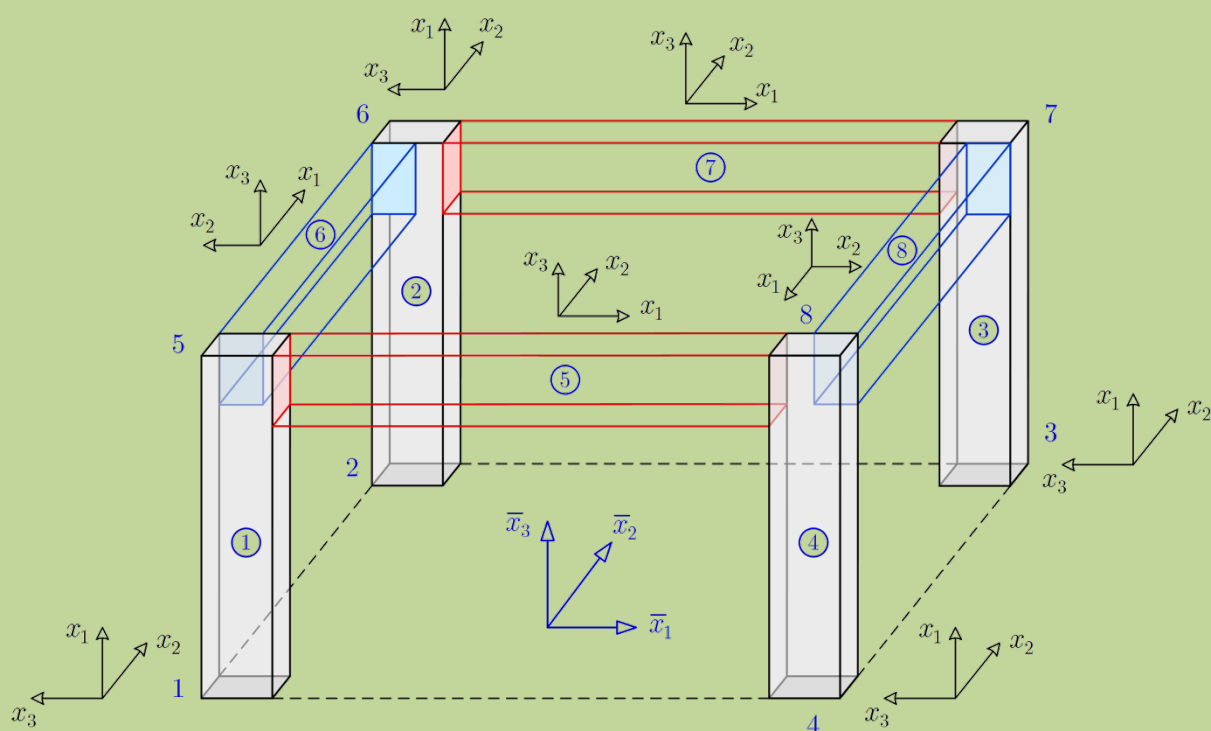




ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΩΡΙΚΩΝ ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ



Διπλωματική Εργασία

ΚΑΛΟΓΙΑΝΝΗΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ

Αθήνα, Οκτώβριος 2022

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΣ-ΦΙΛΗΣ ΚΟΚΚΙΝΟΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Όνοματεπώνυμο φοιτητή: **Καλογιάννης Ευάγγελος**

Τίτλος Διπλωματικής Εργασίας:

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΩΡΙΚΩΝ ΠΛΑΙΣΙΩΝ
ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ**

Η διπλωματική εργασία εξετάστηκε επιτυχώς από την κάτωθι
Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή:

Τριαντάφυλλος - Φίλης Κόκκινος
Αναπληρωτής Καθηγητής
Επιβλέπων

Νικόλαος Πνευματικός
Καθηγητής
Μέλος

Σταυρούλα Δενεζάκη
Λέκτορας
Μέλος

Οκτώβριος 2022, ΑΙΓΑΛΕΩ

ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο κάτωθι υπογεγραμμένος **Καλογιάννης Ευάγγελος** του Σταύρου, με αριθμό μητρώου 47536, φοιτητής του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής της Σχολής Μηχανικών του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών, δηλώνει υπεύθυνα ότι:

«Είμαι συγγραφέας της παρούσας διπλωματικής εργασίας με τίτλο *ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΩΡΙΚΩΝ ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ* και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, οι όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε ακριβώς είτε παραφρασμένες, αναφέρονται στο σύνολό τους, με πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών, που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία έχει συγγραφεί από μένα αποκλειστικά και αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου, όσο και του Ιδρύματος.

Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του διπλώματός μου».

Ο Δηλών



Καλογιάννης Ευάγγελος



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

Περίληψη

Τίτλος Διπλωματικής Εργασίας:

Ανάλυση Χωρικών Πλαισίων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων

Όνοματεπώνυμο φοιτητή: **Καλογιάννης Ευάγγελος**

(Οκτώβριος 2022)

Η παρούσα διπλωματική εργασία έγινε με σκοπό την ανάλυση των χωρικών πλαισίων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Αρχικά γίνεται μια γενική αναφορά στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και στη συνέχεια εφαρμόζεται αυτή στα χωρικά πλαίσια.

Επιπλέον, γίνεται εκτεταμένη και λεπτομερής παρουσίαση της επίλυσης των χωρικών πλαισίων χρησιμοποιώντας ακόμα και άκαμπτα μέλη στις δοκούς για μια πιο ρεαλιστική επίλυση του χωρικού πλαισίου.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η επίλυση των χωρικών πλαισίων γίνεται στο πρόγραμμα Excel, παράλληλα με προγραμματισμό μέσω της Visual Basic για την απλούστευση και ταχύτερη ολοκλήρωση κάποιων χρονοβόρων υπολογισμών και την αυτοματοποίηση της διαδικασίας.

Τέλος παρατίθενται αριθμητικά παραδείγματα για δύο διαφορετικές περιπτώσεις χωρικών πλαισίων, ενός απλού και ενός σύνθετου, και παρατίθενται αναλυτικά τα βήματα υπολογισμού για τη διευκόλυνση των αναγνωστών και την πληρέστερη παρουσίαση του θέματος.



UNIVERSITY OF WEST ATTICA
SCHOOL OF ENGINEERING
Department of Civil Engineering

Abstract

Diploma Thesis Title:

Analysis of Space Frames Using the Finite Element Method

Author: **Kaloyiannis Evangelos**

(October 2022)

This diploma thesis aims at the analysis of spatial frames using the finite element method.

First, a general reference is made to the finite element method and then this is applied to the case of spatial frames.

In addition, there is an extensive and detailed presentation of the solution method of spatial frames using even stiff ends at the ends of beams for a more realistic analysis of spatial frames.

The numerical implementation is done in the Excel program in combination with Visual Basic developing a program which simplifies and makes faster the execution of some time consuming tasks and automates the whole procedure.

Finally, two different spatial frames are presented, a simple one and more complex, in order to demonstrate the efficiency of the method and its applicability. The results are given through a variety of tables for a more complete presentation and understanding of the subject.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	4
Εισαγωγή.....	4
1.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	4
1.2 ΧΩΡΙΚΑ ΠΛΑΙΣΙΑ	5
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	6
Χωρικά Πλαίσια.....	6
2.1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΞΟΝΩΝ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	6
2.2 ΑΡΙΘΜΗΣΗ ΜΕΛΩΝ ΚΑΙ ΚΟΜΒΩΝ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	6
2.3 ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	8
Ακραία Εντατικά και Παραμορφωσιακά Μεγέθη Δοκού στο Χώρο.....	8
3.1 ΑΚΡΑΙΑ ΕΝΤΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΔΟΚΟΥ ΣΤΟ ΧΩΡΟ	8
3.2 ΜΗΤΡΩΟ ΑΚΡΑΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΔΟΚΟΥ ΣΤΟ ΤΟΠΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ	8
3.3 ΑΚΡΑΙΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΑΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΔΟΚΟΥ ΣΤΟ ΧΩΡΟ	9
3.4 ΜΗΤΡΩΟ ΑΚΡΑΙΩΝ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΔΟΚΟΥ ΣΤΟ ΤΟΠΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ	9
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	11
Μητρώο Μετασχηματισμού Δοκού στο Χώρο	11

4.1 ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΜΕΛΩΝ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	11
4.2 ΑΚΡΑΙΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ ΔΟΚΟΥ ΣΤΟ ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ.....	14
4.3 ΑΚΡΑΙΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ ΔΟΚΟΥ ΣΤΟ ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ .	15
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	17
<i>Μητρώο Στιβαρότητας Δοκού στο Χώρο</i>	<i>17</i>
5.1 ΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΔΟΚΟΥ ΣΤΟ ΧΩΡΟ	17
5.2 ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΔΟΚΟΥ ΣΤΟ ΤΟΠΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ	17
5.3 ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΔΟΚΟΥ ΣΤΟ ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ	19
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6	20
<i>Στερεοί Κόμβοι σε Χωρικά Πλαίσια</i>	<i>20</i>
6. 1 ΑΚΡΑΙΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ	21
6. 2 ΑΚΡΑΙΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ	24
6. 3 ΜΗΤΡΩΟ ΑΚΑΜΨΙΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΜΕ ΑΚΑΜΠΤΑ ΑΚΡΑ	27
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7	28
<i>Ολικό και Τροποποιημένο μητρωο Στιβαρότητας.....</i>	<i>28</i>
7.1 ΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	28
7.2 VISUAL BASIC	28
7.3 ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	29
7.4 ΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗΣ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	29
7.5 ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	30
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8	31
<i>Επίλυση Χωρικού Πλαισίου</i>	<i>31</i>
8.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΩΝ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	31
8.2 ΑΚΡΑΙΕΣ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΕΛΩΝ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΣΤΟ ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΚΑΙ ΣΤΟ ΤΟΠΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ ΤΟΥΣ	32
8.3 ΑΚΡΑΙΕΣ ΔΡΑΣΕΩΝ ΤΩΝ ΜΕΛΩΝ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΣΤΟ ΤΟΠΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ ΤΟΥΣ (ΣΤΕΡΕΟΣ ΚΟΜΒΟΣ).....	32
8.4 ΑΚΡΑΙΕΣ ΔΡΑΣΕΩΝ ΤΩΝ ΜΕΛΩΝ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΣΤΟ ΤΟΠΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ ΤΟΥΣ (ΚΑΜΠΤΟΜΕΝΑ ΑΚΡΑ)	33

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9	34
Παράδειγμα Εφαρμογής.....	34
9.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΠΛΟΥ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	34
Βήμα 1 ^ο	35
Βήμα 2 ^ο	35
Βήμα 3 ^ο	35
Βήμα 4 ^ο	36
Βήμα 5 ^ο	36
Βήμα 6 ^ο	36
Βήμα 7 ^ο	36
Βήμα 8 ^ο	37
9.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΟΥ ΑΠΛΟΥ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	37
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10	53
Επίλυση Σύνθετου Πλαισιωτού Φορέα στο Χώρο	53
10.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	53
Βήμα 1 ^ο	54
Βήμα 2 ^ο	55
Βήμα 3 ^ο	55
Βήμα 4 ^ο	55
Βήμα 5 ^ο	56
Βήμα 6 ^ο	56
Βήμα 7 ^ο	56
Βήμα 8 ^ο	56
10.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΟΥ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	57
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	70

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων

Όταν οι καταπονήσεις και τα γεωμετρικά σχήματα είναι πάρα πολύ απλά η αναλυτική λύση των εξισώσεων με τις οποίες μπορούμε να περιγράψουμε τα διάφορα τεχνικά προβλήματα είναι δυνατή. Όταν όμως υπάρχει η ανάγκη να λυθούν πιο σύνθετα προβλήματα αναπτύσσονται διάφορες προσεγγιστικές μέθοδοι με πιο διαδεδομένη πλέον, αλλά και αξιόπιστη την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα προβλήματα. Η μέθοδος αυτή είναι μια αριθμητική μέθοδος υπολογισμού με τη χρήση Η/Υ. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται ευρέως σήμερα στην έρευνα και στην βιομηχανία για τον υπολογισμό και τη μελέτη διάφορων κατασκευών, εφόσον χάρη στην ταχύτατη ανάπτυξη των Η/Υ αντιμετωπίστηκε και το μέχρι πρότινος βασικό της μειονέκτημα που ήταν οι αυξημένες απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ, ιδίως όταν εφαρμοζόταν σε σύνθετα μοντέλα.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μία εξέλιξη των μητρωϊκών μεθόδων αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων και έγινε από διαφόρους σπουδαίους επιστήμονες όπως ο Ιωάννης Αργύρης, ο Ρέι Κλαφ, ο Βάλτερ Ριτζ, ο Μπόρις Γκαλέρκιν και άλλοι.

Για την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

1. Δημιουργούμε το τρισδιάστατο μοντέλο σε ένα πρόγραμμα CAD, Εισάγοντας τη γεωμετρία της κατασκευής

2. το μοντέλο χωρίζεται σε πεπερασμένα στοιχεία και αφού ετοιμαστεί το πλέγμα επιλέγουμε το είδος της επίλυσης και εισάγουμε τα επιπλέον δεδομένα που απαιτούνται.
3. Όταν ετοιμαστούν τα δεδομένα για επίλυση, εισάγονται σε ένα πρόγραμμα το οποίο θα κάνει την επίλυση του προβλήματος. Τέτοιου είδους προγράμματα λέγονται solver και χρησιμοποιούν για τις επιλύσεις αριθμητικές μεθόδους.
4. Όταν τελειώσει η επίλυση τα αποτελέσματα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένα πρόγραμμα, που αποκαλείται post processor, για να μπορέσει ο μελετητής να δει τα αποτελέσματα.

1.2 Χωρικά πλαίσια

Ο συνδυασμός γραμμικών στοιχείων συνδεδεμένων μεταξύ τους μέσω κυρίως μονολιθικών συνδέσεων δημιουργεί δομικούς φορείς που ονομάζονται πλαίσια. Το κύριο στοιχείο του ολόσωμου γραμμικού φορέα είναι η δοκός, ενώ το κύριο χαρακτηριστικό στοιχείο του δικτυωτού φορέα είναι η ράβδος δικτύωματος. Δοκός είναι το ευθύγραμμο δομικό στοιχείο, του οποίου η οριζόντια διαμήκης διεύθυνση, η οποία αποτελεί και τον άξονα της δοκού, έχει διάσταση μεγαλύτερη από αυτές των δυο εγκάρσιων διευθύνσεων. Επίπεδος φορέας (πλαίσιο) είναι ο φορέας του οποίου όλα τα μέλη ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και η φόρτιση του ανήκει στο επίπεδο. Αν κάποιος παράγοντας από τους προαναφερθέντες δεν ισχύει τότε χαρακτηρίζεται ως χωρικός φορέας (χωρικό πλαίσιο). Αξίζει να σημειωθεί ότι η περίπτωση του χωρικού πλαισίου αποτελεί την πλέον γενική περίπτωση ραβδωτού φορέα από την ανάλυση του οποίου προκύπτει η ανάλυση φορέων όπως επίπεδο δικτύωμα, επίπεδο πλαίσιο, χωρικό δικτύωμα και εσχάρα.[1].Τέλος τα πλαίσια εφαρμόζονται σε διάφορες κατασκευές όπως γέφυρες, στάδια, υπόστεγα και κτίρια.

ΧΩΡΙΚΑ ΠΛΑΙΣΙΑ

2.1 Συστήματα αξόνων χωρικού πλαισίου

Ως καθολικό σύστημα αξόνων για το σύνολο του χωρικού πλαισίου επιλέγεται το δεξιόστροφο σύστημα αξόνων $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ σύμφωνα με το οποίο θα γίνει η ανάλυση του φορέα και ο υπολογισμός τόσο των κινηματικών μεγεθών των κόμβων του όσο και των αντιδράσεων των στηρίξεών του. Επίσης για να γίνει ο ορισμός των εσωτερικών εντατικών και των κινηματικών μεγεθών των μελών εισάγεται τοπικό σύστημα αναφοράς $Ox_1x_2x_3$ για όλα τα στοιχεία (δοκοί και υποστυλώματα) που συνθέτουν το χωρικό πλαίσιο. Για τον καθορισμό του συστήματος αυτού σε κάθε μέλος ορίζεται ο άξονας x_1 ο οποίος έχει διεύθυνση τη διεύθυνση του μέλους και φορά από τον κόμβο με τον μικρότερο προς τον κόμβο με τον μεγαλύτερο αύξοντα αριθμό. Στην συνέχεια ως άξονες x_2 και x_3 ορίζονται οι κύριοι κεντροβαρικοί άξονες της διατομής, με μόνο περιορισμό όμως το τοπικό σύστημα αναφοράς $Ox_1x_2x_3$ να είναι το δεξιόστροφο σύστημα αξόνων.

2.2 Αρίθμηση μελών και κόμβων χωρικού πλαισίου

Σημαντικό παράγοντα για την ανάλυση του χωρικού πλαισίου συνιστά η αρίθμηση των κόμβων και των μελών του. Σε αυτό το σημείο δεν πρέπει να ξεχάσουμε να προσθέσουμε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των διατομών που θα μας φανούν χρήσιμα στον υπολογισμό του εμβαδού των διατομών και των ροπών αδράνειας τους

Επόμενο βήμα, μετά την αρίθμηση των κόμβων και των μελών και τον ορισμό των αξόνων (τοπικών και καθολικών), αποτελεί η εύρεση των συντεταγμένων αλλά και η συνδεσιμότητα των κόμβων. Ο συνδυασμός των δύο τελευταίων μας βοηθά επίσης και στον υπολογισμό του μήκους κάθε μέλους. Επιπλέον σημαντικός παράγοντας για τους υπολογισμούς είναι και ο σωστός προσδιορισμός των φορτίων (είτε συγκεντρωμένων είτε κατανεμημένων).

Επιπρόσθετα, ορίζονται οι βαθμοί ελευθερίας κίνησης των κόμβων του. Γνωρίζοντας ότι ο κόμβος κάθε χωρικού πλαισίου διαθέτει 6 βαθμούς ελευθερίας κίνησης (3 μετατοπίσεις και 3 στροφές κατά τους άξονες) και λαμβάνοντας υπόψη ότι στο βήμα αυτό αμελείται ο τρόπος στήριξης του, οι βαθμοί ελευθερίας κίνησης του φορέα είναι $6N$, όπου N ο αριθμός των κόμβων του πλαισίου. Οι βαθμοί ελευθερίας κίνησης των κόμβων ορίζονται στο καθολικό σύστημα αξόνων και παράλληλα η αρίθμηση τους γίνεται κατά αύξουσα σειρά κόμβων.[2]

2.3 Στηρίξεις χωρικού πλαισίου

Οι στηρίξεις του χωρικού πλαισίου βρίσκονται στα άκρα των υποστυλωμάτων και των δοκών. Οι στηρίξεις που βρίσκονται στα θεμέλια του ισογείου είναι κατά κύριο λόγο πακτωμένες, δηλαδή δεν μπορούν ούτε να μετακινηθούν ούτε να στραφούν. Εμείς επειδή θα δώσουμε βάση στο σκυρόδεμα, τα προαναφερθέντα μας αφορούν αλλά αξίζει να σημειωθεί ότι σε περίπτωση επεξεργασίας μεταλλικής κατασκευής θα μπορούσαμε να έχουμε αρθρώσεις αντί για πακτώσεις οι οποίες επιτρέπουν μια μερική μετακίνηση.

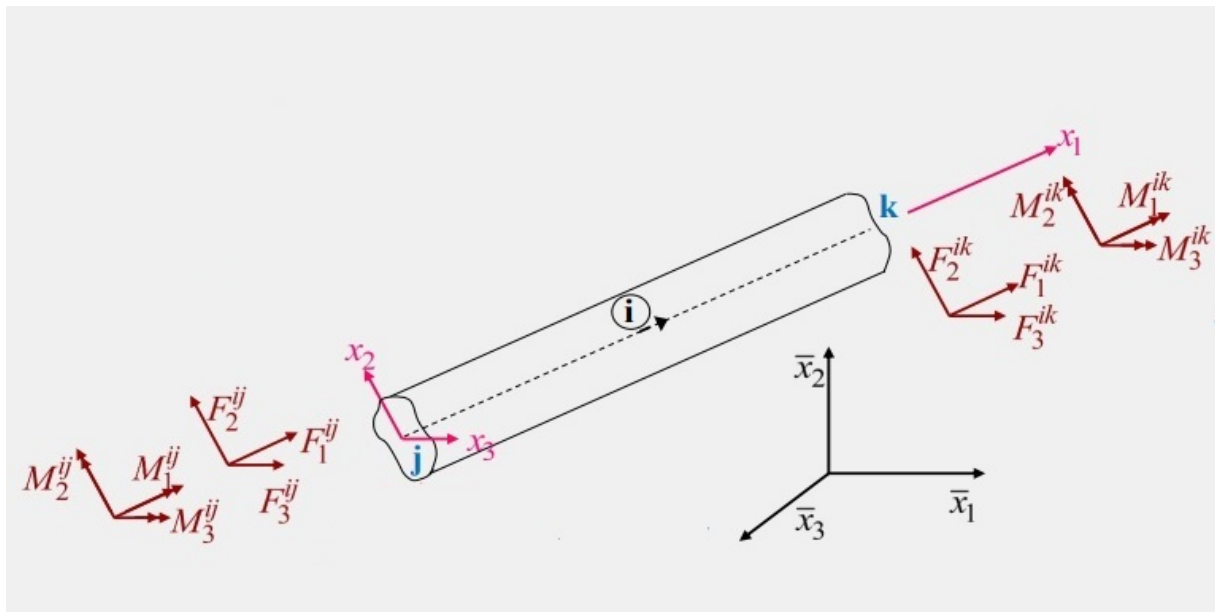
ΑΚΡΑΙΑ ΕΝΤΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΑΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΔΟΚΟΥ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

3.1 Ακραία εντατικά μεγέθη δοκού στο χώρο

Μια δοκός στον χώρο καταπονείται σε 6 δυνάμεις, 2 αξονικές και 4 τέμνουσες αλλά και σε 6 ροπές, 2 στρεπτικές και 4 καμπτικές.

3.2 Μητρώο ακραίων δράσεων δοκού στο τοπικό σύστημα αξόνων

Στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 3.1) βλέπουμε τυπικό μέλος i χωρικού πλαισίου και παρουσιάζονται οι συνιστώσες των ακραίων δράσεων στο τοπικό σύστημα αξόνων. Οι αξονικές δράσεις F_1^{ij}, F_1^{ik} πλαισιώνονται από τις τέμνουσες δυνάμεις $F_2^{ij}, F_2^{ik}, F_3^{ij}, F_3^{ik}$ και τις καμπτικές ροπές $M_2^{ij}, M_2^{ik}, M_3^{ij}, M_3^{ik}$ κατά τους τοπικούς άξονες x_2, x_3 και συμπληρώνονται από τις στρεπτικές ροπές M_1^{ij}, M_1^{ik} κατά των άξονα x_1 .



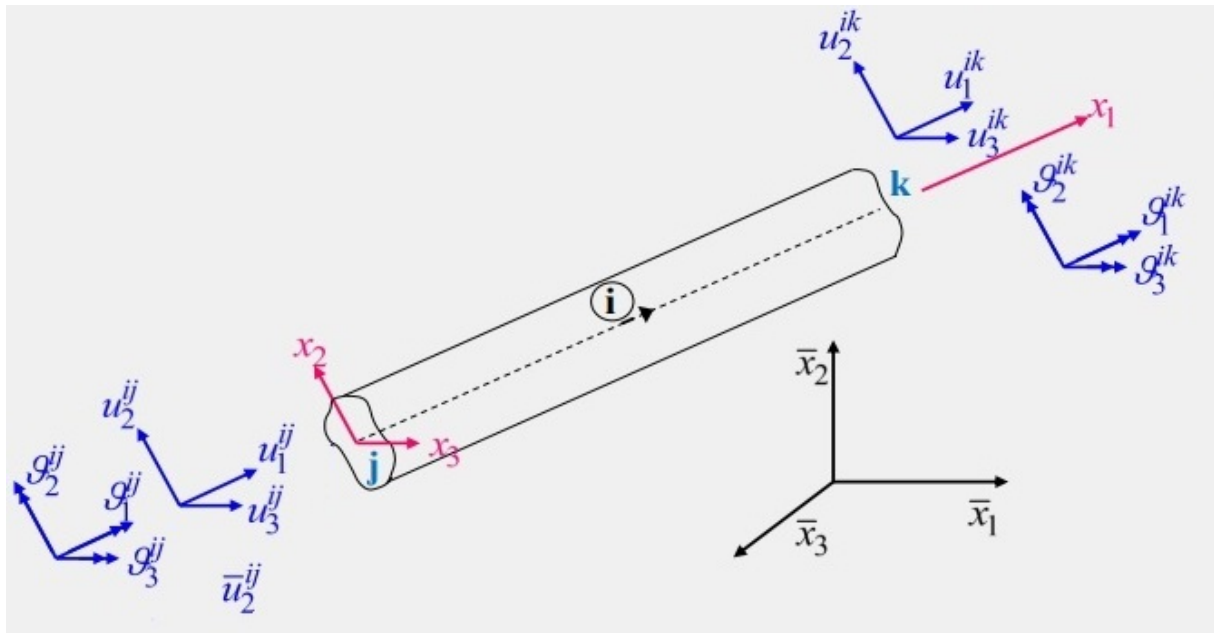
Σχήμα 3.1 Ακραίες δράσεις τυπικού χωρικού πλαισίου (τοπικοί άξονες)

3.3 Ακραία παραμορφωσιακά μεγέθη δοκού στο χώρο

Μια δοκός στον χώρο παραμορφώνεται σε 6 μετατοπίσεις, 2 αξονικές και 4 εγκάρσιες αλλά και σε 6 στρεπτικές, 2 στρεπτικές και 4 καμπτικές.

3.4 Μητρώο ακραίων μετακινήσεων δοκού στο τοπικό σύστημα αξόνων

Στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα) βλέπουμε τυπικό μέλος i χωρικού πλαισίου και παρουσιάζονται οι συνιστώσες των μετακινήσεων στο τοπικό σύστημα αξόνων. Αποτελούνται από δύο αξονικές u_1^{ij}, u_1^{ik} και τέσσερις εγκάρσιες μετατοπίσεις $u_2^{ij}, u_2^{ik}, u_3^{ij}, u_3^{ik}$, τέσσερις καμπτικές $\theta_2^{ij}, \theta_2^{ik}, \theta_3^{ij}, \theta_3^{ik}$ και δύο στρεπτικές $\theta_1^{ij}, \theta_1^{ik}$ ροπές. Ακόμα στο συγκεκριμένο σχήμα βλέπουμε το καθολικό σύστημα αξόνων όπως και το τοπικό αλλά και τον κόμβο αρχής j (κόμβος με μικρότερο αύξοντα αριθμό) και τον κόμβο πέρας k (κόμβος με μεγαλύτερο αύξοντα αριθμό). [3]

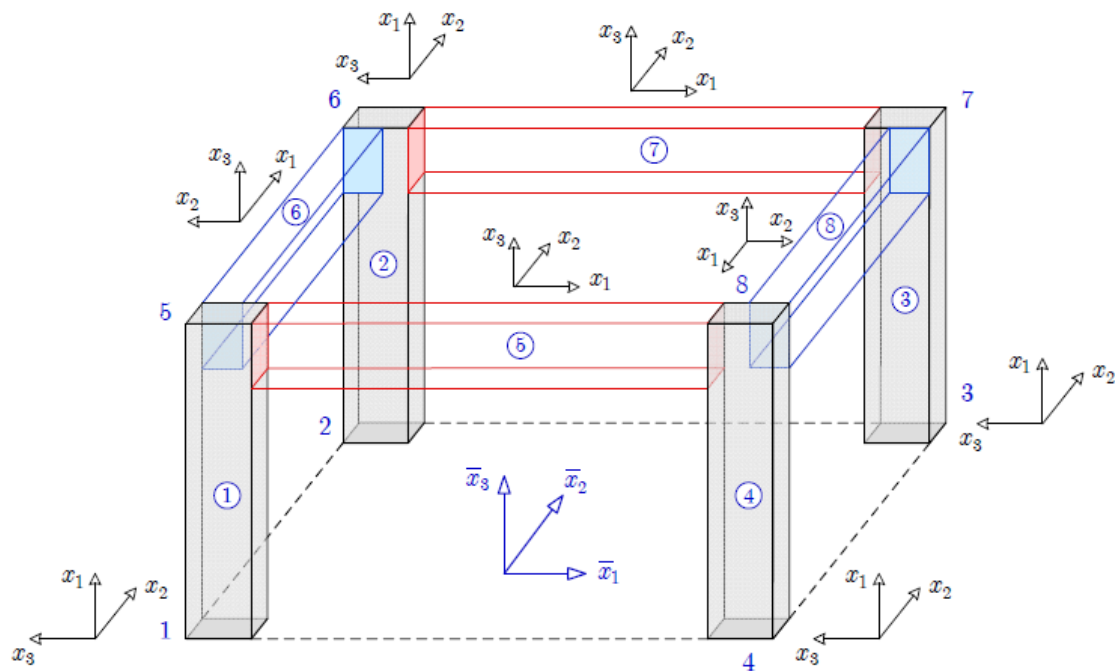


Σχήμα 3.2 Ακραίες μετακινήσεις τυπικού χωρικού πλαισίου (τοπικοί άξονες)

ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΔΟΚΟΥ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

4.1 Μητρώο μετασχηματισμού μελών χωρικού πλαισίου

Το μητρώο μετασχηματισμού $[\Lambda_{SF}^i]$ του στοιχείου i χωρικού πλαισίου εκφράζεται συναρτήσει ενός βασικού μητρώου περιστροφής $[\Lambda_S]$. Σκοπός είναι ο υπολογισμός του μητρώου περιστροφής $[\Lambda_S]$ με δεδομένα τα οποία καθορίζουν τον προσανατολισμό του στοιχείου i ως προς το καθολικό σύστημα συντεταγμένων. Τα δεδομένα αυτά είναι οι καθολικές συντεταγμένες των κόμβων του κάθε στοιχείου, οι οποίες προσδιορίζονται από τη γεωμετρία του φορέα και την κλίση του τοπικού επιπέδου x_1, x_2 ως προς το καθολικό επίπεδο $\bar{x}_1\bar{x}_3$. Το μητρώο περιστροφής $[\Lambda_S]$ καθορίζεται από τρεις διαδοχικές περιστροφές του καθολικού συστήματος αξόνων, οι οποίες είναι τέτοιες ώστε αυτό να συμπίσει με το τοπικό σύστημα αξόνων.



Σχήμα 4.1. Τυπικό χωρικό πλαίσιο άξονες προσανατολισμού (καθολικός και τοπικοί)

Για να κατασκευάσουμε σωστά τα μητρώα περιστροφής Λ για κάθε μέλος του χωρικού πλαισίου θα πρέπει να λάβουμε υπόψη το πώς βρίσκονται οι τοπικοί άξονες των μελών σε σχέση με τον καθολικό άξονα, αλλά και τον κόμβο αρχής και τέλους, δηλαδή τον προσανατολισμό του μέλους.

Στο παραπάνω σχήμα (Σχήμα 3) διακρίνουμε τέσσερα διαφορετικά μητρώα περιστροφής σύμφωνα με αυτά που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Για να δομηθεί το μητρώο περιστροφής Λ θα πρέπει ο καθολικός άξονας μέσω των περιστρόφων του να συμπέσει με τους τοπικούς άξονες κάθε μέλους.

Τα μέλη 1,2,3 και 4 θα έχουν το ίδιο μητρώο περιστροφής το οποίο κατασκευάζεται με την εξής λογική: ο καθολικός άξονας \bar{x}_1 θα πρέπει να περιστραφεί κατά τον τοπικό άξονα x_2 , ο καθολικός άξονας \bar{x}_2 δεν θα περιστραφεί ενώ ο καθολικός άξονας \bar{x}_3 θα περιστραφεί αντίθετα του x_1 . Στην συνέχεια για το μέλος 6 ο καθολικός άξονας \bar{x}_3 παραμένει στην ίδια θέση, ο καθολικός άξονας \bar{x}_1 στρέφεται κατά τον τοπικό άξονα x_2 ενώ ο καθολικός άξονας \bar{x}_2 θα στραφεί αντίθετα του τοπικού x_1 . Τέλος τα μέλη 5 και 7 στην συγκεκριμένη περίπτωση

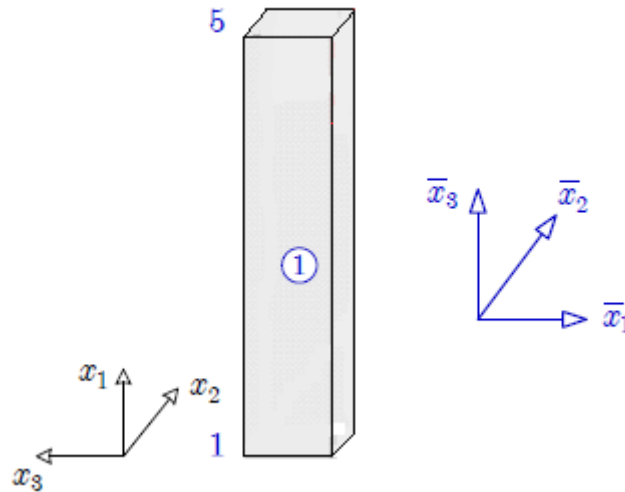
δεν δέχονται κάποια περιστροφή ενώ για το μέλος 8 ακολουθείτε η ακριβώς αντιθέτη διαδικασία από ότι ακολουθήθηκε για το μέλος 6.

$$[\Lambda_{SF}] = \begin{bmatrix} [\Lambda_{SF}^{ij}] & [0] \\ [0] & [\Lambda_{SF}^{ik}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Lambda_{SF}^{ij}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\Lambda_{SF}^{ij}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\Lambda_{SF}^{ik}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\Lambda_{SF}^{ik}] \end{bmatrix}$$

όπου $[\Lambda_{SF}^{ij}]$ και $[\Lambda_{SF}^{ik}]$ τα βασικά μητρώα περιστροφής άκρα i και j του μέλους

$$\begin{aligned} [\Lambda_{SF_1}^{ij}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & [\Lambda_{SF_1}^{jk}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [\Lambda_{SF_6}^{ij}] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & [\Lambda_{SF_6}^{jk}] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [\Lambda_{SF_7}^{ij}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & [\Lambda_{SF_7}^{jk}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [\Lambda_{SF_8}^{ij}] &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & [\Lambda_{SF_8}^{jk}] &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Παρακάτω παρουσιάζεται ενδεικτικό μέλος χωρικού πλαισίου παρουσία και του τοπικού και του καθολικού συστήματος αξόνων και στην συνέχεια ακολουθεί το μητρώο περιστροφής του .



Σχήμα 4.2. Τυπικό μέλος πλαισίου παρουσία του τοπικού και καθολικού άξονα.

$$[\Lambda_{SF}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

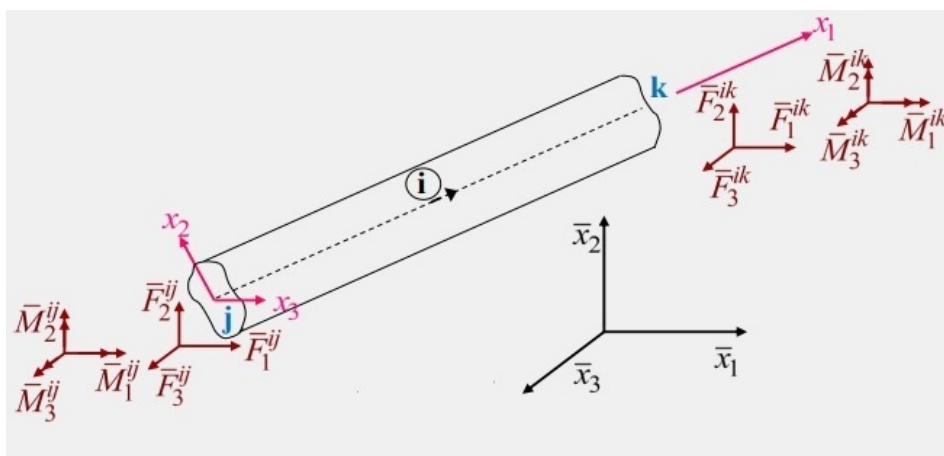
Πίνακας 4.1. Μητρώο περιστροφής μέλους

4.2 Ακραίες δράσεις δοκού στο καθολικό σύστημα αξόνων

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε τις ακραίες δράσεις και τις ακραίες μετακινήσεις μέλους χωρικού πλαισίου στο τοπικό σύστημα αξόνων. Οι συνιστώσες των ακραίων δράσεων ή των ακραίων μετακινήσεων στο καθολικό σύστημα αξόνων δεν είναι ανεξάρτητες από αυτές του τοπικού συστήματος αξόνων, αλλά συνδέονται μεταξύ τους και μπορούν να προκύψουν η μία

από την άλλη και αντίστροφα, από μετασχηματισμό των διανυσμάτων από το ένα σύστημα αξόνων στο άλλο.

Στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα) βλέπουμε τυπικό μέλος i χωρικού πλαισίου και παρουσιάζονται οι συνιστώσες των ακραίων δράσεων στο καθολικό σύστημα αξόνων. Οι αξονικές δράσεις $\bar{F}_1^{ij}, \bar{F}_1^{ik}$ πλαισιώνονται από τις τέμνουσες δυνάμεις $\bar{F}_2^{ij}, \bar{F}_2^{ik}, \bar{F}_3^{ij}, \bar{F}_3^{ik}$ και τις καμπτικές ροπές $\bar{M}_2^{ij}, \bar{M}_2^{ik}, \bar{M}_3^{ij}, \bar{M}_3^{ik}$ κατά τους τοπικούς άξονες \bar{x}_2, \bar{x}_3 και συμπληρώνονται από τις στρεπτικές ροπές $\bar{M}_1^{ij}, \bar{M}_1^{ik}$ κατά των άξονα \bar{x}_1 .



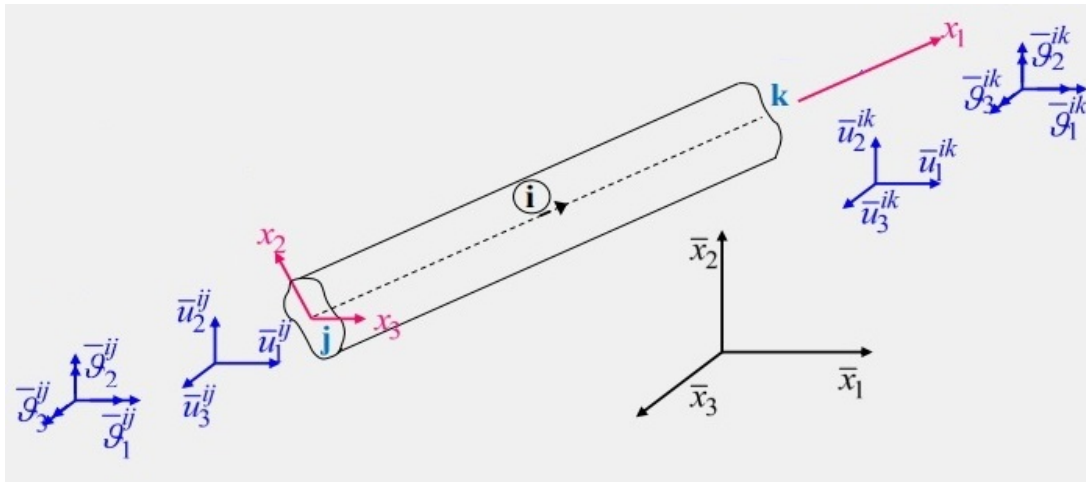
Σχήμα 4.3. Ακραίες δράσεις τυπικού χωρικού πλαισίου (καθολικοί άξονες)

4.3 Ακραίες μετατοπίσεις δοκού στο καθολικό σύστημα αξόνων

Στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα) βλέπουμε τυπικό μέλος i χωρικού πλαισίου και παρουσιάζονται οι συνιστώσες των μετακινήσεων στο καθολικό σύστημα αξόνων.

Αποτελούνται από δύο αξονικές u_1^{ij}, u_1^{ik} και τέσσερις εγκάρσιες μετατοπίσεις $u_2^{ij}, u_2^{ik}, u_3^{ij}, u_3^{ik}$, τέσσερις καμπτικές $\theta_2^{ij}, \theta_2^{ik}, \theta_3^{ij}, \theta_3^{ik}$ και δύο στρεπτικές $\theta_1^{ij}, \theta_1^{ik}$ ροπές.

Ακόμα στο συγκεκριμένο σχήμα βλέπουμε το καθολικό σύστημα αξόνων και τον κόμβο αρχής j (κόμβος με μικρότερο άξοντα αριθμό) και τον κόμβο πέρας k (κόμβος με μεγαλύτερο άξοντα αριθμό). [3]



Σχήμα 4.4. Ακραίες μετακινήσεις τυπικού χωρικού πλαισίου (καθολικοί άξονες)

ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΔΟΚΟΥ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

5.1 Μόρφωση του μητρώου στιβαρότητας δοκού στο χώρο

Προηγουμένως παρουσιάστηκαν τα τοπικά διανύσματα ακραίων δράσεων και ακραίων μετακινήσεων μέλους χωρικού πλαισίου. Οι συνιστώσες των διανυσμάτων αυτών συνδέονται μεταξύ τους με μια τοπική σχέση στιβαρότητας. Λαμβάνοντας υπόψη την θεώρηση των μικρών μετακινήσεων, οι αξονικές δυνάμεις που ασκούνται στα άκρα του στοιχείου παράγουν μόνο αξονικές μετατοπίσεις, ενώ οι στρεπτικές ροπές που ασκούνται στα άκρα του στοιχείου στρέφουν μόνο τις διατομές κατά τον άξονα x_1 . Επιπλέον οι ακραίες εγκάρσιες δυνάμεις και οι καμπτικές ροπές δεν παράγουν αξονικές ή στρεπτικές μετακινήσεις.

5.2 Μητρώο στιβαρότητας δοκού στο τοπικό σύστημα αξόνων

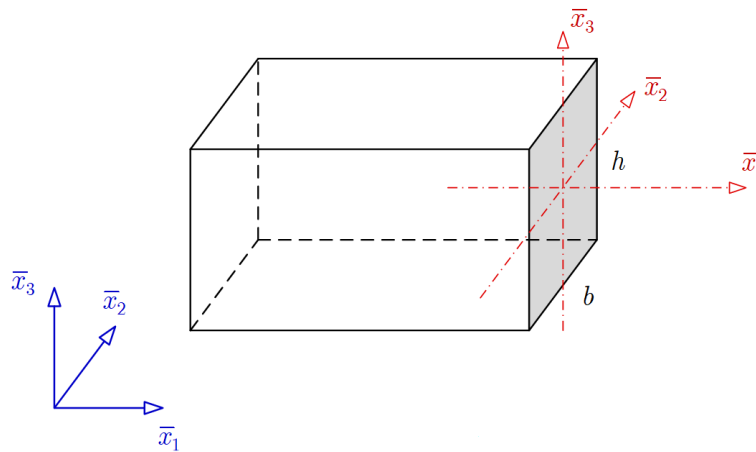
Προκειμένου να κατασκευαστεί το μητρώο στιβαρότητας K για το τοπικό σύστημα αξόνων θα πρέπει προηγουμένως να έχουμε ορίσει κάποια δεδομένα που θα μας είναι χρήσιμα για την κατασκευή του μητρώου, τα οποία είναι τα εξής :

- Μέτρο ελαστικότητας: E
- Μέτρο διάτμησης: G
- Μήκος στοιχείου: L
- Εμβαδόν διατομής στοιχείου: A

- Ροπές αδράνειας: I_1, I_2, I_3 (όπως φαίνονται στο σχήμα 3)

$$I_1 = hb^3 \left[\frac{1}{3} - 0.21 \frac{b}{h} \left(1 - \frac{b^4}{12h^4} \right) \right]$$

$$I_2 = \frac{bh^3}{12}, I_3 = \frac{b^3h}{12}$$



Σχήμα 5.1. Ροπές αδράνειας τυπικού στοιχείου

Έχοντας ορίσει αυτά τα στοιχεία μπορούμε εύκολα να συνθέσουμε το τοπικό μητρώο στιβαρότητας K , το οποίο φαίνεται στον πίνακα 2.

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_3}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_3}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_3}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_3}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_2}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_2}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_2}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_2}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_2}{L^2} & 0 & \frac{4EI_2}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_2}{L^2} & 0 & \frac{2EI_2}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_3}{L} & 0 & -\frac{6EI_3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_3}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_3}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_3}{L^2} & 0 & \frac{12EI_3}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_3}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_2}{L^3} & 0 & \frac{6EI_2}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_2}{L^3} & 0 & \frac{6EI_2}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_2}{L^2} & 0 & \frac{2EI_2}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_2}{L^2} & 0 & \frac{4EI_2}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_3}{L} & 0 & -\frac{6EI_3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_3}{L} \end{bmatrix}$$

Πίνακας 5.1. Τοπικό μητρώο στιβαρότητας K

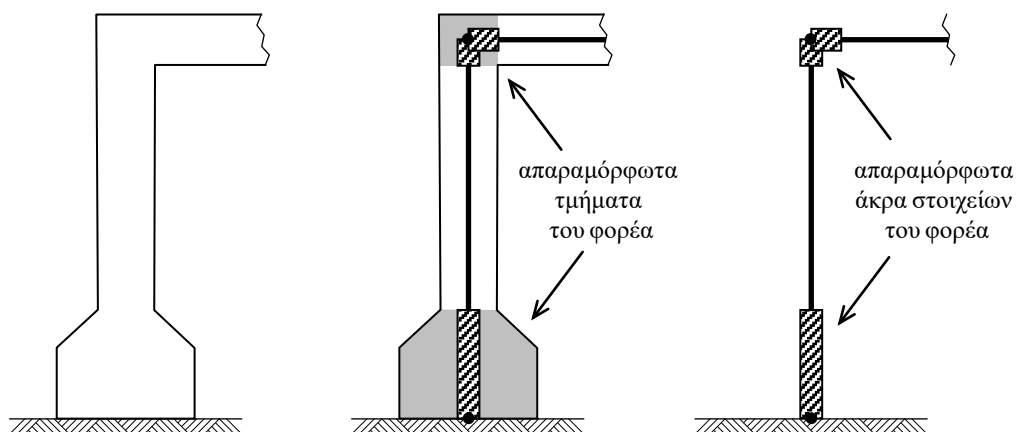
5.3 Μητρώο στιβαρότητας δοκού στο καθολικό σύστημα αξόνων

Προκειμένου να κατασκευαστεί το μητρώο στιβαρότητας K' για το καθολικό σύστημα αξόνων θα χρησιμοποιηθούν μητρώα τα οποία τα έχουμε ήδη δει στις προηγούμενες ενότητες και τα οποία είναι το μητρώο μετασχηματισμού Λ και το μητρώο στιβαρότητας K στο τοπικό σύστημα αξόνων. Αυτά τα μητρώα συνδέονται με την παρακάτω σχέση και μέσω της συνδέσεις αυτής προκύπτει το μητρώο στιβαρότητας K' στο καθολικό σύστημα αξόνων,

$$[K'] = [\Lambda] \times [K] \times [\Lambda^T]$$

ΣΤΕΡΕΟΙ ΚΟΜΒΟΙ ΣΕ ΧΩΡΙΚΑ ΠΛΑΙΣΙΑ

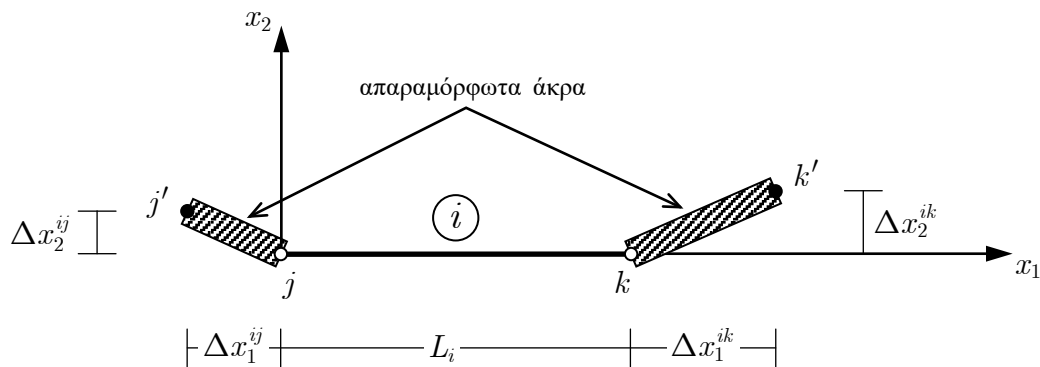
Οι πλαισιωτοί φορείς παρουσιάζουν πολλές φορές, λόγω του τρόπου κατασκευής τους αλλά και λόγω της σχεδίασης του όλου φορέα, τμήματα στην αρχή των επιμέρους δοκών και στοιχείων τα οποία είναι πρακτικά απαραμόρφωτα. Τέτοια στοιχεία είναι τα θεμέλια στη βάση των υποστυλωμάτων καθώς και οι κόμβοι σύνδεσης δοκών μεταξύ τους αλλά και δοκών με υποστυλώματα. Το χαρακτηριστικό αυτό οφείλεται κυρίως στο τρόπο κατασκευής και ενίσχυσης των συγκεκριμένων περιοχών μιας κατασκευής (αυξημένος οπλισμός ή διαστάσεις διατομής).



Σχήμα 6.1. Ενσωμάτωση απαραμόρφωτων τμημάτων σε στοιχεία πλαισίου.

Τα απαραμόρφωτα στοιχεία είναι πεπερασμένου μήκους και θα μπορούσαν να θεωρηθούν ανεξάρτητα και αυτόνομα στοιχεία με άπειρη ροπή αδράνειας ($I \rightarrow \infty$) και αντίσταση σε αξονική παραμόρφωση. Είναι δυνατόν όμως να ενταχθούν στα υπάρχοντα εύκαμπτα στοιχεία και έτσι να μορφωθεί ένα νέο στοιχείο με ακραία εντατικά μεγέθη, ακραίες παραμορφώσεις και μητρώο ακαμψίας στο τοπικό σύστημα, τα οποία να λαμβάνουν υπόψη τους την παρουσία των απαραμόρφωτων τμημάτων στα άκρα του τυπικού στοιχείου (Σχήμα 6.1).

Εξετάζεται ένα τυπικό στοιχείο δοκού i (Σχήμα 6.2) το οποίο στα άκρα του j και k φέρει απαραμόρφωτα τμήματα σε τυχαίες διευθύνσεις. Τοπικοί άξονες θεωρούνται αυτοί του εύκαμπτου τμήματος του στοιχείου με φορά του x_1 από το άκρο j προς το άκρο k , το δε μήκος L_i του στοιχείου υπολογίζεται από το άκρο j έως το άκρο k . Η γεωμετρία των ακραίων απαραμόρφωτων τμημάτων στις τρεις διαστάσεις δίνεται μέσω των προβολών τους στους τοπικούς άξονες, δηλαδή από τα Δx_1^{ij} , Δx_2^{ij} και Δx_3^{ij} στο άκρο j και από τα Δx_1^{ik} , Δx_2^{ik} και Δx_3^{ik} στο άκρο k , όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.2 (για δύο διαστάσεις). Τα νέα άκρα του στοιχείου i θα είναι πλέον αυτά των απαραμόρφωτων τμημάτων και συμβολίζονται με j' και k' , αντιστοίχως. Οι παραμορφώσεις και τα εντατικά μεγέθη στα άκρα των απαραμόρφωτων τμημάτων συμβολίζονται με τόνο.



Σχήμα 6.2. Τυπικό στοιχείο δοκού με απαραμόρφωτα ακραία τμήματα.

6.1 Ακραίες μετατοπίσεις

Οι μετατοπίσεις του κόμβου k' συνδέονται με αυτές του k διότι αυτές προκύπτουν από την ολόσωμη μετακίνηση του απαραμόρφωτου άκρου κατά u_m^{ik} στη διεύθυνση x_m ($m = 1, 2, 3$), και στροφές του κατά θ_m^{ik} ($m = 1, 2, 3$) περί τον κόμβο k . Για μικρές τιμές των τριών

στροφών το άκρο k' θα κινηθεί σε διεύθυνση κάθετη προς το απαραμόρφωτο τμήμα. Οι συνιστώσες της συνολικής μετατόπισης του άκρου k' σε τρεις διαστάσεις θα είναι

$$\begin{aligned} \vec{u}' &= \vec{u} + \vec{\theta} \times \Delta \vec{x}^{ik} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1'^{ik} \\ u_2'^{ik} \\ u_3'^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \\ u_3^{ik} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_1^{ik} \\ \theta_2^{ik} \\ \theta_3^{ik} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta x_1^{ik} \\ \Delta x_2^{ik} \\ \Delta x_3^{ik} \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} u_1'^{ik} \\ u_2'^{ik} \\ u_3'^{ik} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \\ u_3^{ik} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}}_1 & \hat{\mathbf{i}}_2 & \hat{\mathbf{i}}_3 \\ \theta_1^{ik} & \theta_2^{ik} & \theta_3^{ik} \\ \Delta x_1^{ik} & \Delta x_2^{ik} & \Delta x_3^{ik} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1'^{ik} \\ u_2'^{ik} \\ u_3'^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \\ u_3^{ik} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_2^{ik} \Delta x_3^{ik} - \theta_3^{ik} \Delta x_2^{ik} \\ -\theta_1^{ik} \Delta x_3^{ik} + \Delta x_1^{ik} \theta_3^{ik} \\ \theta_1^{ik} \Delta x_2^{ik} - \theta_2^{ik} \Delta x_1^{ik} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Εάν οι αρχικές εκφράσεις της εξίσωσης (6.1) γραφούν με τέτοιο τρόπο ώστε οι μετατοπίσεις του κόμβου k να δίδονται σαν συνάρτηση αυτών του κόμβου k' , τότε θα είναι

$$\begin{bmatrix} u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \\ u_3^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1'^{ik} \\ u_2'^{ik} \\ u_3'^{ik} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta_2^{ik} \Delta x_3^{ik} - \theta_3^{ik} \Delta x_2^{ik} \\ -\theta_1^{ik} \Delta x_3^{ik} + \Delta x_1^{ik} \theta_3^{ik} \\ \theta_1^{ik} \Delta x_2^{ik} - \theta_2^{ik} \Delta x_1^{ik} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \\ u_3^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1'^{ik} \\ u_2'^{ik} \\ u_3'^{ik} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta_2'^{ik} \Delta x_3^{ik} - \theta_3'^{ik} \Delta x_2^{ik} \\ -\theta_1'^{ik} \Delta x_3^{ik} + \Delta x_1^{ik} \theta_3'^{ik} \\ \theta_1'^{ik} \Delta x_2^{ik} - \theta_2'^{ik} \Delta x_1^{ik} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

όπου

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}' \Rightarrow \begin{bmatrix} \theta_1^{ik} \\ \theta_2^{ik} \\ \theta_3^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1'^{ik} \\ \theta_2'^{ik} \\ \theta_3'^{ik} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Επομένως, οι ακραίες μετατοπίσεις $[D^{ik}]$ του κόμβου k μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των ακραίων μετατοπίσεων $[D'^{ik}]$ του άκρου k' ως

$$\begin{bmatrix} u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \\ u_3^{ik} \\ \theta_1^{ik} \\ \theta_2^{ik} \\ \theta_3^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\Delta x_3^{ik} & \Delta x_2^{ik} \\ 0 & 1 & 0 & \Delta x_3^{ik} & 0 & -\Delta x_1^{ik} \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta x_2^{ik} & \Delta x_1^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'^{ik} \\ u_2'^{ik} \\ u_3'^{ik} \\ \theta_1'^{ik} \\ \theta_2'^{ik} \\ \theta_3'^{ik} \end{bmatrix} \Rightarrow [D^{ik}] = [e^{ik}] [D'^{ik}] \quad (6.4)$$

και αντιστοίχως

$$\begin{bmatrix} u_1'^{ik} \\ u_2'^{ik} \\ u_3'^{ik} \\ \theta_1'^{ik} \\ \theta_2'^{ik} \\ \theta_3'^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta x_3^{ik} & -\Delta x_2^{ik} \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta x_3^{ik} & 0 & \Delta x_1^{ik} \\ 0 & 0 & 1 & \Delta x_2^{ik} & -\Delta x_1^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \\ u_3^{ik} \\ \theta_1^{ik} \\ \theta_2^{ik} \\ \theta_3^{ik} \end{bmatrix} \Rightarrow [D'^{ik}] = [e^{ik}]^{-1} [D^{ik}] \quad (6.5)$$

όπου το μητρώο $[e^{ik}]$ ονομάζεται *μητρώο εκκεντρότητας* στο άκρο k του στοιχείου i και είναι

$$[e^{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\Delta x_3^{ik} & \Delta x_2^{ik} \\ 0 & 1 & 0 & \Delta x_3^{ik} & 0 & -\Delta x_1^{ik} \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta x_2^{ik} & \Delta x_1^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Στο άλλο άκρο j του στοιχείου δοκού προκύπτει με όμοιο τρόπο $[D^{ij}] = [e^{ij}][D'^{ij}]$.

Συνολικά, για τις ακραίες μετατοπίσεις του στοιχείου στα άκρα j και k του εύκαμπτου τμήματος θα είναι

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [D^{ij}] \\ [D^{ik}] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [e^{ij}] \\ [e^{ik}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [D'^{ij}] \\ [D'^{ik}] \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} [D^{ij}] \\ [D^{ik}] \end{bmatrix}_{12 \times 1} = \begin{bmatrix} [e^{ij}] & [0] \\ [0] & [e^{ik}] \end{bmatrix}_{12 \times 12} \begin{bmatrix} [D'^{ij}] \\ [D'^{ik}] \end{bmatrix}_{12 \times 1} \\ &\Rightarrow [D^i] = [e^i][D'^i] \end{aligned} \quad (6.7)$$

όπου το *μητρώο εκκεντρότητας* του στοιχείου i δίνεται ως

$$[e^i] = \begin{bmatrix} [e^{ij}] & [0] \\ [0] & [e^{ik}] \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad (6.8)$$

Οι σχέσεις που δίδουν τις ακραίες μετατοπίσεις στους κόμβους j' και k' των απαραμόρφωτων τμημάτων συναρτήσει αυτών στους κόμβους j και k , προκύπτουν από την εξίσωση (6.5). Στο άλλο άκρο j' του στοιχείου θα είναι $[D'^{ij}] = [e^{ij}]^{-1}[D^{ij}]$.

Τελικά, για τις μετατοπίσεις του στοιχείου στα άκρα j' και k' θα ισχύει

$$\begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c} D'^{ij} \\ D'^{ik} \end{array} \right]_{12 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [e^{ij}]^{-1} & [0] \\ [0] & [e^{ik}]^{-1} \end{bmatrix}_{12 \times 12} \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c} D^{ij} \\ D^{ik} \end{array} \right]_{12 \times 1} \end{bmatrix} \Rightarrow [D'^i] = [e^i]^{-1} [D^i] \quad (6.9)$$

6.2 Ακραίες δράσεις

Οι ακραίες δράσεις στα σημεία k και k' του απαραμόρφωτου τμήματος φαίνονται στο Σχήμα 6.3 (για δύο διαστάσεις). Τα εντατικά μεγέθη στον κόμβο k' συνδέονται με αυτά στον κόμβο k μέσω των εξισώσεων ισορροπίας του απαραμόρφωτου τμήματος του άκρου k . Οι ακραίες δράσεις του άκρου k' θα είναι

$$\vec{F}' = \vec{F} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_1'^{ik} \\ F_2'^{ik} \\ F_3'^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \\ F_3^{ik} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

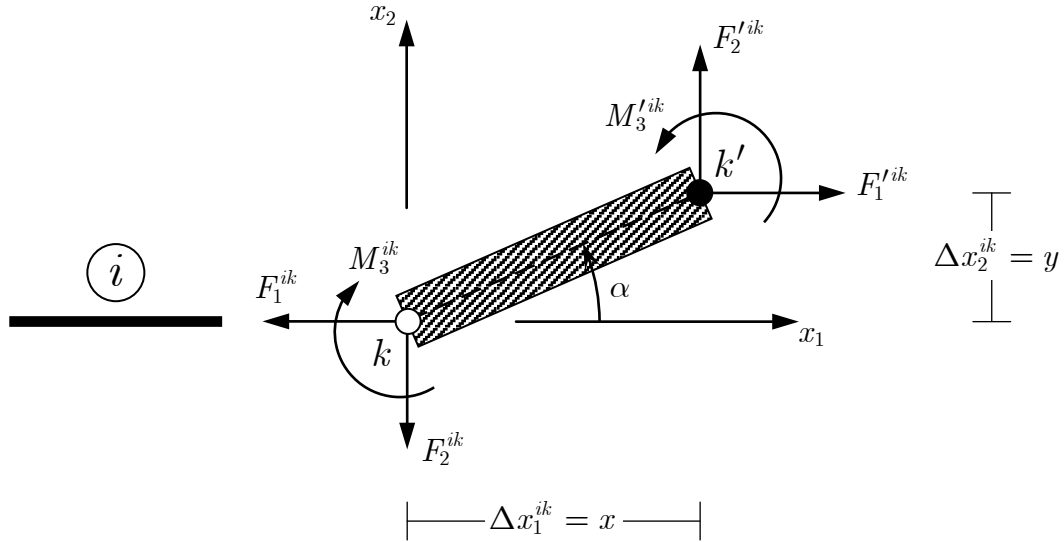
Η ροπή της δύναμης στο k' υπολογίζεται μέσω του διανύσματος θέσης από το k' προς το k , το οποίο είναι $(-\Delta \vec{x}^{ik})$. Συνεπώς,

$$\vec{M}' = \vec{M} + (-\Delta \vec{x}^{ik}) \times \vec{F}' \Rightarrow \begin{bmatrix} M_1'^{ik} \\ M_2'^{ik} \\ M_3'^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1^{ik} \\ M_2^{ik} \\ M_3^{ik} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta x_1^{ik} \\ \Delta x_2^{ik} \\ \Delta x_3^{ik} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \\ F_3^{ik} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} M_1'^{ik} \\ M_2'^{ik} \\ M_3'^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1^{ik} \\ M_2^{ik} \\ M_3^{ik} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}}_1 & \hat{\mathbf{i}}_2 & \hat{\mathbf{i}}_3 \\ \Delta x_1^{ik} & \Delta x_2^{ik} & \Delta x_3^{ik} \\ F_1^{ik} & F_2^{ik} & F_3^{ik} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} M_1'^{ik} \\ M_2'^{ik} \\ M_3'^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1^{ik} \\ M_2^{ik} \\ M_3^{ik} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_3^{ik} F_2^{ik} - \Delta x_2^{ik} F_3^{ik} \\ \Delta x_1^{ik} F_3^{ik} - \Delta x_3^{ik} F_1^{ik} \\ \Delta x_2^{ik} F_1^{ik} - \Delta x_1^{ik} F_2^{ik} \end{bmatrix}$$

και επομένως

$$\begin{bmatrix} F_1'^{ik} \\ F_2'^{ik} \\ F_3'^{ik} \\ M_1'^{ik} \\ M_2'^{ik} \\ M_3'^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta x_3^{ik} & -\Delta x_2^{ik} & 1 & 0 & 0 \\ -\Delta x_3^{ik} & 0 & \Delta x_1^{ik} & 0 & 1 & 0 \\ \Delta x_2^{ik} & -\Delta x_1^{ik} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \\ F_3^{ik} \\ M_1^{ik} \\ M_2^{ik} \\ M_3^{ik} \end{bmatrix} \Rightarrow [A'^{ik}] = [e^{ik}]^T [A^{ik}] \quad (6.11)$$



Σχήμα 6.3. Δράσεις στα άκρα k και k' του απαραμόρφωτου τμήματος.

Οι ακραίες δράσεις $[A'^{ik}]$ του κόμβου k' μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των ακραίων δράσεων $[A^{ik}]$ του άκρου k ως

$$[A'^{ik}] = [e^{ik}]^T [A^{ik}] \quad (6.12)$$

Οι αντίστροφες εκφράσεις, δηλαδή αυτές που δίνουν τις ακραίες δράσεις στον κόμβο k συναρτήσει αυτών του άκρου k' , εξάγονται και πάλι μέσω των εξισώσεων ισορροπίας όπως φαίνεται παρακάτω

$$\begin{bmatrix} M_1'^{ik} \\ M_2'^{ik} \\ M_3'^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1^{ik} \\ M_2^{ik} \\ M_3^{ik} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta x_1^{ik} \\ \Delta x_2^{ik} \\ \Delta x_3^{ik} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \\ F_3^{ik} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} M_1^{ik} \\ M_2^{ik} \\ M_3^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1'^{ik} \\ M_2'^{ik} \\ M_3'^{ik} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_1^{ik} \\ \Delta x_2^{ik} \\ \Delta x_3^{ik} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_1'^{ik} \\ F_2'^{ik} \\ F_3'^{ik} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} M_1^{ik} \\ M_2^{ik} \\ M_3^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1'^{ik} \\ M_2'^{ik} \\ M_3'^{ik} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_2^{ik} F_3'^{ik} - \Delta x_3^{ik} F_2'^{ik} \\ \Delta x_3^{ik} F_1'^{ik} - \Delta x_1^{ik} F_3'^{ik} \\ \Delta x_1^{ik} F_2'^{ik} - \Delta x_2^{ik} F_1'^{ik} \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \\ F_3^{ik} \\ M_1^{ik} \\ M_2^{ik} \\ M_3^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta x_3^{ik} & \Delta x_2^{ik} & 1 & 0 & 0 \\ \Delta x_3^{ik} & 0 & -\Delta x_1^{ik} & 0 & 1 & 0 \\ -\Delta x_2^{ik} & \Delta x_1^{ik} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1'^{ik} \\ F_2'^{ik} \\ F_3'^{ik} \\ M_1'^{ik} \\ M_2'^{ik} \\ M_3'^{ik} \end{bmatrix} \Rightarrow [A^{ik}] = \left([e^{ik}]^{-1} \right)^T [A'^{ik}] \quad (6.13)$$

για το οποίο ισχύει $\left([e^{ik}]^{-1} \right)^T = \left([e^{ik}]^T \right)^{-1}$.

Όμοιες είναι και οι εκφράσεις των ακραίων δράσεων στο άκρο j του στοιχείου i ,

$$[A'^{ij}] = [e^{ij}]^T [A^{ij}] \quad \text{και} \quad [A^{ij}] = \left([e^{ij}]^{-1} \right)^T [A'^{ij}] \quad (6.14)$$

στις οποίες το μητρώο εκκεντρότητας $[e^{ij}]$ στο άκρο j και το αντίστροφό του δίνονται από τις εξισώσεις (6.4) και (6.5), αντίστοιχα.

Συνολικά, για όλες τις δράσεις του στοιχείου i θα είναι

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} [A^{ij}] &= \left([e^{ij}]^{-1} \right)^T [A'^{ij}] \\ [A^{ik}] &= \left([e^{ik}]^{-1} \right)^T [A'^{ik}] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} [A^{ij}] \\ [A^{ik}] \end{bmatrix}_{12 \times 1} = \begin{bmatrix} [e^{ij}]^{-1} & [0] \\ [0] & [e^{ik}]^{-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [A'^{ij}] \\ [A'^{ik}] \end{bmatrix}_{12 \times 1} \\ & \Rightarrow [A^i] = \left([e^i]^{-1} \right)^T [A'^i] \end{aligned} \quad (6.15)$$

όπου ισχύει $\left([e^i]^{-1} \right)^T = \left([e^i]^T \right)^{-1}$ και το αντίστροφο του μητρώου εκκεντρότητας του στοιχείου i δίνεται ως

$$[e^i]^{-1} = \begin{bmatrix} [e^{ij}]^{-1} & [0] \\ [0] & [e^{ik}]^{-1} \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad (6.16)$$

και τα υπομητρώα του από την εξίσωση (6.5).

Οι δε ακραίες δράσεις του στοιχείου στα άκρα j' και k' θα δίνονται συναρτήσει των δράσεων στα άκρα j και k του εύκαμπτου τμήματος ως

$$\begin{bmatrix} A'^{ij} \\ A'^{ik} \end{bmatrix}_{12 \times 1} = \begin{bmatrix} e^{ij} & [0] \\ [0] & e^{ik} \end{bmatrix}_{12 \times 12}^T \begin{bmatrix} A^{ij} \\ A^{ik} \end{bmatrix}_{12 \times 1} \Rightarrow [A'^i] = [e^i]^T [A^i] \quad (6.17)$$

6.3 Μητρώο ακαμψίας στοιχείου με άκαμπτα άκρα

Με δεδομένο το μητρώο ακαμψίας $[K^i]$ του εύκαμπτου τμήματος του στοιχείου i στο τοπικό σύστημα αξόνων, υπολογίζεται το μητρώο $[K'^i]$ το οποίο συνδέει τις ακραίες μετατοπίσεις $[D'^i]$ στα άκρα j' και k' των απαραμόρφωτων τμημάτων με τις ακραίες δράσεις $[A'^i]$ στα ίδια σημεία. Το μητρώο ακαμψίας $[K^i]$ υπολογίζεται κατά τα γνωστά με βάση το μήκος L_i του εύκαμπτου τμήματος, το μέτρο ελαστικότητας E_i , τις ροπές αδράνειας I_i και το εμβαδόν της διατομής A_i . Η διαδικασία έχει ως ακολούθως,

$$\begin{aligned} [A^i] &= [K^i][D^i] \\ \text{εξ. (6.17): } [A'^i] &= [e^i]^T [A^i] \end{aligned} \Rightarrow [A'^i] = [e^i]^T [K^i][D^i] \quad (6.18)$$

και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (4), $[D^i] = [e^i][D'^i]$, προκύπτει τελικά

$$[A'^i] = [e^i]^T [K^i][e^i][D'^i] \quad \text{ή} \quad [A'^i] = [K'^i][D'^i] \quad (6.19)$$

όπου

$$[K'^i] = [e^i]^T [K^i][e^i] \quad (6.20)$$

το μητρώο ακαμψίας στοιχείου δοκού με απαραμόρφωτα άκρα στο τοπικό σύστημα αξόνων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου στο καθολικό σύστημα αξόνων προσδιορίζεται εφαρμόζοντας το μητρώο μετασχηματισμού επί του $[K'^i]$, δηλαδή

$$[\bar{K}^i] = [\Lambda_{PPF}^i]^T [K'^i][\Lambda_{PPF}^i] \quad (6.21)$$

και στη συνέχεια μορφώνεται το ολικό μητρώο ακαμψίας του φορέα χρησιμοποιώντας τα μητρώα ακαμψίας $[\bar{K}^i]$ της εξίσωσης (6.21) και συνδέοντας τα στοιχεία στα άκρα των απαραμόρφωτων τμημάτων των στοιχείων, δηλαδή στα σημεία j' και k' .

ΟΛΙΚΟ ΚΑΙ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

7.1 Μόρφωση του ολικού μητρώου στιβαρότητας του χωρικού πλαισίου

Μετά τον υπολογισμό των καθολικών μητρώων στιβαρότητας K_g ή K_g' αν έχουν οριστεί στερεοί κόμβοι στο υπό επεξεργασία κτίριο και των επικόμβιων δράσεων S_g ή S_g' αντίστοιχα για στερεούς κόμβους, για κάθε μέλος, ακολουθεί η δημιουργία του ολικού μητρώου στιβαρότητας $K_{(stiffness)}$ και η δημιουργία του ολικού μητρώου επικόμβιων δράσεων παγίωσης S_G για το σύνολο των μελών του φορέα.

7.2 Visual Basic

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να αναφέρουμε ότι το ολικό μητρώο στιβαρότητας και το ολικό μητρώο επικόμβιων δράσεων παγίωσης θα προκύψει μέσω εντολών προγραμματισμού (Visual Basic) που θα εισάγουμε στο Excel για να μας βοηθήσουν να κάνουμε την δουλειά μας ταχύτατα αλλά πρωτίστως με ορθότητα. Σε παραδείγματα με μικρό αριθμό μελών που αποτελούν το χωρικό πλαίσιο, η γνώση και εισαγωγή προγραμματισμού στο Excel δεν είναι απαραίτητη αλλά αντίθετα όταν το πλήθος των μελών του οποιοδήποτε πλαισίου είναι μεγάλος, τότε ο προγραμματισμός είναι απαραίτητος και αναγκαίως όχι μόνο για την ταχύτητα εξαγωγής των αποτελεσμάτων αλλά κυρίως για την ορθότητα αυτών. Δουλειά του προγραμματισμού είναι να επεξεργαστεί όλα τα καθολικά μητρώα στιβαρότητας με σκοπό να

βρει και να αθροίσει τους κοινούς κόμβους μεταξύ τους αλλά και να τους τοποθετήσει στην σωστή σειρά μαζί με τους υπόλοιπους κόμβους ώστε να κατασκευαστεί το ολικό μητρώο στιβαρότητας.

7.3 Συνθήκες στήριξης του πλαισίου

Όπως έχει προαναφερθεί και στην ενότητα 2.3 και αφού επεξεργαζόμαστε κτίριο από οπλισμένο σκυρόδεμα, οι κόμβοι οι οποίοι βρίσκονται στο έδαφος είναι πακτωμένοι. Αυτό σημαίνει ότι δεν επιτρέπουν καμία κίνηση και καμία στροφή και επόμενος οι κόμβοι αυτοί χαρακτηρίζονται ως δεσμευμένοι ενώ αντίθετα οι άλλοι κόμβοι που έχουν την δυνατότητα να μετακινηθούν και να στραφούν χαρακτηρίζονται ως ελεύθεροι. Τέλος δεν πρέπει να παραλείψουμε ότι ένας πακτωμένος κόμβος δεν πάντα αμετακίνητος αντιθέτως μπορεί να μετακινηθεί και στραφεί αλλά με την προϋπόθεση ότι αυτή η υπόθεση θα έχει δηλωθεί από την αρχή.

7.4 Μόρφωση του μητρώου αναδιάταξης του πλαισίου

Μετά τη σύνθεση και ολοκλήρωση του ολικού μητρώου στιβαρότητας, καθώς και του ολικού μητρώου των επικόμβιων δράσεων παγίωσης του χωρικού πλαισίου ακολουθεί ο υπολογισμός των αγνώστων επικόμβιων μεγεθών, δηλαδή των επικόμβιων μετακινήσεων στους ελεύθερους βαθμούς ελευθερίας και των αντιδράσεων των στηρίξεων στους δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας. Σε αυτό το βήμα, η διαδικασία που θα ακολουθηθεί είναι η ίδια είτε έχουν οριστεί στερεοί κόμβοι είτε όχι. Επιπλέον, στη συγκεκριμένη περίπτωση θα ληφθεί υπόψη και ο τρόπος στήριξης του χωρικού πλαισίου. Προκειμένου όμως να προηγηθούν οι ελεύθεροι βαθμοί ελευθερίας (γνωστές επικόμβιες δράσεις και άγνωστες επικόμβιες μετακινήσεις) και να ακολουθήσουν οι δεσμευμένοι βαθμοί ελευθερίας (άγνωστες επικόμβιες δράσεις και γνωστές μετακινήσεις) δημιουργείται το μοναδιαίο μητρώο αναδιάταξης V_{mat} .

Γνωρίζοντας ότι ο κάθε κόμβος έχει 6 βαθμούς ελευθερίας, θα αναζητήσουμε ένα μητρώο διαστάσεων $6*N$ (όπου N ο αριθμός των κόμβων του χωρικού πλαισίου) το οποίο πολλαπλασιαζόμενο με την αρχική σειρά των βαθμών ελευθερίας θα δώσει ως αποτέλεσμα την ζητούμενη σειρά. Αυτό αποτελεί το μοναδιαίο μητρώο αναδιάταξης V_{mat} .

7.5 Τροποποιημένο μητρώο στιβαρότητας του χωρικού πλαισίου

Ένα από τα τελευταία βήματα για την επίτευξη του στόχου μας, που είναι η επίλυση του φορέα με σκοπό την εύρεση των άγνωστων δυνάμεων και μετακινήσεων των κόμβων, αποτελεί η δημιουργία του πίνακα Τροποποιημένου Μητρώου Στιβαρότητας. Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφέρουμε ότι η διαδικασία που θα ακολουθηθεί είναι η ίδια είτε έχουν οριστεί στερεοί κόμβοι είτε όχι.

Αυτός ο πίνακας προκύπτει από το γινόμενο του καθολικού μητρώου στιβαρότητας $K_{(stiffness)}$ επί του ανάστροφου του πίνακα αναδιάταξης V_{mat}^T επί τον πίνακα αναδιάταξης V_{mat} .

Επιπλέον ο συγκεκριμένος πίνακας μπορεί και αυτός με την σειρά του να χωριστεί σε 4 υποπίνακες βάσει των ελεύθερων και των δεσμευμένων βαθμών ελευθερίας όπως αυτοί έχουν οριστεί από το προηγούμενο βήμα (σχέση).

$$[K'] = [V] \times [\bar{K}] \times [V^T] = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix}$$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

8.1 Υπολογισμός επικόμβιων μετακινήσεων και αντιδράσεων του πλαισίου

Δημιουργώντας λοιπόν τον πίνακα αναδιάταξης και έχοντας εισαγάγει τα κατάλληλα δεδομένα όπως είναι οι αντιδράσεις και οι μετακινήσεις οι οποίες προκύπτουν ανάλογα, αν οι κόμβοι είναι ελεύθεροι ή δεσμευμένοι, δεδομένα που δίνονται από την άσκηση, μπορούμε να φτάσουμε στην εύρεση των άγνωστων επικόμβιων μετακινήσεων Δ_f και των άγνωστων επικόμβιων δράσεων P_s .

Αρχικά πρέπει να αναφέρουμε ότι η διαδικασία που θα ακολουθηθεί είναι η ίδια είτε έχουν οριστεί στερεοί κόμβοι είτε όχι. Για την εύρεση των αγνώστων επικόμβιων μετακινήσεων Δ_f και αγνώστων επικόμβιων δράσεων P_s θα πρέπει να γίνουν τα εξής :

Ο πίνακας των αγνώστων επικόμβιων μετακινήσεων Δ_f προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του αντίστροφου του υποπίνακα του Τροποποιημένου Μητρώου Στιβαρότητας K_{ff}^{-1} επί την διαφορά του πίνακα $P_{fισοδ.}$ και γινόμενο του υποπίνακα του Τροποποιημένου Μητρώου Στιβαρότητας K_{fs} και τον πίνακα Δ_s

$$\Delta_f = K_{ff}^{-1} \times (P_{fισοδ.} - K_{fs} \times \Delta_s)$$

Ενώ ο πίνακας των αγνώστων επικόμβιων δράσεων P_s προκύπτει από το γινόμενο του υποπίνακα του Τροποποιημένου Μητρώου Στιβαρότητας K_{sf} και του πίνακα επικόμβιων

μετακινήσεων Δ_f συν το γινόμενο του υποπίνακα του Τροποποιημένου Μητρώου Στιβαρότητας K_{ss} και του πίνακα Δ_s

$$P_s = K_{sf} \times (\Delta_f - K_{ss} \times \Delta_s)$$

Ακόμα για την καλύτερη επίβλεψη και την ορθότητα της διαδικασίας μπορούμε να πάρουμε ροπές ως προς τον οποιοδήποτε κόμβο του χωρικού πλαισίου ή γενικά σε οποιοδήποτε σημείο του χωρικού πλαισίου που είναι εφικτός ο υπολογισμός των αποστάσεων, γνωρίζοντας ότι το άθροισμα των ροπών ισούται με μηδέν.

8.2 Ακραίες μετακινήσεις των μελών του πλαισίου στο καθολικό και στο τοπικό σύστημα αξόνων τους

Για την δημιουργία του τροποποιημένου μητρώου επικόμβιων μετατοπίσεων Δ_f θα χρησιμοποιηθούν τα μητρώα την επικόμβιων μετατοπίσεων Δ_m των ελεύθερων βαθμών και Δ_s των δεσμευμένων βαθμών έτσι γνωρίζοντας αυτά με μία απλή αναδιάταξη του μητρώου επικόμβιων μετατοπίσεων μπορεί εύκολα να γίνει ο προσδιορισμός του μητρώου των επικόμβιων μετακινήσεων D_{bar} . Επιπλέον, η διαδικασία που θα ακολουθηθεί είναι η ίδια είτε έχουν οριστεί στερεοί κόμβοι είτε όχι.

8.3 Ακραίες δράσεων των μελών του πλαισίου στο τοπικό σύστημα αξόνων τους (στερεός κόμβος)

Αρχικά θα πρέπει να βρούμε τις ολικές ακραίες δράσεις στα άκαμπτα τμήματα του στοιχείου και στο καθολικό σύστημα αξόνων. Αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε λαμβάνοντας υπόψη την παρακάτω σχέση:

$$A_g = K_g \times (D_g \times S_g)$$

Τα δεδομένα θεωρούνται γνωστά από τις προηγούμενες ενότητες.

Στην συνέχεια θα πρέπει να βρούμε τις ολικές ακραίες δράσεις στα άκαμπτα τμήματα του στοιχείου αλλά τώρα στο τοπικό σύστημα αξόνων, πολλαπλασιάζοντας τα γνωστά μητρώα, μητρώο περιστροφής Λ και μητρώο μετακινήσεων D .

8.4 Ακραίες δράσεων των μελών του πλαισίου στο τοπικό σύστημα αξόνων τους (καμπτόμενα άκρα)

Τέλος θα πρέπει να βρεθούν οι ολικές ακραίες δράσεις στο εύκαμπτο τμήμα του στοιχείου μέσω των παρακάτω τύπων . Τα δεδομένα των παρακάτω τύπων είναι όλα γνωστά, είτε από τα δεδομένα που έχουμε οριστεί στην αρχή, όπως το καμπτόμενο μήκος Δ_{x_1} , είτε βρίσκοντάς τα κατά την διάρκεια των βημάτων υπολογισμού όπως $[q_3, F_3', F_2', M_2', M_3']$.

$$M_2^{ij} = -q_3 \frac{(\Delta_{x_1}^{ij})^2}{2} + F_3'^{ij} \times \Delta_{x_1}^{ij} + M_2'^{ij}$$

$$M_2^{ik} = q_3 \frac{(\Delta_{x_1}^{ik})^2}{2} - F_3'^{ik} \times \Delta_{x_1}^{ik} + M_2'^{ik}$$

$$F_3^{ij} = -q_3 \times \Delta_{x_1}^{ij} + F_3'^{ij}$$

$$F_3^{ik} = -q_3 \times \Delta_{x_1}^{ik} + F_3'^{ik}$$

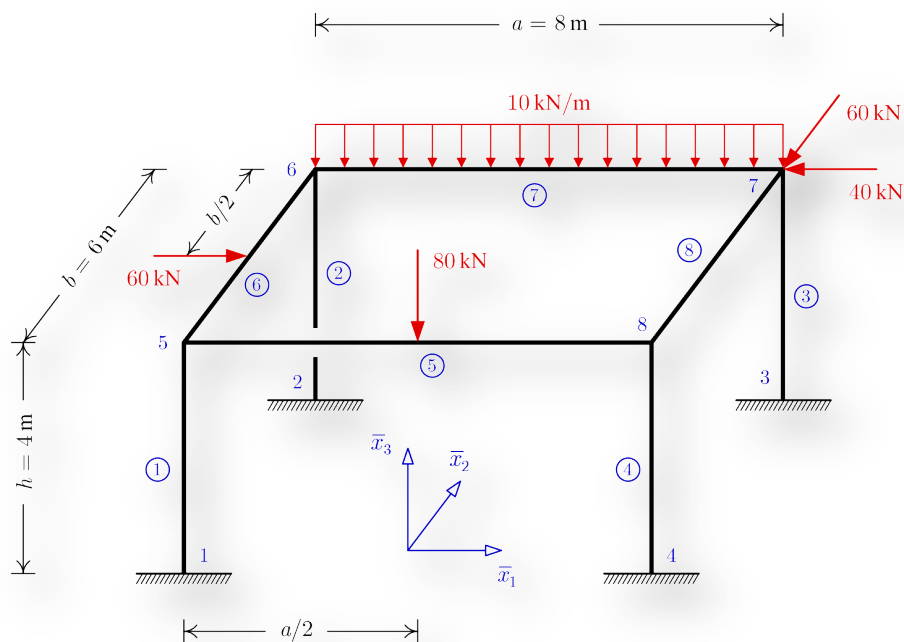
$$M_3^{ij} = M_3'^{ij} - F_3'^{ij} \times \Delta_{x_1}^{ij}$$

$$M_3^{ik} = M_3'^{ik} + F_3'^{ik} \times \Delta_{x_1}^{ik}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

9.1 Εφαρμογή της μεθόδου στην επίλυση απλού χωρικού πλαισίου

Το χωρικό πλαίσιο του Σχήματος 5 φέρει ομοιόμορφο καταναμημένο φορτίο 10 kN/m στο μέλος 7, συγκεντρωμένα φορτία 40 kN και 60 kN (κατά χ και ψ) στον κόμβο 7 και συγκεντρωμένα φορτία 80 kN και 60 kN στο μέλος 5 και 6 αντίστοιχα. Τα μέλη 1, 2, 3 και 4 εδράζονται πακτωμένα στο έδαφος.



Σχήμα 9.1. Χωρικό πλαίσιο(γεωμετρία, φόρτιση, στήριξη)

Τα μέλη του φορέα έχουν διαφορετικές διατομές καθώς χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, υποστυλώματα και δοκάρια. Τα εμβαδά και οι ροπές αδρανείας δίνονται στο φύλλο υπολογισμού του EXCEL και το μέτρο ελαστικότητας και ο λόγος Poisson λαμβάνεται ίδιο για όλα τα στοιχεία με τιμή $E=31$ GPa και $\nu = 0.20$ αντίστοιχα..

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα βήματα της επίλυσης του φορέα όπως δημιουργήθηκαν στο EXCEL αλλά και οι εικόνες από τα φύλα υπολογισμού. Το πλήρες ηλεκτρονικό αρχείο EXCEL συνοδεύει την ηλεκτρονική μορφή της διπλωματικής εργασίας.

Βήμα 1^ο

Εισαγωγή γεωμετρικών δεδομένων του χωρικού πλαισίου, που είναι οι συντεταγμένες των κόμβων, η συνδεσιμότητα των κόμβων για τη μόρφωση των μελών, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των διατομών για τον υπολογισμό του εμβαδού των διατομών και των ροπών αδρανείας τους. Ακόμα, δίνονται τα μηχανικά χαρακτηριστικά των μελών του, δηλαδή το μέτρο ελαστικότητας, καθώς και ο λόγος Poisson. Επιπλέον, προσδιορίζονται οι τιμές για τις εσωτερικές φορτίσεις των μελών των χωρικών πλαισίων, το κατανεμημένο φορτίο q . Όλα τα παραπάνω παρουσιάζονται στην Εικόνα 1.

Βήμα 2^ο

Κατασκευή του μητρώου μετασχηματισμού και του μητρώου στιβαρότητας κάθε μέλους στο τοπικό σύστημα αξόνων και κατόπιν υπολογισμός του μητρώου στιβαρότητας του κάθε μέλους στο καθολικό σύστημα αξόνων του φορέα. Επιπρόσθετα, προσδιορίζονται οι ακραίες δράσεις παγίωσης των μελών στο τοπικό και στη συνέχεια υπολογίζονται στο καθολικό σύστημα αξόνων. Τα παραπάνω απεικονίζονται στις Εικόνες 2 και 3.

Βήμα 3^ο

Σύνθεση του ολικού μητρώου στιβαρότητας και του μητρώου επικόμβιων δράσεων παγίωσης του πλαισίου στο καθολικό σύστημα αξόνων συνδυάζοντας τα αντίστοιχα μητρώα στιβαρότητας και τα μητρώα ακραίων δράσεων παγίωσης των μελών στο καθολικό σύστημα αξόνων. Για την δημιουργία των παραπάνω χρησιμοποιήθηκε αυτόματος μηχανισμός υπολογισμού των μητρώων μέσω προγραμματισμού για την ταχύτητα και την ορθότητα της διαδικασίας. Αυτά παρουσιάζονται στην Εικόνα 6 και 7.

Βήμα 4^ο

Καταγραφή όλων των δεδομένων επικόμβιων μεγεθών του πλαισίου, δηλαδή των γνωστών επικόμβιων φορτίων και των γνωστών επικόμβιων μετακινήσεων. Βάσει αυτών γίνεται η κατασκευή του μητρώου αναδιάταξης του πλαισίου, το οποίο προκύπτει από την νέα σειρά βαθμών ελευθερίας, με την οποία διαχωρίζονται οι ελεύθεροι από τους δεσμευμένους βαθμούς. Στην συνέχεια, κατασκευάζεται το μοναδιαίο μητρώο με στοιχεία του τις μετακινήσεις των δεσμευμένων βαθμών και με τα επικόμβια φορτία στις ελεύθερες διευθύνσεις. Επίσης, συγκεντρώνονται οι επικόμβιες δράσεις παγίωσης στους κόμβους του φορέα και χωρίζονται σε δύο μητρώα σύμφωνα με τους ελεύθερους και δεσμευμένους βαθμούς. Όλα αυτά παρουσιάζονται στις Εικόνες 8 και 9.

Βήμα 5^ο

Υπολογισμός του τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας K_m του χωρικού πλαισίου σύμφωνα με το μητρώο αναδιάταξης V και το ολικό μητρώο στιβαρότητας K του χωρικού πλαισίου βάσει της σχέσης $K_m = V \times K \times V^T$. Αυτά μπορούμε να τα δούμε στην Εικόνα 10.

Βήμα 6^ο

Από την επαλληλία των δεδομένων των εξωτερικών επικόμβιων φορτίων και των μετακινήσεων των στηρίξεων με τις αντίθετες των δράσεων παγίωσης του φορέα, σύμφωνα με την έκφραση $P_{f_{ισοδ.}} = P_f - S_f$. Επιπλέον προσδιορίζονται τα επικόμβια φορτία της φόρτισης και στη συνέχεια επιλύονται οι εξισώσεις της σχέσης στιβαρότητας $P_m = K_m \times \Delta_m$ για τον υπολογισμό των άγνωστων επικόμβιων μετατοπίσεων $\Delta_{f_{ισοδ.}}$ και των αντιδράσεων $P_{S_{ισοδ.}}$ του χωρικού πλαισίου, λόγω της ισοδύναμης φόρτισης. Τέλος παρουσιάζονται κάποιοι ενδεικτικοί υπολογισμοί ροπών αδρανείας σε κόμβος του χωρικού πλαισίου για την παρακολούθηση της ορθότητας της διαδικασίας. Τα παραπάνω παρουσιάζονται στις Εικόνες 11 και 12.

Βήμα 7^ο

Δημιουργία του τροποποιημένου μητρώου επικόμβιων μετατοπίσεων $\Delta_{m_{ισοδ.}}$ από τα μητρώα των επικόμβιων μετατοπίσεων $\Delta_{f_{ισοδ.}}$ των ελεύθερων βαθμών και $\Delta_{S_{ισοδ.}}$ των δεσμευμένων

βαθμών και αναδιάταξη αυτού για τον προσδιορισμό του μητρώου επικόμβιων μετατοπίσεων $\Delta_{bar_{ισοδ}}$. Αυτά παρουσιάζονται στην Εικόνα 13.

Βήμα 8^ο

Για την ισοδύναμη φόρτιση κατασκευάζονται τα μητρώα ακραίων μετακινήσεων D_{ibar} των μελών στο καθολικό σύστημα αξόνων. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τα μητρώα μετασχηματισμού, τα μητρώα στιβαρότητας και τα μητρώα ακραίων μετακινήσεων κάθε μέλους υπολογίζονται τα αντίστοιχα μητρώα ακραίων μετακινήσεων A_i [A_i] στο τοπικό σύστημα αξόνων του κάθε μέλους και με το τοπικό μητρώο στιβαρότητας προσδιορίζονται οι ακραίες δράσεις του κάθε μέλους στο τοπικό σύστημα αξόνων. Τα παραπάνω απεικονίζονται στις Εικόνες 14 και 15.

9.2 Αποτελέσματα επίλυσης του απλού χωρικού πλαισίου

Η πλήρης ανάλυση και τα αποτελέσματα επίλυσης του φορέα του παραδείγματος παρουσιάζονται στη συνέχεια.

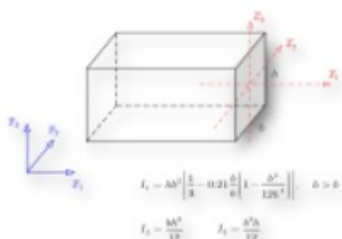
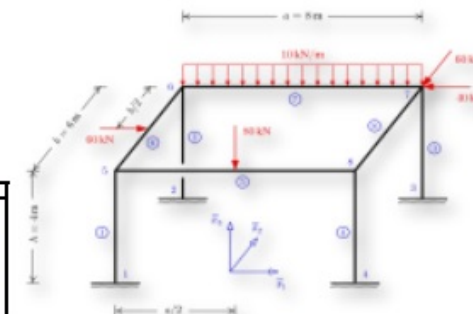
ΚΕΦ. 9: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

α'	8.0
α''	6.0
α'''	4.0

Αξιωματικός αριθμός κάρβου	Καθολικός συντελεστής		
	K1	K2	K3
1	0,0	0,0	0,0
2	0,0	6,0	0,0
3	8,0	6,0	0,0
4	8,0	0,0	0,0
5	0,0	0,0	4,0
6	0,0	6,0	4,0
7	8,0	6,0	4,0
8	8,0	0,0	4,0

Τύπος Στοιχείου	Διάσταση		Ελαστικές Ιδιότητες		Εμβαδόν Διατομής Α	b/h	Ροπή Αδράσειας		
	b	h	Μέτρο Ελαστικότητας	Λόγος Ροζαρισμού			Ix	Iy	Iz
α) Πλευρά	0.20	0.60	1.10E+07	0.20	0.18	0.02	3.7579E-03	5.4306E-03	1.7600E-03
β) Υπεροδόχ-1	0.25	0.35	1.10E+07	0.20	0.12	1.00	2.1194E-03	1.2595E-03	1.2595E-03

α/α Μέλος	Αριθμ. κ			Συντελεστής αριστερά κάρβου στο καθολικό σύστημα αξόνων						ΔK1	ΔK2	ΔK3	L [m]
	Αριθμ. κ	Πύλος κ	Ηρώα κ	K1	K2	K3	K1	K2	K3				
1	1	5	0	0	0	0	0	0	4	0	0	4	4,00
2	2	6	0	0	0	0	0	6	4	0	0	4	4,00
3	3	7	8	6	0	0	8	6	4	0	0	4	4,00
4	4	8	8	0	0	0	8	0	4	0	0	4	4,00
5	5	8	0	0	4	8	0	4	8	0	0	0	8,00
6	6	6	0	0	4	0	6	4	0	6	0	0	6,00
7	6	7	0	6	4	8	6	4	8	0	0	0	8,00
8	7	8	8	6	4	8	0	4	0	0	0	0	6,00



α/α Μέλος	Προσυντελεστής τριτοβάθμιας αξόνων X1 και X2 των Μελών			Προσυντελεστής τριτοβάθμιας αξόνων X3			Τύπος Στοιχείου	Αξιοσημείωτη Στοιχείου στην Κατασκευή	ΕΙΣΠΡΗΚΤΑ ΦΟΡΤΙΑ ΜΕΛΩΝ				
	καθ X1	καθ X2	καθ X3	καθ X1	καθ X2	καθ X3			Κατανομ. φορτίο, q3	Συντελεστής κατά X3	Συντελεστής κατά X2	Συντελεστής κατά X1	
1	0	0	1	0	1	0	2	υποστέγασμα κατά X3	0,00	0,0	0,00	0,0	0,00
2	0	0	1	0	1	0	2	υποστέγασμα κατά X3	0,00	0,0	0,00	0,0	0,00
3	0	0	1	0	1	0	2	υποστέγασμα κατά X3	0,00	0,0	0,00	0,0	0,00
4	0	0	1	0	1	0	2	υποστέγασμα κατά X3	0,00	0,0	0,00	0,0	0,00
5	1	0	0	0	1	0	1	δίκοις κατά X1	0,00	80,0	4,00	0,0	0,00
6	0	1	0	-1	0	0	1	δίκοις κατά X2	0,00	0,0	0,00	-40,0	3,00
7	1	0	0	0	1	0	1	δίκοις κατά X1	10,00	0,0	0,00	0,0	0,00
8	0	-1	0	1	0	0	1	δίκοις κατά X2	0,00	0,0	0,00	0,0	0,00

(Μετά από X1) (Μετά από X2) (Μετά από X3)

Εικόνα 1^η

Κεφ. 9: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ



Εικόνα 4^η

Κεφ. 9: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ



Εικόνα 5^η

Κεφ. 9: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

Εικόνα 6^η

1	0,00	1
	0,00	2
	0,00	3
	0,00	4
	0,00	5
	0,00	6
2	0,00	7
	0,00	8
	0,00	9
	0,00	10
	0,00	11
	0,00	12
3	0,00	13
	0,00	14
	0,00	15
	0,00	16
	0,00	17
	0,00	18
4	0,00	19
	0,00	20
	0,00	21
	0,00	22
	0,00	23
	0,00	24
5	-30,00	25
	0,00	26
	40,00	27
	0,00	28
	-80,00	29
	45,00	30
6	-30,00	31
	0,00	32
	40,00	33
	0,00	34
	-53,33	35
	-45,00	36
7	0,00	37
	0,00	38
	40,00	39
	0,00	40
	53,33	41
	0,00	42
8	0,00	43
	0,00	44
	40,00	45
	0,00	46
	80,00	47
	0,00	48

Εικόνα 7^η

Κεφ. 9: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

Κλάδος	Βαθ. Ελευθ.	ΔΕΔΩΜΕΝΑ ΚΩΣΜΩΝ		[Data]	
		P	Δ	P _i ή Δ _i	
1	1	0	0	0,0000	
	2	0	0	0,0000	
	3	0	0	0,0000	
	4	0	0	0,0000	
	5	0	0	0,0000	
	6	0	0	0,0000	
2	7	0	0	0,0000	
	8	0	0	0,0000	
	9	0	0	0,0000	
	10	0	0	0,0000	
	11	0	0	0,0000	
	12	0	0	0,0000	
3	13	0	0	0,0000	
	14	0	0	0,0000	
	15	0	0	0,0000	
	16	0	0	0,0000	
	17	0	0	0,0000	
	18	0	0	0,0000	
4	19	0	0	0,0000	
	20	0	0	0,0000	
	21	0	0	0,0000	
	22	0	0	0,0000	
	23	0	0	0,0000	
	24	0	0	0,0000	
5	25	0	0,00	0,00	
	26	0	0	0,00	
	27	0	0	0,00	
	28	0	0	0,00	
	29	0	0	0,00	
	30	0	0,00	0,00	
6	31	0	0,00	0,00	
	32	0	0	0,00	
	33	0	0	0,00	
	34	0	0	0,00	
	35	0	0	0,00	
	36	0	0	0,00	
7	37	-60	-60	-60,00	
	38	0	0	0,00	
	39	0	0	0,00	
	40	0	0	0,00	
	41	0	0	0,00	
	42	0	0	0,00	
8	43	0	0	0,00	
	44	0	0	0,00	
	45	0	0	0,00	
	46	0	0	0,00	
	47	0	0	0,00	
	48	0	0	0,00	

□ άγνωστο μέγεθος

Κλάδος	B.E.	Δεσμευμ. ή ελευθ.	Ελεύθεροι βαθμοί	Δεσμευμένοι βαθμοί	Νέα σειρά βαθμών ελεύθερών
1	1	Δεσμευμ.	25	1	25
	2	Δεσμευμ.	26	2	26
	3	Δεσμευμ.	27	3	27
	4	Δεσμευμ.	28	4	28
	5	Δεσμευμ.	29	5	29
	6	Δεσμευμ.	30	6	30
2	7	Δεσμευμ.	31	7	31
	8	Δεσμευμ.	32	8	32
	9	Δεσμευμ.	33	9	33
	10	Δεσμευμ.	34	10	34
	11	Δεσμευμ.	35	11	35
	12	Δεσμευμ.	36	12	36
3	13	Δεσμευμ.	37	13	37
	14	Δεσμευμ.	38	14	38
	15	Δεσμευμ.	39	15	39
	16	Δεσμευμ.	40	16	40
	17	Δεσμευμ.	41	17	41
	18	Δεσμευμ.	42	18	42
4	19	Δεσμευμ.	43	19	43
	20	Δεσμευμ.	44	20	44
	21	Δεσμευμ.	45	21	45
	22	Δεσμευμ.	46	22	46
	23	Δεσμευμ.	47	23	47
	24	Δεσμευμ.	48	24	48
5	25	ελευθ.	1	1	1
	26	ελευθ.	2	2	2
	27	ελευθ.	3	3	3
	28	ελευθ.	4	4	4
	29	ελευθ.	5	5	5
	30	ελευθ.	6	6	6
6	31	ελευθ.	7	7	7
	32	ελευθ.	8	8	8
	33	ελευθ.	9	9	9
	34	ελευθ.	10	10	10
	35	ελευθ.	11	11	11
	36	ελευθ.	12	12	12
7	37	ελευθ.	13	13	13
	38	ελευθ.	14	14	14
	39	ελευθ.	15	15	15
	40	ελευθ.	16	16	16
	41	ελευθ.	17	17	17
	42	ελευθ.	18	18	18
8	43	ελευθ.	19	19	19
	44	ελευθ.	20	20	20
	45	ελευθ.	21	21	21
	46	ελευθ.	22	22	22
	47	ελευθ.	23	23	23
	48	ελευθ.	24	24	24

$[V] * [Data] =$

0,00	25
0,00	26
0,00	27
0,00	28
0,00	29
0,00	30
0,00	31
0,00	32
0,00	33
0,00	34
0,00	35
0,00	36
-40,00	37
-40,00	38
-40,00	39
0,00	40
0,00	41
0,00	42
0,00	43
0,00	44
0,00	45
0,00	46
0,00	47
0,00	48

$[P_i]$

Ελεύθεροι βαθμοί γνωστοί επιπλέον φορτία και άγνωστος μετακίνησης κέντρου.

$[V] [S_{\text{known}}] =$

0,0000	1
0,0000	2
0,0000	3
0,0000	4
0,0000	5
0,0000	6
0,0000	7
0,0000	8
0,0000	9
0,0000	10
0,0000	11
0,0000	12
0,0000	13
0,0000	14
0,0000	15
0,0000	16
0,0000	17
0,0000	18
0,0000	19
0,0000	20
0,0000	21
0,0000	22
0,0000	23
0,0000	24

$[Δ_i]$

Δεσμευμένοι βαθμοί άγνωστος μετακίνησης και δεδομένης μετακίνησης.

$[S_{\text{bar}}] =$
 $[V] [S_{\text{known}}] =$

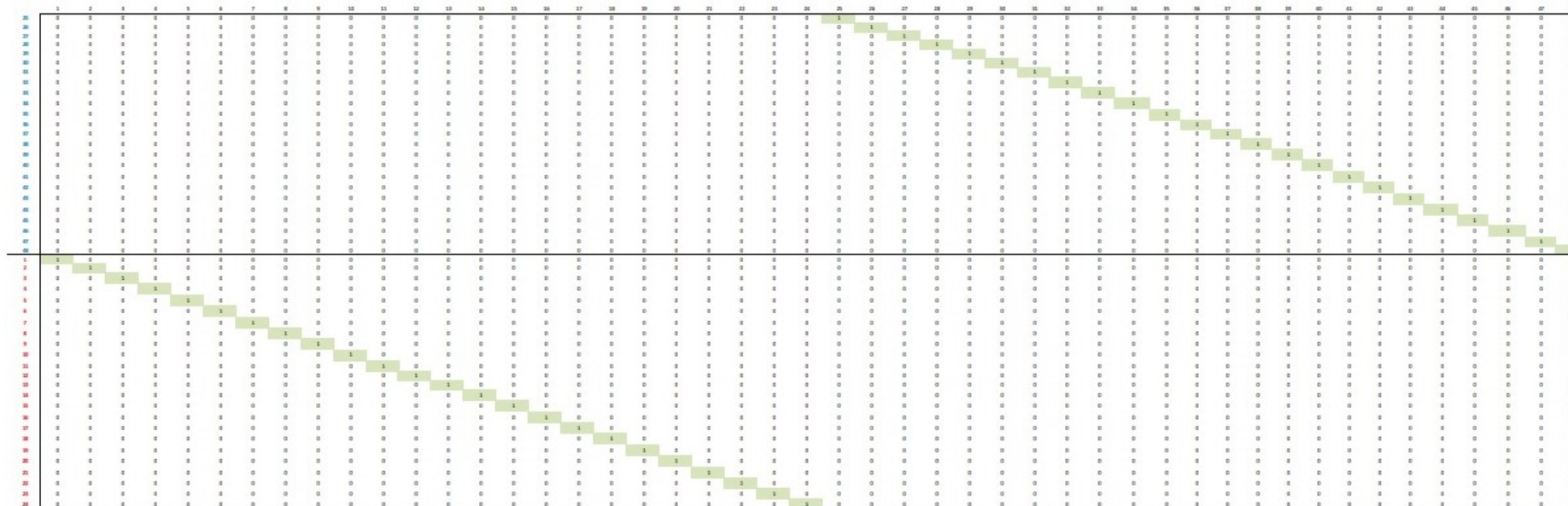
-20,00	25
0,00	26
40,00	27
0,00	28
-40,00	29
45,00	30
-30,00	31
0,00	32
40,00	33
0,00	34
-11,13	35
-45,00	36
0,00	37
0,00	38
40,00	39
0,00	40
51,13	41
0,00	42
0,00	43
0,00	44
40,00	45
0,00	46
80,00	47
0,00	48

$[S_i]$

Επιπλέον Δράσεις Πηγαινας κατά τους Ελεύθερους Βαθμούς

Εάν αυτές ασκηθούν στις αντίστοιχες θέσεις σε συνδυασμό με την κεντρική φόρτιση των μελών, μεγεθύνονται οι μεταθέσεις μετακίνησης και ο φορέας παραμορφώνεται. Οι αντίθετες αυτές θα ασκηθούν στον ισολόγισμο φορτία ως εξωτερικά φορτία.

Εικόνα 8^η



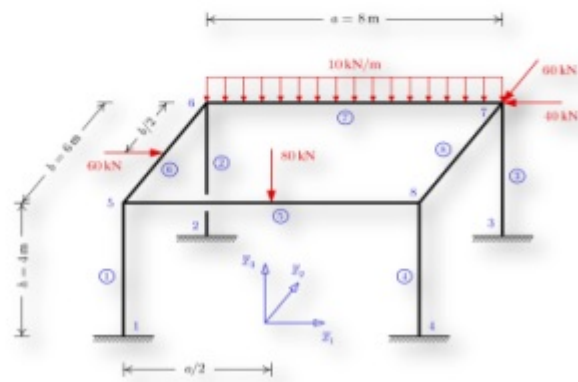
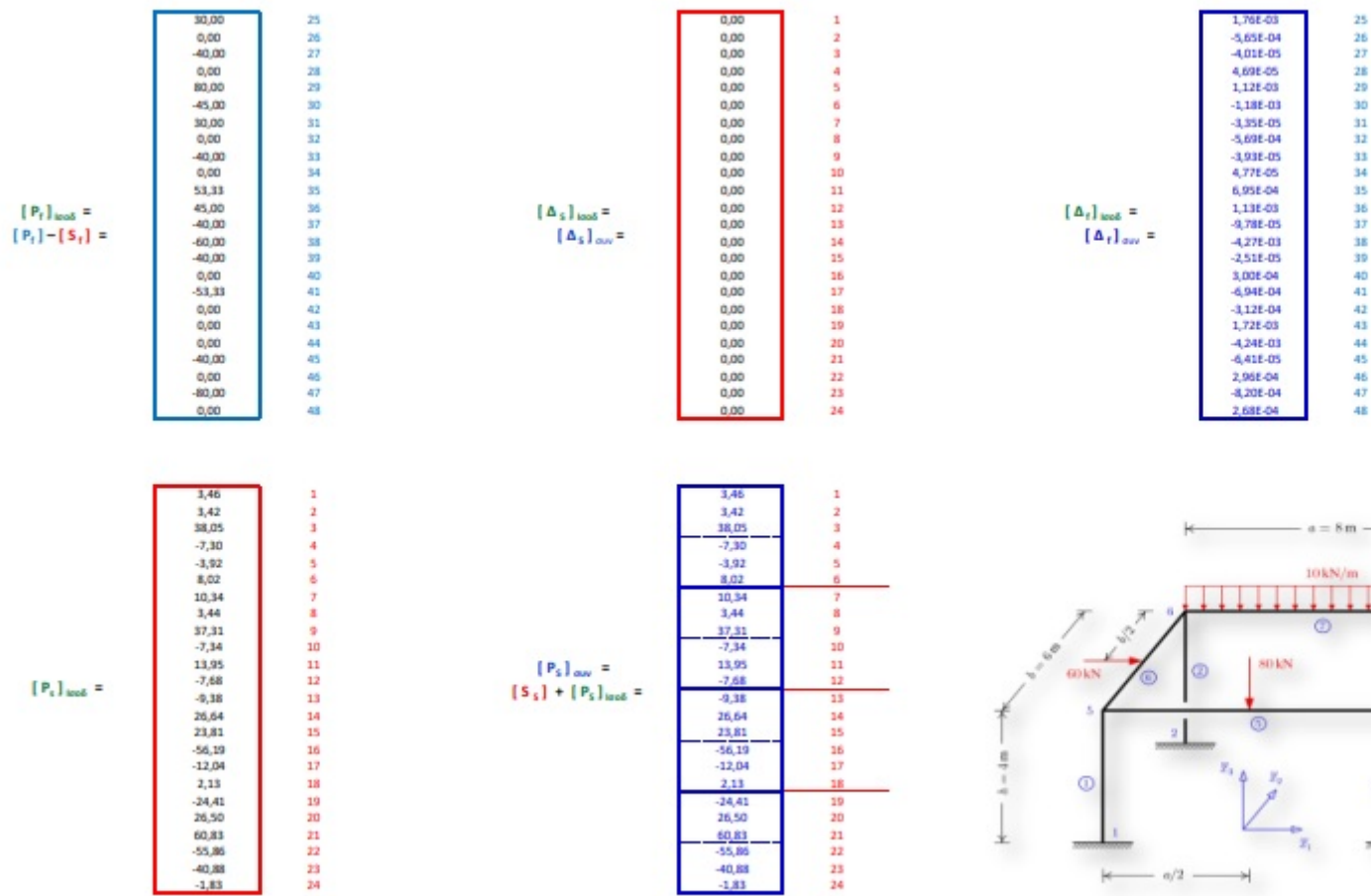
Εικόνα 9^η

Κεφ. 9: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

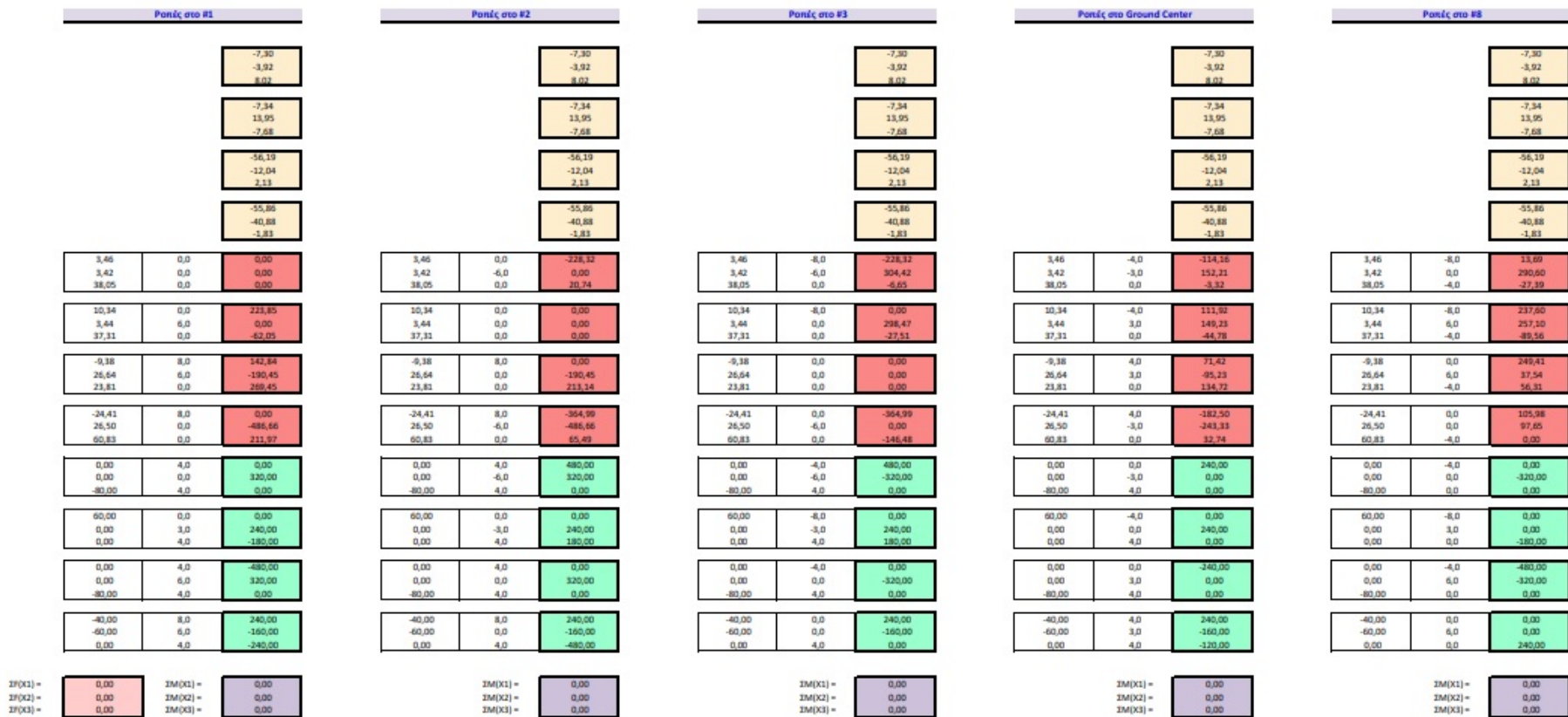
$[K_5]$ $[K_6]$
 $[K_7]$ $[K_8]$

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100																				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

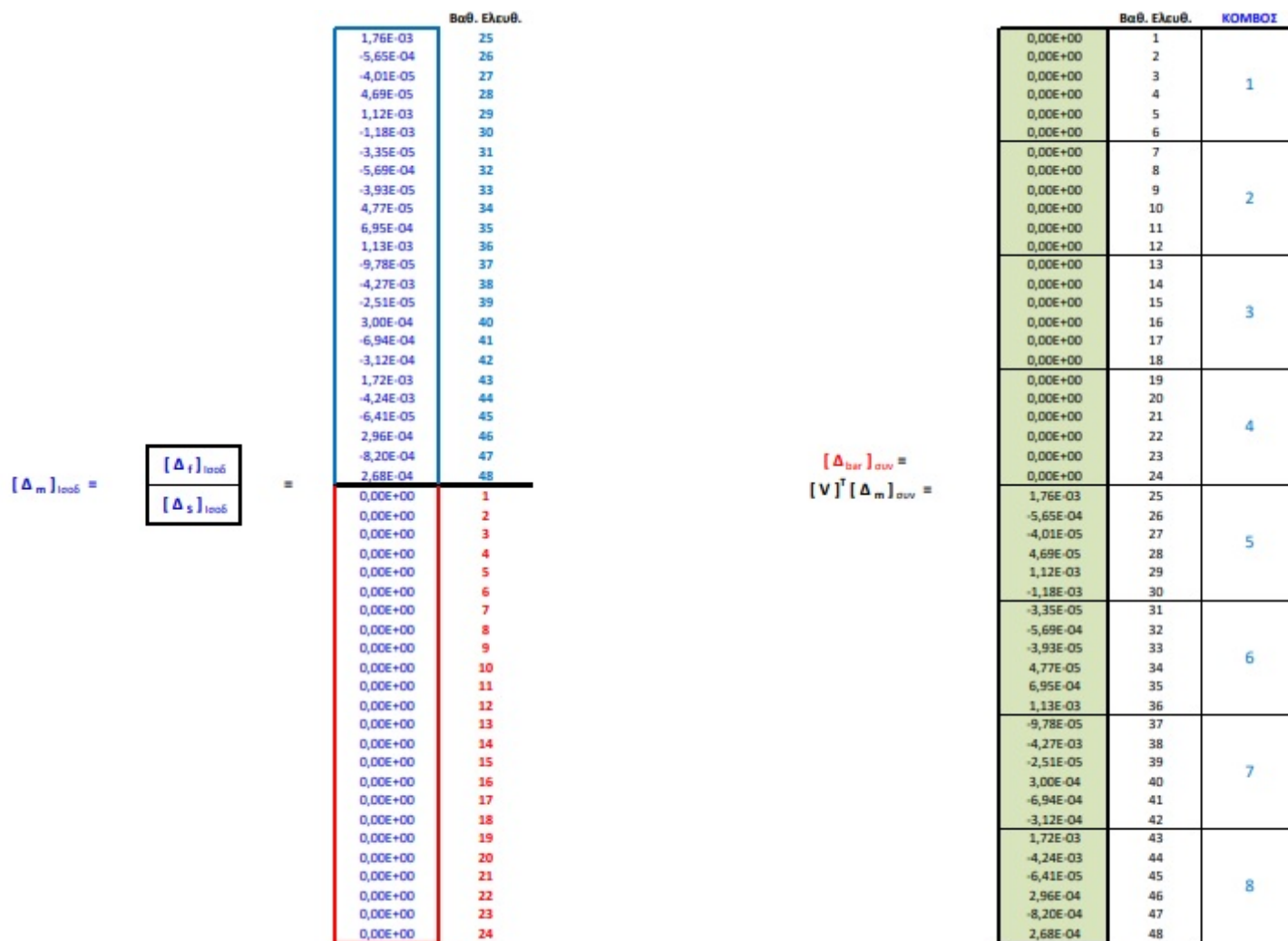
Εικόνα 10¹¹



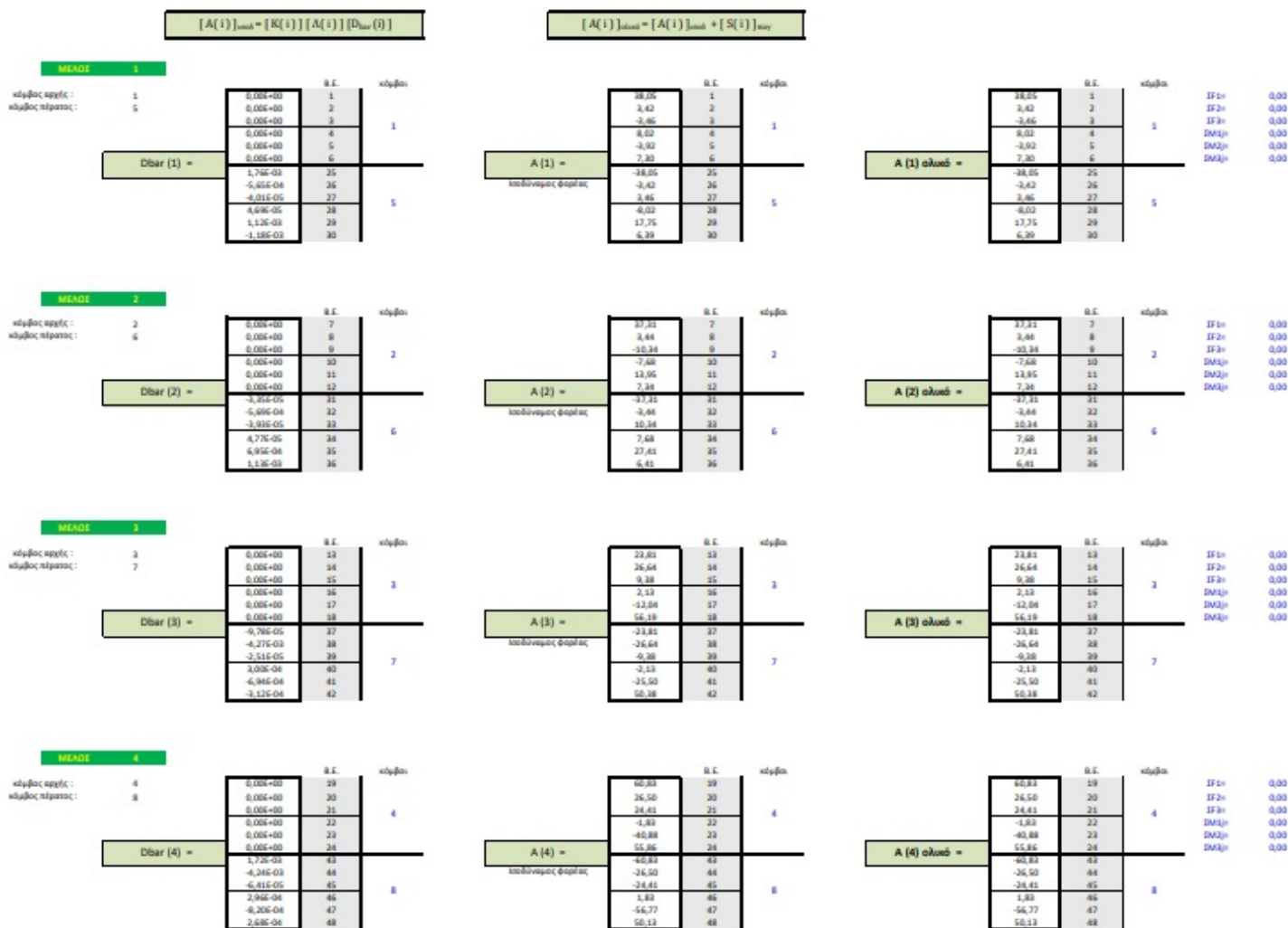
Εικόνα 11^η



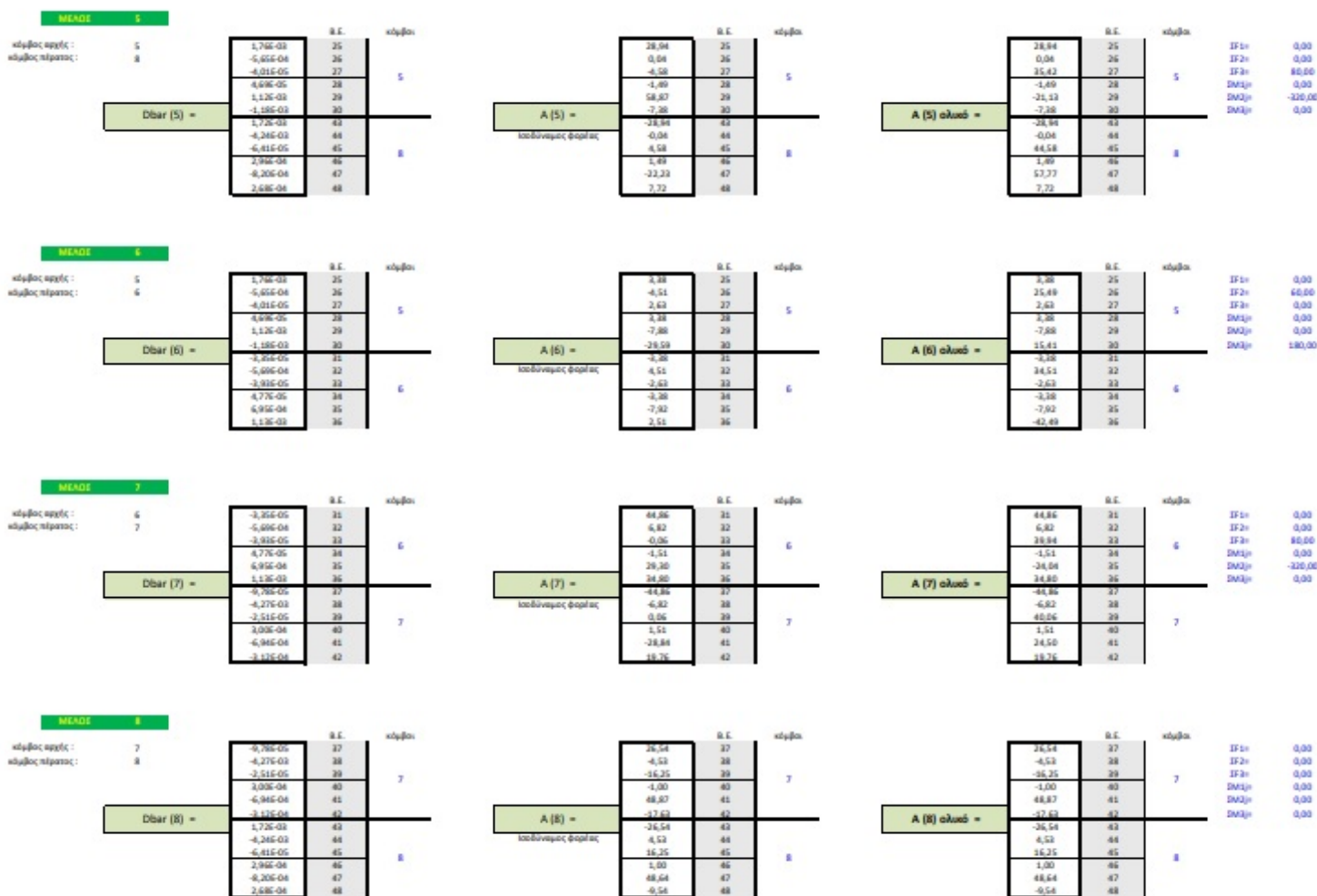
Εικόνα 12η



Εικόνα 13^η



Εικόνα 14^η

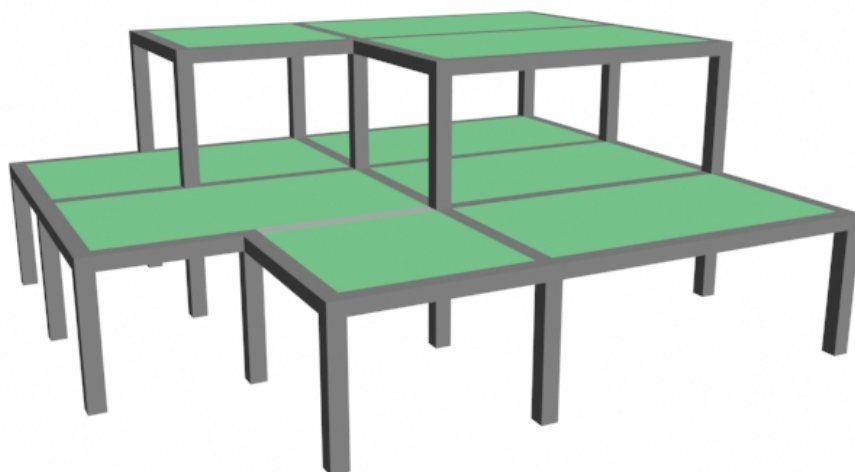


Εικόνα 15^η

ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΩΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

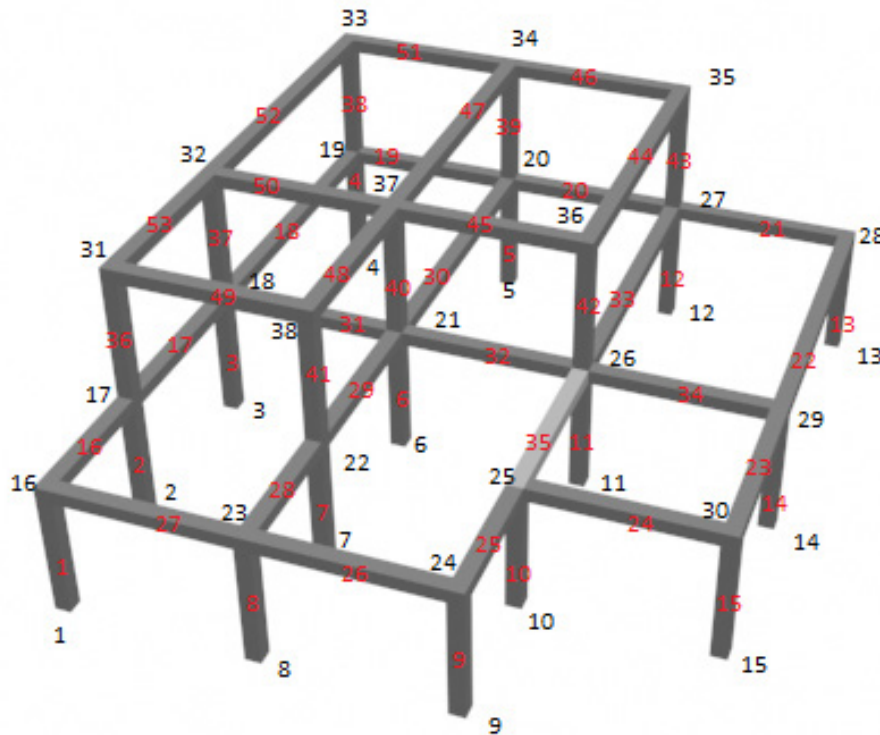
10.1 Περιγραφή του σύνθετου χωρικού πλαισίου

Το χωρικό πλαίσιο του Σχήματος 6 φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένα φορτία σε όλα τα δοκάρια του λόγω της ύπαρξης πλακών και τοιχοποιίας. Ακόμα φέρει στερεούς κόμβους σε όλες του τις συνδέσεις. Τέλος οι κόμβοι 1εως 15 είναι πακτωμένη στο έδαφος.



Σχήμα 10.1. Φορέας στο χώρο και χωρικό πλαίσιο

Τα μέλη του φορέα έχουν διαφορετικές διατομές καθώς χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, υποστυλώματα και δοκάρια. Τα εμβαδά και οι ροπές αδρανείας δίνονται στο φύλλο υπολογισμού του EXCEL και το μέτρο ελαστικότητας και ο λόγος Poisson λαμβάνεται ίδιο για όλα τα στοιχεία με τιμή $E=31 \text{ GPa}$ και $\nu = 0.20$ αντίστοιχα..



Σχήμα 10.2. Διακριτοποίηση χωρικού πλαισίου

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα βήματα της επίλυσης του φορέα όπως δημιουργήθηκαν στο EXCEL αλλά και κάποιες ενδεικτικές εικόνες από τα φύλλα υπολογισμού. Το πλήρες ηλεκτρονικό αρχείο EXCEL συνοδεύει την ηλεκτρονική μορφή της διπλωματικής εργασίας.

Βήμα 1^ο

Εισαγωγή γεωμετρικών δεδομένων του χωρικού πλαισίου με στερεούς κόμβους, που είναι οι συντεταγμένες των κόμβων, η συνδεσιμότητα των κόμβων για τη μόρφωση των μελών, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των διατομών για τον υπολογισμό του εμβαδού των διατομών και των ροπών αδρανείας τους και τα εύκαμπτα και άκαμπτα μήκη. Ακόμα, δίνονται τα μηχανικά χαρακτηριστικά των μελών του, δηλαδή το μέτρο ελαστικότητας, καθώς και ο λόγος Poisson. Επιπλέον, προσδιορίζονται οι τιμές για τις εσωτερικές φορτίσεις των μελών των χωρικών πλαισίων, το κατανεμημένο φορτίο q και τα μήκη εκκεντροτήτων. Επιπρόσθετα

ορίζονται τα εμβαδά των πλακών, τα φορτία αυτών, όπως και τα ειδικά βάρη για την τοιχοποιία και τις πλάκες. Όλα τα παραπάνω παρουσιάζονται στις Εικόνες 16 και 17.

Βήμα 2^ο

Κατασκευή του μητρώου μετασχηματισμού, του μητρώου στιβαρότητας και του μητρώου εκκεντρότητας κάθε μέλους στο τοπικό σύστημα αξόνων και κατόπιν υπολογισμός του μητρώου στιβαρότητας του κάθε μέλους στο καθολικό σύστημα αξόνων του φορέα. Επιπρόσθετα, προσδιορίζονται οι ακραίες δράσεις παγίωσης των μελών στο τοπικό και στη συνέχεια υπολογίζονται στο καθολικό σύστημα αξόνων. Τα παραπάνω απεικονίζονται στις Εικόνες 18, 19 και 20.

Βήμα 3^ο

Σύνθεση του ολικού μητρώου στιβαρότητας και του μητρώου επικόμβιων δράσεων παγίωσης του πλαισίου στο καθολικό σύστημα αξόνων συνδυάζοντας τα αντίστοιχα μητρώα στιβαρότητας και τα μητρώα ακραίων δράσεων παγίωσης των μελών στο καθολικό σύστημα αξόνων. Για την δημιουργία των παραπάνω χρησιμοποιήθηκε αυτόματος μηχανισμός υπολογισμού των μητρώων μέσω προγραμματισμού για την ταχύτητα και την ορθότητα της διαδικασίας. Αυτά παρουσιάζονται στην Εικόνα 21 και 22.

Βήμα 4^ο

Καταγραφή όλων των δεδομένων επικόμβιων μεγεθών του πλαισίου, δηλαδή των γνωστών επικόμβιων φορτίων και των γνωστών επικόμβιων μετακινήσεων. Βάσει αυτών γίνεται η κατασκευή του μητρώου αναδιάταξης του πλαισίου, το οποίο προκύπτει από την νέα σειρά βαθμών ελευθερίας, με την οποία διαχωρίζονται οι ελεύθεροι από τους δεσμευμένους βαθμούς. Στην συνέχεια, κατασκευάζεται το μοναδιαίο μητρώο με στοιχεία του τις μετακινήσεις των δεσμευμένων βαθμών και με τα επικόμβια φορτία στις ελεύθερες διευθύνσεις. Επίσης, συγκεντρώνονται οι επικόμβιες δράσεις παγίωσης στους κόμβους του φορέα και χωρίζονται σε δύο μητρώα σύμφωνα με τους ελεύθερους και δεσμευμένους βαθμούς. Όλα αυτά παρουσιάζονται στις Εικόνες 23 και 24.

Βήμα 5^ο

Υπολογισμός του τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας K_m του χωρικού πλαισίου σύμφωνα με το μητρώο αναδιάταξης V και το ολικό μητρώο στιβαρότητας K του χωρικού πλαισίου βάσει της σχέσης $K_m = V \times K \times V^T$. Αυτά μπορούμε να τα δούμε στην Εικόνα 25.

Βήμα 6^ο

Από την επαλληλία των δεδομένων των εξωτερικών επικόμβιων φορτίων και των μετακινήσεων των στηρίξεων με τις αντίθετες των δράσεων παγίωσης του φορέα, σύμφωνα με την έκφραση $P_{f_{ισοδ.}} = P_f - S_f$. Επιπλέον προσδιορίζονται τα επικόμβια φορτία της φόρτισης και στη συνέχεια επιλύονται οι εξισώσεις της σχέσης στιβαρότητας $P_m = K_m \times \Delta_m$ για τον υπολογισμό των άγνωστων επικόμβιων μετατοπίσεων $\Delta_{f_{ισοδ.}}$ και των αντιδράσεων $P_{S_{ισοδ.}}$ του χωρικού πλαισίου, λόγω της ισοδύναμης φόρτισης. Τέλος παρουσιάζονται κάποιοι ενδεικτικοί υπολογισμοί ροπών αδρανείας σε κόμβος του χωρικού πλαισίου για την παρακολούθηση της ορθότητας της διαδικασίας. Τα παραπάνω παρουσιάζονται στην Εικόνα 26.

Βήμα 7^ο

Δημιουργία του τροποποιημένου μητρώου επικόμβιων μετατοπίσεων $\Delta_{m_{ισοδ.}}$ από τα μητρώα των επικόμβιων μετατοπίσεων $\Delta_{f_{ισοδ.}}$ των ελεύθερων βαθμών και $\Delta_{S_{ισοδ.}}$ των δεσμευμένων βαθμών και αναδιάταξη αυτού για τον προσδιορισμό του μητρώου επικόμβιων μετατοπίσεων $\Delta_{bar_{ισοδ.}}$. Αυτά παρουσιάζονται στην Εικόνα 27.

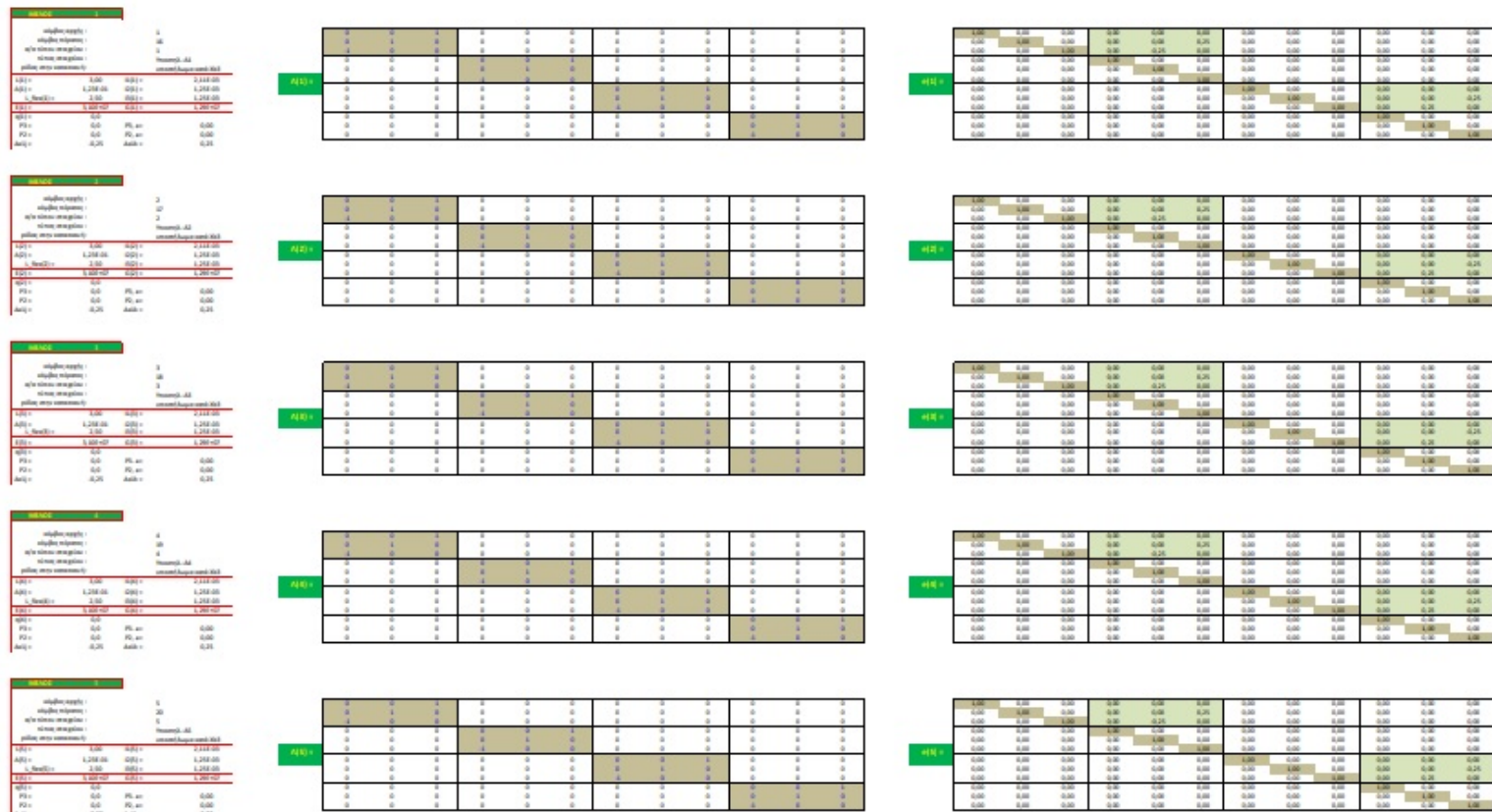
Βήμα 8^ο

Για την ισοδύναμη φόρτιση κατασκευάζονται τα μητρώα ακραίων μετακινήσεων D_{ibar} των μελών στο καθολικό σύστημα αξόνων. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τα μητρώα μετασχηματισμού, τα μητρώα στιβαρότητας και τα μητρώα ακραίων δράσεων στα άκαμπτα τμήματα του στοιχείου στο τοπικό και στο καθολικό σύστημα αξόνων αλλά και οι ολικές ακραίες δράσεις στο εύκαμπτο τμήμα του στοιχείου στο τοπικό σύστημα αξόνων. Τα παραπάνω απεικονίζονται στην Εικόνα 28.

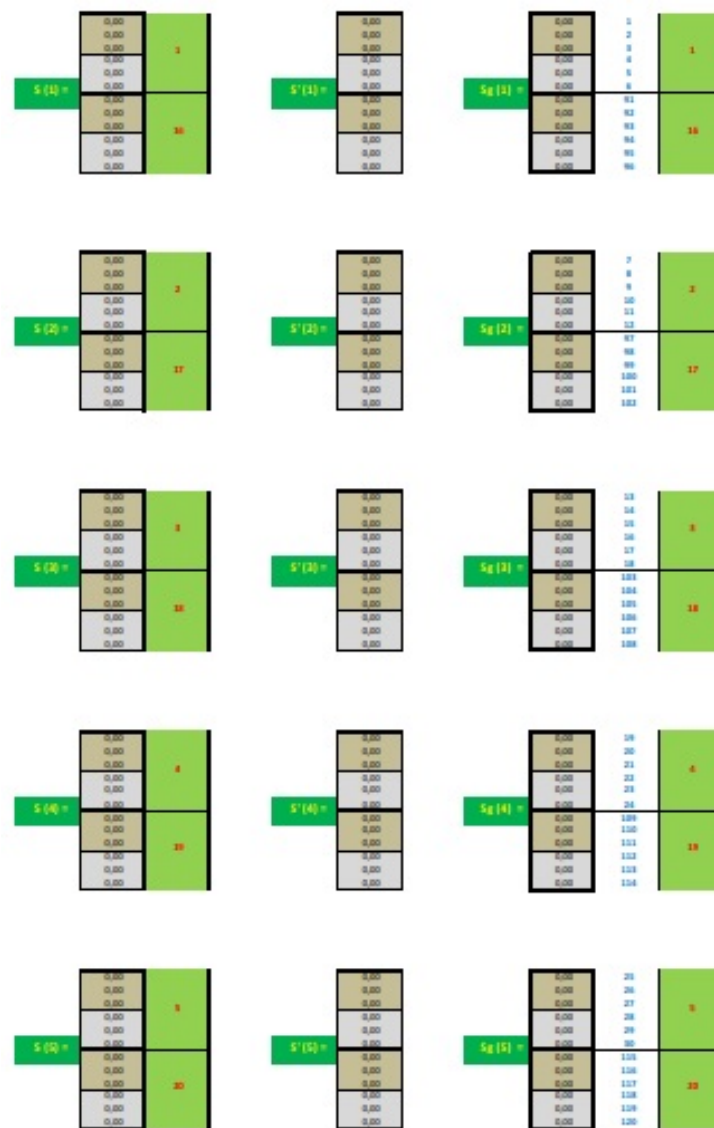
10.2 Αποτελέσματα επίλυσης του σύνθετου χωρικού πλαισίου

Η πλήρης ανάλυση και τα αποτελέσματα επίλυσης του σύνθετου πλαισιωτού φορέα παρουσιάζονται στη συνέχεια.

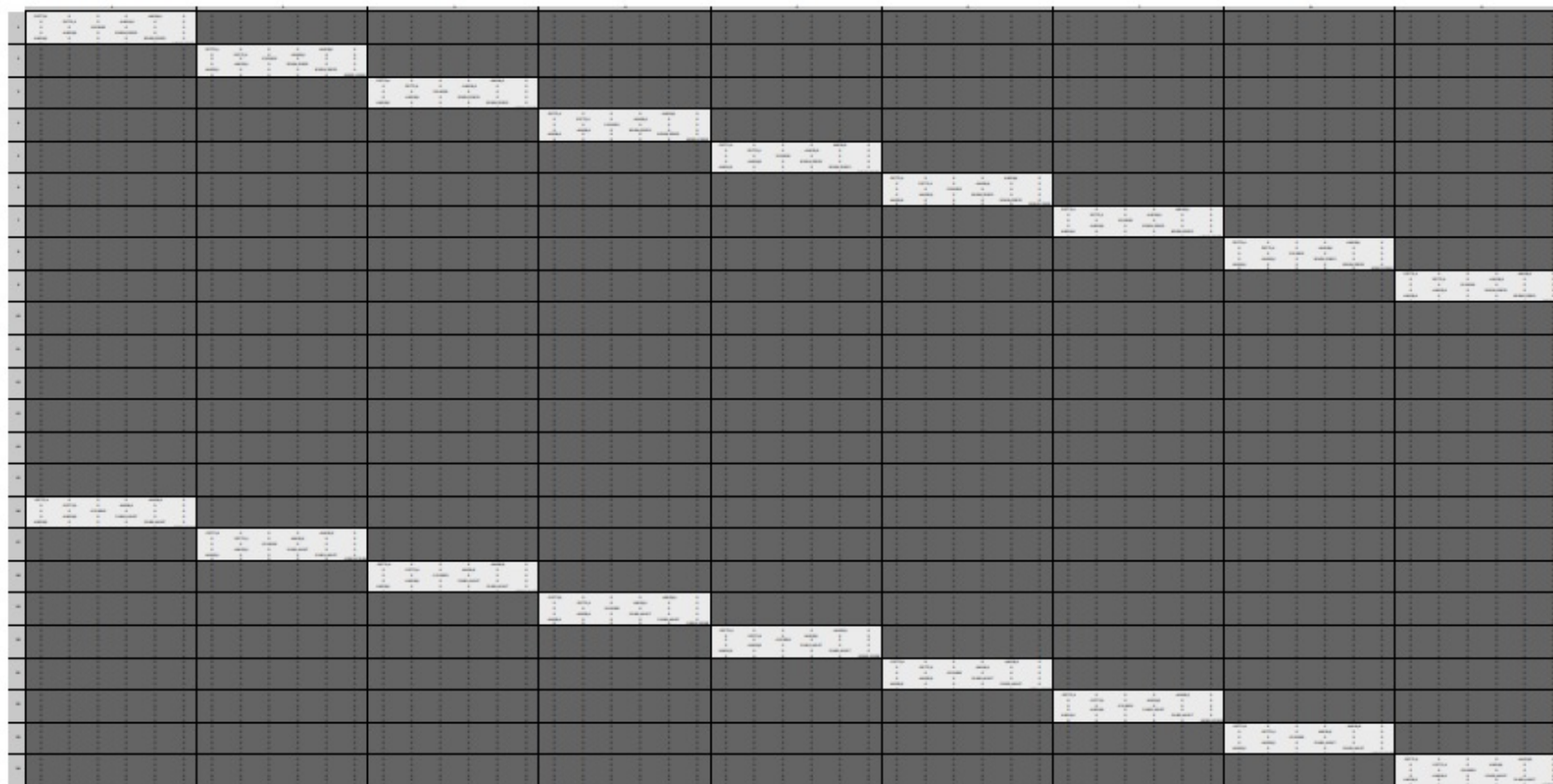
Κεφ. 10: ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΩΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ



Εικόνα 17^η



Εικόνα 19^η



Εικόνα 20^η

1	0,00	1
	0,00	2
	0,00	3
	0,00	4
	0,00	5
	0,00	6
2	0,00	7
	0,00	8
	0,00	9
	0,00	10
	0,00	11
	0,00	12
3	0,00	13
	0,00	14
	0,00	15
	0,00	16
	0,00	17
	0,00	18
4	0,00	19
	0,00	20
	0,00	21
	0,00	22
	0,00	23
	0,00	24
5	0,00	25
	0,00	26
	0,00	27
	0,00	28
	0,00	29
	0,00	30
6	0,00	31
	0,00	32
	0,00	33
	0,00	34
	0,00	35
	0,00	36
7	0,00	37
	0,00	38
	0,00	39
	0,00	40
	0,00	41
	0,00	42
8	0,00	43
	0,00	44
	0,00	45
	0,00	46
	0,00	47
	0,00	48

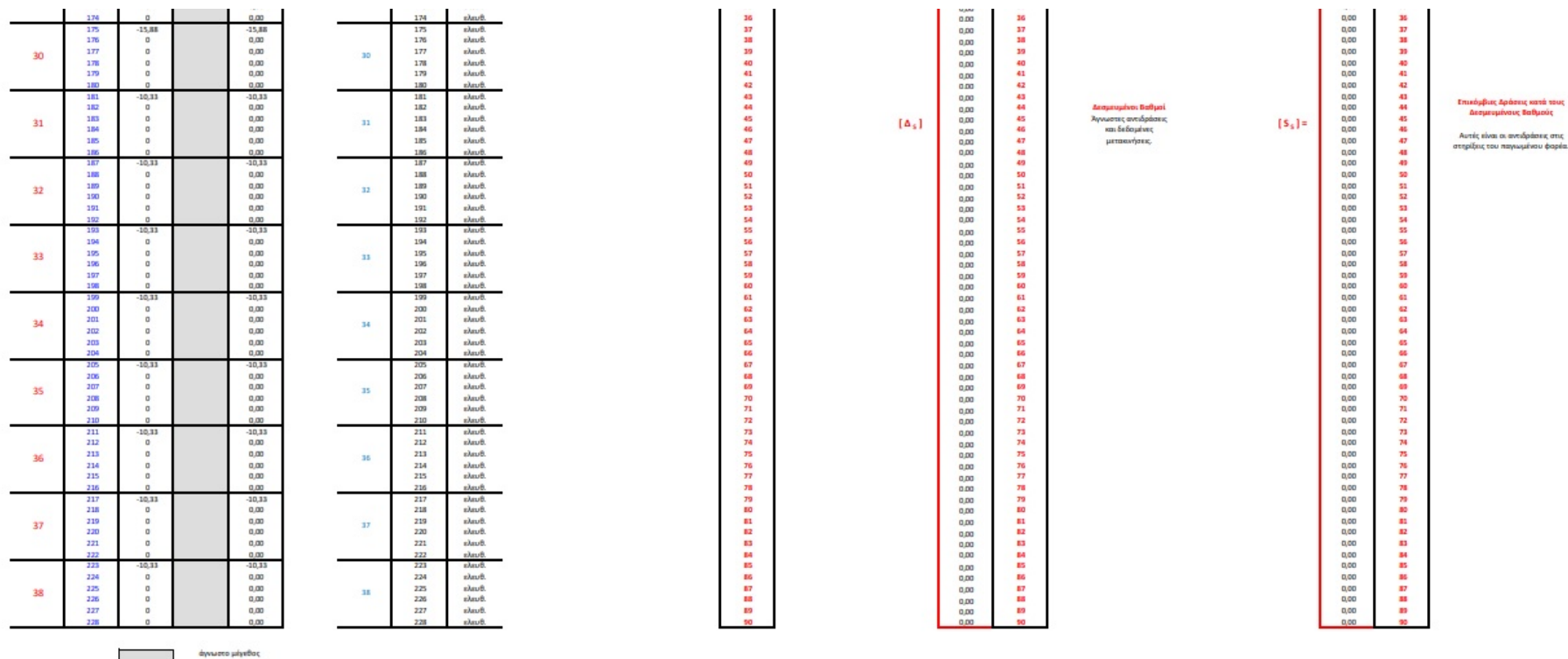
Εικόνα 21^η

Κεφ. 10: ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΩΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Κόμβος	Βαθ. Έλευθ.	ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΚΟΜΒΩΝ		(Data)		Κόμβος	Β.Ε.	Διευθ. Δ. κλειδί	Ελεύθεροι βαθμοί	Διευθ. μέτρον βαθμοί	Νέοι σισπ. βαθμών κλειδίων		
		Π1	Δ1	Π1, η, Δ1	Π1, η, Δ1								
1	1		0	0,00		1	Διευθ.	91	1	91	-15,88	91	0,00
	2		0	0,00		2	Διευθ.	92	2	92	0,00	92	0,00
	3		0	0,00		3	Διευθ.	93	3	93	0,00	93	58,09
	4		0	0,00		4	Διευθ.	94	4	94	0,00	94	-24,42
	5		0	0,00		5	Διευθ.	95	5	95	0,00	95	-18,71
	6		0	0,00		6	Διευθ.	96	6	96	0,00	96	0,00
2	7		0	0,00		7	Διευθ.	97	7	97	-15,88	97	0,00
	8		0	0,00		8	Διευθ.	98	8	98	0,00	98	0,00
	9		0	0,00		9	Διευθ.	99	9	99	0,00	99	77,22
	10		0	0,00		10	Διευθ.	100	10	100	0,00	100	0,00
	11		0	0,00		11	Διευθ.	101	11	101	0,00	101	-21,00
	12		0	0,00		12	Διευθ.	102	12	102	0,00	102	0,00
3	13		0	0,00		13	Διευθ.	103	13	103	-15,88	103	0,00
	14		0	0,00		14	Διευθ.	104	14	104	0,00	104	0,00
	15		0	0,00		15	Διευθ.	105	15	105	0,00	105	195,82
	16		0	0,00		16	Διευθ.	106	16	106	0,00	106	-53,05
	17		0	0,00		17	Διευθ.	107	17	107	0,00	107	-69,44
	18		0	0,00		18	Διευθ.	108	18	108	0,00	108	0,00
4	19		0	0,00		19	Διευθ.	109	19	109	-15,88	109	0,00
	20		0	0,00		20	Διευθ.	110	20	110	0,00	110	0,00
	21		0	0,00		21	Διευθ.	111	21	111	0,00	111	125,97
	22		0	0,00		22	Διευθ.	112	22	112	0,00	112	-25,88
	23		0	0,00		23	Διευθ.	113	23	113	0,00	113	109,15
	24		0	0,00		24	Διευθ.	114	24	114	0,00	114	0,00
5	25		0	0,00		25	Διευθ.	115	25	115	-15,88	115	0,00
	26		0	0,00		26	Διευθ.	116	26	116	0,00	116	0,00
	27		0	0,00		27	Διευθ.	117	27	117	0,00	117	209,22
	28		0	0,00		28	Διευθ.	118	28	118	0,00	118	9,77
	29		0	0,00		29	Διευθ.	119	29	119	0,00	119	-173,12
	30		0	0,00		30	Διευθ.	120	30	120	0,00	120	0,00
6	31		0	0,00		31	Διευθ.	121	31	121	-15,88	121	0,00
	32		0	0,00		32	Διευθ.	122	32	122	0,00	122	0,00
	33		0	0,00		33	Διευθ.	123	33	123	0,00	123	143,98
	34		0	0,00		34	Διευθ.	124	34	124	0,00	124	10,37
	35		0	0,00		35	Διευθ.	125	35	125	0,00	125	98,80
	36		0	0,00		36	Διευθ.	126	36	126	0,00	126	0,00
7	37		0	0,00		37	Διευθ.	127	37	127	-15,88	127	0,00
	38		0	0,00		38	Διευθ.	128	38	128	0,00	128	0,00
	39		0	0,00		39	Διευθ.	129	39	129	0,00	129	153,78
	40		0	0,00		40	Διευθ.	130	40	130	0,00	130	0,00
	41		0	0,00		41	Διευθ.	131	41	131	0,00	131	33,21
	42		0	0,00		42	Διευθ.	132	42	132	0,00	132	0,00
8	43		0	0,00		43	Διευθ.	133	43	133	-15,88	133	0,00
	44		0	0,00		44	Διευθ.	134	44	134	0,00	134	0,00
	45		0	0,00		45	Διευθ.	135	45	135	0,00	135	115,19
	46		0	0,00		46	Διευθ.	136	46	136	0,00	136	7,15
	47		0	0,00		47	Διευθ.	137	47	137	0,00	137	41,12
	48		0	0,00		48	Διευθ.	138	48	138	0,00	138	0,00
9	49		0	0,00		49	Διευθ.	139	49	139	-15,88	139	0,00
	50		0	0,00		50	Διευθ.	140	50	140	0,00	140	0,00
	51		0	0,00		51	Διευθ.	141	51	141	0,00	141	84,38
	52		0	0,00		52	Διευθ.	142	52	142	0,00	142	17,27
	53		0	0,00		53	Διευθ.	143	53	143	0,00	143	-40,43
	54		0	0,00		54	Διευθ.	144	54	144	0,00	144	0,00
10	55		0	0,00		55	Διευθ.	145	55	145	-15,88	145	0,00
	56		0	0,00		56	Διευθ.	146	56	146	0,00	146	0,00
	57		0	0,00		57	Διευθ.	147	57	147	0,00	147	174,81
	58		0	0,00		58	Διευθ.	148	58	148	0,00	148	-18,95
	59		0	0,00		59	Διευθ.	149	59	149	0,00	149	-31,16
	60		0	0,00		60	Διευθ.	150	60	150	0,00	150	0,00
61		0	0,00		61	Διευθ.	151	61	151	-15,88	151	0,00	

Εικόνα 22^η

Κεφ. 10: ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΩΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ



Εικόνα 23^η

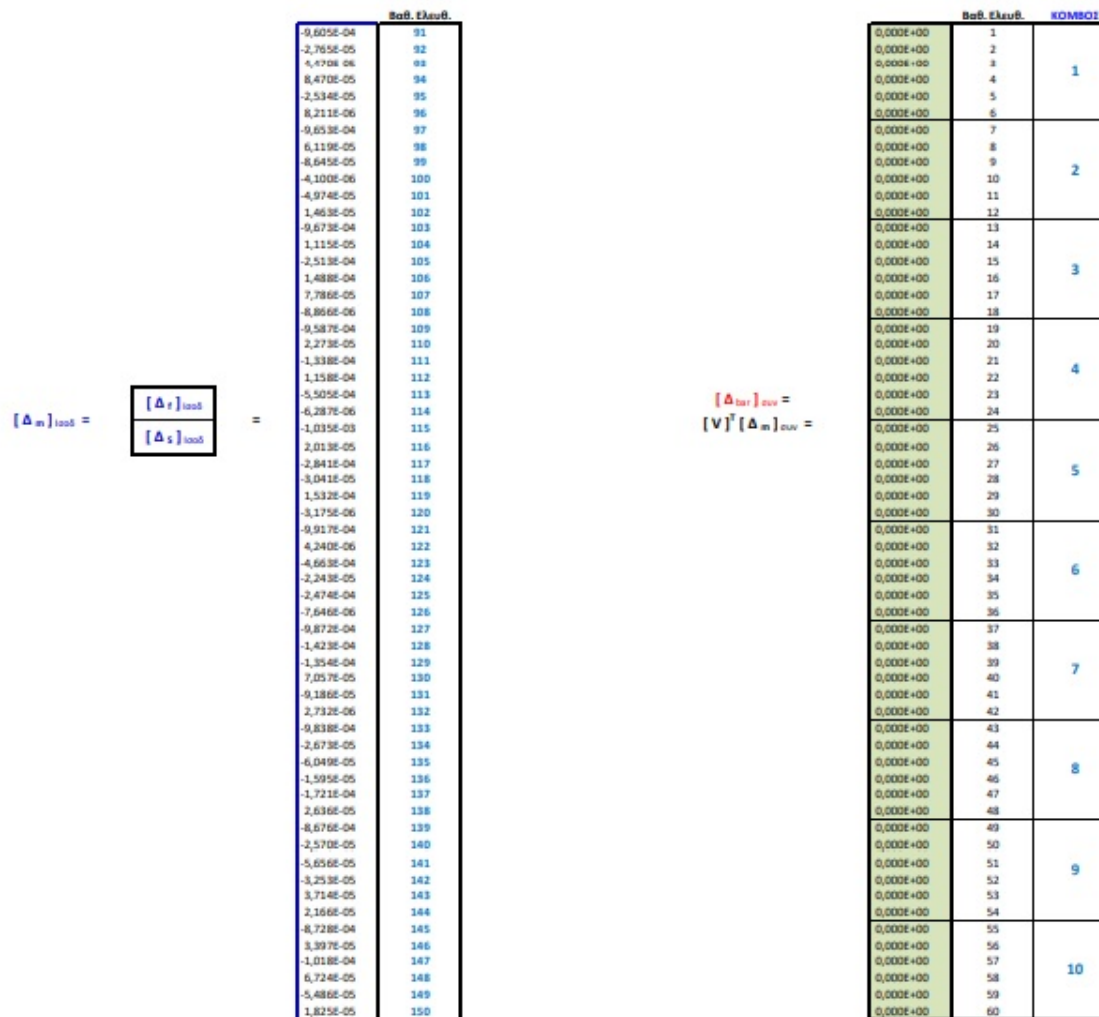
Κεφ. 10: ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΩΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Εικόνα 24^η

Κεφ. 10: ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΦΟΡΕΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

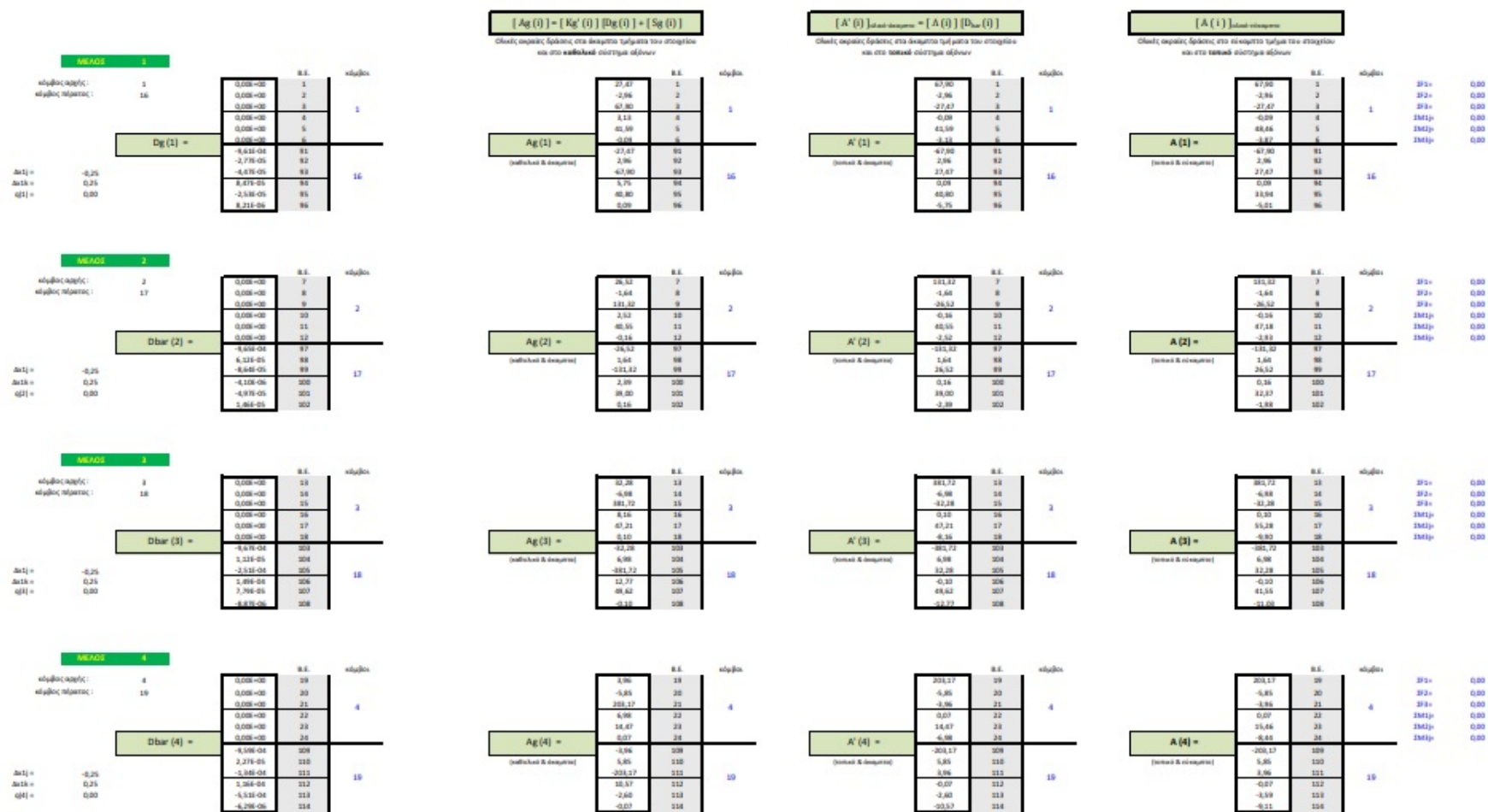
$[P_1]_{load} =$		$[Δ_s]_{load} =$		$[Δ_T]$		$[P_s]_{load} =$		$[P_s]_{sum} =$	
$[P_1] - [S_1] =$		$[Δ_s]_{cov} =$		$_{load} =$				$[S_s] + [P_s]_{load} =$	
-1,59E+01	91	0,00	1	-0,61E-04	91	27,47	1	27,47	1
0,00E+00	92	0,00	2	-2,77E-05	92	-1,06	2	-1,06	2
-5,81E+01	93	0,00	3	-4,47E-05	93	67,90	3	67,90	3
2,44E+01	94	0,00	4	8,47E-05	94	1,13	4	1,13	4
1,87E+01	95	0,00	5	-2,53E-05	95	41,59	5	41,59	5
0,00E+00	96	0,00	6	8,21E-06	96	-0,09	6	-0,09	6
-1,59E+01	97	0,00	7	-0,65E-04	97	26,52	7	26,52	7
0,00E+00	98	0,00	8	6,12E-05	98	-1,64	8	-1,64	8
-7,72E+01	99	0,00	9	-8,64E-05	99	131,32	9	131,32	9
0,00E+00	100	0,00	10	-4,10E-06	100	2,52	10	2,52	10
2,10E+01	101	0,00	11	-6,97E-05	101	40,55	11	40,55	11
0,00E+00	102	0,00	12	1,46E-05	102	-0,16	12	-0,16	12
-1,59E+01	103	0,00	13	-0,67E-04	103	32,28	13	32,28	13
0,00E+00	104	0,00	14	1,12E-05	104	-6,98	14	-6,98	14
-1,96E+02	105	0,00	15	-2,51E-04	105	381,72	15	381,72	15
5,31E+01	106	0,00	16	1,49E-04	106	8,16	16	8,16	16
6,94E+01	107	0,00	17	7,79E-05	107	47,21	17	47,21	17
0,00E+00	108	0,00	18	-8,87E-06	108	0,10	18	0,10	18
-1,59E+01	109	0,00	19	-0,59E-04	109	1,96	19	1,96	19
0,00E+00	110	0,00	20	2,77E-05	110	-5,85	20	-5,85	20
-1,26E+02	111	0,00	21	-1,34E-04	111	203,17	21	203,17	21
1,59E+01	112	0,00	22	1,16E-04	112	6,98	22	6,98	22
-1,09E+02	113	0,00	23	-5,51E-04	113	14,47	23	14,47	23
0,00E+00	114	0,00	24	-6,29E-06	114	0,07	24	0,07	24
-1,59E+01	115	0,00	25	-1,03E-03	115	37,64	25	37,64	25
0,00E+00	116	0,00	26	2,01E-05	116	0,76	26	0,76	26
-2,09E+02	117	0,00	27	-2,84E-04	117	431,54	27	431,54	27
-9,77E+00	118	0,00	28	-3,04E-05	118	-0,67	28	-0,67	28
1,73E+02	119	0,00	29	1,53E-04	119	54,09	29	54,09	29
0,00E+00	120	0,00	30	-3,18E-06	120	0,03	30	0,03	30
-1,59E+01	121	0,00	31	-0,92E-04	121	18,48	31	18,48	31
0,00E+00	122	0,00	32	4,34E-06	122	0,88	32	0,88	32
-3,44E+02	123	0,00	33	-4,66E-04	123	708,25	33	708,25	33
-1,04E+01	124	0,00	34	-2,24E-05	124	-0,97	34	-0,97	34
-9,88E+01	125	0,00	35	-2,47E-04	125	31,55	35	31,55	35
0,00E+00	126	0,00	36	-7,65E-06	126	0,08	36	0,08	36
-1,59E+01	127	0,00	37	-0,87E-04	127	25,29	37	25,29	37
0,00E+00	128	0,00	38	-1,42E-04	128	1,09	38	1,09	38
-1,54E+02	129	0,00	39	-1,35E-04	129	205,61	39	205,61	39
0,00E+00	130	0,00	40	7,06E-05	130	-2,72	40	-2,72	40
-3,32E+01	131	0,00	41	-0,19E-05	131	39,36	41	39,36	41
0,00E+00	132	0,00	42	2,73E-06	132	-0,03	42	-0,03	42
-1,59E+01	133	0,00	43	-0,84E-04	133	21,60	43	21,60	43
0,00E+00	134	0,00	44	-2,67E-05	134	1,51	44	1,51	44
-1,15E+02	135	0,00	45	-6,05E-05	135	91,89	45	91,89	45
-7,15E+00	136	0,00	46	-1,59E-05	136	-2,01	46	-2,01	46
-4,11E+01	137	0,00	47	-1,72E-04	137	35,07	47	35,07	47
0,00E+00	138	0,00	48	2,64E-05	138	-0,29	48	-0,29	48
-1,59E+01	139	0,00	49	-8,68E-04	139	27,49	49	27,49	49
0,00E+00	140	0,00	50	-2,57E-05	140	2,32	50	2,32	50
-8,44E+01	141	0,00	51	-5,66E-05	141	85,91	51	85,91	51
-1,73E+01	142	0,00	52	-3,25E-05	142	-2,82	52	-2,82	52
4,04E+01	143	0,00	53	3,71E-05	143	40,66	53	40,66	53
0,00E+00	144	0,00	54	2,17E-05	144	-0,34	54	-0,34	54
-1,59E+01	145	0,00	55	-8,73E-04	145	23,54	55	23,54	55
0,00E+00	146	0,00	56	3,40E-05	146	-4,01	56	-4,01	56
-1,75E+02	147	0,00	57	-1,03E-04	147	156,64	57	156,64	57
1,90E+01	148	0,00	58	6,72E-05	148	4,98	58	4,98	58
1,12E+01	149	0,00	59	-5,49E-05	149	36,15	59	36,15	59
0,00E+00	150	0,00	60	1,82E-05	150	-0,20	60	-0,20	60

Εικόνα 25^η



Εικόνα 26^η

Κεφ. 10: ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΩΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ



Εικόνα 27^η

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Π. ΠΑΠΑΔΡΑΚΑΚΗΣ, Ε. Ι. ΣΑΠΟΥΝΤΖΑΚΗΣ , ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΑΒΔΩΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΜΗΤΡΩΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ – ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΜΕΣΗΣ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑ , Αθήνα 2016, 2η Έκδοση (σελίδα 235- 236)
2. Π. ΠΑΠΑΔΡΑΚΑΚΗΣ, Ε. Ι. ΣΑΠΟΥΝΤΖΑΚΗΣ , ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΑΒΔΩΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΜΗΤΡΩΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ – ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΜΕΣΗΣ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑ , Αθήνα 2016, 2η Έκδοση (σελίδα 239)
3. Π. ΠΑΠΑΔΡΑΚΑΚΗΣ, Ε. Ι. ΣΑΠΟΥΝΤΖΑΚΗΣ , ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΑΒΔΩΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΜΗΤΡΩΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ – ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΜΕΣΗΣ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑ , Αθήνα 2016, 2η Έκδοση (σελίδα 240)
4. ΓΚΟΤΣΗΣ Κ. ΠΑΣΧΑΛΗΣ, ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ, Απρίλιος 2013.
5. Κόκκινος Τριαντάφυλλος-Φίλης, Ανάλυση Γραμμικών Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (Σημειώσεις), Αθήνα 2019.