιπλέον πόλο στο σύστημα με αποτέλεσμα ο γεωμετρικός τόπος των ριζών να μετατοπίζεται και πάλι δεξιά. Η μετατόπιση αυτή έχει ως αποτέλεσμα την αστάθεια για περιοχή τιμών της σταθεράς k_i . Από μία άλλη οπτική ο ολοκληρωτικός ελεγκτής μπορεί να θεωρηθεί ως ένα χαμηλοπερατό φίλτρο το οποίο δεν επιτρέπει απότομες μεταβολές στην είσοδό του να εμφανιστούν στην έξοδό του.

3.1.3 Ο διαφορικός ελεγκτής D (Derivative control)

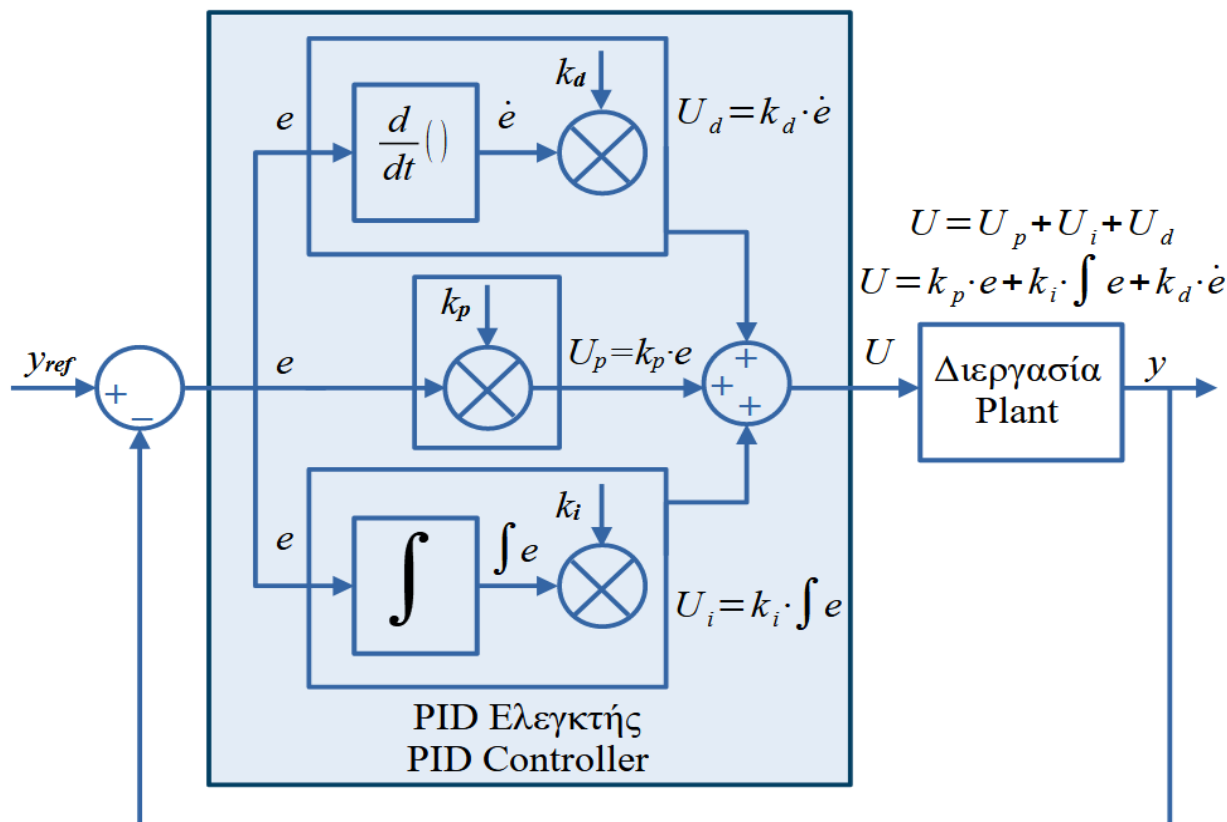
Η έξοδος του διαφορικού ελεγκτή είναι ανάλογη της παραγώγου του σφάλματος e . Με την προσθήκη του διαφορικού ελεγκτή γίνεται προσπάθεια να προβλεφθούν οι μελλοντικές τιμές της εξόδου με βάση την κλίση της συνάρτησης σφάλματος και ανάλογα με την κλίση να διορθώνεται η έξοδος. Με την προσθήκη αυτού του ελεγκτή προστίθεται ένα μηδενικό στην συνάρτηση μεταφοράς. Όπως και στον ολοκληρωτικό ελεγκτή έτσι και εδώ ο διαφορικός ελεγκτής μπορεί να θεωρηθεί ως ένα υπερατά φίλτρο το οποίο επιτρέπει απότομες μεταβολές στην είσοδό του να εμφανιστούν στην έξοδό του δηλαδή προσδίδει ταχύτητα στην αντίδραση του συστήματος ελέγχου. Ο διαφορικός ελεγκτής φαίνεται στο σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.4: Σύστημα αυτόματου ελέγχου κλειστού βρόχου με διαφορικό ελεγκτή D

3.1.4 Ο PID ελεγκτής

Ο PID ελεγκτής αποτελείται από τους τρεις προηγούμενους ελεγκτές, ο ελεγκτής αυτός φαίνεται στο σχήμα 3.5.



Σχήμα 3.5: Ο PID ελεγκτής

Ο PID ελεγκτής ενσωματώνει όλα τα χαρακτηριστικά των τριών ελεγκτών που τον συνθέτουν.

3.1.5 Υλοποίηση στον υπολογιστή

Για να προγραμματιστεί ο αλγόριθμος του PID ελεγκτή στον υπολογιστή θα πρέπει να είναι σε κατάλληλη μορφή. Κατάλληλη μορφή για τον προγραμματισμό σε υπολογιστή είναι οι εξισώσεις διαφορών. Παρακάτω θα αποδειχθούν οι σχέσεις οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν για τον προγραμματισμό σε περιβάλλον Matlab.

Σε αυτό τον ελεγκτή γενικά δεν υλοποιείται το κομμάτι της παραγώγου αυτούσιο αλλά γίνεται μια τροποποίηση έτσι ώστε ταυτόχρονα να υλοποιείται και ένα βαθυπερατό φίλτρο. Η συνάρτηση μεταφοράς C_d κατά Laplace που υλοποιείται φαίνεται στην σχέση (3.1)

$$C_d = \frac{U_d}{e} = \frac{N \cdot s}{N + s} \quad (3.1)$$

όπου e το σφάλμα, U_d η έξοδος του διαφορικού κομματιού, N η σταθερά του φίλτρου και s μιγαδική μεταβλητή του πυρήνα $K(s, t)$ του μετασχηματισμού Laplace.

Με αυτή την τροποποίηση η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή φαίνεται στην σχέση (3.2)

$$U = U_p + U_i + U_d = k_p \cdot e + k_i \cdot \frac{1}{s} \cdot e + k_d \cdot \frac{N \cdot s}{N + s} \cdot e \quad (3.2)$$

Σύμφωνα με την μεθοδολογία στην εργασία [42] για την μέθοδο της διαφοράς προς τα εμπρός ή Euler Forward method προκύπτουν τα εξής:

$$U = U_p + U_i + U_d = k_p \cdot e + k_i \cdot \frac{1}{s} \cdot e + \frac{N \cdot s}{N + s} \cdot e = k_p \cdot e + k_i \cdot \frac{T_s}{z-1} \cdot e + k_d \cdot \frac{N \cdot (z-1)}{N \cdot T_s + z - 1} \cdot e \Rightarrow$$

$$U \cdot (z-1) \cdot (N \cdot T_s + z - 1) = \underbrace{k_p \cdot (z-1) \cdot (N \cdot T_s + z - 1)}_1 \cdot e + \underbrace{k_i \cdot T_s \cdot (N \cdot T_s + z - 1)}_2 \cdot e + \underbrace{k_d \cdot N \cdot (z-1) \cdot (z-1)}_3 \cdot e$$

$$(1): U \cdot (z-1) \cdot (N \cdot T_s + z - 1) = z^2 \cdot [1 + z^{-1} \cdot (N \cdot T_s - 2) + z^{-2} \cdot (1 - N \cdot T_s)] \cdot U$$

$$(2): k_p \cdot (z-1) \cdot (N \cdot T_s + z - 1) \cdot e = z^2 \cdot k_p \cdot [1 + z^{-1} \cdot (N \cdot T_s - 2) + z^{-2} \cdot (1 - N \cdot T_s)] \cdot e$$

$$(3): k_i \cdot T_s \cdot (N \cdot T_s + z - 1) \cdot e = z^2 \cdot k_i \cdot T_s \cdot [z^{-1} - z^{-2} \cdot (N \cdot T_s - 1)] \cdot e$$

$$(4): k_d \cdot N \cdot (z-1) \cdot (z-1) \cdot e = z^2 \cdot k_d \cdot N \cdot (1 - 2 \cdot z^{-1} + z^{-2}) \cdot e$$

$$(1), (2), (3), (4) \Rightarrow$$

$$[1 + z^{-1} \cdot (N \cdot T_s - 2) + z^{-2} \cdot (1 - N \cdot T_s)] \cdot U = k_p \cdot [1 + z^{-1} \cdot (N \cdot T_s - 2) + z^{-2} \cdot (1 - N \cdot T_s)] \cdot e +$$

$$k_i \cdot T_s \cdot [z^{-1} - z^{-2} \cdot (N \cdot T_s - 1)] \cdot e + k_d \cdot N \cdot (1 - 2 \cdot z^{-1} + z^{-2}) \cdot e \Rightarrow$$

$$U + (N \cdot T_s - 2) \cdot z^{-1} \cdot U + (1 - N \cdot T_s) \cdot z^{-2} \cdot U = k_p \cdot e + k_p \cdot (N \cdot T_s - 2) \cdot z^{-1} \cdot e + k_p \cdot (1 - N \cdot T_s) \cdot z^{-2} \cdot e +$$

$$k_i \cdot T_s \cdot z^{-1} \cdot e - k_i \cdot T_s \cdot (N \cdot T_s - 1) \cdot z^{-2} \cdot e + k_d \cdot N \cdot e - 2 \cdot k_d \cdot N \cdot z^{-1} \cdot e + k_d \cdot N \cdot z^{-2} \cdot e \Rightarrow$$

$$U = k_p \cdot e + k_p \cdot (N \cdot T_s - 2) \cdot z^{-1} \cdot e + k_p \cdot (1 - N \cdot T_s) \cdot z^{-2} \cdot e + k_i \cdot T_s \cdot z^{-1} \cdot e - k_i \cdot T_s \cdot (N \cdot T_s - 1) \cdot z^{-2} \cdot e +$$

$$k_d \cdot N \cdot e - 2 \cdot k_d \cdot N \cdot z^{-1} \cdot e + k_d \cdot N \cdot z^{-2} \cdot e - (N \cdot T_s - 2) \cdot z^{-1} \cdot U - (1 - N \cdot T_s) \cdot z^{-2} \cdot U \Rightarrow$$

$$U = (k_p + k_d \cdot N) \cdot e + [k_p \cdot (N \cdot T_s - 2) + k_i \cdot T_s - 2 \cdot k_d \cdot N] \cdot z^{-1} \cdot e +$$

$$[k_p \cdot (1 - N \cdot T_s) - k_i \cdot T_s \cdot (N \cdot T_s - 1) + k_d \cdot N] \cdot z^{-2} \cdot e -$$

$$(N \cdot T_s - 2) \cdot z^{-1} \cdot U - (1 - N \cdot T_s) \cdot z^{-2} \cdot U \Rightarrow$$

$$\boxed{U(k) = (k_p + k_d \cdot N) \cdot e(k) + [k_p \cdot (N \cdot T_s - 2) + k_i \cdot T_s - 2 \cdot k_d \cdot N] \cdot e(k-1) + [k_p \cdot (1 - N \cdot T_s) - k_i \cdot T_s \cdot (N \cdot T_s - 1) + k_d \cdot N] \cdot e(k-2) - (N \cdot T_s - 2) \cdot U(k-1) - (1 - N \cdot T_s) \cdot U(k-2)} \quad (3.3)$$

Όπου T_s είναι ο χρόνος δειγματοληψίας του συστήματος.

Η σχέση (3.3) θα χρησιμοποιηθεί για την υλοποίηση του PID αλγόριθμου στον υπολογιστή.

3.1.6 Ρύθμιση των παραμέτρων του PID ελεγκτή

Στην εργασία αυτή η ρύθμιση των παραμέτρων k_p , k_i , k_d και N υλοποιήθηκε με μέθοδο βελτιστοποίησης, δηλαδή ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης κόστους F_c . Η μέθοδος βελτιστοποίησης η οποία χρησιμοποιήθηκε είναι η διαφορική εξέλιξη DE, περισσότερο για την μέθοδο αυτή στο [29] και στο [30] η DE ανήκει στην κατηγορία των εξελικτικών αλγορίθμων όπως οι γενετικοί αλγόριθμοι

και βασίζεται στην μετάλλαξη, διασταύρωση και επιλογή των λύσεων. Η συνάρτηση κόστους περιγράφεται από την σχέση (3.4)

$$F_c = \sqrt{\sum (X - X_d)^2} \quad (3.4)$$

όπου X , X_d είναι ο πίνακας με τα διανύσματα των μεταβλητών θέσης και στάσης και ο πίνακας με τα επιθυμητά διανύσματα των μεταβλητών θέσης και στάσης αντίστοιχα.

Ο πίνακας με τα επιθυμητά διανύσματα περιέχει τα διανύσματα για τις μεταβλητές z , φ , θ και ψ .

3.2 Ο γραμμικός τετραγωνικός ελεγκτής (Linear Quadratic Regulator LQR)

Ένας πολύ διαδεδομένος ρυθμιστής για τον έλεγχο γραμμικών συστημάτων είναι ο γραμμικός τετραγωνικός ελεγκτής, (Linear Quadratic Regulator *LQR*). Ο *LQR* ανήκει στην κατηγορία των ελεγκτών με γραμμική ανατροφοδότηση του διανύσματος κατάστασης x . Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα περιγράφεται στον χώρο των καταστάσεων από την σχέση (3.5)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u \\ y &= C \cdot x + D \cdot u \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

όπου:

$u \in R^{m \times 1}$ και ονομάζεται διάνυσμα εισόδου (input vector)

$x \in R^{n \times 1}$ και ονομάζεται διάνυσμα κατάστασης (state vector)

$y \in R^{p \times 1}$ και ονομάζεται διάνυσμα εξόδου (output vector)

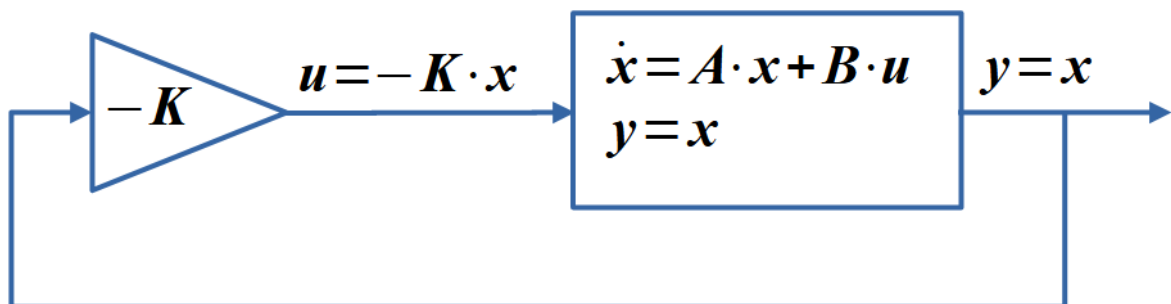
$A \in R^{n \times n}$ και ονομάζεται πίνακας κατάστασης (state matrix) ή πίνακας συστήματος.

$B \in R^{n \times m}$ και ονομάζεται πίνακας εισόδου (input matrix).

$C \in R^{p \times n}$ και ονομάζεται πίνακας εξόδου (output matrix).

$D \in R^{p \times m}$ και ονομάζεται πίνακας μετάδοσης (transmission matrix).

Στο σχήμα 3.6 φαίνεται ένα σύστημα αυτομάτου ελέγχου με *LQR* ελεγκτή.



Σχήμα 3.6: Ελεγκτής γραμμικής ανάδρασης της πλήρους κατάστασης του συστήματος
Το πρόβλημα του *LQR* ελεγκτή είναι η εύρεση του πίνακα K ο οποίος πολλαπλασιάζει το διάνυσμα της κατάστασης όπως φαίνεται στην εξίσωση (3.6)

$$u = -K \cdot x \quad (3.6)$$

Αυτό είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, ουσιαστικά πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιας συνάρτησης κόστους J , η συνάρτηση J δίνεται από την σχέση (3.7)

$$J = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}) dt \quad (3.7)$$

όπου:

\mathbf{Q} είναι ένας συμμετρικός, θετικά ημιορισμένος πίνακας.

\mathbf{R} είναι ένας συμμετρικός, θετικά ορισμένος πίνακας.

Οι παραπάνω πίνακες ουσιαστικά είναι τα βάρη τα οποία δίνονται από τον μηχανικό όσον αφορά την κατάσταση και την είσοδο στο σύστημα. Εάν για παράδειγμα δοθούν υψηλές τιμές στα στοιχεία του πίνακα \mathbf{Q} τότε θα πρέπει τα αντίστοιχα στοιχεία του διάνυσματος \mathbf{x} να είναι όσο το δυνατό χαμηλά έτσι ώστε να μειωθεί η τιμή της συνάρτησης κόστους J . Εάν η εξοικονόμησης ενέργειας είναι υψηλής προτεραιότητας τότε θα πρέπει οι τιμές στο διάνυσμα ελέγχου να είναι μικρές, άρα οι τιμές του πίνακα \mathbf{R} πρέπει να είναι μεγάλες. Τελικά τα στοιχεία των πινάκων αυτών τα επιλέγει ο μηχανικός λαμβάνοντας υπόψη τις διάφορες σχεδιαστικές απαιτήσεις της εκάστοτε εφαρμογής.

Η λύση του προβλήματος αυτού σύμφωνα με την εργασία [43] δίνεται από την σχέση (3.8)

$$\mathbf{K} = -\mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{P} \quad (3.8)$$

όπου \mathbf{P} είναι ένας θετικά ημιορισμένος πίνακας ο οποίος είναι λύση της αλγεβρικής εξίσωσης *Riccati*. Η εξίσωση *Riccati* φαίνεται στην σχέση (3.9)

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (3.9)$$

Όλα τα παραπάνω ισχύουν για γραμμικά συστήματα, το σύστημα όμως το οποίο εμείς μελετάμε είναι ένα μη γραμμικό σύστημα. Για να εφαρμοστεί ο έλεγχος LQR θα πρέπει προηγουμένως να γραμμικοποιηθεί το σύστημα.

3.2.1 Γραμμικοποίηση του συστήματος

Η γραμμικοποίηση έχει ως σκοπό να περιγράψει ένα μη γραμμικό σύστημα σύμφωνα με την γραμμική σχέση (3.5), αυτό γίνεται προσδιορίζοντας τους πίνακες \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} και \mathbf{D} . Όταν ένα μη γραμμικό σύστημα γραμμικοποιείται τότε αυτό είναι απαραίτητο να γίνει γύρω από ένα σημείο ισορροπίας όπου θα ικανοποιείται η σχέση (3.10)

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad (3.10)$$

όπου $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{u}}$ είναι το διάνυσμα κατάστασης στη θέση ισορροπίας και το διάνυσμα εισόδου για την θέση ισορροπίας αντίστοιχα.

Στην περίπτωση του τετρακόπτερου αυτό το διάνυσμα κατάστασης \mathbf{x} για το σημείο ισορροπίας είναι:

$$\bar{\mathbf{x}} = [x_0, 0, y_0, 0, z_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0] = [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0] \quad (3.11)$$

Σε κατάσταση αιώρησης το τετρακόπτερο είναι ακίνητο και οι ταχύτητες των ελίκων είναι ίσες. Από τις σχέσεις (2.94), (2.95) και (2.96) και λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (2.97) συμπεραίνουμε ότι το διάνυσμα εισόδου \mathbf{u} δίνεται από την σχέση (3.12)

$$\bar{\mathbf{u}} = [m \cdot g, 0, 0, 0] \quad (3.12)$$

Η γραμμικοποίηση επιτυγχάνεται λαμβάνοντας την Ιακωβιανή (Jacobian) του συστήματος γύρω από το σημείο αιώρησης. Ο πίνακας κατάστασης \mathbf{A} δίνεται από την σχέση (3.13)

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} \quad (3.13)$$

Ο πίνακας εισόδου \mathbf{B} δίνεται από την σχέση (3.14)

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \quad (3.14)$$

Με τις τιμές των παραμέτρων από την εργασία [44] οι πίνακες \mathbf{A} και \mathbf{B} γίνονται όπως φαίνονται στις σχέσεις (3.15) και (3.16) αντίστοιχα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.146 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9.806 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.146 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 & -9.806 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.307 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.058 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 261.247 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 261.247 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 130.608 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Θεωρώντας ότι η το διάνυσμα εξόδου \mathbf{y} αποτελείται από τις εξής μεταβλητές κατάστασης

$$\mathbf{y} = [x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, x_{11}] \quad (3.17)$$

ο πίνακας \mathbf{C} είναι:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Επιπλέον θεωρούμε ότι η είσοδος \mathbf{u} δεν επηρεάζει την έξοδο \mathbf{y} οπότε ο πίνακας \mathbf{D} δίνεται από την σχέση (3.19)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Κεφάλαιο 4 Μέθοδος Backstepping

Για την ανάλυση και την σχεδίαση μη γραμμικών συστημάτων αυτόματου ελέγχου έχουν αναπτυχθεί θεωρίες ειδικά για αυτό τον σκοπό. Τα αποτελέσματα της εφαρμογής αυτών των θεωριών είναι η υλοποίηση ελεγκτών οι οποίοι είναι πιο αξιόπιστοι και προσδίδουν μεγαλύτερη ευστάθεια και ελεγχσιμότητα. Στο προηγούμενο κεφάλαιο, το μη γραμμικό σύστημα γραμμικοποιήθηκε με τον περιορισμό ότι οι μεταβλητές κατάστασης παίρνουν τιμές γύρω και πολύ κοντά από τη θέση αιώρησης. Εάν όμως είναι επιθυμητή μια πολύ γρήγορη μεταβολή τότε αυτό δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί ικανοποιητικά με τις γραμμικές μεθόδους.

Στην συνέχεια το αντικείμενο της εργασίας θα είναι τα μη γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα δυναμικά συστήματα της εξής μορφής, σχέση (4.1)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{f}: D \rightarrow R^n, \quad 0 \in R^n, \quad D \subseteq R^n \quad (4.1)$$

4.1 Σημείο ισοροπίας

Για το χρονικά αναλλοίωτο σύστημα της (4.1) το διάνυσμα \mathbf{x}_e καλείται κατάσταση ή σημείο ισοροπίας του συστήματος εάν ικανοποιεί την σχέση (4.2)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) &= 0 \quad \forall t \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_e &\Rightarrow \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e \quad \forall t \geq t_0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Θεωρώντας ότι το $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι σημείο ισοροπίας ή αλλιώς $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Από την σχέση (4.2) εξάγεται ότι:

$$\mathbf{x}(0, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (4.3)$$

εάν το διάνυσμα \mathbf{x} της σχέσης (4.1) είναι το σφάλμα σε ένα σύστημα κλειστό σύστημα αυτόματου ελέγχου τότε η συνθήκη $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ αναπαριστά το τέλει λειτουργικό σημείο του ελεγκτή, με άλλα λόγια το κλειστό σύστημα ελέγχου ακολουθεί πιστά την επιθυμητή τροχιά αφού το σφάλμα είναι μηδέν.

4.2 Ευστάθεια

Ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό των συστημάτων είναι η ευστάθεια. Το σημείο $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ της σχέσης (4.1) μπορεί να είναι:

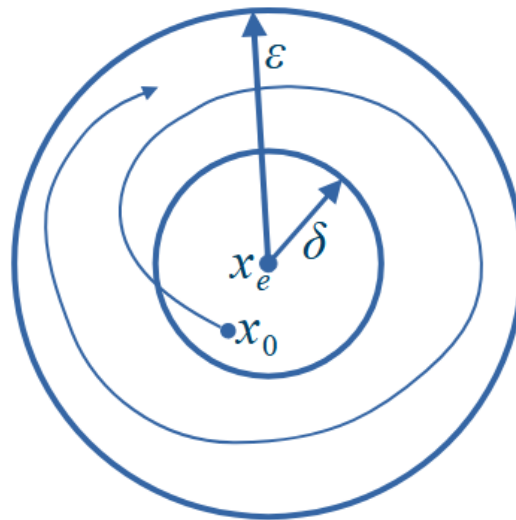
- Ευσταθές.
- Ασυμπτωτικά ευσταθές.
- Ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.
- Εκθετικά ευσταθές
- Ασταθές.

4.2.1 Ευσταθές σημείο ισοροπίας

Ευσταθές εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0 \quad (4.4)$$

Η παραπάνω σχέση απεικονίζεται στο σχήμα 4.1, το ευσταθές σημείο \mathbf{x}_e είναι το κέντρο του κύκλου με ακτίνα δ και με την προϋπόθεση ότι το σύστημα εκκινεί από μια τυχαία κατάσταση \mathbf{x}_0 με ακτίνα $\|\mathbf{x}_0\|$ μικρότερη από δ , η τροχιά που ακολουθεί δεν βγαίνει ποτέ εκτός του κύκλου που ορίζεται από την ακτίνα μήκους ε .



Σχήμα 4.1: Ευσταθές σημείο ισοροπίας

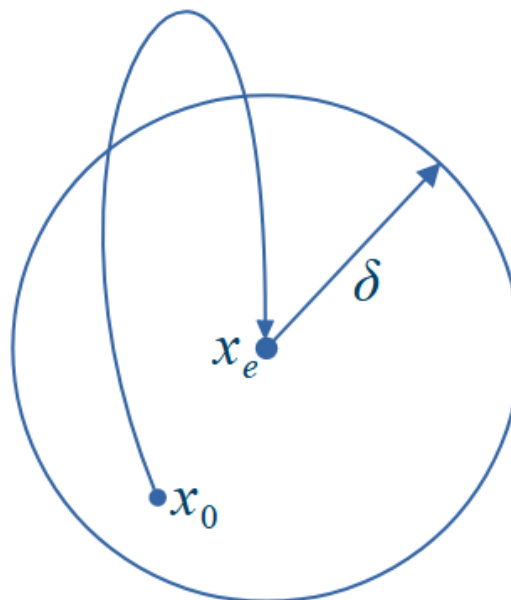
4.2.2 Ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισοροπίας

Ασυμπτωτικά ευσταθές, εάν είναι ευσταθές και υπάρχει τέτοιο δ έτσι ώστε:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (4.5)$$

Τα παραπάνω φαίνονται στο σχήμα 4.2, εφόσον το σύστημα ξεκινάει από σημείο x_0 εντός της ακτίνας δ τότε εγγυημένα θα μεταβεί στο σημείο x_e , καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο.

Το σημεία ισοροπίας τα οποία έλκουν τις τροχιές οι οποίες ξεκινούν από τη γειτονιά τους ονομάζονται *ελκυστές (attractors)*, τέτοιο σημείο είναι το x_e .



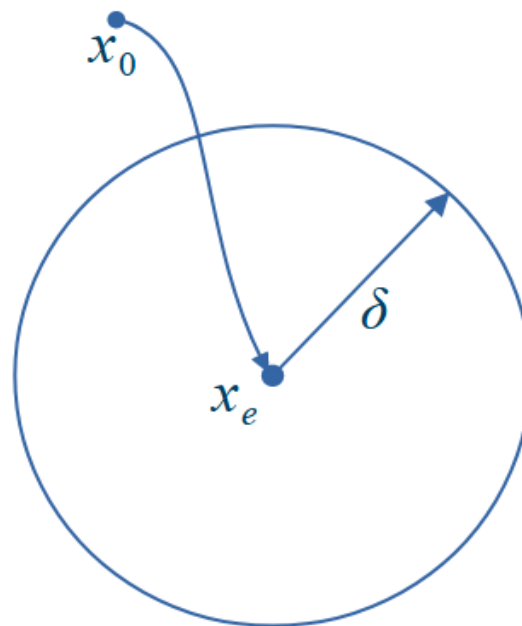
Σχήμα 4.2: Ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισοροπίας

4.2.3 Ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισοροπίας

Ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές, εάν είναι ευσταθές και ισχύουν επιπλέον τα:

$$\forall x(0) \in R^n \text{ ισχύει ότι } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (4.6)$$

από την σχέση (4.6) προκύπτει ότι η ακτίνα δ τείνει στο άπειρο, $\delta \rightarrow \infty$, σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3: Ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισοροπίας

4.2.4 Εκθετικά ευσταθές σημείο ισοροπίας

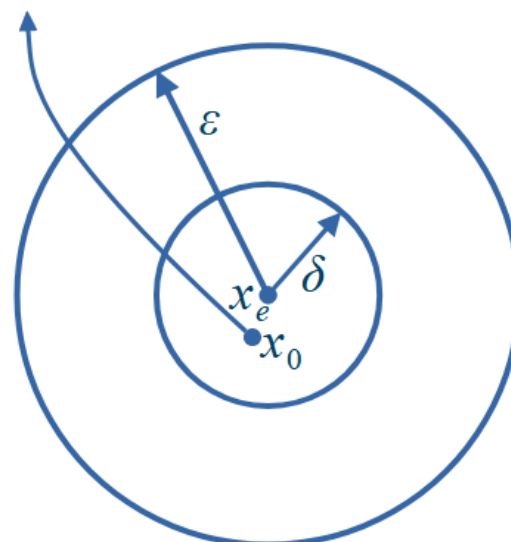
Εάν υπάρχουν σταθερές δ , a και λ τέτοιες ώστε εάν

$$x_0 < \delta \Rightarrow x(t) \leq a \cdot \|x_0\| \cdot e^{-\lambda t} \quad (4.7)$$

Το εκθετικά ευσταθές σημείο ισοροπίας εκτός της ευστάθειας δίνει και τον ρυθμό σύγκλισης στο σημείο ισοροπίας μέσω της σταθεράς λ .

4.2.5 Ασταθές σύστημα

Ασταθές όταν δεν είναι ευσταθές σχήμα 4.4, εδώ φαίνεται πως η τροχιά δεν συγκλίνει σε κάποιο σημείο αλλά αντίθετα αποκλίνει.



Σχήμα 4.4: Ασταθές σημείο ισοροπίας

4.3 Θετικά – αρνητικά ορισμένες συναρτήσεις

4.3.1 Θετικά ημιορισμένες συναρτήσεις

Η συνάρτηση $V(\mathbf{x})$, $V: R^n \rightarrow R$ λέγεται θετικά ημιορισμένη εάν

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ x \neq 0 &\Rightarrow V(\mathbf{x}) \geq 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.3.2 Θετικά ορισμένες συναρτήσεις

Η συνάρτηση $V(\mathbf{x})$, $V: R^n \rightarrow R$ λέγεται θετικά ορισμένη εάν

$$\begin{aligned} V(0) &= 0. \\ x \neq 0 &\Rightarrow V(\mathbf{x}) > 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.3.3 Αρνητικά ημιορισμένες - ορισμένες συναρτήσεις

Η συνάρτηση $V(\mathbf{x})$, $V: R^n \rightarrow R$ λέγεται αρνητικά ημιορισμένη – ορισμένη εάν η συνάρτηση $-V(\mathbf{x})$ είναι θετικά ημιορισμένη - ορισμένη.

4.4 Συνάρτηση Lyapunov

Έστω $V: D \rightarrow R$ μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση, $D \subset R^n$ ένα ανοιχτό υποσύνολο που περιλαμβάνει το σημείο ισοροπίας $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, για το σύστημα της (4.1) και τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ V(\mathbf{x}) &> 0 \quad \forall \mathbf{x} \in D - \{0\} \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &\leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in D \end{aligned} \quad (4.10)$$

Τότε η συνάρτηση $V(\mathbf{x})$ ονομάζεται συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα της (4.1).

4.4.1 Παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov $V(\mathbf{x})$

Η συνάρτηση $V(\mathbf{x})$ είναι πεπλεγμένη, η παράγωγος ως προς τον χρόνο δίνεται από την σχέση (4.11)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot f_i(\mathbf{x}) = \\ & \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \cdot \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.5 Θεώρημα ευστάθειας Lyapunov

Στην συνέχεια διατυπώνεται το θεώρημα ευστάθειας Lyapunov, η απόδειξή βρίσκεται στο βιβλίο του H. K. Khalil [27].

Έστω το σύστημα της (4.1) και έστω $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ ένα σημείο ισοροπίας. Έστω V μια συνάρτηση Lyapunov $D \subset R^n$ που το πεδίο ορισμού της περιέχει το $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Τότε το $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ είναι ευσταθές.

Επιπλέον, εάν

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in D \quad (4.12)$$

Τότε το $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Το παραπάνω θεώρημα ανήκει στην άμεση μέθοδο ανάλυσης της ευστάθειας του *Lyapunov*. Με την άμεση μέθοδο αναλύεται η ευστάθεια ενός μη γραμμικού δυναμικού συστήματος χωρίς να απαιτείται λύση των διαφορικών εξισώσεων. Η κύρια ιδέα πίσω από την μέθοδο βρίσκεται στο γεγονός ότι ένα δονούμενο σύστημα είναι ευσταθές εάν η ολική ενέργεια, η οποία είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση, μειώνεται συνεχώς, μέχρι το σύστημα να έρθει σε κατάσταση ισορροπίας.

4.6 Η μέθοδος Backstepping

Έστω το μη γραμμικό δυναμικό σύστημα το οποίο περιγράφεται από την σχέση (4.13)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \cdot x_2 & (\alpha) \\ \dot{x}_2 &= u & (\beta)\end{aligned}\tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}[\mathbf{x}_1^T, x_2]^T &\in R^{n+1}, u \in R \\ \mathbf{f}: D \rightarrow R^n, \mathbf{g}: D \rightarrow R^n, D \subset R^n \\ \mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \in D, \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in D\end{aligned}$$

όπου:

\mathbf{x}_1, x_2 οι μεταβλητές κατάστασης του συστήματος

και u είναι η είσοδος ελέγχου του συστήματος.

Ως πρώτο βήμα στην διαδικασία του backstepping είναι επιθυμητό να σταθεροποιηθεί η (4.13α) θεωρώντας ως είσοδό της την μεταβλητή κατάσταση x_2 .

Έστω ότι η (4.13α) μπορεί να σταθεροποιηθεί στο $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, δηλαδή να γίνει ασυμπτωτικά ευσταθής στο $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ θέτοντας

$$x_2 = \varphi(\mathbf{x}_1), \quad \varphi(\mathbf{0}) = 0\tag{4.14}$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (4.14) στην σχέση (4.13α) προκύπτει η σχέση (4.15)

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \cdot \varphi(\mathbf{x}_1)\tag{4.15}$$

Θεωρώντας ότι είναι γνωστή μια συνάρτηση *Lyapunov* $V(\mathbf{x}_1)$ η οποία ικανοποιεί την σχέση (4.16)

$$\frac{\partial(V)}{\partial(\mathbf{x}_1)} [\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \cdot \varphi(\mathbf{x}_1)] \leq -W(\mathbf{x}_1) \quad \forall \mathbf{x}_1 \in D\tag{4.16}$$

με $W(\mathbf{x}_1)$ θετικά ορισμένη συνάρτηση.

Προσθέτοντας και αφαιρώντας την σχέση (4.17) στην σχέση (4.13α) προκύπτει η σχέση (4.18).

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \cdot \varphi(\mathbf{x}_1)\tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \cdot x_2 + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \cdot \varphi(\mathbf{x}_1) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \cdot \varphi(\mathbf{x}_1) \Rightarrow \\ \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \cdot \varphi(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \cdot (x_2 - \varphi(\mathbf{x}_1))\end{aligned}\tag{4.18}$$

οπότε το σύστημα της (4.13) γίνεται η σχέση (4.19)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \cdot \varphi(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \cdot (x_2 - \varphi(\mathbf{x}_1)) & (\alpha) \\ \dot{x}_2 &= u & (\beta)\end{aligned}\tag{4.19}$$

Στον τελευταίο όρο του αθροίσματος της σχέσης (4.19α) είναι δυνατή αλλαγή μεταβλητής όπως φαίνεται στην σχέση (4.20)

$$z = x_2 - \varphi(\mathbf{x}_1)\tag{4.20}$$

Η αλλαγή αυτή αντιπροσωπεύει το σφάλμα μεταξύ της μεταβλητής κατάστασης x_2 και της συνάρτησης $\varphi(x_1)$ η οποία έχει επιλεγεί για να προσεγγισθεί η μεταβλητή κατάσταση x_2 . Οπότε το σύστημα γράφεται όπως η σχέση (4.21)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(x_1) + g(x_1) \cdot \varphi(x_1) + g(x_1) \cdot z & (\alpha) \\ \dot{z} &= u - \dot{\varphi}(x_1) & (\beta)\end{aligned}\quad (4.21)$$

κάνοντας και την αντικατάσταση η οποία φαίνεται στην σχέση (4.22) το σύστημα της (4.21) γράφεται όπως φαίνεται στην σχέση (4.23)

$$v = u - \dot{\varphi}(x_1) \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(x_1) + g(x_1) \cdot \varphi(x_1) + g(x_1) \cdot z & (\alpha) \\ \dot{z} &= v & (\beta)\end{aligned}\quad (4.23)$$

Η μεταβλητή z πλέον δεν είναι μεταβλητή κατάστασης, έτσι όταν $z=0$ τότε η (4.23α) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής στο $x=0$ λόγω της κατασκευής της.

Για να σταθεροποιηθεί όλο το σύστημα στο σημείο $x=0$ χρησιμοποιείται ως συνάρτηση Lyapunov η συνάρτηση της σχέσης (4.24)

$$V(x_1, z) = V(x_1) + \frac{1}{2} \cdot z^2 \quad (4.24)$$

Η παράγωγος της σχέσης (4.24) είναι:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, z) &= \left(V(x_1) + \frac{1}{2} \cdot z^2 \right) = \dot{V}(x_1) + \frac{1}{2} \cdot \dot{z}^2 = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \dot{x}_1 + z \cdot \dot{z} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot [f(x_1) + g(x_1) \cdot \varphi(x_1)] + \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot g(x_1) \cdot z + z \cdot v = \\ &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot [f(x_1) + g(x_1) \cdot \varphi(x_1)] + z \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot g(x_1) + v \right) \leq -W(x_1) + z \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot g(x_1) + v \right) \Rightarrow \\ &\dot{V}(x_1, z) \leq -W(x_1) + z \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot g(x_1) + v \right)\end{aligned}\quad (4.25)$$

Παρατηρώντας την σχέση (4.25) επιλέγεται τιμή για την μεταβλητή v όπως φαίνεται στην σχέση (4.26)

$$v = -\frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot g(x_1) - k \cdot z, \quad k > 0 \quad (4.26)$$

έτσι η σχέση (4.25) καταλήγει όπως φαίνεται στην σχέση (4.27)

$$\dot{V}(x_1, z) \leq -W(x_1) + z \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot g(x_1) + v \right) \Rightarrow \dot{V}(x_1, z) \leq -W(x_1) - k \cdot z^2 \quad (4.27)$$

Από την σχέση (4.27) προκύπτει ότι το σημείο $x_1=0, z=0$ για το σύστημα της σχέσης (4.23) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές δηλαδή ξεκινώντας από τυχαίο σημείο $[x_1, z]=[x^0, z^0]$ καταλήγει ασυμπτωτικά στο σημείο $[x_1, z]=[0, 0]$ καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο ($t \rightarrow \infty$).

Επιπλέον αφού το z τείνει στο 0 καθώς ο χρόνος t τείνει στο άπειρο και το $\varphi(x_1=0)=0$ τότε λαμβάνοντας υπόψη και την σχέση (4.20) προκύπτει ότι και $x_2=0$ δηλαδή το σύστημα καθώς ο χρόνος t τείνει στο άπειρο, τείνει ασυμπτωτικά στο σημείο $[x_1, x_2]=[0, 0]$.

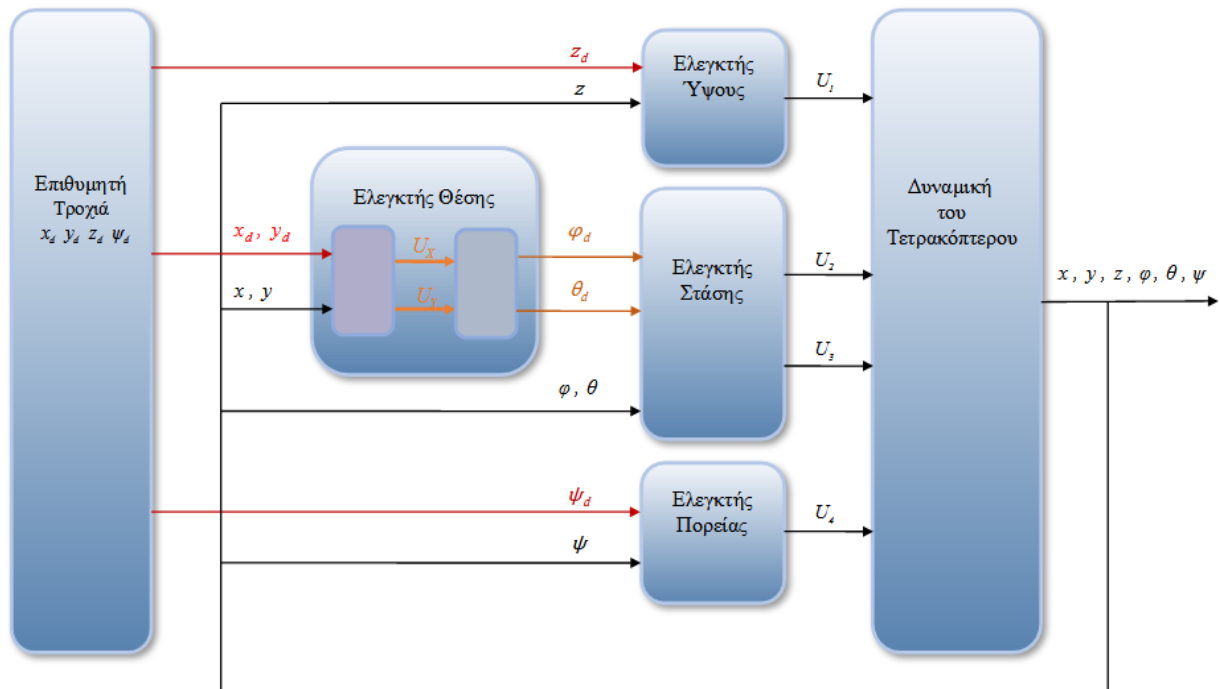
4.7 Η μέθοδος Backstepping στο τετρακόπτερο

4.7.1 Περιγραφή του ελεγκτή

Το μπλοκ διάγραμμα του ελεγκτή φαίνεται στο σχήμα 4.5. Ο ελεγκτής αποτελείται από ένα μπλοκ το οποίο παράγει την επιθυμητή τροχιά. Η επιθυμητή τροχιά τροφοδοτείται και στα επόμενα μπλοκ.

Το τελευταίο μπλοκ υπολογίζει μέσω των δυναμικών εξισώσεων του τετρακόπτερου την θέση και την στάση του. Η έξοδος αυτού του μπλοκ τροφοδοτείται μαζί με την επιθυμητή τροχιά στα μπλοκ τα οποία παράγουν τα σήματα ελέγχου U_i του τετρακόπτερου.

Το μπλοκ του “Ελεγκτή Θέσης” παράγει έμμεσα και τις επιθυμητές γωνίες φ και θ .



Σχήμα 4.5: Το διάγραμμα ελέγχου κλειστού βρόχου

4.7.2 Εφαρμογή του αλγόριθμου Backstepping - Σχεδιασμός ελεγκτή Backstepping U

Παρακάτω δίνεται και πάλι το μη γραμμικό δυναμικό σύστημα του τετρακόπτερου, σχέση (4.28). Για να είναι ευσταθές το σύστημα θα πρέπει το κάθε υποσύστημά του να είναι και αυτό ευσταθές, έτσι ο αλγόριθμος θα εφαρμοστεί σε όλα τα υποσυστήματα δηλαδή στα ζεύγη των συστημάτων που φαίνονται στον πίνακα .

Πίνακας 4.1: Ζεύγη μεταβλητών κατάστασης

α/α	Ζεύγη μεταβλητών κατάστασης των υποσυστημάτων	
1	x_1	x_2
2	x_3	x_4
3	x_5	x_6
4	x_7	x_8
5	x_9	x_{10}
6	x_{11}	x_{12}

Στην συνέχεια γίνεται εφαρμογή του αλγόριθμου για να υπολογιστεί ο νόμος ελέγχου για το σήμα U_1 . Το σήμα U_1 στην συνέχεια χρησιμοποιείται και για τον προσδιορισμό των σημάτων U_x και U_y . Με x_i^d συμβολίζεται η επιθυμητή τιμή της μεταβλητής $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \}$ και με z_i η διαφορά της επιθυμητής από την πραγματική (μετρούμενη ή άλλως προσδιοριζόμενη τιμή της μεταβλητής). Η μεταβλητή z , το ύψος του τετρακόπτερου, έχει αντιστοιχιστεί με την μεταβλητή κατάσταση x_5 .

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \dot{x}_1 = x_2 \\
 \ddot{x} = \dot{x}_2 &= \frac{-k_{DTx} \cdot x_2 + (\sin x_7 \cdot \sin x_{11} + \cos x_7 \cdot \cos x_{11} \cdot \sin x_9) \cdot U_1}{m} \\
 \dot{y} &= \dot{x}_3 = x_4 \\
 \ddot{y} = \dot{x}_4 &= \frac{-k_{DTy} \cdot x_4 + (\cos x_7 \cdot \sin x_{11} \cdot \sin x_9 - \cos x_{11} \cdot \sin x_7) \cdot U_1}{m} \\
 \dot{z} &= \dot{x}_5 = x_6 \\
 \ddot{z} = \dot{x}_6 &= \frac{-m \cdot g - k_{DTz} \cdot x_6 + \cos x_7 \cdot \cos x_9 \cdot U_1}{m} \\
 \dot{\phi} &= \dot{x}_7 = x_8 \\
 \ddot{\phi} = \dot{x}_8 &= \frac{(I_{yy} - I_{zz}) \cdot x_{10} \cdot x_{12} + U_2 + I_R \cdot x_{10} \cdot \bar{\omega} - k_{DR\phi} \cdot x_8^2}{I_{xx}} \\
 \dot{\theta} &= \dot{x}_9 = x_{10} \\
 \ddot{\theta} = \dot{x}_{10} &= \frac{(I_{zz} - I_{xx}) \cdot x_8 \cdot x_{12} + U_3 - I_R \cdot x_8 \cdot \bar{\omega} - k_{DR\theta} \cdot x_{10}^2}{I_{yy}} \\
 \dot{\psi} &= \dot{x}_{11} = x_{12} \\
 \ddot{\psi} = \dot{x}_{12} &= \frac{(I_{xx} - I_{yy}) \cdot x_8 \cdot x_{10} + U_4 - k_{DR\psi} \cdot x_{12}^2}{I_{zz}}
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$z = x_5, \quad \dot{z} = \dot{x}_5, \quad x_6 = \dot{x}_5, \tag{4.29}$$

Η παράγωγος της μεταβλητής κατάστασης x_6 σύμφωνα με την (4.28) δίνεται από την σχέση (4.30)

$$\dot{x}_6 = \frac{-m \cdot g - k_{DTz} \cdot x_6 + \cos x_7 \cdot \cos x_9 \cdot U_1}{m} \tag{4.30}$$

Όπως περιγράφηκε προηγουμένως εισάγεται μια μεταβλητή η οποία αντιπροσωπεύει την διαφορά της επιθυμητής τιμής του ύψους από την πραγματική, η μεταβλητή αυτή είναι η $z_5(x_5)$.

$$z_5 = x_5^d - x_5 \tag{4.31}$$

Η παράγωγος της μεταβλητής z_5 είναι:

$$\dot{z}_5 = (\dot{x}_5^d - \dot{x}_5) = \dot{x}_5^d - \dot{x}_5 \Rightarrow \dot{z}_5 = \dot{x}_5^d - x_6 \tag{4.32}$$

Έστω η συνάρτηση *Lyapunov* $V(z_5)$ και η παράγωγος αυτής όπως παρακάτω:

$$V(z_5) = \frac{1}{2} \cdot z_5^2 \quad \dot{V}(z_5) = \frac{1}{2} \cdot \dot{z}_5^2 = z_5 \cdot \dot{z}_5 = z_5 \cdot (\dot{x}_5^d - x_6) \tag{4.33}$$

Η μεταβλητή κατάστασης x_6 στην σχέση (4.33) θεωρείται ως μεταβλητή ελέγχου (εισόδου) και προσεγγίζεται με την συνάρτηση $\varphi(x_5)$ δηλαδή

$$x_6 = \varphi(x_5) = \dot{x}_5^d + a_5 \cdot z_5 \quad a_5 > 0 \quad (4.34)$$

Οπότε η παράγωγος της συνάρτησης *Lyapunov* $V(z_5)$ γίνεται:

$$\dot{V}(z_5) = z_5 \cdot (\dot{x}_5^d - \dot{x}_6) = z_5 \cdot [\dot{x}_5^d - (\dot{x}_5^d + a_5 \cdot z_5)] \Rightarrow \dot{V}(z_5) = -a_5 \cdot z_5^2 \quad (4.35)$$

Από την σχέση (4.35) προκύπτει ότι η παράγωγος της συνάρτησης $V(z_5)$ είναι αρνητικά ημιορισμένη άρα το σημείο $z_5=0$ είναι ευσταθές κατά την έννοια του *Lyapunov*.

Στην συνέχεια εισάγεται η μεταβλητή z_6 η οποία αντιπροσωπεύει την διαφορά της μεταβλητής x_6 από την συνάρτηση $\varphi(z_5)$. Υπενθυμίζεται ότι η $\varphi(z_5)$ προσεγγίζει την x_6 .

$$z_6 = x_6 - \varphi(x_5) = x_6 - (\dot{x}_5^d + a_5 \cdot z_5) \quad (4.36)$$

Η παράγωγος της μεταβλητής z_6 είναι:

$$\dot{z}_6 = \dot{x}_6 - (\dot{x}_5^d + a_5 \cdot z_5) = \dot{x}_6 - (\ddot{x}_5^d + a_5 \cdot \dot{z}_5) \quad (4.37)$$

Έστω η συνάρτηση *Lyapunov* $V(z_5 z_6)$ η οποία δίνεται από την σχέση (4.38)

$$V(z_5 z_6) = \frac{1}{2} \cdot (z_5^2 + z_6^2) \quad (4.38)$$

Η παράγωγος της συνάρτησης $V(z_5 z_6)$ είναι:

$$\dot{V}(z_5 z_6) = \left(\frac{1}{2} \cdot z_5^2 + \frac{1}{2} \cdot z_6^2 \right) = z_5 \cdot \dot{z}_5 + z_6 \cdot \dot{z}_6 = z_5 \cdot (\dot{x}_5^d - \dot{x}_6) + z_6 \cdot (\dot{x}_6 - \ddot{x}_5^d - a_5 \cdot \dot{z}_5)$$

από τις σχέσεις (4.32) και (4.36) προκύπτει η σχέση (4.39)

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_5 z_6) &= z_5 \cdot (-a_5 \cdot z_5 - z_6) + z_6 \cdot (\dot{x}_6 - \ddot{x}_5^d - a_5 \cdot \dot{z}_5) = \\ &= -a_5 \cdot z_5^2 - z_5 \cdot z_6 + z_6 \cdot (\dot{x}_6 - \ddot{x}_5^d - a_5 \cdot \dot{z}_5) = \\ &= -a_5 \cdot z_5^2 + z_6 \cdot (\dot{x}_6 - \ddot{x}_5^d - a_5 \cdot \dot{z}_5 - z_5) \Rightarrow \\ \dot{V}(z_5 z_6) &= -a_5 \cdot z_5^2 + z_6 \cdot \left(\frac{-m \cdot g + \cos(x_7) \cdot \cos(x_9) \cdot U_1}{m} - \frac{k_{DTz} \cdot x_6}{m} - \ddot{x}_5^d - a_5 \cdot \dot{z}_5 - z_5 \right) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Η είσοδος ελέγχου στο σύστημά μας είναι U_1 , οπότε θα πρέπει να επιλεγεί μια κατάλληλη είσοδο για το σύστημα. Με στόχο η παράγωγος της συνάρτησης $V(z_5 z_6)$ να γίνει αρνητικά ορισμένη ή ημιορισμένη, επιλέγεται η σχέση (4.40) για να προσδιοριστεί η συνάρτηση για την U_1

$$\frac{\cos(x_7) \cdot \cos(x_9) \cdot U_1}{m} = - \left(-g - \frac{k_{DTz} \cdot x_6}{m} - \ddot{x}_5^d - a_5 \cdot \dot{z}_5 - z_5 \right) - a_6 \cdot z_6 \quad a_6 > 0 \quad (4.40)$$

συνεχίζοντας προκύπτει για την U_1 η σχέση (4.41)

$$U_1 = m \cdot \frac{g + \ddot{x}_5^d + a_5 \cdot \dot{z}_5 + z_5 - a_6 \cdot z_6}{\cos(x_7) \cdot \cos(x_9)} + \frac{k_{DTz} \cdot x_6}{\cos(x_7) \cdot \cos(x_9)} \quad (4.41)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (4.41) στην (4.39) προκύπτει η σχέση (4.42)

$$\dot{V}(z_5 z_6) = -a_5 \cdot z_5^2 - a_6 \cdot z_6^2 \Rightarrow \dot{V}(z_5 z_6) \leq 0 \quad (4.42)$$

Από την σχέση (4.42) προκύπτει ότι το σημείο $[z_5, z_6]=[0, 0]$ είναι ευσταθές αφού η παράγωγος της συνάρτησης $V(z_5, z_6)$ είναι αρνητικά ημιορισμένη.

Με δεδομένη την προηγούμενη παρατήρηση και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (4.31), (4.34) και (4.36) προκύπτει ότι το σημείο $[x_5, x_6]=[0, 0]$ είναι *Lyapunov* ευσταθές.

Με παρόμοια διαδικασία προσδιορίζονται και οι υπόλοιπες συναρτήσεις ελέγχου όπως φαίνονται στην σχέση (4.43)

$$\begin{aligned}
 U_1 &= m \cdot \frac{\mathbf{g} + \ddot{x}_5^d + (x_5^d - x_5) \cdot (1 + a_5 \cdot a_6) + (\dot{x}_5^d - x_6) \cdot (a_5 + a_6)}{\cos(x_7) \cdot \cos(x_9)} + \frac{k_{DTz} \cdot x_6}{\cos(x_7) \cdot \cos(x_9)} \\
 U_2 &= (I_{zz} - I_{yy}) \cdot x_{10} \cdot x_{12} + J_r \cdot \Omega \cdot x_{10} + k_{DR\phi} \cdot x_8^2 + I_{xx} \cdot [x_8^2 + \ddot{x}_7^d + (x_7^d - x_7) \cdot (1 + a_7 \cdot a_8)] + (\dot{x}_7^d - x_8) \cdot (a_7 + a_8) \\
 U_3 &= (I_{xx} - I_{zz}) \cdot x_8 \cdot x_{12} - J_r \cdot \Omega \cdot x_8 + k_{DR\theta} \cdot x_{10}^2 + I_{yy} \cdot [\ddot{x}_9^d + (x_9^d - x_9) \cdot (1 + a_9 \cdot a_{10}) + (\dot{x}_9^d - x_{10}) \cdot (a_9 + a_{10})] \\
 U_4 &= (I_{yy} - I_{xx}) \cdot x_8 \cdot x_{10} + k_{DR\psi} \cdot x_{12}^2 + I_{zz} \cdot [\ddot{x}_{11}^d + (x_{11}^d - x_{11}) \cdot (1 + a_{11} \cdot a_{12}) + (\dot{x}_{11}^d - x_{12}) \cdot (a_{11} + a_{12})] \\
 U_5 &= m \cdot \frac{\ddot{x}_1^d + (x_1^d - x_1) \cdot (1 + a_1 \cdot a_2) + (\dot{x}_1^d - x_2) \cdot (a_1 + a_2)}{U_1} + \frac{k_{DTx} \cdot x_2}{U_1} \\
 U_6 &= m \cdot \frac{\ddot{x}_3^d + (x_3^d - x_3) \cdot (1 + a_3 \cdot a_4) + (\dot{x}_3^d - x_4) \cdot (a_3 + a_4)}{U_1} + \frac{k_{DTy} \cdot x_4}{U_1}
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

4.8 Εισαγωγή διαταραχών

Τα συστήματα αυτόματου ελέγχου σχεδιάζονται να λειτουργούν κάτω από ορισμένες συνθήκες. Όταν τα συστήματα καλούνται να λειτουργήσουν σε περιβάλλοντα με θόρυβο ή διαταραχές τότε οι ελεγκτές των συστημάτων δεν ανταπεξέρχονται ικανοποιητικά και το σύστημα δεν εκτελεί σωστά τη λειτουργία του.

Στην περίπτωση του τετρακόπτερου εάν αυτό βρίσκεται σε εξωτερικό χώρο τότε θα υποφέρει από ανέμους, οι οποίοι ασκούν δυνάμεις και ροπές οι οποίες εφαρμόζονται σε αυτό. Αυτές οι εξωτερικές δυνάμεις και οι ροπές ονομάζονται διαταραχές. Έτσι ο αλγόριθμος του ελεγκτή θα κληθεί να αντιμετωπίσει και αυτές τις καταστάσεις. Το πόσο επιτυχημένα θα το κάνει εξαρτάται εάν κατά την διαδικασία της σχεδίασης έχουν ληφθεί υπόψη οι παραπάνω διαταραχές.

Στην παρούσα εργασία υλοποιήθηκε ένας ελεγκτής στον οποίο οι διαταραχές είναι γνωστές και ένας άλλος στον οποίο οι διαταραχές είναι άγνωστες. Οι διαταραχές που επιβάλλονται είναι γνωστές συναρτήσεις του χρόνου.

Οι διαταραχές είναι δύο γνωστά διανύσματα, το $H_L=[H_x, H_y, H_z]^T$ το οποίο αντιπροσωπεύει γραμμικές επιταχύνσεις και το $H_R=[H_\phi, H_\theta, H_\psi]^T$ το οποίο αντιπροσωπεύει περιστροφικές επιταχύνσεις. Οι διαταραχές οφείλονται σε φυσικά φαινόμενα όπως ο άνεμος.

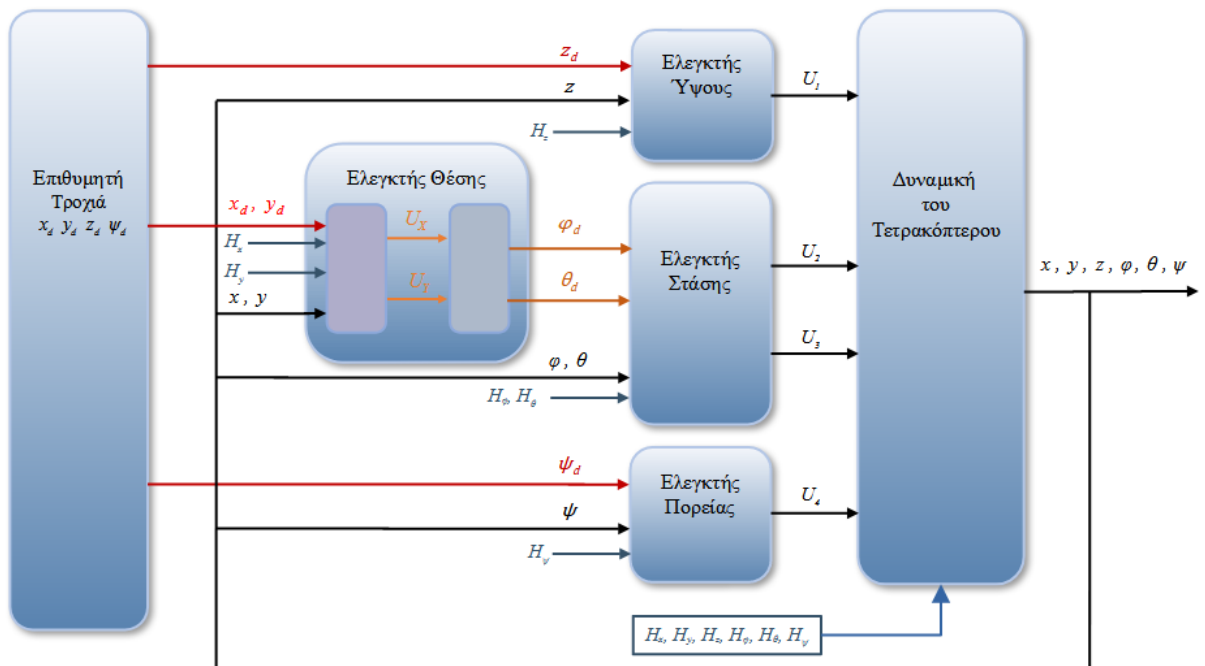
4.8.1 Έλεγχος με γνωστές διαταραχές

Οι διαταραχές είναι γνωστές και στον ελεγκτή αλλά και στις δυναμικές εξισώσεις του τετρακόπτερου. Άρα θα πρέπει και οι δυναμικές εξισώσεις του τετρακόπτερου να τροποποιηθούν έτσι ώστε να τις περιλαμβάνουν αλλά και οι συναρτήσεις των σημάτων ελέγχου να τροποποιηθούν κατάλληλα έτσι ώστε να λαμβάνουν υπόψη και τις διαταραχές. Το σύστημα των μη γραμμικών εξισώσεων του

τετρακόπτερου δίνεται από την σχέση (4.44) και η συνάρτηση για το σήμα U στο οποίο λαμβάνονται υπόψη και οι διαταραχές δίνεται στην σχέση (4.45)

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \dot{x}_1 = x_2 \\
 \ddot{x} = \dot{x}_2 &= \frac{-k_{DTx} \cdot x_2 + (\sin x_7 \cdot \sin x_{11} + \cos x_7 \cdot \cos x_{11} \cdot \sin x_9) \cdot U_1}{m} + H_x \\
 \dot{y} &= \dot{x}_3 = x_4 \\
 \ddot{y} = \dot{x}_4 &= \frac{-k_{DTy} \cdot x_4 + (\cos x_7 \cdot \sin x_{11} \cdot \sin x_9 - \cos x_{11} \cdot \sin x_7) \cdot U_1}{m} + H_y \\
 \dot{z} &= \dot{x}_5 = x_6 \\
 \ddot{z} = \dot{x}_6 &= \frac{-m \cdot g - k_{DTz} \cdot x_6 + \cos x_7 \cdot \cos x_9 \cdot U_1}{m} + H_z \\
 \dot{\phi} &= \dot{x}_7 = x_8 \\
 \ddot{\phi} = \dot{x}_8 &= \frac{(I_{yy} - I_{zz}) \cdot x_{10} \cdot x_{12} + U_2 + I_R \cdot x_{10} \cdot \bar{\omega} - k_{DR\phi} \cdot x_8^2}{I_{xx}} + H_\phi \\
 \dot{\theta} &= \dot{x}_9 = x_{10} \\
 \ddot{\theta} = \dot{x}_{10} &= \frac{(I_{zz} - I_{xx}) \cdot x_8 \cdot x_{12} + U_3 - I_R \cdot x_8 \cdot \bar{\omega} - k_{DR\theta} \cdot x_{10}^2}{I_{yy}} + H_\theta \\
 \dot{\psi} &= \dot{x}_{11} = x_{12} \\
 \ddot{\psi} = \dot{x}_{12} &= \frac{(I_{xx} - I_{yy}) \cdot x_8 \cdot x_{10} + U_4 - k_{DR\psi} \cdot x_{12}^2}{I_{zz}} + H_\psi \\
 U_1 &= m \cdot \frac{-H_z + g + \ddot{x}_5^d + (x_5^d - x_5) \cdot (1 + a_5 \cdot a_6) + (\dot{x}_5^d - x_6) \cdot (a_5 + a_6)}{\cos(x_7) \cdot \cos(x_9)} + \frac{k_{DTz} \cdot x_6}{\cos(x_7) \cdot \cos(x_9)} \\
 U_2 &= (I_{zz} - I_{yy}) \cdot x_{10} \cdot x_{12} + J_r \cdot \Omega \cdot x_{10} + k_{DR\phi} \cdot x_8^2 + I_{xx} \cdot [-H_\phi + \ddot{x}_7^d + (x_7^d - x_7) \cdot (1 + a_7 \cdot a_8)] + (\dot{x}_7^d - x_8) \cdot (a_7 + a_8) \\
 U_3 &= (I_{xx} - I_{zz}) \cdot x_8 \cdot x_{12} - J_r \cdot \Omega \cdot x_8 + k_{DR\theta} \cdot x_{10}^2 + I_{yy} \cdot [-H_\theta + \ddot{x}_9^d + (x_9^d - x_9) \cdot (1 + a_9 \cdot a_{10})] + (\dot{x}_9^d - x_{10}) \cdot (a_9 + a_{10}) \\
 U_4 &= (I_{yy} - I_{xx}) \cdot x_8 \cdot x_{10} + k_{DR\psi} \cdot x_{12}^2 + I_{zz} \cdot [-H_\psi + \ddot{x}_{11}^d + (x_{11}^d - x_{11}) \cdot (1 + a_{11} \cdot a_{12})] + (\dot{x}_{11}^d - x_{12}) \cdot (a_{11} + a_{12}) \\
 U_5 &= m \cdot \frac{-H_x + \ddot{x}_1^d + (x_1^d - x_1) \cdot (1 + a_1 \cdot a_2) + (\dot{x}_1^d - x_2) \cdot (a_1 + a_2)}{U_1} + \frac{k_{DTx} \cdot x_2}{U_1} \\
 U_6 &= m \cdot \frac{-H_y + \ddot{x}_3^d + (x_3^d - x_3) \cdot (1 + a_3 \cdot a_4) + (\dot{x}_3^d - x_4) \cdot (a_3 + a_4)}{U_1} + \frac{k_{DTy} \cdot x_4}{U_1}
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

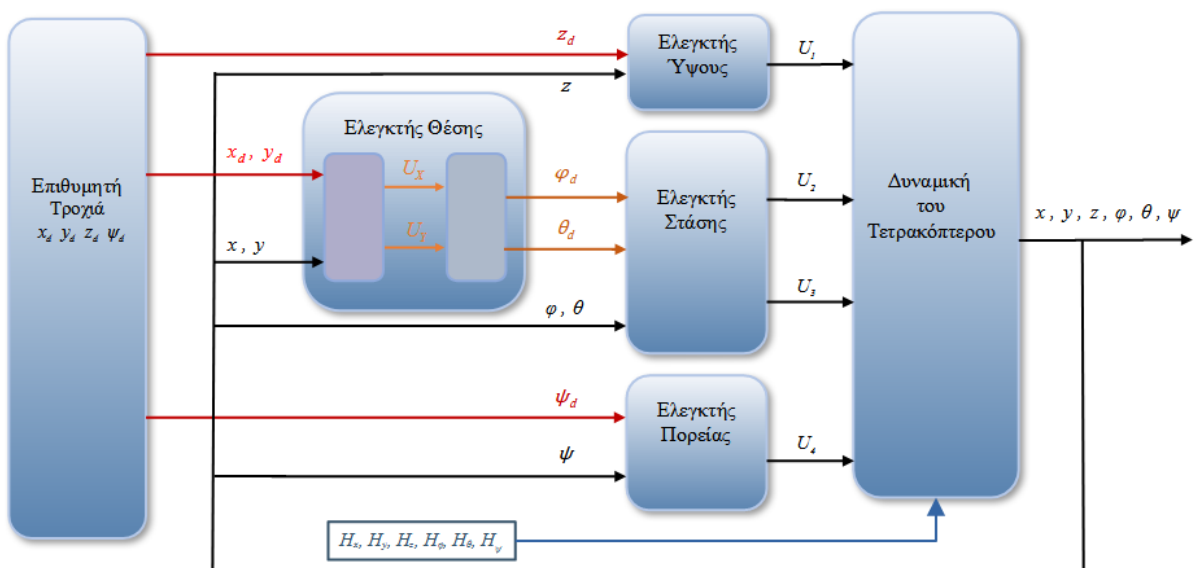
Το σχήμα του ελέγχου φαίνεται στο σχήμα 4.6.



Σχήμα 4.6: Το διάγραμμα ελέγχου κλειστού βρόχου με γνωστές διαταραχές

4.8.2 Έλεγχος με άγνωστες διαταραχές

Ο ελεγκτής απεικονίζεται στο σχήμα 4.7. Οι διαταραχές δεν έχουν ληφθεί υπόψη κατά την σχεδίαση του ελεγκτή ενώ εισάγονται στο μοντέλο με αποτέλεσμα το μοντέλο να δίνεται από την σχέση (4.44), ενώ το σήμα ελέγχου δίνεται από την σχέση (4.43).



Σχήμα 4.7: Το διάγραμμα ελέγχου κλειστού βρόχου με άγνωστες διαταραχές

Κεφάλαιο 5 Προσομοιώσεις – Αποτελέσματα

5.1 Εισαγωγικά

Με σκοπό τον έλεγχο της λειτουργικότητας των αλγορίθμων αλλά και για σύγκριση μεταξύ τους έγιναν προσομοιώσεις. Η δυναμική συμπεριφορά του τετρακόπτερου περιγράφεται από την εξίσωση (2.97). Οι προσομοιώσεις υλοποιήθηκαν στο περιβάλλον του Matlab. Το δυναμικό μοντέλο επιλύθηκε με τον επιλυτή ode45 ο οποίος υλοποιεί έναν αλγόριθμο που ανήκει στις μεθόδους Runge – Kutta. Τα δεδομένα για την υλοποίηση του δυναμικού μοντέλου αντλήθηκαν από τις εργασίες [39] [44-45] και παρουσιάζονται στον πίνακα 5.1.

Πίνακας 5.1: Σταθερές για το μοντέλο προσομοίωσης

Σύμβολο	Περιγραφή της παραμέτρου	Τιμή	Μονάδες
m	Η μάζα του τετρακόπτερου	0.486	kg
l	Το μήκος του βραχίονα	0.25	m
g	Επιτάχυνση της βαρύτητας	9.81	m/s ²
k_F	Συντελεστής ώθησης	$2.9842 \cdot 10^{-5}$	N·s ²
k_M	Συντελεστής οπισθέλκουσας του έλικα	$3.2320 \cdot 10^{-7}$	N·m·s ²
$k_{DR\phi}$	Συντελεστής οπισθέλκουσας από περιστροφή	$5.5670 \cdot 10^{-4}$	N·m·s ²
$k_{DR\theta}$	Συντελεστής οπισθέλκουσας από περιστροφή	$5.5670 \cdot 10^{-4}$	N·m·s ²
$k_{DR\psi}$	Συντελεστής οπισθέλκουσας από περιστροφή	$6.3540 \cdot 10^{-4}$	N·m·s ²
k_{DTx}	Συντελεστής οπισθέλκουσας από ολίσθηση	$5.5670 \cdot 10^{-4}$	N·s/m
k_{DTy}	Συντελεστής οπισθέλκουσας από ολίσθηση	$5.5670 \cdot 10^{-4}$	N·s/m
k_{DTz}	Συντελεστής οπισθέλκουσας από ολίσθηση	$6.3540 \cdot 10^{-4}$	N·s/m
I_{XX}	Ροπή αδράνειας του τετρακόπτερου ως προς τον άξονα $O_b x_b$	$3.8278 \cdot 10^{-3}$	kg·m ²
I_{YY}	Ροπή αδράνειας του τετρακόπτερου ως προς τον άξονα $O_b y_b$	$3.8278 \cdot 10^{-3}$	kg·m ²
I_{ZZ}	Ροπή αδράνειας του τετρακόπτερου ως προς τον άξονα $O_b z_b$	$7.6566 \cdot 10^{-3}$	kg·m ²
I_R	Ροπή αδράνειας του έλικα ως προς τον άξονά του	$2.8385 \cdot 10^{-5}$	kg·m ²
k_t	Συντελεστής αναλογίας δύναμης ροπής του έλικα	0.010830	m
k_q	Σταθερά ροπής του κινητήρα	0.0018	N·m/A
k_e	Σταθερά στροφών του κινητήρα	$21.632 \cdot 10^{-3}$	V·s/rad
ρ_a	Πυκνότητα του αέρα	1.1	kg/m ³
A	Επιφάνεια του δίσκου των ελίκων	0.07069	m ²
f	Συντελεστής ποιότητας του έλικα	0.5	-
η	Απόδοση του κινητήρα	0.64	-

5.1.1 Περιγραφή της πειραματικής διαδικασίας

Η πρώτη προσομοίωση αφορά τον έλεγχο του τετρακόπτερο με ελεγκτή PID. Αυτό που ελέγχεται είναι η στάση και το ύψος του τετρακόπτερου. Υλοποιήθηκαν συνολικά τέσσερις ελεγκτές, μία για κάθε ελεγχόμενη παράμετρο. Οι παράμετροι των ελεγκτών προσδιορίστηκαν με την μέθοδο DE. Στην συνέχεια παρουσιάζεται η προσομοίωση του ελέγχου του τετρακόπτερο με τον ελεγκτή LQR και τέλος παρουσιάζονται οι προσομοιώσεις που αφορούν τη μέθοδο backstepping.

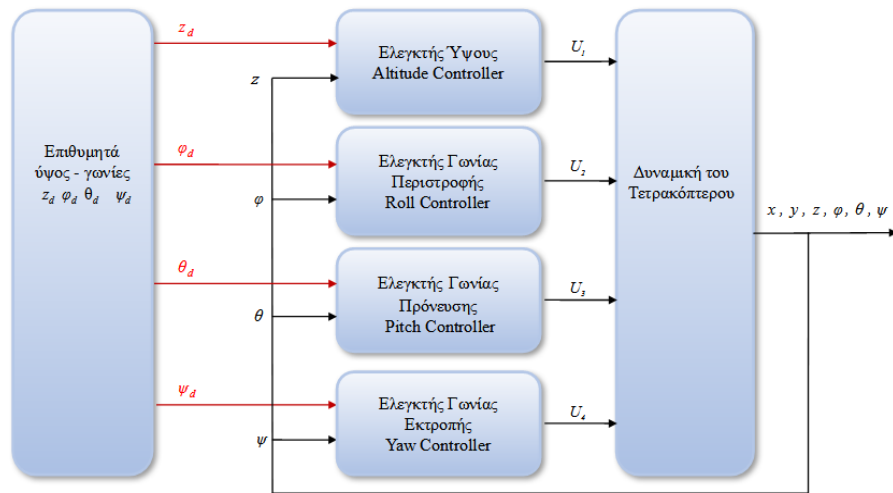
5.2 Προσομοιώσεις για τον ελεγκτή PID

5.2.1 Επιθυμητές μεταβλητές φ , θ , ψ και z

Στο κεφάλαιο 3 η εξίσωση (3.3) περιγράφει τον αλγόριθμο του ελεγκτή PID. Οι επιθυμητές μεταβλητές στο σύστημα είναι οι τρεις γωνίες φ , θ και ψ οι οποίες περιγράφουν την στάση του τετρακόπτερου καθώς και το ύψος z . Με αυτά τα δεδομένα ο αλγόριθμος προσδιορίζει το διάνυσμα εισόδου U στο δυναμικό μοντέλο του τετρακόπτερου. Για τον προσδιορισμό του διανύσματος U χρησιμοποιήθηκαν μόνο τα γραμμικά κομμάτια από τις δυναμικές εξισώσεις του τετρακόπτερου. Οι εξισώσεις που χρησιμοποιήθηκαν φαίνονται στην σχέση (5.1)

$$\begin{aligned}\ddot{x}_E &= \frac{U_x \cdot U_1}{m} \\ \ddot{y}_E &= \frac{U_y \cdot U_1}{m} \\ \ddot{z}_E &= \frac{-m \cdot g + U_h \cdot U_1}{m} \\ \ddot{\varphi} &= \frac{U_2}{I_{xx}} \\ \ddot{\theta} &= \frac{U_3}{I_{yy}} \\ \ddot{\psi} &= \frac{U_4}{I_{zz}}\end{aligned}\tag{5.1}$$

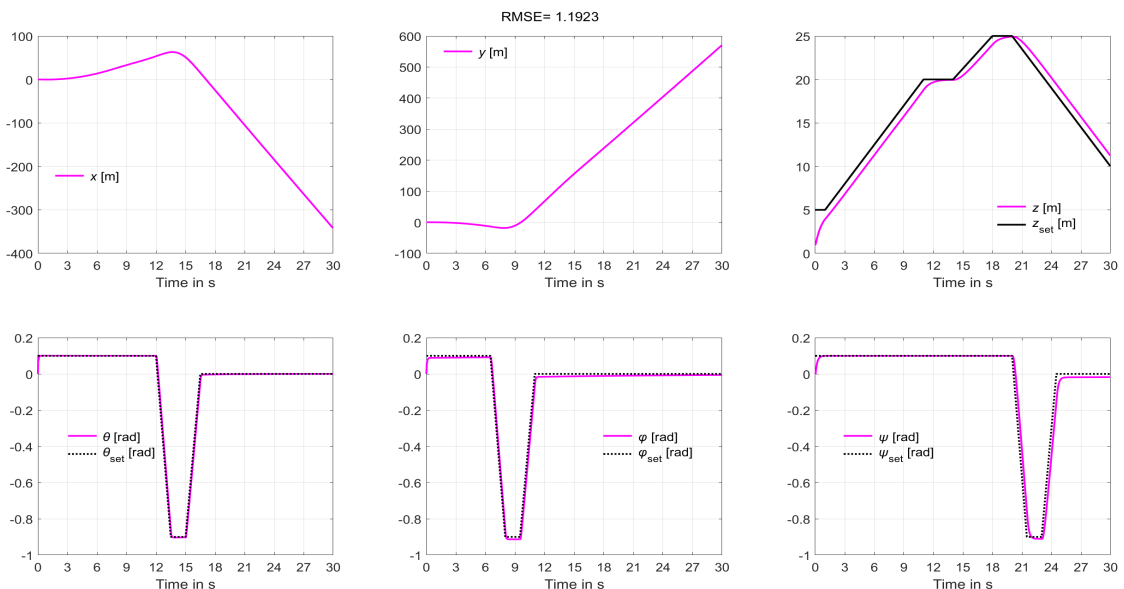
Υλοποιήθηκαν συνολικά τέσσερις ελεγκτές PID, ένας για την γωνία φ , ένας για την γωνία θ , ένας για την γωνία ψ και ένας για το ύψος z , όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1 Οι PID ελεγκτές προσδιορίζουν το διάνυσμα ελέγχου από τα διανύσματα της επιθυμητής στάσης και της κατάστασης του τετρακόπτερου U . Με το διάνυσμα U γνωστό, επιλύεται το μοντέλο και προσδιορίζεται η νέα θέση του τετρακόπτερου. Ο προσδιορισμός των δεκαέξι παραμέτρων του ελεγκτή έγινε σε δύο φάσεις. Στην πρώτη έγινε αυτόματος προσδιορισμός των παραμέτρων χρησιμοποιώντας την μεταερευτική μέθοδο DE. Στην δεύτερη φάση και με αφετηρία τις τιμές από την πρώτη φάση έγινε χειροκίνητη ρύθμιση. Ο πίνακας 5.2 περιέχει τις παραμέτρους του ελεγκτή. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης φαίνονται στο σχήμα 5.2



Σχήμα 5.1: Σχήμα ελέγχου με PID ελεγκτές

Πίνακας 5.2: Παράμετροι των τεσσάρων ελεγκτών

Ελεγκτής	Αναλογικός k_P	Ολοκληρωτικός k_I	Διαφορικός k_D	Φίλτρο N
Ελεγκτής z	0.00102	1.28321	0.14712	0.00769
Ελεγκτής ϕ	0.00114	14.59199	8.81964	0.05557
Ελεγκτής θ	0.00125	22.42609	3.74881	0.28634
Ελεγκτής ψ	0.00080	4.71969	2.43844	0.01040



Σχήμα 5.2: Αποτελέσματα της προσομοίωσης του τετρακόπτερου με PID ελεγκτή

Στο σχήμα 5.2 φαίνονται οι επιθυμητές τιμές για τις μεταβλητές z , ϕ , θ και ψ (μαύρη γραμμή) και τα αποτελέσματα της προσομοίωσης με πορφυρή γραμμή. Οι μεταβλητές x , y είναι αποτέλεσμα των στροφών που επιβάλλονται με τις επιθυμητές τιμές.

Η θέση στους άξονες x, y στην οποία βρίσκεται το τετρακόπτερου κάθε στιγμή, δεν είναι από επιλογή αλλά μόνο ως αποτέλεσμα της επιλογής και επιβολής των γωνιών φ, θ και ψ . Από τις προσομοιώσεις φαίνεται καθαρά η σχέση μεταξύ των γωνιών φ και θ με τις θέσεις στους άξονες x και y .

Μια άλλη παρατήρηση έχει σχέση με την κίνηση στους άξονες x και y χωρίς διέγερση, δηλαδή οι γωνίες φ και θ έχουν μηδενιστεί. Αυτό συμβαίνει διότι το τετρακόπτερο έχει ορμή και δεν ακινητοποιείται πριν η ενέργειά του μηδενιστεί.

Η προσομοίωση αξιολογήθηκε με τον δείκτη *RMSE* στην περίπτωση αυτή ο δείκτης αυτός είναι *RMSE 1.1923*.

5.3 Προσομοιώσεις για τον ελεγκτή LQR

Στην συνέχεια παρουσιάζεται η προσομοίωση με τον LQR. Ο LQR υλοποιεί ελεγκτή πηγαίας τροχιάς. Η επιθυμητή τροχιά δίνεται από την σχέση (5.2), η τροχιά αυτή υλοποιεί μία έλικα.

$$\begin{aligned} x &= \sin(2 \cdot \pi \cdot 0.4 \cdot t) \\ y &= \cos(2 \cdot \pi \cdot 0.4 \cdot t) \\ z &= \frac{8}{10} \cdot t \\ \psi &= \frac{\pi}{6} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Προϋπόθεση για να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος LQR είναι η γραμμικοποίηση του συστήματος γύρω από μια θέση ισορροπίας. Το σύστημα γραμμικοποιείται με βάση την διαδικασία της παραγράφου 3.2.1. Η συνάρτηση ελέγχου του LQR δίνεται από την σχέση (3.6) και το γραμμικοποιημένο σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση (3.5).

Στην ενότητα 3.2.1 προσδιορίστηκαν οι πίνακες A, B, C και D . Απομένει να προσδιοριστεί και ο πίνακας K της σχέσης (3.6). Ο πίνακας αυτός μπορεί πολύ εύκολα να προσδιοριστεί μέσω του Matlab χρησιμοποιώντας την εντολή:

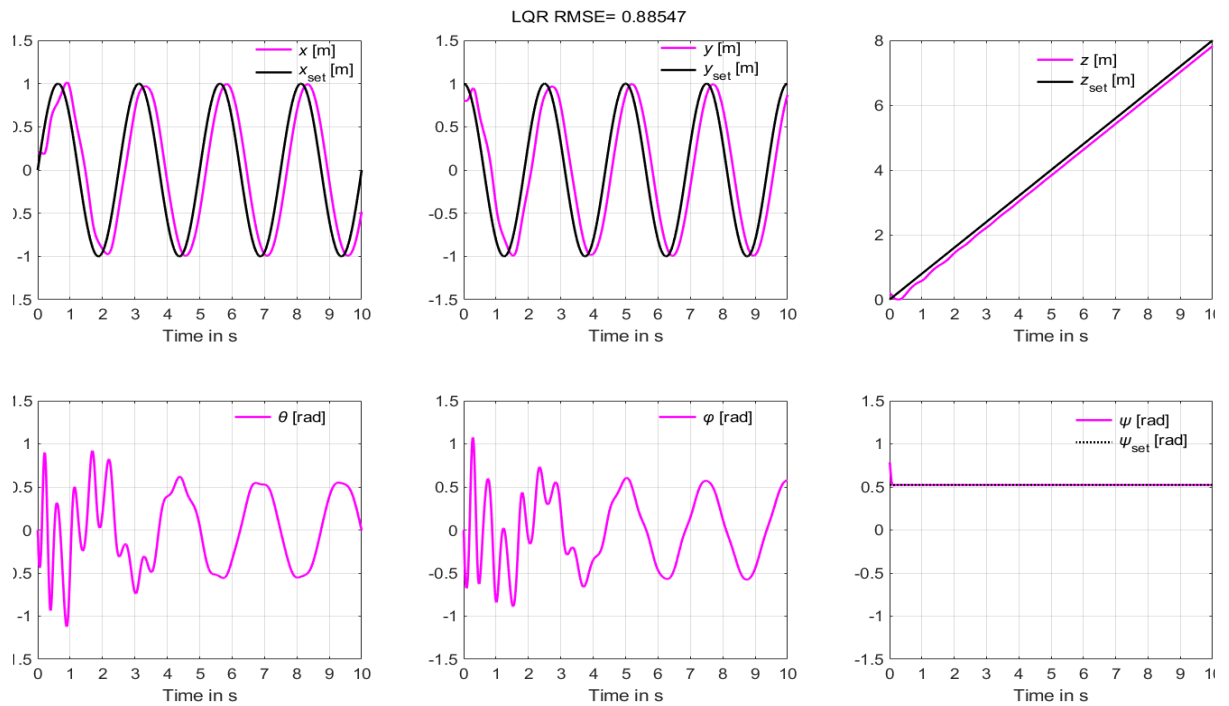
$$[K, P, E] = lqr(A, B, Q, R)$$

Οι πίνακες A, B οι οποίοι είναι δύο ορίσματα της εντολής *lqr*, προσδιορίζονται από το ίδιο το σύστημα μέσω των σταθερών του. Οι πίνακες Q και R επιλέχθηκαν μετά από δοκιμές, οι επιλεγμένες τιμές φαίνονται στον πίνακα 5.3.

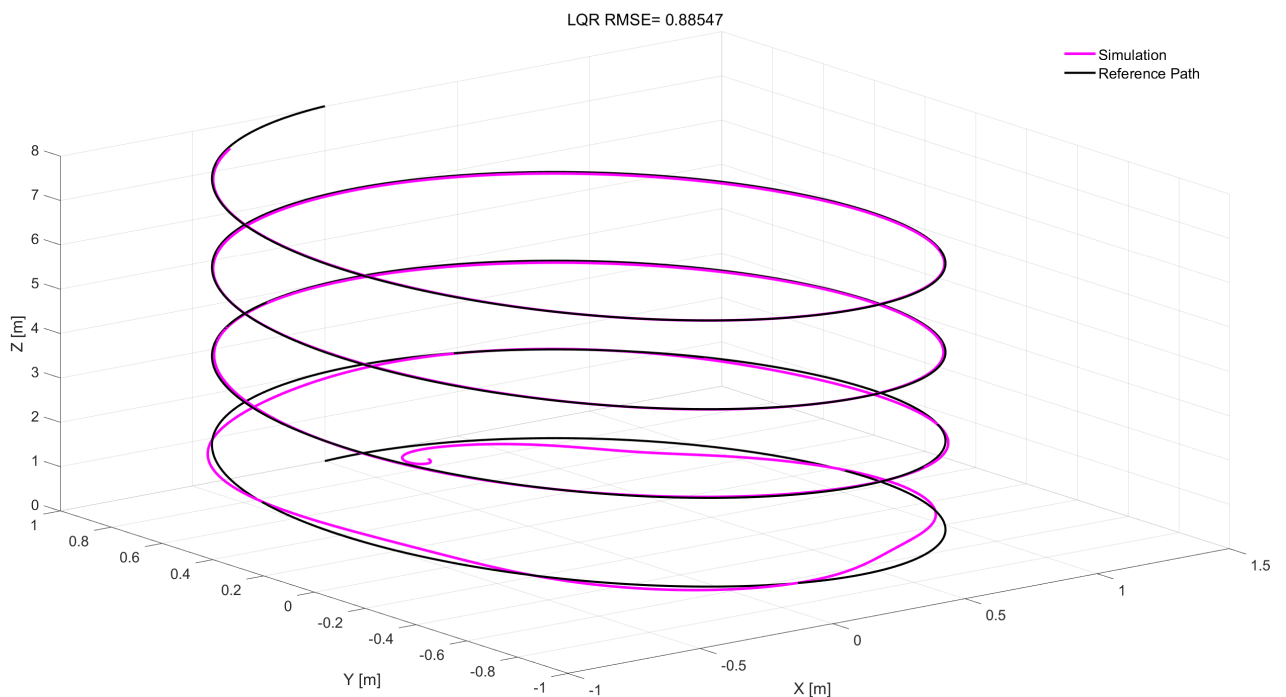
Πίνακας 5.3: Τιμές των διαγωνίων στοιχείων των πινάκων Q και R

Q	100	0.01	100	0.01	500	0.01	1	0.01	1	0.01	100	0.01
R	0.1	0.1	0.1	1	1							

Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης φαίνονται στα σχήματα 5.3 και 5.4.



Σχήμα 5.3: Απόκριση του τετρακόπτερου με LQR ελεγκτή και $T_s=10\text{ms}$



Σχήμα 5.4: Τρισδιάστατη απεικόνιση της τροχιάς

Πίνακας 5.4: Επίδοση του ελεγκτή LQR

Ελεγκτής	Περίοδος Δειγματοληψίας T_s [s]	RMSE
LQR	0.010	0.88547

Από τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων φαίνεται ότι ο ελεγκτής LQR αποκρίνεται αρκετά καλά στην παρακολούθηση πηγαίας τροχιάς. Στη διάρκεια των δοκιμών - προσομοιώσεων φάνηκε ότι όταν η περίοδος δειγματοληψίας αυξηθεί τότε ο ελεγκτής δεν λειτουργεί όπως είναι επιθυμητό με

αποτέλεσμα την πτώση του τετρακόπτερου. Από τις δοκιμές φάνηκε ότι το όριο της περιόδου της δειγματοληψίας για την συγκεκριμένη εφαρμογή είναι περίπου τα 20ms. Αυτό είναι κάτι αναμενόμενο γιατί ο ελεγκτής βασίστηκε σε ένα γραμμικοποιημένο μοντέλο. Το μοντέλο παύει να είναι έγκυρο εάν απομακρυνθεί πολύ από την θέση ισορροπίας. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η υπολογιστική μονάδα θα πρέπει να είναι ικανή να ολοκληρώνει τους υπολογισμούς μέσα στο χρονικό περιθώριο της περιόδου δειγματοληψίας. Όταν πρόκειται για πραγματικό τετρακόπτερο και όχι προσομοίωση ο παραπάνω περιορισμός είναι πολύ σημαντικός. Θα πρέπει να χρησιμοποιούνται μικροϋπολογιστές οι οποίοι διαθέτουν την απαραίτητη υπολογιστική ισχύ για να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις του προβλήματος. Επιπλέον οι μονάδες αναλογικού σήματος σε ψηφιακό σήμα θα πρέπει να είναι αντίστοιχα γρήγορες, τα παραπάνω επιβαρύνουν το κόστος της κατασκευής ενός τετρακόπτερου.

5.4 Ελεγκτής Backstepping

Στην συνέχεια εξετάζεται η αποτελεσματικότητα της μεθόδου backstepping όσον αφορά την παρακολούθηση πηγαίας τροχιάς. Ο ελεγκτής υλοποιήθηκε για να παρακολουθεί την τροχιά η οποία περιγράφεται από την σχέση (5.3). Η συνάρτηση ελέγχου U για τον έλεγχο του τετρακόπτερου δίνεται από την σχέση (4.43). Οι άγνωστες ποσότητες σε αυτή την εξίσωση είναι οι συντελεστές $\alpha_1 - \alpha_{12}$. Οι συντελεστές και σε αυτή την περίπτωση προσδιορίστηκαν χρησιμοποιώντας την DE.

$$\begin{aligned} x &= \sin(2 \cdot \pi \cdot 0.4 \cdot t) \\ y &= \cos(2 \cdot \pi \cdot 0.4 \cdot t) \\ z &= \frac{8}{10} \cdot t \quad \psi = \frac{\pi}{6} \end{aligned} \quad (5.3)$$

5.4.1 Ελεγκτής Backstepping χωρίς διαταραχές, B1

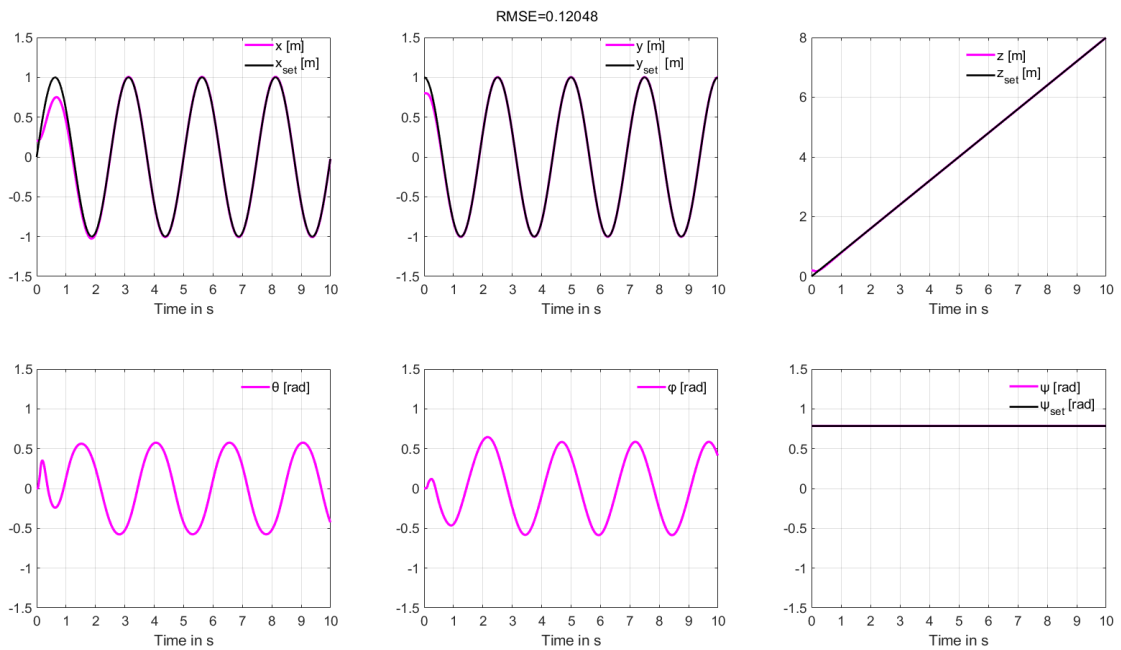
Μια υλοποίηση της μεθόδου όπου ο ελεγκτής παρακολουθεί την τροχιά της (5.3) σε ένα σενάριο απλό χωρίς διαταραχές. Οι συντελεστές του ελεγκτή όπως προσδιορίστηκαν από την DE φαίνονται στον πίνακα 5.5. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης φαίνονται στα σχήματα 5.5 και 5.6.

Πίνακας 5.5: Συντελεστές του ελεγκτή Backstepping B1

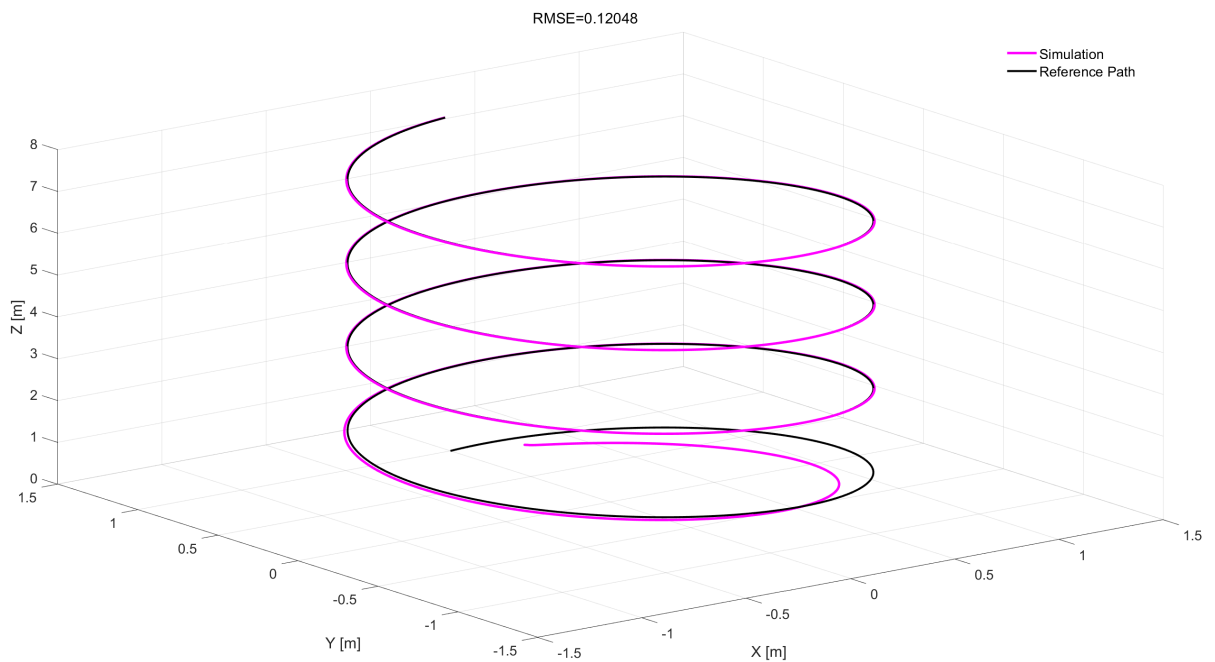
Ελεγκτές	Συντελεστές ελεγκτών α_1	Συντελεστές ελεγκτών α_2
U_1	7.41947	2.01079
U_2	1.45307	1.28077
U_3	7.36756	4.43306
U_4	5.62885	2.82049
U_5	3.43274	2.13510
U_6	5.80894	4.57996

Πίνακας 5.6: Επίδοση του ελεγκτή Backstepping B1

Ελεγκτής	Περίοδος Δειγματοληψίας T_s [s]	RMSE
B1	0.010	0.12048

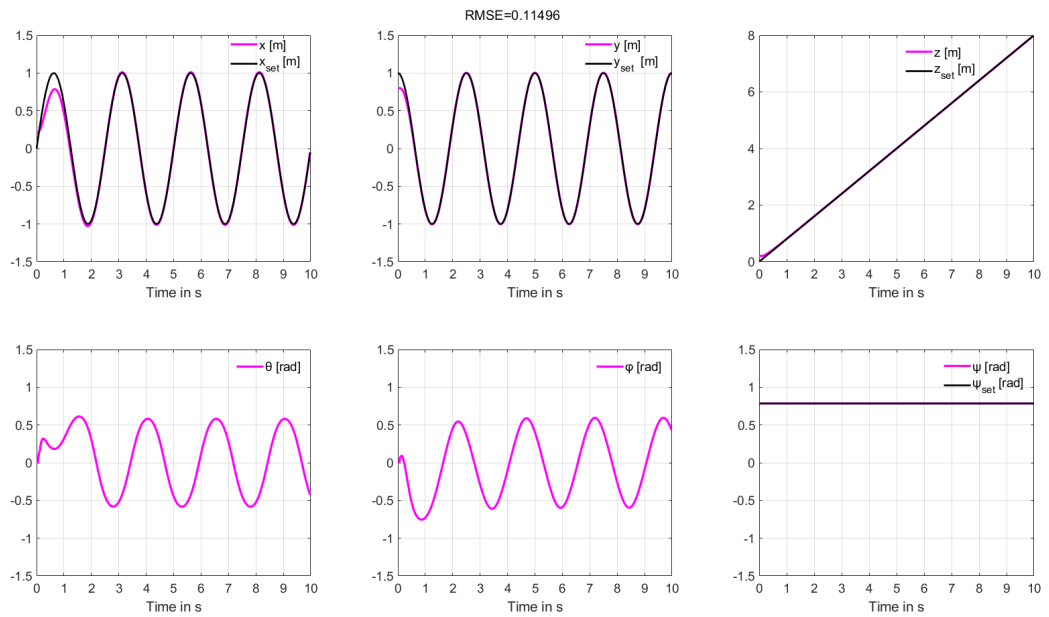


Σχήμα 5.5: Απόκριση της θέσης και της στάσης του τετρακόπτερου για τον ελεγκτή B1a

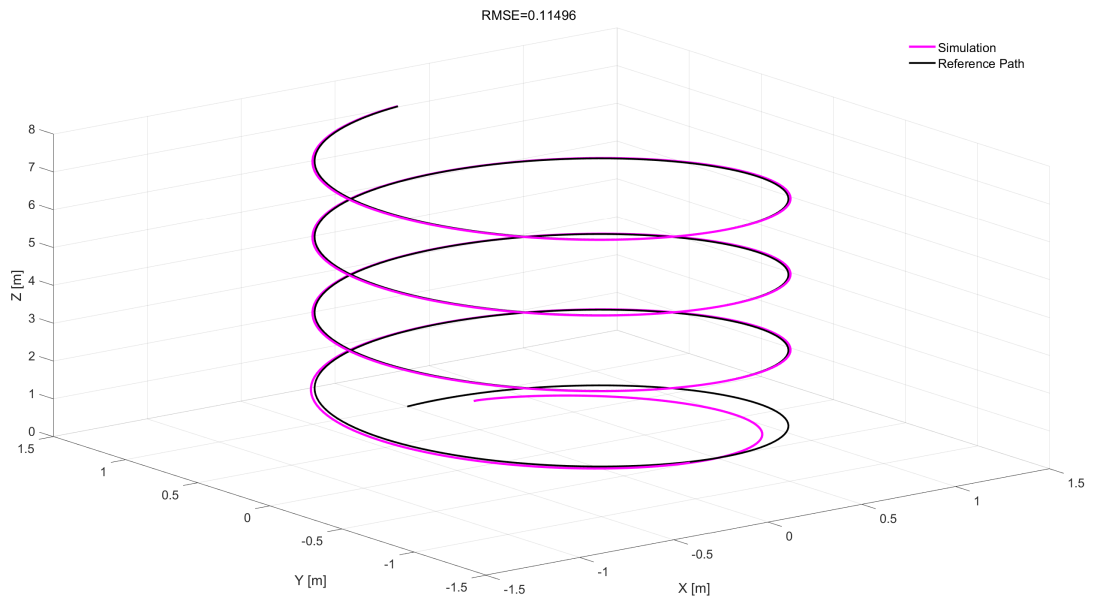


Σχήμα 5.6: Τρισδιάστατη απεικόνιση της θέσης του τετρακόπτερου για τον ελεγκτή B1a

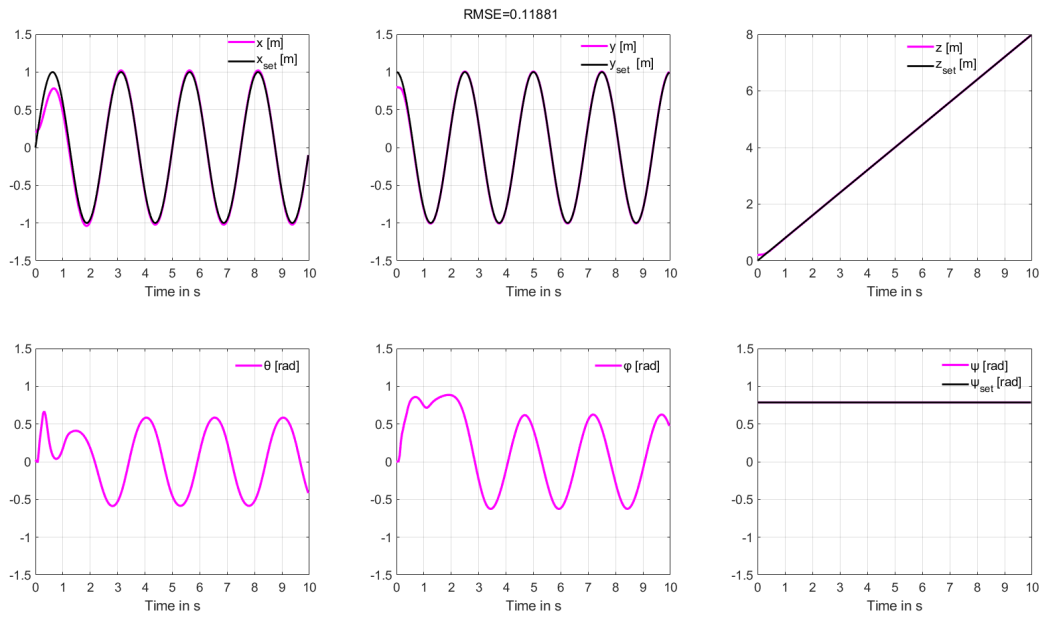
Από τις προσομοιώσεις φαίνεται ότι η μέθοδος backstepping δίνει πολύ καλά αποτελέσματα. Συγκρίνοντας την με τον LQR φαίνεται ότι οι επιδόσεις της είναι καλύτερες. Εκτελέστηκαν δύο ακόμη πειράματα με την μέθοδο backstepping με παράμετρο τον χρόνο δειγματοληψίας T_s . Το πρώτο πείραμα με χρόνο δειγματοληψίας τα 20ms, ενώ το άλλο τα 40ms. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα σχήματα 5.7 - 5.10.



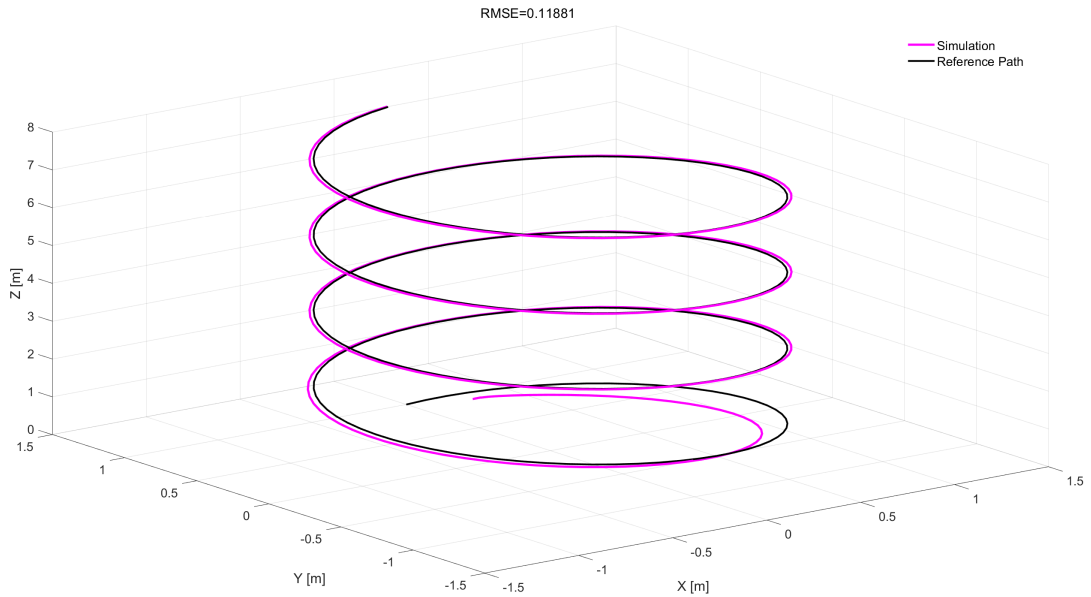
Σχήμα 5.7: Ελεγκτής B1b με χρόνο δειγματοληψίας 20ms



Σχήμα 5.8: Ελεγκτής B1b με χρόνο δειγματοληψίας 20ms



Σχήμα 5.9: Ελεγκτής B1c με χρόνο δειγματοληψίας 40ms



Σχήμα 5.10: Ελεγκτής B1c με χρόνο δειγματοληψίας 40ms

Στον πίνακα 5.7 φαίνονται οι ελεγκτές LQR και backstepping για σύγκριση.

Πίνακας 5.7: Συνοπτικός πίνακας επιδόσεων για τους ελεγκτές LQR και B1

Ελεγκτής	Περίοδος δειγματοληψίας [ms]	RMSE
LQR	10	0.88547
B1a	10	0.12048
B1b	20	0.11496
B1c	40	0.11881

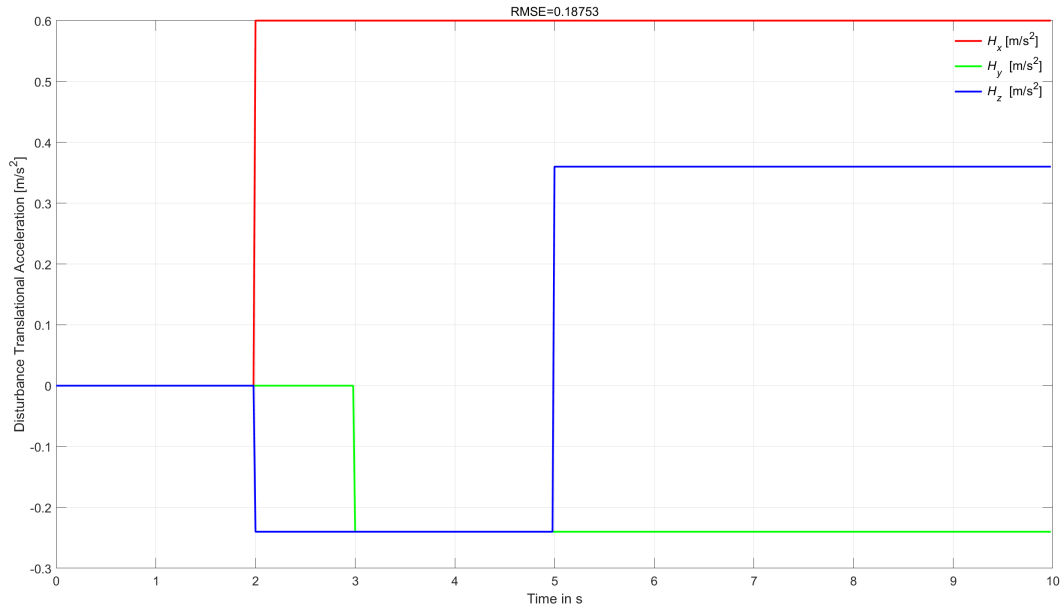
Από τον πίνακα 5.7 φαίνεται ότι η μέθοδος backstepping δίνει ελεγκτές με καλύτερες επιδόσεις από την μέθοδο LQR.

5.4.2 Backstepping με διαταραχές

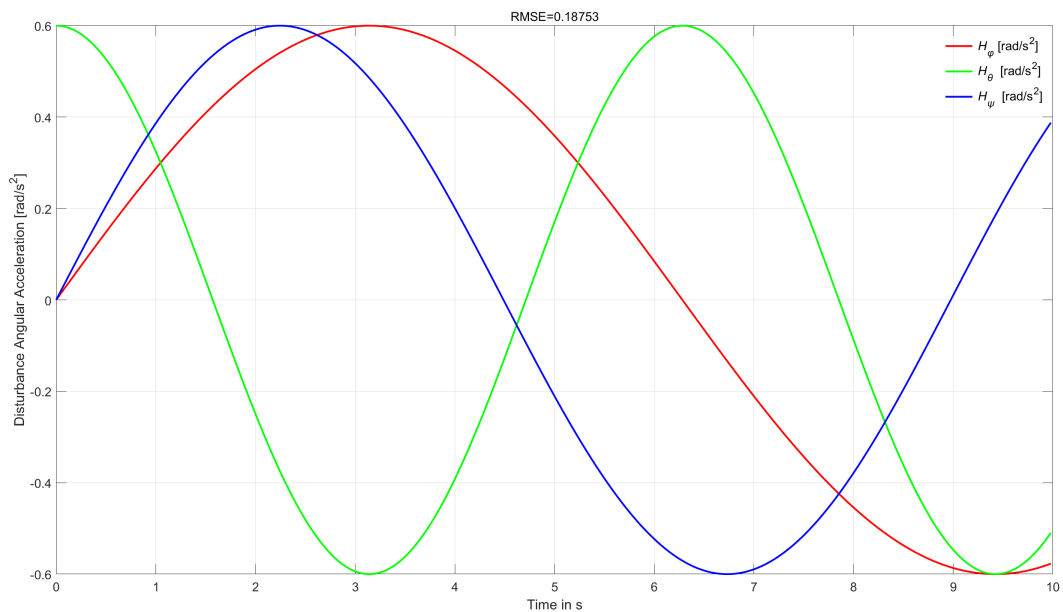
Στη συνέχεια υλοποιήθηκαν ελεγκτές για να αντιμετωπίσουν περιβάλλον με διαταραχές. Ο καθένας από αυτούς σχεδιάστηκε να αντιμετωπίσει διαφορετικού τύπου διαταραχές. Ο πρώτος τύπος σχεδιάστηκε για να αντιμετωπίσει μικρές σχετικά διαταραχές αλλά για μεγάλο χρονικό διάστημα ενώ ο δεύτερος σχεδιάστηκε για να αντιμετωπίσει μεγάλες και ταυτόχρονα απότομες διαταραχές.

5.4.2.1 Ελεγκτής Backstepping για μικρές διαταραχές γνωστές στον ελεγκτή, B2a

Οι διαταραχές είναι γνωστές στον ελεγκτή δηλαδή έχουν ληφθεί υπόψη κατά τη φάση της σχεδίασης. Η επιθυμητή τροχιά δίνεται από την σχέση (5.3) ενώ οι διαταραχές φαίνονται στα σχήματα 5.11 και 5.12. Οι διαταραχές αυτές αντιπροσωπεύουν τον άνεμο.



Σχήμα 5.11: Δυνάμεις από μικρές, γνωστές διαταραχές B2a

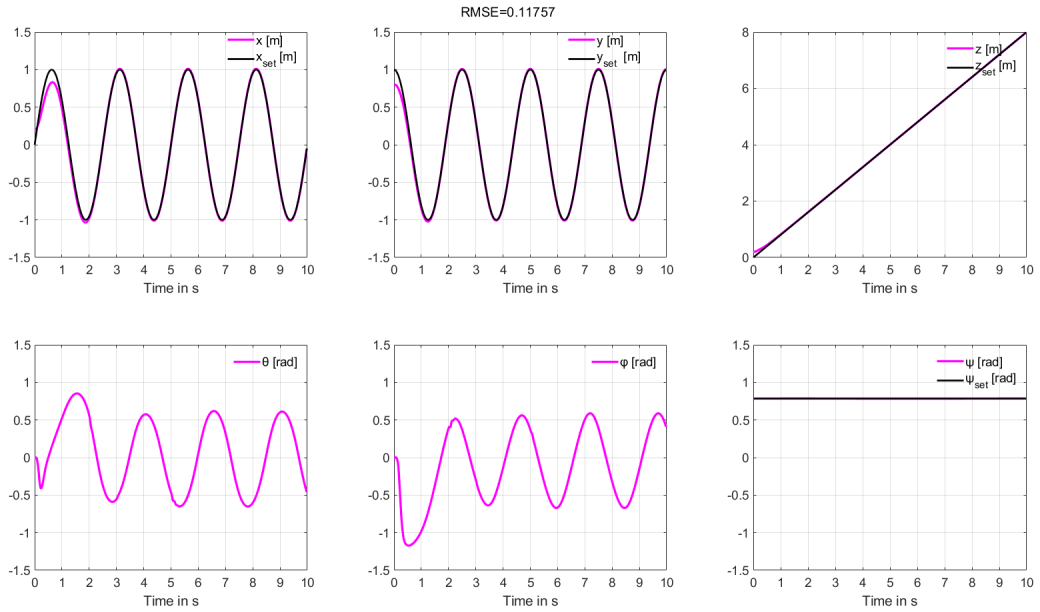


Σχήμα 5.12: Ροπές από μικρές, γνωστές διαταραχές B2a

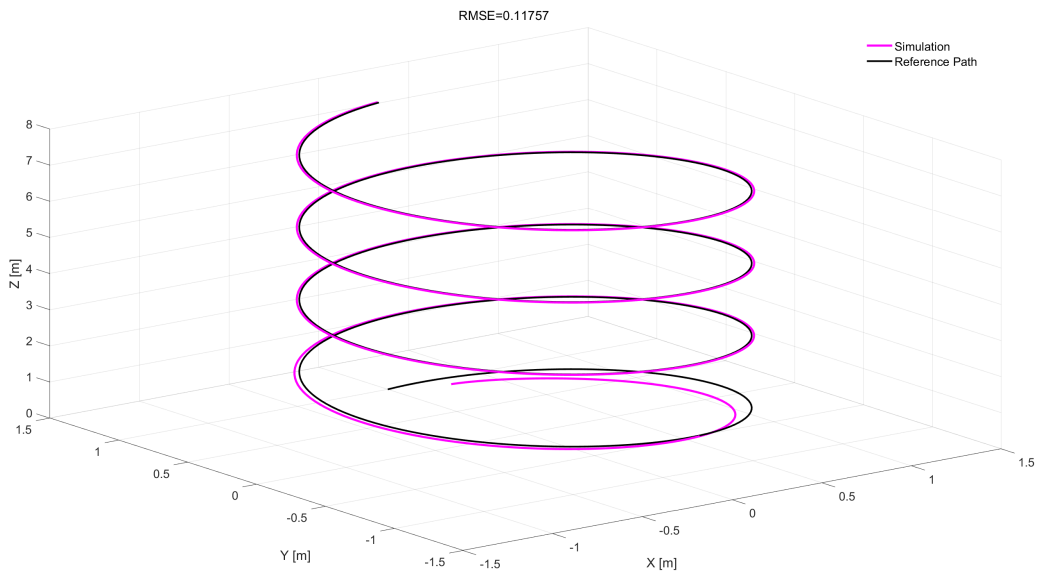
Πίνακας 5.8: Συντελεστές του ελεγκτή Backstepping B2a

Ελεγκτές	Συντελεστές ελεγκτών α_1	Συντελεστές ελεγκτών α_2
U_1	13.25913	2.03526
U_2	1.259265	2.01819
U_3	1.26856	0.88240
U_4	20.04510	0.53510
U_5	1.45094	4.38111
U_6	2.05429	4.53137

Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης φαίνονται στα σχήματα 5.13 και 5.14.



Σχήμα 5.13: Θέση και στάση για μικρές, γνωστές διαταραχές B2a



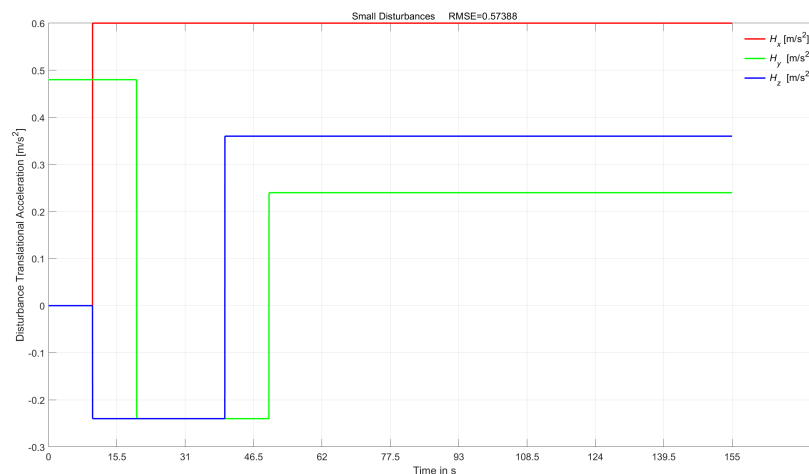
Σχήμα 5.14: Τρισδιάστατη απεικόνιση της θέσης για μικρές, γνωστές διαταραχές B2a

Πίνακας 5.9: Επίδοση του ελεγκτή Backstepping B2a

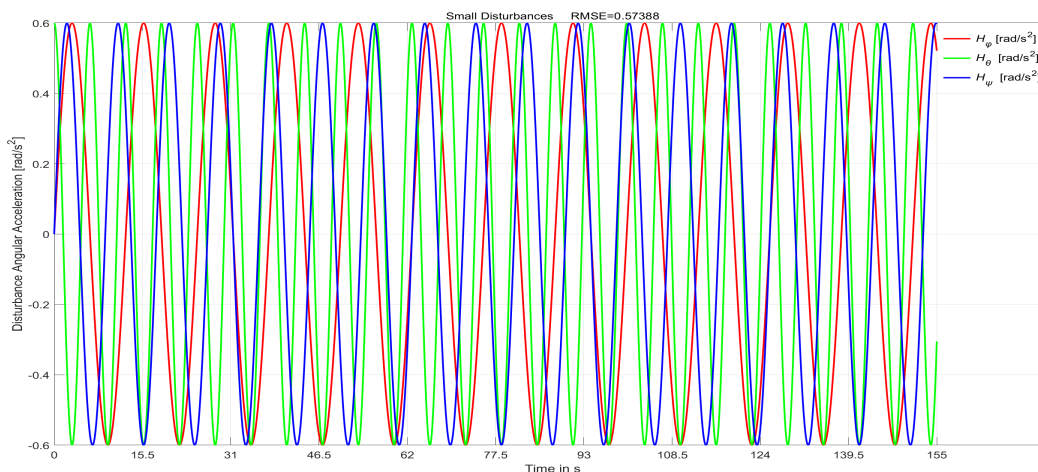
Ελεγκτής	Περίοδος Δειγματοληψίας T_s [s]	RMSE
B2a	0.020	0.11757

5.4.2.2 Ελεγκτής Backstepping για μικρές διαταραχές γνωστές στον ελεγκτή, B2b

Ο ελεγκτής αυτός σχεδιάστηκε για να παρακολουθήσει την τροχιά που δίνεται από την σχέση 5.4 επιπλέον καλείται να αντιμετωπίσει τις διαταραχές οι οποίες φαίνονται στα σχήματα 5.15 και 5.16. Οι συντελεστές του ελεγκτή δίνονται στον πίνακα 5.10.



Σχήμα 5.15: Δυνάμεις από μικρές, γνωστές διαταραχές B2b



Σχήμα 5.16: Ροπές από μικρές, γνωστές διαταραχές B2b

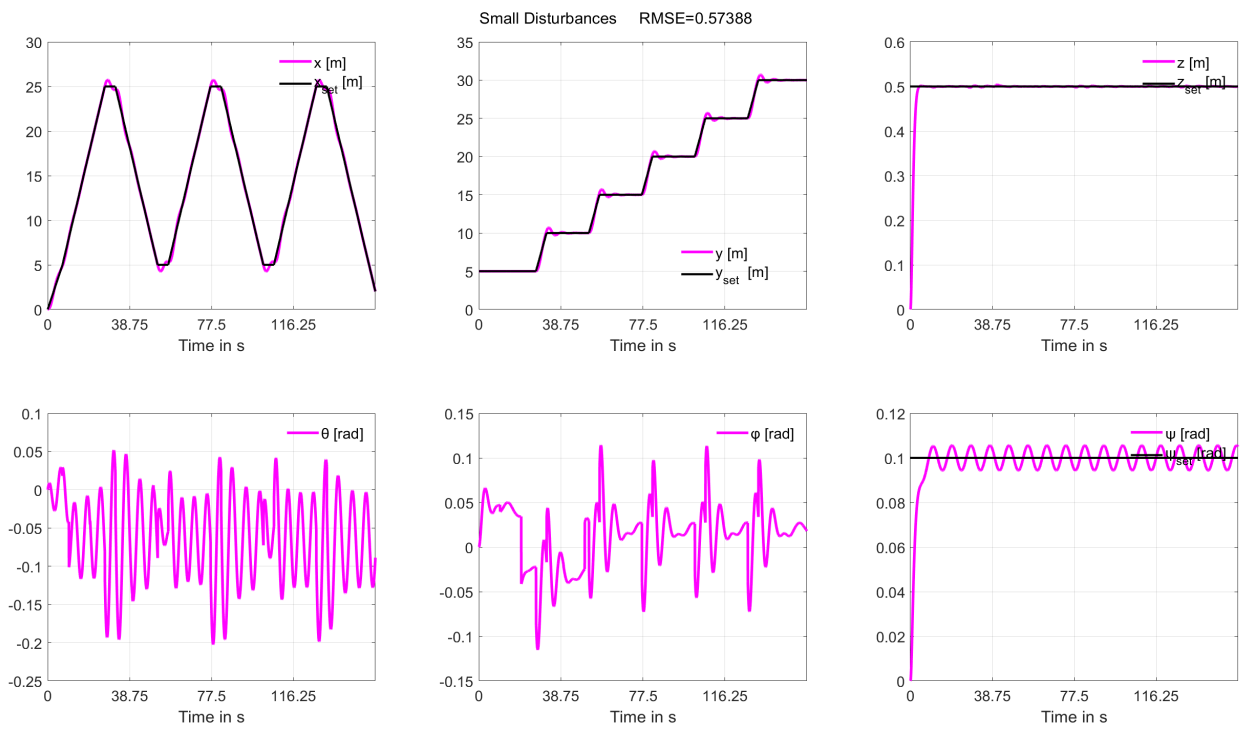
Οι διαταραχές οι οποίες φαίνονται στα σχήματα 5.11 και 5.12 δεν είναι όμοιες με τις διαταραχές που δίνονται από τα σχήματα 5.15 και 5.16 όπως φαίνεται και από τις χρονικές κλίμακες των σχημάτων.

Πίνακας 5.10: Συντελεστές για τον ελεγκτή B2b

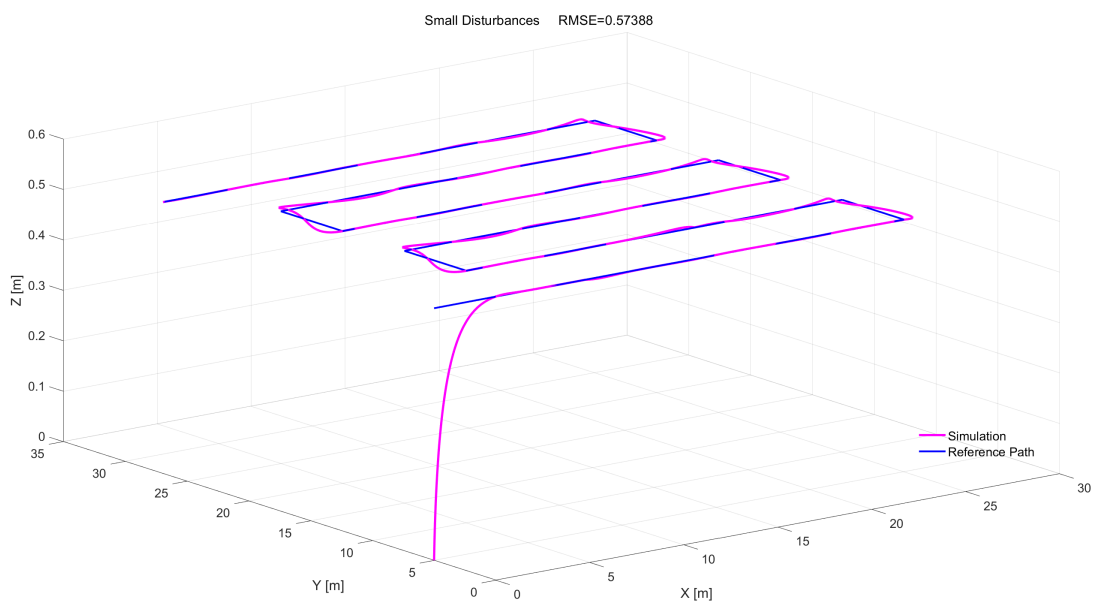
Ελεγκτές	Συντελεστές ελεγκτών α_1	Συντελεστές ελεγκτών α_2
U_1	1.88184	0.34359
U_2	0.55504	0.25610
U_3	0.16465	0.10878
U_4	2.47040	0.04858
U_5	0.10606	0.30531
U_6	0.17240	0.37424

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \frac{5}{t} \quad 0 \leq t < 7 \\
 t-2 \quad 7 \leq t < 27 \\
 25 \quad 27 \leq t < 32 \\
 -t+57 \quad 32 \leq t < 52 \\
 5 \quad 52 \leq t < 57 \\
 t-52 \quad 57 \leq t < 77 \\
 25 \quad 77 \leq t < 82 \\
 -t+107 \quad 82 \leq t < 102 \\
 5 \quad 102 \leq t < 107 \\
 t-102 \quad 107 \leq t < 127 \\
 25 \quad 127 \leq t < 132 \\
 -t+157 \quad 132 \leq t < 155
 \end{array} \right\} x_{set} = \left. \begin{array}{l}
 5 \quad 0 \leq t < 27 \\
 t-22 \quad 27 \leq t < 32 \\
 10 \quad 32 \leq t < 52 \\
 t-42 \quad 52 \leq t < 57 \\
 15 \quad 57 \leq t < 77 \\
 t-52 \quad 77 \leq t < 82 \\
 20 \quad 82 \leq t < 102 \\
 t-82 \quad 102 \leq t < 107 \\
 25 \quad 107 \leq t < 127 \\
 t-102 \quad 127 \leq t < 132 \\
 30 \quad 132 \leq t < 155
 \end{array} \right\} y_{set} = \quad (5.4) \\
 \\
 z_{set} = 0.5 \quad 0 \leq t < 155 \quad \quad \quad \psi_{set} = 0.1 \quad 0 \leq t < 155
 \end{array}$$

Ο ελεγκτής αυτός ελέγχει το τετρακόπτερο σε περιβάλλον με συνεχόμενες διαταραχές. Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων φαίνονται στα σχήματα (5.17) και (5.18).



Σχήμα 5.17: Θέση και στάση για μικρές, γνωστές διαταραχές B2b



Σχήμα 5.18: Τρισδιάστατη απεικόνιση της θέσης για μικρές, γνωστές διαταραχές B2b

Στον πίνακα 5.11 φαίνονται οι επιδόσεις του ελεγκτή B2b.

Πίνακας 5.11: Επίδοση του ελεγκτή B2b

Ελεγκτής	Περίοδος Δειγματοληψίας T_s [s]	RMSE
B2b	0.020	0.57388

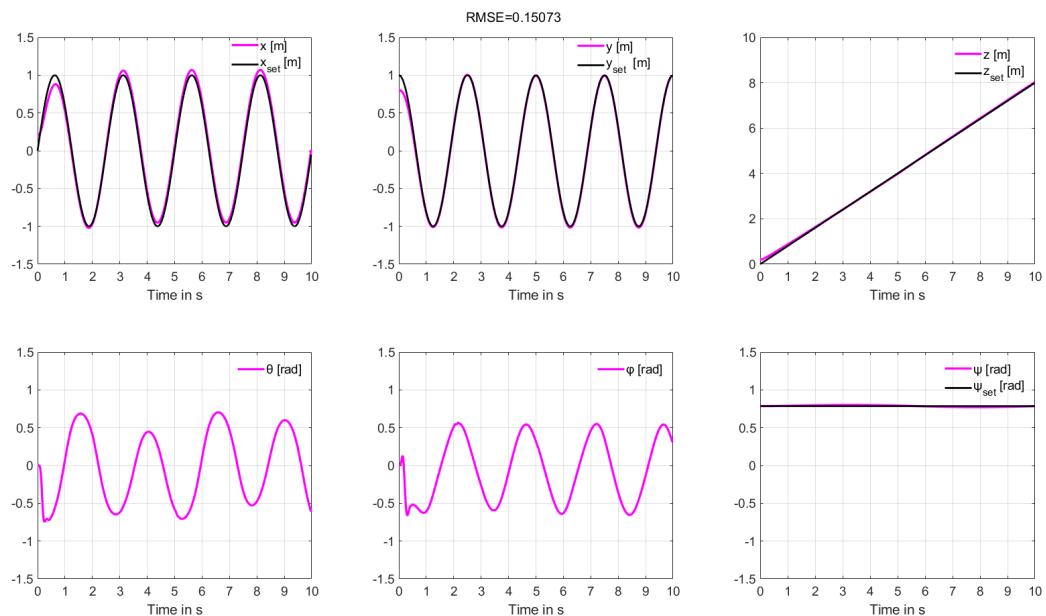
5.4.2.3 Έλεγκτής *Backstepping* για μικρές διαταραχές άγνωστες στον ελεγκτή B3a

Στην συνέχεια υλοποιήθηκε ελεγκτής για τον οποίο κατά τη φάση της σχεδίασης δεν λήφθηκαν υπόψη οι διαταραχές. Η επιθυμητή τροχιά δίνεται από την σχέση 5.3, ενώ το τετρακόπτερο θα υποβληθεί στις διαταραχές οι οποίες περιγράφονται στην ενότητα 5.4.2.1 στα σχήματα 5.11 και 5.12. Οι συντελεστές του ελεγκτή φαίνονται στον πίνακα 5.12.

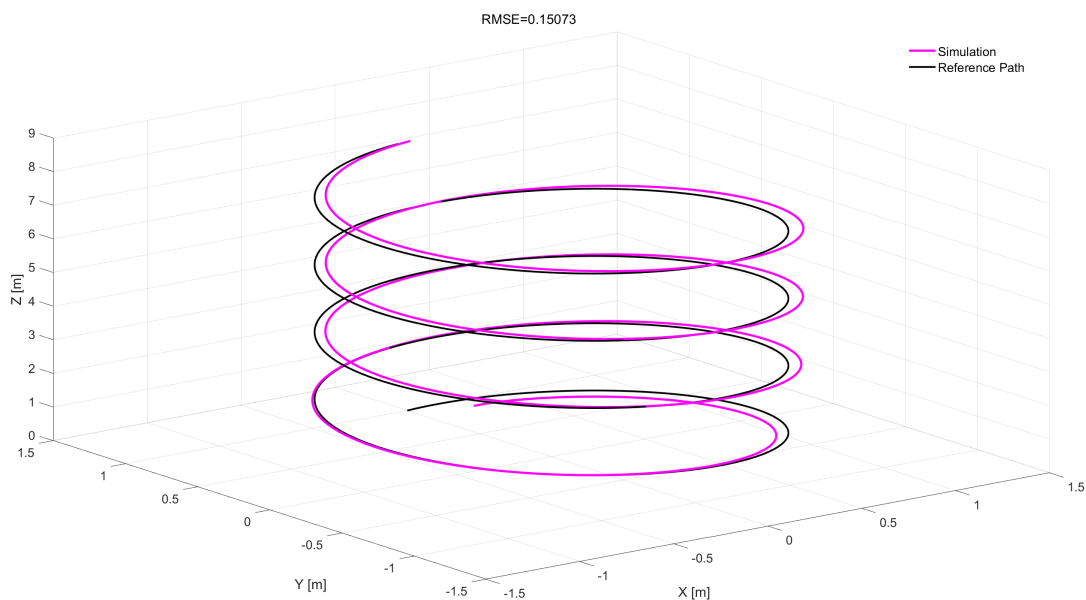
Πίνακας 5.12: Συντελεστές για τον ελεγκτή B3a

Ελεγκτές	Συντελεστές ελεγκτών α_1	Συντελεστές ελεγκτών α_2
U_1	13.84045	0.68851
U_2	5.46634	4.38144
U_3	2.20006	0.61381
U_4	43.26445	0.666263
U_5	1.84685	4.89312
U_6	3.39165	5.95831

Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων φαίνονται στα σχήματα 5.19 - 5.20.



Σχήμα 5.19: Θέση και στάση για μικρές, γνωστές διαταραχές B3a



Σχήμα 5.20: Τρισδιάστατη απεικόνιση της θέσης για μικρές, γνωστές διαταραχές B3a

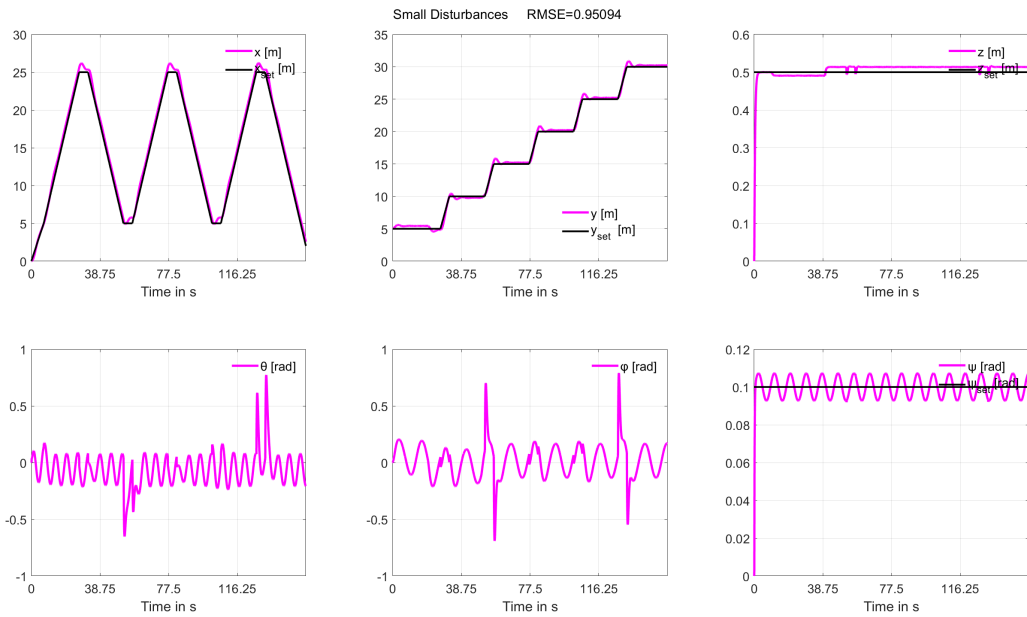
5.4.2.4 Ελεγκτής *Backstepping* για μικρές διαταραχές άγνωστες στον ελεγκτή B3b

Στην συνέχεια υλοποιήθηκε ελεγκτής για τον οποίο κατά τη φάση της σχεδίασης δεν λήφθηκαν υπόψη οι διαταραχές. Η επιθυμητή τροχιά περιγράφεται από την σχέση 5.4, ενώ το τετρακόπτερο θα υποβληθεί στις διαταραχές που φαίνονται στην ενότητα 5.4.2.2 στα σχήματα 5.15 και 5.16. Οι συντελεστές του ελεγκτή φαίνονται στον πίνακα 5.13.

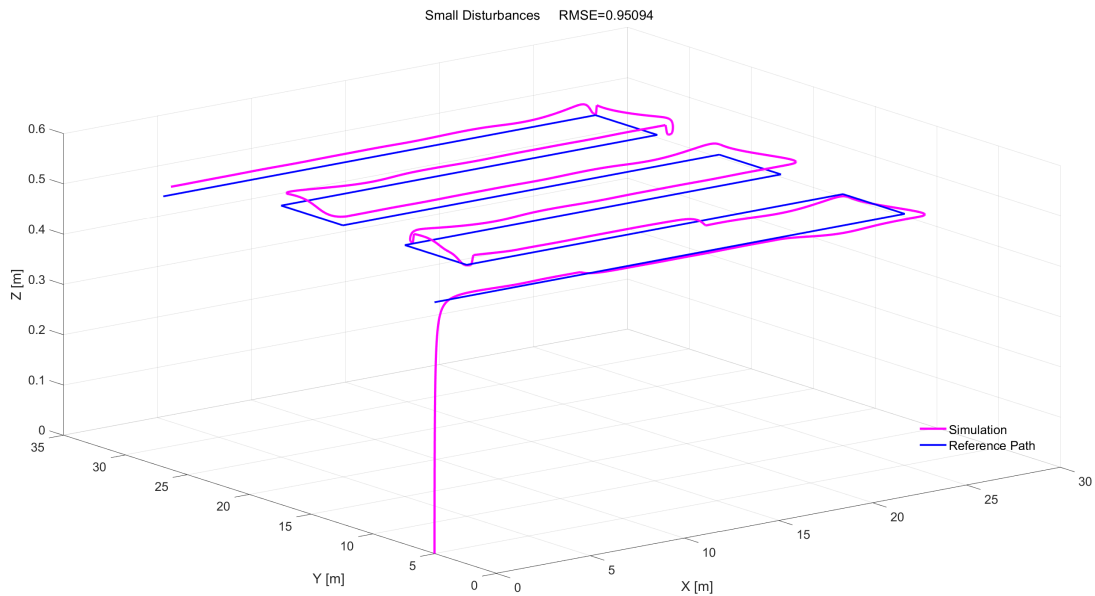
Πίνακας 5.13: Συντελεστές για τον ελεγκτή B3b

Ελεγκτές	Συντελεστές ελεγκτών α_1	Συντελεστές ελεγκτών α_2
U_1	11.15421	2.25558
U_2	1.95576	1.42359
U_3	0.53224	3.24757
U_4	6.66860	12.0620
U_5	0.21600	0.42921
U_6	0.41759	0.25253

Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων φαίνονται στα σχήματα 5.21 και 5.22.



Σχήμα 5.21: Θέση και στάση για μικρές, γνωστές διαταραχές B3b



Σχήμα 5.22: Τρισδιάστατη απεικόνιση της θέσης για μικρές, γνωστές διαταραχές B3b

Στον πίνακα 5.14 φαίνεται η επίδοση του ελεγκτή.

Πίνακας 5.14: Επίδοση του ελεγκτή B3

Ελεγκτής	Περίοδος Δειγματοληψίας Ts [s]	RMSE
B3a	0.020	0.24476
B3b	0.020	0.95094

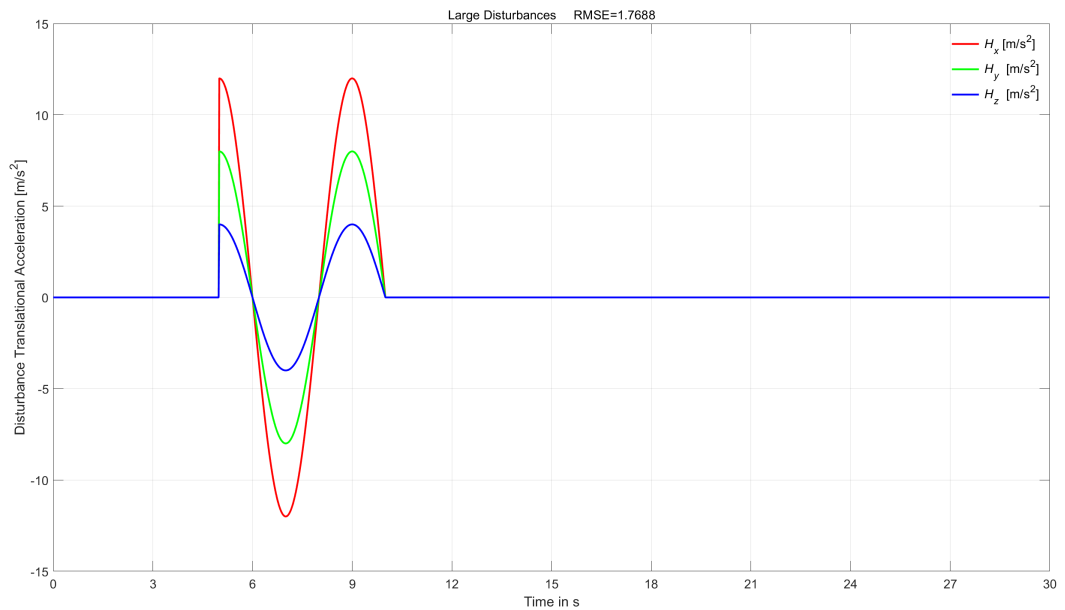
5.4.2.5 Ελεγκτής Backstepping για μεγάλες διαταραχές γνωστές στον ελεγκτή, B4

Ο ελεγκτής αυτός σχεδιάστηκε για να αντιμετωπίσει διαταραχές οι οποίες φαίνονται στα σχήματα 5.23 και 5.24. Στην περίπτωση αυτή είναι επιθυμητή η μετάβαση από αρχικό σημείο σε τελικό και όχι η παρακολούθηση πηγαίας τροχιάς, τα σημεία είναι όπως παρακάτω:

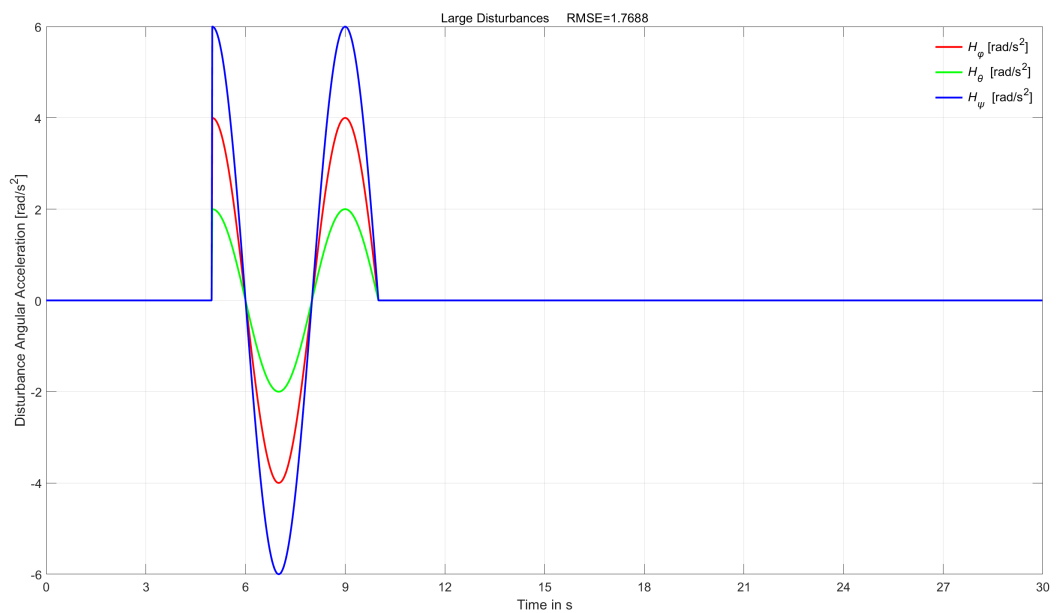
Μη γραμμικός αυτόματος έλεγχος για μη επανδρωμένα εναέρια οχήματα με τη μέθοδο *backstepping*

- Αρχικό σημείο [0.1, 0.1, 0.1]
- Τελικό σημείο [3, 2, 1]

Οι συντελεστές για τον ελεγκτή B4 δίνονται στον πίνακα 5.15.



Σχήμα 5.23: Δυνάμεις από μεγάλες, γνωστές διαταραχές B4

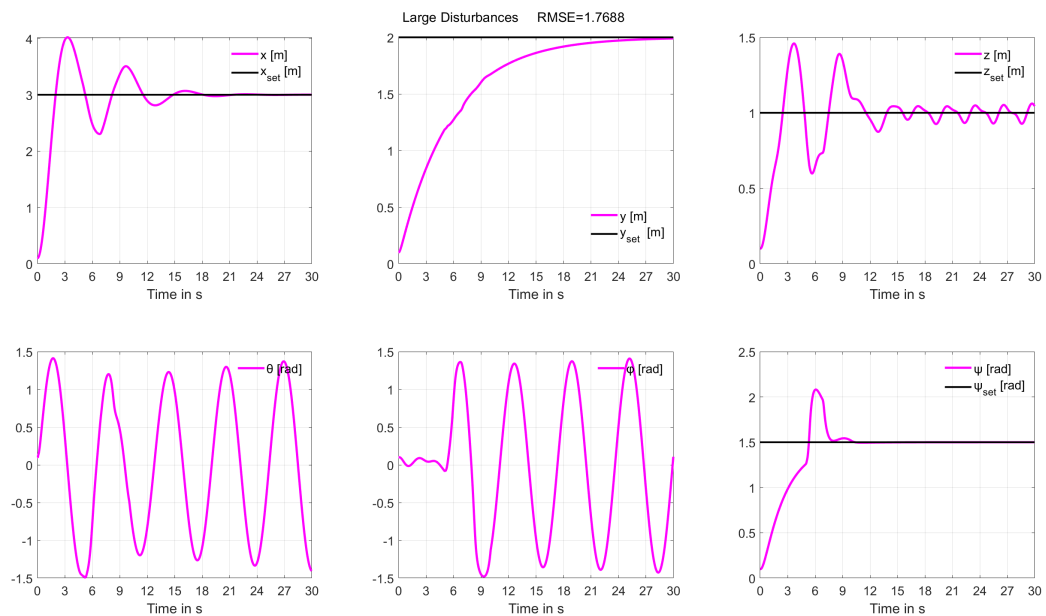


Σχήμα 5.24: Ροπές από μεγάλες, γνωστές διαταραχές B4

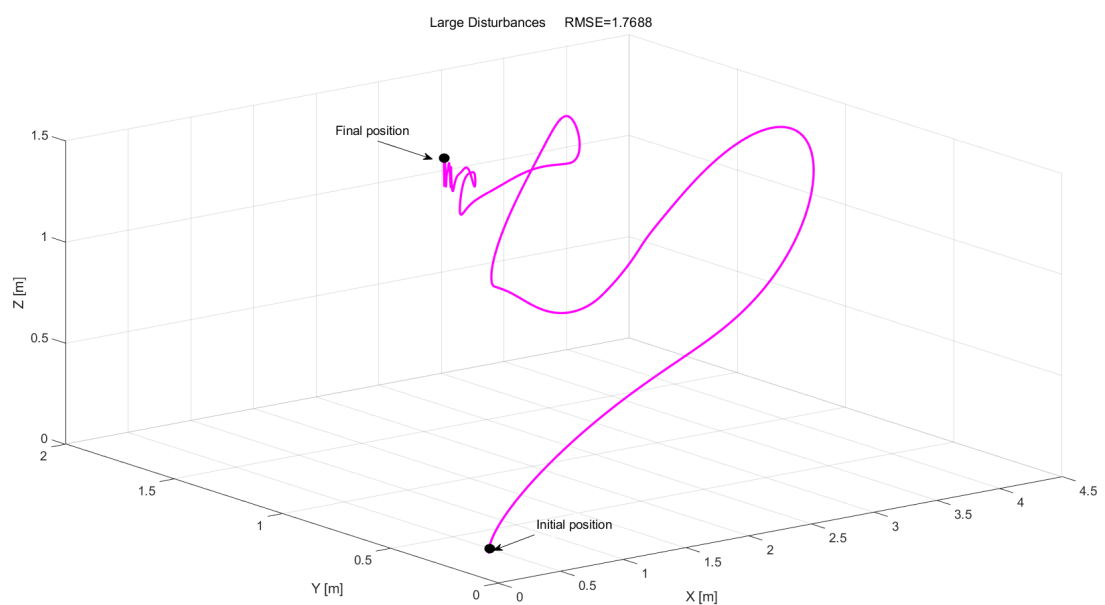
Πίνακας 5.15: Συντελεστές για τον ελεγκτή B4

Ελεγκτές	Συντελεστές ελεγκτών α_1	Συντελεστές ελεγκτών α_2
U_1	0.31314	0.39443
U_2	0.000008	0.02177
U_3	0.00602	0.00672
U_4	2.98082	0.00013
U_5	0.00039	0.62342
U_6	0.02040	6.67466

Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων φαίνονται στα σχήματα 5.25 - 5.26.



Σχήμα 5.25: Θέση και στάση για μεγάλες, γνωστές διαταραχές B4



Σχήμα 5.26: Τρισδιάστατη απεικόνιση της θέσης για μεγάλες, γνωστές διαταραχές B4

Στον πίνακα 5.16 φαίνονται οι επιδόσεις του ελεγκτή B4.

Πίνακας 5.16: Επίδοση του ελεγκτή B4

Ελεγκτής	Περίοδος Δειγματοληψίας T_s [s]	RMSE
B4	0.020	1.7688

Δεν ήταν δυνατό να προσδιοριστούν οι συντελεστές της μεθόδου για μεγάλες και άγνωστες στον ελεγκτή.

5.4.3 Σχολιασμός των αποτελεσμάτων

Φαίνεται ότι η μέθοδος *backstepping* είναι μία μέθοδος μέσω της οποίας είναι δυνατό να υλοποιήσουμε ελεγκτές οι οποίοι έχουν τη δυνατότητα να ελέγξουν αρκετά καλά το σύστημα του τετρακόπτερου. Οι ελεγκτές αξιολογήθηκαν με τον δείκτη RMSE, ο δείκτης αυτός για την μέθοδο *backstepping* είναι RMSE 0.12048, ενώ για τον ελεγκτή LQR είναι RMSE 0.88547, ο ελεγκτής που υλοποιήθηκε με την μέθοδο *backstepping* είναι επτά περίπου φορές καλύτερος από τον ελεγκτή LQR. Από τις προσομοιώσεις φαίνεται ότι σε περίπου ένα δευτερόλεπτο ο ελεγκτής *backstepping* παρακολουθεί πολύ καλά την επιθυμητή τροχιά.

Υπό συνθήκες μικρών διαταραχών, οι οποίες είναι γνωστές στον ελεγκτή, το σύστημα του τετρακόπτερου φαίνεται ότι ελέγχεται αρκετά καλά με την μέθοδο *backstepping*, ο δείκτης RMSE για την τροχιά αυτή είναι 0.17755. Όταν οι διαταραχές είναι άγνωστες στον ελεγκτή το τετρακόπτερο διατηρεί την ικανότητα πτήσης με καλά αποτελέσματα και ο δείκτης RMSE είναι 0.15073. Όταν οι διαταραχές εμφανίζονται απότομα, παίρνουν μεγάλα πλάτη και είναι γνωστές στον ελεγκτή τότε το τετρακόπτερο φαίνεται να μην ελέγχεται καλά, ο δείκτης RMSE για αυτό το σενάριο είναι 1.7688, παρόλα αυτά το τετρακόπτερο συνεχίζει την πτήση χωρίς να υπάρχει απώλεια στήριξης και πτώση του τετρακόπτερου.

Συγκρίνοντας τον ελεγκτή της μεθόδου *backstepping* με τον ελεγκτή LQR φαίνεται ότι ο πρώτος όσον αφορά την παρακολούθηση πηγαίας τροχιάς ανταποκρίνεται πολύ καλύτερα. Επιπλέον οι προσομοιώσεις δείχνανε πως με τη μέθοδο *backstepping* είναι δυνατόν να διπλασιαστεί ο χρόνος δειγματοληψίας χωρίς ουσιαστική επίπτωση στην πτήση σε αντίθεση με τον ελεγκτή LQR όπου το τετρακόπτερο παύει να πετάει λόγω απώλειας στήριξης.

Κεφάλαιο 6 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε ο έλεγχος μη επανδρωμένων εναέριων οχημάτων με τη χρήση μη γραμμικών μεθόδων ελέγχου. Συγκεκριμένα μελετήθηκε ο έλεγχος του τετρακόπτερου εφαρμόζοντας τη μέθοδο *backstepping*. Η μέθοδος *backstepping* βασίζεται στο θεώρημα *Lyapunov* για την ευστάθεια των συστημάτων. Η μελέτη έδειξε ότι με την μέθοδο *backstepping* είναι δυνατό να υλοποιηθούν ελεγκτές οι οποίοι ελέγχουν αρκετά καλά το σύστημα του τετρακόπτερου όσον αφορά την παρακολούθηση πηγαίας τροχιάς. Τελικός στόχος της εργασίας ήταν η υλοποίηση ελεγκτή με τη μέθοδο *backstepping* ο οποίος ελέγχει το σύστημα του τετρακόπτερου σε περιβάλλον με διαταραχές. Ο στόχος υλοποιήθηκε με επιτυχία όπως φαίνεται από τα γραφήματα του κεφαλαίου 5, για πτήση σε περιβάλλον όπου το τετρακόπτερο υπόκειται σε διαταραχές συνεχείς και μικρού πλάτους για δύο διαφορετικές τροχίες. Το σύστημα του τετρακόπτερου ελέγχεται καλά είτε οι διαταραχές είναι γνωστές στον ελεγκτή είτε είναι άγνωστες στον ελεγκτή. Σε αντίθεση με τα προηγούμενα, όταν το σύστημα του τετρακόπτερου εκτελεί πτήση κάτω από συνθήκες απότομων και μεγάλου πλάτους διαταραχών τότε παρατηρείται πως το σύστημα του τετρακόπτερου δεν ελέγχεται ικανοποιητικά. Παρόλο που ο έλεγχος δεν είναι ικανοποιητικός για συνθήκες απότομων και μεγάλου πλάτους διαταραχών, δεν υφίσταται απώλεια στήριξης του τετρακόπτερου και η πτήση συνεχίζει κανονικά. Όσον αφορά πτήση του τετρακόπτερου κάτω από συνθήκες απότομων και μεγάλου πλάτους διαταραχών θα πρέπει να μελετηθούν και άλλες μέθοδοι για τον έλεγχο του τετρακόπτερου.

Για λόγους σύγκρισης, παράλληλα με την προτεινόμενη μέθοδο μελετήθηκαν και οι γραμμικές μέθοδοι PID και LQR με τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων να υποδεικνύουν την ανωτερότητα της μεθόδου *backstepping*.

Συμπερασματικά από τις προσομοιώσεις φαίνεται ότι η μέθοδος *backstepping* προσφέρει μεγαλύτερο έλεγχο και ευστάθεια στο τετρακόπτερο.

Ως μελλοντική κατεύθυνση έρευνας, προτείνεται κατ' αρχήν η προσαρμογή των ελεγκτών σε πραγματικό τετρακόπτερο σε ανοιχτό χώρο, έτσι ώστε να διαπιστωθεί η σχεδιαστική επάρκεια της μεθόδου *backstepping*. Επιπλέον της μεθόδου *backstepping* προτείνεται επίσης η χρήση και άλλων μη γραμμικών μεθόδων ελέγχου όπως οι μέθοδοι MPC και SMC. Τέλος μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα κατεύθυνση είναι η ενσωμάτωση μοντέλων νευρωνικών δικτύων στον ελεγκτή *backstepping*, με σκοπό την απόρριψη άγνωστων διαταραχών.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- [1] K. Alexis, “Control of cooperative unmanned aerial vehicles,” Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Πατρών. Σχολή Πολυτεχνική. Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών. Τομέας Τηλεπικοινωνιών και Τεχνολογίας της Πληροφορίας, 2011.
- [2] K. A. Ghamry and Y. Zhang, “Cooperative control of multiple UAVs for forest fire monitoring and detection,” in *2016 12th IEEE/ASME International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications (MESA)*, Aug. 2016, pp. 1–6. doi: 10.1109/MESA.2016.7587184.
- [3] E. Fragkouloupoulos, “Agricultural robotics and automation: robot collaboration for precision agriculture,” Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας. Σχολή Θετικών Επιστημών. Τμήμα Πληροφορικής, 2017.
- [4] S. Bouabdallah, “Design and Control of quadrotors with application to autonomous flying,” Jan. 2007, doi: 10.5075/epfl-thesis-3727.
- [5] H. S. Khan and M. B. Kadri, “Attitude and altitude control of quadrotor by discrete PID control and non-linear model predictive control,” in *2015 International Conference on Information and Communication Technologies (ICICT)*, Dec. 2015, pp. 1–11. doi: 10.1109/ICICT.2015.7469486.
- [6] E. Okyere, A. Bousbaine, G. T. Poyi, A. K. Joseph, and J. M. Andrade, “LQR controller design for quad-rotor helicopters,” *J. Eng.*, vol. 2019, no. 17, pp. 4003–4007, Jan. 2019, doi: 10.1049/joe.2018.8126.
- [7] C. Balas, *Modelling and Linear Control of a Quadrotor*. Cranfield University, School of Engineering, 2007.
- [8] M. Chen and M. Huzmezan, “A Simulation Model and H(Loop Shaping Control of a Quad Rotor Unmanned Air Vehicle.,” in *Proceedings of the IASTED International Conference on Modelling, Simulation and Optimization - MSO 2003, Banff, Canada, July 2-4, 2003*, 2003, pp. 320–325.
- [9] I. Kalogeropoulos, A. Alexandridis, and H. Sarimveis, “Economic Oriented Dynamic Matrix Control of Wastewater Treatment Plants,” *J. Process Control*, vol. 118, pp. 202–217, Oct. 2022, doi: 10.1016/j.jprocont.2022.08.006.
- [10] A. Alexandridis and H. Sarimveis, “Nonlinear adaptive model predictive control based on self-correcting neural network models,” *AIChE J.*, vol. 51, no. 9, pp. 2495–2506, 2005, doi: 10.1002/aic.10505.
- [11] M. Stogiannos, A. Alexandridis, and H. Sarimveis, “Model predictive control for systems with fast dynamics using inverse neural models,” *ISA Trans.*, vol. 72, pp. 161–177, Jan. 2018, doi: 10.1016/j.isatra.2017.09.016.
- [12] M. Papadimitrakis, M. Stogiannos, H. Sarimveis, and A. Alexandridis, “Multi-Ship Control and Collision Avoidance Using MPC and RBF-Based Trajectory Predictions,” *Sensors*, vol. 21, no. 21, Art. no. 21, Jan. 2021, doi: 10.3390/s21216959.
- [13] M. Papadimitrakis and A. Alexandridis, “Active vehicle suspension control using road preview model predictive control and radial basis function networks,” *Appl. Soft Comput.*, vol. 120, p. 108646, May 2022, doi: 10.1016/j.asoc.2022.108646.
- [14] N. Korovesis, D. Kandris, G. Koulouras, and A. Alexandridis, “Robot Motion Control via an EEG-Based Brain–Computer Interface by Using Neural Networks and Alpha Brainwaves,” *Electronics*, vol. 8, no. 12, Art. no. 12, Dec. 2019, doi: 10.3390/electronics8121387.
- [15] A. Alexandridis, D. Vakalis, C. I. Siettos, and G. V. Bafas, “A cellular automata model for forest fire spread prediction: The case of the wildfire that swept through Spetses Island in 1990,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 204, no. 1, pp. 191–201, Oct. 2008, doi: 10.1016/j.amc.2008.06.046.
- [16] A. Kapnopoulos and A. Alexandridis, “A cooperative particle swarm optimization approach for tuning an MPC-based quadrotor trajectory tracking scheme,” *Aerosp. Sci. Technol.*, vol. 127, p. 107725, Aug. 2022, doi: 10.1016/j.ast.2022.107725.

- [17] H. Boubertakh, S. Bencharef, and S. Labiod, “PSO-based PID control design for the stabilization of a quadrotor,” 2013, pp. 514–517.
- [18] M. Stogiannos, A. Alexandridis, and H. Sarimveis, “An enhanced decentralized artificial immune-based strategy formulation algorithm for swarms of autonomous vehicles,” *Appl. Soft Comput.*, vol. 89, p. 106135, Apr. 2020, doi: 10.1016/j.asoc.2020.106135.
- [19] A. Alexandridis, H. Sarimveis, and K. Ninos, “A radial basis function network training algorithm using a non-symmetric partition of the input space—application to a model predictive control configuration,” *Adv. Eng. Softw.*, vol. 42, no. 10, pp. 830–837, 2011.
- [20] Α. Ζιώγας, “Ανάλυση του Split-Πι DC-DC Μετατροπέα Αμφίδρομης Ροής Ισχύος, Έλεγχος σε Λειτουργία Ολίσθησης επί Επιφάνειας και Εφαρμογές,” Feb. 2021.
- [21] H. Sira-Ramirez, M. Zribi, and S. Ahmad, “Dynamical sliding mode control approach for vertical flight regulation in helicopters,” *IEE Proc. Control Theory Appl.*, vol. 141, no. 1, pp. 19–24, 1994, doi: 10.1049/ip-cta:19949624.
- [22] H. Razmi and S. Afshinfar, “Neural network-based adaptive sliding mode control design for position and attitude control of a quadrotor UAV,” *Aerosp. Sci. Technol.*, vol. 91, pp. 12–27, Aug. 2019, doi: 10.1016/j.ast.2019.04.055.
- [23] A. Alexandridis, “Evolving rbf neural networks for adaptive soft-sensor design,” *Int. J. Neural Syst.*, vol. 23, no. 06, p. 1350029, Dec. 2013, doi: 10.1142/S0129065713500299.
- [24] A. Alexandridis, M. Stogiannos, N. Papaioannou, E. Zois, and H. Sarimveis, “An Inverse Neural Controller Based on the Applicability Domain of RBF Network Models,” *Sensors*, vol. 18, no. 1, Art. no. 1, Jan. 2018, doi: 10.3390/s18010315.
- [25] A. Alexandridis, M. Stogiannos, A. Kyriou, and H. Sarimveis, “An offset-free neural controller based on a non-extrapolating scheme for approximating the inverse process dynamics,” *J. Process Control*, vol. 23, no. 7, pp. 968–979, Aug. 2013, doi: 10.1016/j.jprocont.2013.04.008.
- [26] S. Bouabdallah and R. Siegwart, “Backstepping and Sliding-mode Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor,” in *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Apr. 2005, pp. 2247–2252. doi: 10.1109/ROBOT.2005.1570447.
- [27] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1996.
- [28] S. Bouabdallah and R. Siegwart, “Full control of a quadrotor,” in *2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Oct. 2007, pp. 153–158. doi: 10.1109/IROS.2007.4399042.
- [29] R. Storn and K. Price, “Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces,” *J. Glob. Optim.*, vol. 11, no. 4, pp. 341–359, Dec. 1997, doi: 10.1023/A:1008202821328.
- [30] Α. Α. Γκουντή, “Εξελκτικοί αλγόριθμοι: Ο αλγόριθμος της Διαφορικής Εξέλιξης,” Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2014. doi: 10.26262/heal.auth.ir.135079.
- [31] P. Patrinos, A. Alexandridis, K. Ninos, and H. Sarimveis, “Variable selection in nonlinear modeling based on rbf networks and evolutionary computation,” *Int. J. Neural Syst.*, vol. 20, no. 05, pp. 365–379, Oct. 2010, doi: 10.1142/S0129065710002474.
- [32] I. Antoniadis, *Flight Dynamics and Control*. 2016.
- [33] T. Bresciani, “Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter,” *MSc Theses*, 2008.
- [34] F. Sabatino, *Quadrotor control: modeling, nonlinear control design, and simulation*. 2015.
- [35] M. V. Cook, *Flight dynamics principles*. London : New York: Arnold ; J. Wiley, 1997.
- [36] S. Zhao, “Time Derivative of Rotation Matrices: A Tutorial,” *ArXiv*, 2016.
- [37] L. Derafa, A. Ouldali, T. Madani, and A. Benallegue, “Four Rotors Helicopter Yaw and Altitude Stabilization..” in *Proceedings of the World Congress on Engineering, WCE 2007, London, UK, 2-4 July, 2007*, 2007, pp. 148–152.
- [38] N. Promkajin and M. Parnichkun, “Development of a robust attitude control for nonidentical rotor quadrotors using sliding mode control,” *Int. J. Adv. Robot. Syst.*, vol. 15, no. 1, p. 1729881417753554, Jan. 2018, doi: 10.1177/1729881417753554.

- [39] A. Bousbaine, M. H. Wu, and G. T. Poyi, “Modelling and simulation of a quad-rotor helicopter,” in *6th IET International Conference on Power Electronics, Machines and Drives (PEMD 2012)*, Mar. 2012, pp. 1–6. doi: 10.1049/cp.2012.0318.
- [40] G. Hoffmann, H. Huang, S. Waslander, and C. Tomlin, “Quadrotor Helicopter Flight Dynamics and Control: Theory and Experiment,” presented at the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Hilton Head, South Carolina, Aug. 2007. doi: 10.2514/6.2007-6461.
- [41] K. Peroulis, “Design and Manufacture a mUAV Quadcopter,” 2014. doi: 10.13140/RG.2.2.27026.56008.
- [42] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, 1998.
- [43] R. M. Murray, “Optimization-Based Control,” *Book*, p. 145, Feb. 2022.
- [44] D. Matouk, O. Gherouat, F. Abdessemed, and A. Hassam, “Quadrotor position and attitude control via backstepping approach,” in *2016 8th International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC)*, Nov. 2016, pp. 73–79. doi: 10.1109/ICMIC.2016.7804228.
- [45] M. Y. Amir and V. U. Abbas, “Modeling and neural control of quad rotor helicopter,” *Yanbu J. Eng. Sci.*, vol. 2, Jan. 2011, doi: 10.53370/001c.23745.