



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Προσομοίωση διάδοσης κυματισμών κοντά στην ακτή με χρήση
μεθόδων CFD

Simulation of water waves propagation nearshore using CFD methods

Συγγραφέας

Χανιώτης Βασίλειος

A.M. 51113085

Επιβλέπων: Θεόδωρος Γεροστάθης, Αναπλ. Καθηγητής

Αιγάλεω 2021



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική εργασία

Προσομοίωση διάδοσης κυματισμών κοντά στην ακτή με χρήση μεθόδων CFD

Συγγραφέας

Χανιώτης Βασίλειος (Α.Μ. 51113085)

Επιβλέπων

Θεόδωρος Γεροστάθης,
Αναπλ. Καθηγητής ΠΑ.Δ.Α.

Ημερομηνία εξέτασης

04/03/2021

Εξεταστική Επιτροπή

Κωνσταντίνος Πολίτης,
Καθηγητής ΠΑ.Δ.Α.

Θεόδωρος Γεροστάθης,
Αναπλ. Καθηγητής ΠΑ.Δ.Α.

Σοφία Πέππα,
Επικ. Καθηγήτρια ΠΑ.Δ.Α.

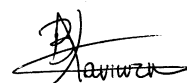
ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο κάτωθι υπογεγραμμένος Χανιώτης Βασίλειος του Χανιώτη Φραγκίσκου, με αριθμό μητρώου 51113085 φοιτητής του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής της Σχολής Μηχανικών του Τμήματος Ναυπηγών Μηχανικών, δηλώνω υπεύθυνα ότι:

«Είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, οι όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε ακριβώς είτε παραφρασμένες, αναφέρονται στο σύνολό τους, με πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία έχει συγγραφεί από μένα αποκλειστικά και αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου, όσο και του Ιδρύματος.

Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του πτυχίου μου».

Ο Δηλών



Χανιώτης Βασίλειος

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας, τον κύριο Θεόδωρο Γεροστάθη, για τη βοήθεια και το χρόνο που διέθεσε κατά την εκπόνηση της εργασίας. Τον ευχαριστώ για τη προθυμία του να με βοηθήσει και να απαντήσει στις ερωτήσεις μου πάνω στο θεωρητικό και τεχνικό υπόβαθρο της παρούσας εργασίας. Στη συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, που με στήριξε με κάθε δυνατό τρόπο σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Η προσομοίωση με μεθόδους υπολογιστικής ρευστοδυναμικής αποτελεί ένα αξιόπιστο και σημαντικό εργαλείο για τους ερευνητές και τη βιομηχανία. Η παρούσα εργασία αποσκοπεί στη μελέτη διάδοσης κυματισμών κοντά στην ακτή με χρήση του ανοιχτού λογισμικού OpenFOAM. Συγκεκριμένα μέσω της εργαλειοθήκης waves2Foam και της τεχνικής της ζώνης χαλάρωσης (relaxation zone), δίνεται η δυνατότητα προσομοίωσης της διάδοσης και απόσβεσης κυματισμών σε μια αριθμητική δεξαμενή δοκιμών (numerical wave tank). Αρχικά γίνεται αναφορά στη θεωρία γραμμικών και μη γραμμικών κυματισμών, καθώς και στα φαινόμενα που παρατηρούνται όταν ένας κυματισμός δέχεται την επίδραση του πυθμένα, έως ότου φτάσει στη ζώνη θραύσης. Στη συνέχεια αναλύονται οι βασικές εξισώσεις διατηρήσεις και η διακριτοποίηση τους με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων και περιγράφονται οι βασικές διεργασίες που πρέπει να γίνουν για τον καθορισμό της αριθμητικής δεξαμενής. Στα πλαίσια αυτά, πραγματοποιήθηκε ανάλυση ευαισθησίας στις παραμέτρους καθορισμού της ζώνης χαλάρωσης με σκοπό την εύρεση της αποδοτικότερης εφαρμογής της. Τα αριθμητικά πειράματα που πραγματοποιήθηκαν είχαν ως στόχο την προσομοίωση κυματισμών που διαδίδονται πάνω από μια βυθισμένη υφαλοκρηπίδα με διαφορετικές γεωμετρίες και τη μοντελοποίηση της θραύσης του κυματισμού στην ακτή.

Λέξεις κλειδιά: διάδοση κυματισμού, υπολογιστική ρευστοδυναμική, αριθμητική δεξαμενή, ζώνη χαλάρωσης, επίδραση της ρήχωσης, θραύση κυματισμού.

Abstract

Simulation with computational fluid dynamics methods is a reliable and important tool for researchers and industry. The present thesis refers to the study of propagation of incident waves nearshore using the open-source software OpenFOAM. Specifically using waves2Foam toolbox and the relaxation zone method, it is possible to make wave generation and absorption zones to simulate a numerical wave tank. At first the linear and non-linear wave theory is referred, as well as the phenomena which are observed when water waves interact with shoaling effects until the surf zone. Subsequently, the basic equations of conservation and their discretization with the Finite Volume Method -FVM are analyzed. Also, the basic processes that must be done for the definition of the numerical wave tank in OpenFOAM are described. In this context, a sensitivity analysis on the parameters of the relaxation zone is performed to find the most efficient application. The numerical experiments, in this thesis, aimed at simulating wave propagation over a submerged shelf of different geometries and the modelling of wave breaking on a sloping beach.

Keywords: water wave propagation, computational fluid dynamics, numerical wave tank, relaxation zone, shoaling effects, wave breaking.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή.....	1
1.1	Εισαγωγή στα κύματα.....	1
1.2	Σκοπός της διπλωματικής εργασίας	4
1.3	Δομή της εργασίας.....	4
2	Κυματισμοί.....	6
2.1	Γραμμική θεωρία κυματισμών (Linear wave theory).....	6
2.2	Μη γραμμική θεωρία κυματισμών (Non-linear waves)	12
2.2.1	Κυματική θεωρία Stokes 2 ^{ης} τάξης (Stokes second order wave theory) 13	
2.3	Ανάκλαση κυματισμών (Wave reflection)	14
2.4	Διάθλαση κυματισμού (Refraction).....	15
2.5	Περίθλαση κυματισμού (Diffraction).....	19
2.6	Συνδυασμός Διάθλασης – Περίθλασης (Combined Refraction-Diffraction)	20
2.7	Θραύση κυματισμών (Wave Breaking).....	21
2.8	Αναρρίχηση κύματος (Wave run - up)	26
3	Εξισώσεις διατήρησης	27
3.1	Αρχή διατήρησης της μάζας (εξίσωση συνέχειας)	27
3.2	Διαφορική εξίσωση ορμής.....	28
3.3	Εξισώσεις Navier-Stokes	29
3.4	Γενική μορφή της εξίσωσης μεταφοράς.....	31
3.5	Είδη ροής και οριακό στρώμα	32
3.6	Μέθοδος όγκου ρευστού (Volume Of Fluid - VOF).....	36
3.7	Μέθοδοι επίλυσης κυματικών προβλημάτων με χρήση CFD	38
4	Αριθμητική επίλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων.....	44
4.1	Διακριτοποίηση των εξισώσεων διατήρησης.....	44
4.2	Αριθμός Courant	52
5	Δημιουργία προσομοίωσης διάδοσης κυματισμών με το λογισμικό OpenFOAM. 54	
5.1	Εισαγωγή στο OpenFOAM	54

5.1.1	Προσομοίωση κυματισμού με χρήση του waves2Foam-(Wave generation with waves2Foam)	55
5.2	Αριθμητική δεξαμενή κυματισμών (Numerical wave tank)	55
5.2.1	Οριακές συνθήκες – (Boundary conditions)	56
5.3	Δημιουργία πλέγματος (Meshing)	57
5.3.1	BlockMesh	57
5.3.2	SnappyHexMesh	58
5.4	Προ-επεξεργασία (Pre-processing)	59
5.4.1	Φάκελος Constant – (Constant folder)	59
5.4.2	Εισαγωγή παραμέτρων κύματος – (waveProperties)	59
5.4.3	Ζώνες χαλάρωσης – (Relaxation Zones - RZ)	60
5.4.4	Χρονική μεταβλητή Tsoft	62
5.4.5	Φυσικές ιδιότητες	63
5.4.6	Φάκελος 0 - (0 folder)	63
5.4.7	Φάκελος system - (System folder)	64
5.5	Περιγραφή του στάδιου της επίλυσης της προσομοίωσης (Solving)	64
6	Αριθμητικές προσομοιώσεις	67
6.1	Ανάλυση ευαισθησίας στη μεταβλητή χρόνου Tsoft– (Sensitivity analysis on rump time – Tsoft)	67
6.2	Περίπτωση A – Προσομοίωση κύματος πάνω από μία παραλληλόγραμμη υφαλοκρηπίδα	69
6.3	Περίπτωση B – Προσομοίωση κύματος πάνω από μια τραπεζοειδή υφαλοκρηπίδα	76
6.4	Προσομοίωση θραύσης κυματισμού σε κεκλιμένο πυθμένα (Wave breaking stimulation in a sloped bathymetry)	83
7	Συμπεράσματα και Προτάσεις	87
	Βιβλιογραφία	90

1 Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγή στα κύματα

Η ακτογραμμή (coastline or seashore), ορίζεται ως η περιοχή όπου η στεριά συνδέεται με τη θάλασσα ή αλλιώς η οριακή γραμμή που διαχωρίζει τη στεριά με τον ωκεανό ή μια λίμνη. Περίπου 620,000 χιλιόμετρα ακτογραμμής υπολογίζεται ότι υπάρχει στο πλανήτη (Coast, 2021)

Παρά την περιορισμένη έκταση της, είναι ιδιαίτερα σημαντική για τον άνθρωπο. Περιλαμβάνει περιοχές με υψηλή συγκέντρωση πληθυσμού, σε όλες τις ηπείρους και δίνει τη δυνατότητα για ορισμένες από τις πιο σημαντικές ανθρώπινες δραστηριότητες. Αρκετές από τις μεγαλύτερες πόλεις στο κόσμο όπως, η Σαγκάη, το Τόκιο, το Rio de Janeiro, το Los Angeles, η Νέα Υόρκη και η Βοστώνη, έχουν δομηθεί στις ακτές.

Το χερσαίο τμήμα των περισσότερων παράκτιων ζωνών (coastal zone) του κόσμου αποτελείται από αμμώδεις παραλίες στις οποίες θραύεται το κύμα που έχει δημιουργηθεί μακριά από αυτές. Έτσι τα κύματα είναι το κυρίαρχο και ενεργό φαινόμενο στη παράκτια ζώνη.

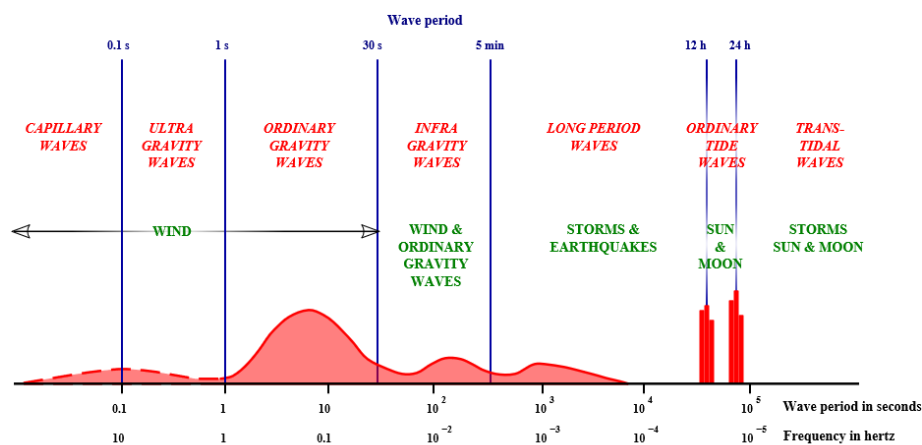
Ένας παρατηρητής εύκολα μπορεί διαπιστώσει ότι η επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται σε συνεχή κίνηση με διαρκείς αναταράξεις. Το πιο προφανές αίτιο είναι η επίδραση του ανέμου, δημιουργώντας τα ανεμογεννή κύματα που διαδίδονται σε ένα εύρη φάσμα του ωκεανού, έως ότου η ενέργεια τους εκτονωθεί με το φαινόμενο της θραύσης σε κάποια ακτή. Επομένως, με τον όρο κύμα εννοούμε τις περιοδικές μηχανικές ταλαντώσεις των σωματιδίων του νερού, στην επιφάνεια και στο βάθος της θάλασσας με τις οποίες μεταφέρεται ενέργεια. Η κίνηση της μάζας του νερού μπορεί να προκαλείται από διάφορες αιτίες με κυρίαρχες τον άνεμο, τη παλίρροια, τη κίνηση των ρευστών με διαφορετική πυκνότητα αλλά και εξαιτίας φυσικών καταστροφών.

Ο άνεμος είναι ένα συνηθισμένο φαινόμενο στους ωκεανούς. Για αυτό και τα περισσότερα κύματα παράγονται από τον άνεμο. Τα ανεμογεννή κύματα (wind waves ή wind-generated waves) είναι επιφανειακά κύματα τα οποία αν ο άνεμος είναι ισχυρός μπορούν να ταξιδεύουν χιλιάδες μίλια μέχρι να φτάσουν σε μία ακτή. Καθώς η διάδοση των κυμάτων συνεχίζεται μακριά από τη περιοχή γένεσής τους, μένουν τα κύματα μεγάλης περιόδου που ονομάζονται ανεπτυγμένα περιοδικά κύματα (swell)

Η βαρυτική έλξη του Ήλιου και της Σελήνης πάνω στη γη αλλά και η ουράνια περιστροφή τους, δημιουργεί ένα είδος κύματος που ονομάζεται παλίρροια. Το φαινόμενο αυτό περιλαμβάνει την άνοδο (πλημμυρίδα) και τη κάθοδο (άμπωτη) του νερού δύο φορές το εικοσιτετράωρο.

Ένας άλλος παράγοντας που μπορεί να δημιουργήσει ένα κύμα είναι η κίνηση των ρευστών με διαφορετική πυκνότητα. Ανάλογα με το είδος των δύο ρευστών, τα κύματα που παράγονται κινούνται ανάμεσα ή μέσα στα σύνορα τους, γι' αυτό και μπορούμε να τα χωρίσουμε σε τρεις κατηγορίες:

- air-water interface - Σύνορο αέρα με νερό όπου κύματα δημιουργούνται λόγω της ροής του αέρα στην επιφάνεια της θάλασσας (ocean waves).
- water-water interface - Σύνορο νερού με νερό όπου της διαφορετικής πυκνότητας, δημιουργούνται εσωτερικά κύματα (internal waves) τα οποία βρίσκονται στο εσωτερικό της θάλασσας.
- air-air interface - Σύνορο αέρα με αέρα όπου δημιουργούν ατμοσφαιρικά κύματα (atmospheric waves), λόγω κίνησης διαφορετικών αέρινων μαζών, τα οποία συνήθως εμφανίζονται σε ψυχρές περιοχές.

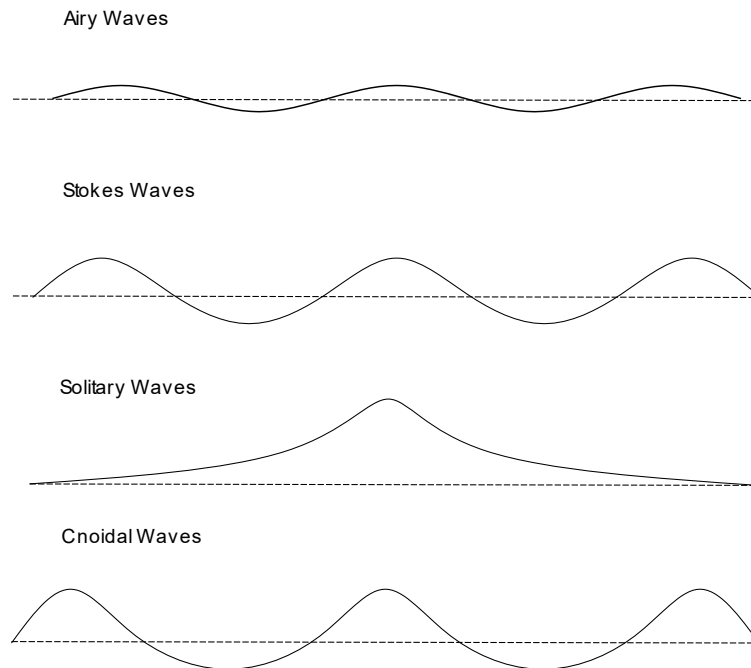


Εικόνα 1.1 Ταξινόμηση του φάσματος των ωκεανών κυμάτων σύμφωνα με την περίοδο των κυμάτων, (Munk ICCE 1950 Fig1 - Wind wave, 2015)

Η μετακίνηση του υποθαλάσσιου φλοιού της γης έχει ως αποτέλεσμα να αλλάζει σχήμα δυνητικά ο βυθός της θάλασσας απελευθερώνοντας τεράστια ποσά ενέργειας. Τέτοια παραδείγματα είναι οι υποθαλάσσιες χιονοστιβάδες, οι υποθαλάσσιες εκρήξεις ηφαιστείων και οι υποθαλάσσιοι σεισμοί που δημιουργούν κύματα που ονομάζονται σεισμικά θαλάσσια κύματα ή tsunami.

Στη φύση, το σχήμα, το μήκος, το ύψος και η ταχύτητα διάδοσης των κυματισμών είναι ακανόνιστα και τυχαία. Το γεγονός αυτό δημιούργησε την ανάγκη δημιουργίας διάφορων θεωριών που προσεγγίζουν την κίνηση των κυμάτων ανάλογα με το σχήμα της ελεύθερης επιφάνειας. Κάποια από τα θεωρητικά μοντέλα, γραμμικά και μη γραμμικά, που έχουν αναπτυχθεί και έχουν ορισμένο πεδίο εφαρμογής είναι τα εξής:

- Γραμμική θεωρία Airy (Linear Airy wave theory)
- Θεωρία κυματισμών Stokes (Stokes wave theory)
- Θεωρία μοναχικού κύματος (Solitary theory)
- Θεωρία ελλειπτικού κύματος (Cnoidal wave theory)
- Θεωρία Ροϊκής συνάρτησης (Stream function theory)



Εικόνα 1.2 Προφίλ γραμμικών και μη γραμμικών κυμάτων

Τα ανεμογεννή κύματα προκαλούν τις πιο σημαντικές αλλαγές σε μια παραλία καθώς το προφίλ της αλλάζει, όταν ιζήματα (π.χ. άμμος) μεταφέρονται υπεράκτια και πίσω στην ακτή, περιοδικά στο χρόνο καθώς και παράλληλα σε αυτήν λόγω των κυματογεννών παράκτιων ρευμάτων. Σε πολλές περιπτώσεις μεταφέρονται μεγάλοι όγκοι άμμου στην ακτή λόγω της δράσης των κυμάτων που πλησιάζουν λοξά την ακτή. Αυτά τα φαινόμενα, συχνά κυριαρχούν στην είσοδο ενός κόλπου και στις εκβολές όπου αναπτύσσονται μεγάλες ταχύτητες ροής.

Έτσι είναι λογικό όταν σχεδιάζεται μία κατασκευή κοντά στην ακτογραμμή να πρέπει να μελετηθεί και να γίνει πρόβλεψη του δυναμικού περιβάλλοντος, λόγω των κυματισμών και της ακτής. Αυτό είναι σημαντικό στο βαθμό που οι κατασκευές πρέπει να μένουν σταθερές και ασφαλείς καθώς και να μην προκαλέσουν ανεπιθύμητη συσσώρευση άμμου ή φαινόμενα διάβρωσης, παρεμβαίνοντας έτσι στην παράκτια ζώνη.

1.2 Σκοπός της διπλωματικής εργασίας

Σκοπός της εργασίας είναι να δημιουργήσει ένα αριθμητικό μοντέλο, γνωστό και ως αριθμητική δεξαμενή κυμάτων, η οποία μπορεί να αναπαράγει τη συμπεριφορά των κυματισμών όταν δέχονται την επίδραση του βάρους, καθώς αυτά διαδίδονται πάνω από βυθισμένα σώματα. Η αριθμητική δεξαμενή δημιουργείται στα πλαίσια της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (Computational Fluid Dynamics-CFD) από το γνωστό ανοιχτό λογισμικό OpenFOAM. Επίσης αφού πραγματοποιηθούν οι προσομοιώσεις γίνεται η σύγκριση των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας με τα αντίστοιχα πειραματικά και θεωρητικά, όπως αναφέρονται στις δημοσιεύσεις.

1.3 Δομή της εργασίας

Στη παράγραφο αυτή περιγράφεται συνοπτικά το περιεχόμενο κάθε κεφαλαίου που ακολουθεί.

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται μια παρουσίαση της γραμμικής και μη-γραμμικής θεωρίας των κυματισμών, της σχέσης διασποράς για κάθε βάθος πυθμένα (βαθύ-ρηχό-ενδιάμεσο), καθώς και η ανάλυση των κυματικών φαινομένων καθώς διαδίδονται προς την ακτή και δέχονται την επίδραση του πυθμένα, έως ότου εμφανιστεί το φαινόμενο της θραύσης του κύματος και της αναρρίχησης του στην ακτή.

Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται μια εισαγωγή στις βασικές εξισώσεις διατήρησης της ρευστομηχανικής που περιγράφουν τη κίνηση ενός ρευστού καθώς και μια περιγραφή των ειδών της ροής και του οριακού στρώματος. Επίσης γίνεται μια βιβλιογραφική επισκόπηση σε εργασίες και δημοσιεύσεις για την επίλυση κυματικών προβλημάτων με μεθόδους CFD.

Στο Κεφάλαιο 4 περιγράφεται αναλυτικά η διαδικασία διακριτοποίησης των εξισώσεων διατήρησης, σύμφωνα, με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων (Finite Volume Method).

Στο Κεφάλαιο 5 γίνεται μία εισαγωγή στο λογισμικό OpenFOAM και waves2Foam που χρησιμοποιήθηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Στη συνέχεια παρουσιάζεται το υπολογιστικό χωρίο και οι οριακές συνθήκες της αριθμητικής δεξαμενής (numerical wave tank) και ακολουθεί μια αναλυτική περιγραφή του σταδίου της προεπεξεργασίας και των παραμέτρων (φυσικών, αριθμητικών κλπ.) της θεωρίας κυματισμών που πρέπει να καθοριστούν για την εκτέλεση των προσομοιώσεων.

Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης ευαισθησίας που πραγματοποιήθηκε για τη διερεύνηση της επίδρασης της χρονικής μεταβλητής T_{soft} στην αριθμητική προσομοίωση. Στη συνέχεια γίνεται η ανάλυση στα αποτελέσματα των προσομοιώσεων των κυματισμών με μία μεταβαλλόμενη βαθυμετρία, όπου ως βαθυμετρία δοκιμάστηκε μία παραλληλόγραμμη υφαλοκρηπίδα, μία τραπεζοειδής

καθώς και ένας κεκλιμένος πυθμένας (ακτή) με σκοπό της προσομοίωση της ζώνης θραύσης.

Στο Κεφάλαιο 7 αναφέρονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη διερεύνηση των προσομοιώσεων και προτείνονται κάποιες προτάσεις για τυχόν βελτιώσεις ή για περαιτέρω διερεύνηση των περιπτώσεων μιας αριθμητικής δεξαμενής.

2 Κυματισμοί

2.1 Γραμμική θεωρία κυματισμών (Linear wave theory)

Η γραμμική θεωρία κυματισμών είναι μια γραμμική θεωρία η οποία χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση των κυμάτων βαρύτητας (gravity waves) στην επιφάνεια του νερού (Sea Water Level - SWL). Χρησιμοποιείται για την παράκτια και ωκεάνια μηχανική με σκοπό τη προσομοίωση της συμπεριφοράς των κυμάτων αλλά και την εκτίμηση των κυματικών χαρακτηριστικών.

Η γραμμική θεωρία βασίζεται στις εξής παραδοχές:

- Ο πυθμένας είναι οριζόντιος, σταθερού βάθους d , και αδιαπέραστος (no porosity).
- Το ρευστό είναι ασυμπίεστο και μη συνεκτικό.
- Η ροή είναι αστρόβιλη.
- Η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια ισούται με την ατμοσφαιρική.
- Επίσης το ύψος κύματος H είναι πολύ μικρότερο από του βάθους d και και το μήκος κύματος L όπου η παραδοχή αυτή αποτελεί τη βάση για τη θεμελίωση της γραμμικής θεωρίας όπου για $H/d \ll 1$ και $H/L \ll 1$ οι δεύτερης τάξης όροι αδράνειας (μη-γραμμικοί) μπορούν να απαλειφθούν.

Οι εξισώσεις και οριακές συνθήκες που διέπουν τη γραμμική κυματική θεωρία στις δύο διαστάσεις παρουσιάζονται συνοπτικά παρακάτω:

Λόγω της παραδοχής ότι η ροή είναι ασυμπίεστη, προκύπτει η εξίσωση συνέχειας, όπου:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

Επίσης από την υιοθέτηση της παραδοχής για την αστρόβιλη ροή, $\nabla \times \mathbf{u} = 0$, το ρευστό μπορεί να περιγραφεί από τη συνάρτηση δυναμικού ταχύτητας $\Phi(x, z, t)$ η οποία συνδέεται με την ταχύτητα με τις σχέσεις:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{και} \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (2.2)$$

Εξίσωση Laplace. Προκύπτει αντικαθιστώντας την Εξίσωση 2.2 στην Εξίσωση 2.1 αφού έχουν γίνει οι υποθέσεις για αστρόβιλο και ασυμπίεστο ρευστό.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.3)$$

Οριακή συνθήκη πυθμένα - (Bottom boundary Condition)

$$w = -u \frac{\partial d}{\partial x} \quad \text{ή} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial d}{\partial x} \quad \text{για} \quad z = -d(x) \quad (2.4)$$

όπου $d(x)$ η συνάρτηση βάθους. Για οριζόντιο πυθμένα έχουμε την συνθήκη $w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$ για $z = -d$.

Κινηματική οριακή συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας - (Kinematic free surface boundary condition). Προκύπτει από το γεγονός ότι τα σωματίδια του νερού της ελεύθερης επιφάνειας παραμένουν διαρκώς σε αυτή.

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{ή} \quad w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{για} \quad z = \eta(x, t) \quad (2.5)$$

Δυναμική οριακή συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας (Dynamic free surface boundary condition). Προκύπτει από την ολοκλήρωση της εξίσωσης της ορμής κατά μήκος μίας ροϊκής γραμμής και αποτελεί μια γενικευμένη εξίσωση Bernoulli για μη μόνιμη ροή,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p_\eta}{\rho} + gz = C(t) \quad \text{για} \quad z = \eta(x, t) \quad (2.6)$$

με $p_\eta = \text{σταθερό}$, όπου πολλές φορές αντικαθίσταται με την ατμοσφαιρική πίεση $p_\eta = 0$, και u, w αντιστοιχούν στην οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας στην επιφάνεια.

Περιοδική οριακή συνθήκη (Lateral periodic boundary condition)

$$\Phi(x, t) = \Phi(x + L, t) \quad (2.7)$$

$$\Phi(x, t) = \Phi(x, t + T) \quad (2.8)$$

Για τα κύματα που είναι περιοδικά στο χώρο και στο χρόνο, η οριακή συνθήκη εκφράζεται με τις παραπάνω σχέσεις ως συνθήκη περιοδικότητας όπου L είναι το

μήκος κύματος και T η περίοδος κύματος. Ουσιαστικά στα περιοδικά κύματα δεν έχουμε μεταφορά της ύλης αλλά της ενέργειας.

Για οριζόντιο πυθμένα $w = 0$ και απαλλήφοντας τους μη γραμμικούς όρους από την κινηματική οριακή συνθήκη, Εξίσωση 2.5, προκύπτει η οριακή συνθήκη:

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2.9)$$

Επίσης από την δυναμική οριακή συνθήκη, Εξίσωση 2.6, με την παραδοχή ότι η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια είναι ίση με την ατμοσφαιρική, δηλαδή ότι έχουμε μανομετρική πίεση $p_\eta = 0$, η εξίσωση Bernoulli παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + g\eta = C(t) \quad (2.10)$$

Απαλείφοντας τους μη γραμμικούς όρους $\frac{1}{2}(u^2 + w^2)$ προκύπτει η συνθήκη:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta = C(t) \quad (2.11)$$

η οποία με επανορισμό του δυναμικού Φ παίρνει την μορφή,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -g\eta \quad (2.12)$$

Από τις Εξισώσεις 2.9, 2.12 και με τη παραδοχή ότι $H/d \ll 1$ και $H/L \ll 1$, προκύπτει η μεικτή συνθήκη ελεύθερης επιφανείας ως προς το άγνωστο δυναμικό Φ στη θέση $z = 0$:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \text{ για } z = 0 \quad (2.13)$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών, η συνάρτηση δυναμικού ταχύτητας $\Phi(x, z, t)$ γράφεται στη μορφή,

$$\Phi(x, z, t) = X(x)Z(z) \sin \omega t, \quad (2.14)$$

με αντικατάσταση της Εξίσωσης 2.14 στην εξίσωση Laplace, Εξίσωση 2.3, οδηγεί στη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} Z(z) \sin \omega t + X(x) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} \sin \omega t = 0 \quad (2.15)$$

και διαιρώντας με την αναπαράσταση του Φ , Εξίσωση 2.14, η εξίσωση που προκύπτει είναι:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \quad (2.16\alpha)$$

ή

$$-\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = k^2 \quad (2.16\beta)$$

όπου k^2 σταθερά. Οι παραπάνω εξισώσεις οδηγούν στις παρακάτω συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k^2 X = 0 \quad (2.17)$$

και

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - k^2 Z = 0 \quad (2.18)$$

με γενικές λύσεις για καθεμία:

$$X(x) = A \cos kx + B \sin kx \quad (2.19)$$

και

$$Z(z) = C e^{kz} + D e^{-kz} \quad (2.20)$$

Οι σταθερές A, B, C, D και η λύση των δύο εξισώσεων υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις δύο συνθήκες (Πυθμένα-Δυναμική) (2.9,2.12) , σύμφωνα με τους (Dean & Dalrymple, 1991), και με την υπόθεση ότι έχουμε κύμα μικρού πλάτους - μικρή ανύψωση ελεύθερης επιφανείας η . Η τελική μορφή της εξίσωσης δυναμικού Φ δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi = \frac{Hg}{2\omega} \frac{\cosh[k(h+z)]}{\cosh(kd)} \sin(kx - \omega t) \quad (2.21)$$

και η στιγμιαία ανύψωση της ελεύθερης επιφανείας από την:

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) \quad (2.22)$$

Αυτή η σχέση αντιπροσωπεύει έναν προοδευτικό κυματισμό (progressive wave) ο οποίος διαδίδεται από τα αριστερά προς τα δεξιά χωρίς να αλλάζει η κυματομορφή του, Εικόνα 2.1, όπου:

η : στιγμιαία ανύψωση της ελεύθερης επιφανείας

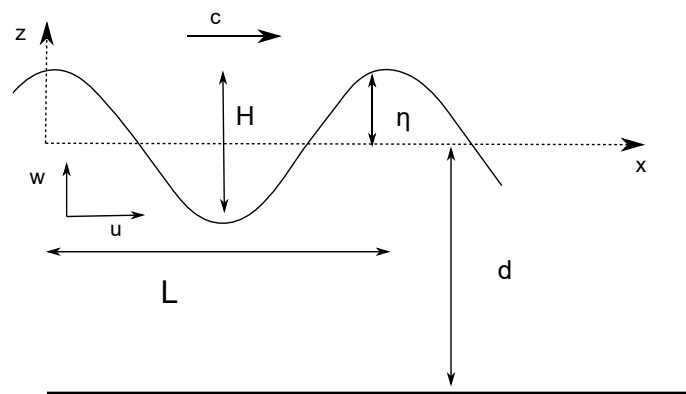
H : το ύψος κύματος

g : η επιτάχυνση της βαρύτητας

k : ο αριθμός κύματος με $k = 2\pi/L$

T : η περίοδος του κύματος

ω : η κυκλική συχνότητα με $\omega = 2\pi/T$



Εικόνα 2.1 Χαρακτηριστικά ενός αρμονικού κύματος

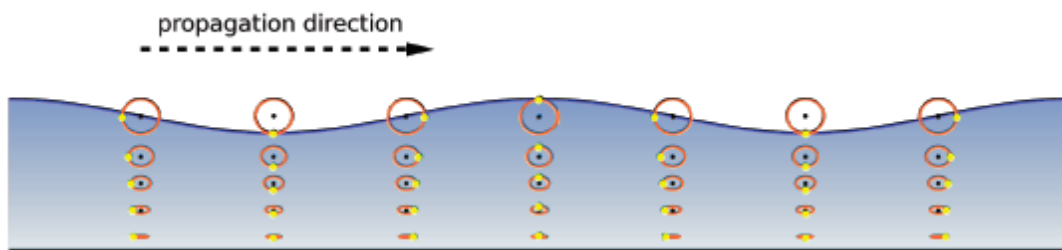
Οι ταχύτητες των υλικών σημείων του νερού u και w κατά την οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση, προκύπτουν από τον ορισμό της Φ παραγωγίζοντας ως προς x και z αντίστοιχα.

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\omega H \cosh[k(d+z)]}{2 \sinh(kd)} \cos(kx - \omega t) \quad (2.23)$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\omega H \sinh[k(d+z)]}{2 \sinh(kd)} \sin(kx - \omega t) \quad (2.24)$$

Κάτω από την επιφάνεια του νερού, υπάρχει μια κίνηση του ρευστού που σχετίζεται με τη κίνηση της ελεύθερης επιφάνειας. Ενώ η ανύψωση της επιφάνειας απεικονίζει

ένα κύμα διάδοσης, τα σωματίδια του ρευστού βρίσκονται σε τροχιακή κίνηση όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.2. Στο πλαίσιο της γραμμικής θεωρία κυματισμών οι τροχιές είναι κλειστές καμπύλες και συγκεκριμένα κύκλοι σε βαθύ νερό και ελλείψεις σε πεπερασμένο βάθος, με τις ελλείψεις να γίνονται περισσότερο επίπεδες κοντά στον πυθμένα. Έτσι, καθώς το κύμα διαδίδεται, τα σωματίδια υγρού απλά περιστρέφονται γύρω από τη μέση θέση τους. Με τη κίνηση του κύματος διάδοσης, τα σωματίδια του ρευστού μεταφέρουν ενέργεια στην κατεύθυνση διάδοσης του, χωρίς όμως να έχουν μέση ταχύτητα.



Εικόνα 2.2 Τροχιές υλικών σημείων (Airy wave theory, 2008)

Τα κίτρινα σημεία της Εικόνας 2.2 υποδεικνύουν τη στιγμιαία θέση των σωματιδίων του νερού στις πορτοκαλί τροχιές του, με κέντρα τις μαύρες κουκίδες που βρίσκονται πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια.

Αν αντικαταστήσουμε τη σχέση του δυναμικού Φ , στη μεικτή συνθήκη ελεύθερης επιφανείας, Εξίσωση 2.13, μας οδηγεί στη σχέση διασποράς που συσχετίζει τη κυκλική συχνότητα ω με το βάθος d και το κυματαριθμό k .

$$\omega^2 = gk \tanh(kd) \quad (2.25)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί και ως:

$$c = \frac{gT}{2\pi} \tanh(kd) \quad (2.26)$$

και

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kd) \quad (2.27)$$

όπου c η φασική ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{L}{T} \quad (2.28)$$

Σχέση διασποράς - Βαθύ νερό

Για $kd > \pi$ ή $d > 0.5L$ έχουμε βαθύ νερό και η συνάρτηση $\tanh(kd) \approx 1$ οπότε η σχέση διασποράς για βαθύ νερό είναι η,

$$\omega^2 = kg \quad (2.29)$$

και αντίστοιχα η φασική ταχύτητα και το μήκος κύματος δίνονται από τις σχέσεις:

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad \text{και} \quad L = \frac{gT^2}{2\pi} \quad (2.30)$$

Σχέση διασποράς - Ρηχό νερό

Για $kd < \frac{\pi}{10}$ ή $d < 0.05L$ έχουμε ρηχό νερό και η συνάρτηση $\tanh(kd) \approx kd$ οπότε η σχέση διασποράς για ρηχό νερό είναι η,

$$\omega^2 = k^2gd \quad (2.31)$$

και αντίστοιχα η φασική ταχύτητα και το μήκος κύματος δίνονται από τις σχέσεις:

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gd} \quad (2.32)$$

και

$$L = T\sqrt{gd} \quad (2.33)$$

Σχέση διασποράς - Νερό ενδιάμεσου βάθους

Για $\pi/10 < kd < \pi$ ή $0.05L < d < 0.5L$, δηλαδή για ενδιάμεσο βάθος, λύνουμε την αρχική σχέση της σχέσης διασποράς, Εξίσωση 2.25, αριθμητικά π.χ. με τη μέθοδο Newton-Raphson.

2.2 Μη γραμμική θεωρία κυματισμών (Non-linear waves)

Παρόλο που η γραμμική θεωρία κυματισμών στηρίζεται σε συγκεκριμένες παραδοχές και απλοποιήσεις, αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για την ακτομηχανική. Ωστόσο, όταν η κλίση του κυματισμού (H/L) καθώς και το πηλίκο του ύψους κύματος προς το βάθος (H/d) μεγαλώνει (π.χ. ρηχό νερό), οι μη γραμμικοί όροι αποκτούν ιδιαίτερη σημασία και έτσι η γραμμική θεωρία που παρουσιάστηκε

δε μπορεί να εφαρμοστεί Η συνάρτηση της ελεύθερης επιφάνειας . στους μη γραμμικούς κυματισμούς δεν είναι συνημιτονοειδής, καθώς οι κυματισμοί εμφανίζουν μια ασυμμετρία στο προφίλ τους με πιο οξείες κορυφές και το πλάτος τους είναι μεγαλύτερο του $H/2$, ενώ οι κοιλάδες είναι πιο πλατιές και το πλάτος τους είναι μικρότερο του $H/2$. Στη φύση οι κυματισμοί προφανώς είναι μη-γραμμικοί.

Γενικά στις μη γραμμικές θεωρίες, οι δυναμικές και κινηματικές συνθήκες στο όριο της ελεύθερης επιφάνειας αντιμετωπίζονται με διαφορετικό τρόπο από τη γραμμική θεωρία. Η ευρέως διαδεδομένη θεωρία κυμάτων Stokes περιγράφει μία ομάδα μη γραμμικών κυμάτων νερού που παίρνουν την ονομασία τους ανάλογα με το βαθμό μη-γραμμικότητας που διατηρείται στις εξισώσεις.

2.2.1 Κυματική θεωρία Stokes 2^{ης} τάξης (Stokes second order wave theory)

Μέσα σε μία πληθώρα από κυματικές θεωρίες, η θεωρία των κυμάτων Stokes έχει εφαρμοστεί συχνά στις μελέτες που διερευνούν τη συμπεριφορά σε διάφορα κύματα. Η θεωρία κύματος Stokes δεύτερης τάξης αναφέρεται σε μια μη-γραμμική θεωρία που χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση της ελεύθερης επιφάνειας των αρμονικών κυμάτων μικρής αλλά πεπερασμένης κλίσης (H/L). Χρησιμοποιείται επίσης για τη προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ κυμάτων και κατασκευών είτε είναι πλωτές είτε βυθισμένες. Η θεωρία Stokes 2^{ης} τάξης δεν ανταποκρίνεται πολύ καλά σε ρηχό νερό, αλλά εφαρμόζεται κυρίως για βαθύ νερό ή ενδιάμεσο βάθος. Συνήθως σε ρηχό νερό χρησιμοποιούνται άλλες μη γραμμικές θεωρίες όπως οι Stokes 5th τάξης (Fenton, 1985), Cnoidal theory, Solitary wave theory, (Dean & Dalrymple, 1991), Boussinesq theory (Mei, Stiassnie, & Yue, 2005) κ.α. Η αδιάστατη παράμετρος Ursell (Ursell, 1953) χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της μη-γραμμικής θεωρίας Stokes όσον αφορά την εγκυρότητα της στα ρηχά νερά. Η παράμετρος αυτή έχει τη παρακάτω μορφή:

$$U_r = \frac{L^2 H}{d^3} \quad (2.34)$$

και για τη θεωρία Stokes 2^{ης} τάξης θα πρέπει να είναι μικρότερη από $8\pi^2/3$ σύμφωνα με τους (Dean & Dalrymple, 1991).

Η άμεση επέκταση της γραμμικής θεωρίας κυμάτων είναι η διατήρηση όλων των μη γραμμικών όρων, όπως όρος $u \frac{\partial \eta}{\partial x}$ για $z = \eta(x, t)$ στην κινηματική οριακή συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας, Εξίσωση 2.5, αλλά και ο μη γραμμικός όρος $\frac{1}{2}(u^2 + w^2)$ στη δυναμική οριακή συνθήκη, Εξίσωση 2.6.

Το δυναμικό Φ αναπτύσσεται σε μια δυναμοσειρά μια μικρής αδιάστατης παραμέτρου ε που ορίζεται ως $\varepsilon = \frac{kH}{2}$ και $\Phi = \Phi_0 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \Phi_i$. Ο πρώτος

προσθετός του αναπτύγματος Φ_0 αναφέρεται στη δυναμικό της γραμμικής θεωρίας και κάθε ένας από τους όρους $\varepsilon^i \Phi_i$ της δυναμοσειράς πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace, Εξίσωση 2.3 και τις οριακές συνθήκες που έχουν ήδη αναφερθεί.

Η συνάρτηση δυναμικού για Stokes δεύτερης τάξης είναι ίση με:

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon^1 \Phi_1 \quad (2.35)$$

$$\Phi = \frac{Hg}{2\omega} \frac{\cosh k(d+z)}{\cosh kd} \sin(kx - \omega t) + \frac{3}{32} H^2 \omega \frac{\cosh 2k(d+z)}{\sinh^4 kd} \sin 2(kx - \omega t) \quad (2.36)$$

Το προφίλ των κυματισμών είναι το άθροισμα δύο κυμάτων όπου το ένα είναι ίδιο με αυτό που αποκτήθηκε από τη θεωρία γραμμικών κυματισμών, ενώ το άλλο από τους όρους διόρθωσης δεύτερης τάξης όπως φαίνεται στις παρακάτω εξισώσεις:

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon^1 \eta_1 \quad (2.37)$$

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) + \frac{kH^2}{16} \frac{\cosh kd}{\sinh^3 kd} (2 + \cosh 2kd) \cos 2(kx - \omega t) \quad (2.38)$$

2.3 Ανάκλαση κυματισμών (Wave reflection)

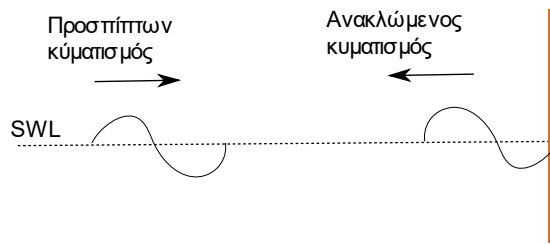
Όταν οι θαλάσσιοι κυματισμοί στη φύση προσπίπτουν σε κάποια παράκτια κατασκευή, όπως κυματοθραύστες ή γενικά σε κάποιο κατακόρυφο εμπόδιο, ανακλώνται από αυτήν σε αντίθετη κατεύθυνση από αυτήν της διάδοσής τους, Εικόνα 2.3. Στην ολική ανάκλαση, όπου ο ανακλώμενος κυματισμός διαδίδεται σε κατεύθυνση αντίθετη από αυτήν του προσπίπτοντος, δημιουργείται μια επαλληλία που οδηγεί στη δημιουργία στάσιμου κύματος

Η στιγμιαία ανύψωση ενός στάσιμου κυματισμού μπορεί να υπολογιστεί από την Εξίσωση 2.39 παρακάτω, δηλαδή από το άθροισμα δύο κυμάτων με ίδιο ύψος αλλά σε αντίθετη κατεύθυνση, Εικόνα 2.3.

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) + \frac{H}{2} \cos(kx + \omega t) \quad (2.39)$$

ή

$$\eta = H \cos(\omega t) \cos(kx) \quad (2.40)$$



Εικόνα 2.3 Ανάκλαση κυματισμού

Στη περίπτωση της μερικής ανάκλασης από έναν κυματοθραύστη ή από ένα απορροφητικό κρηπιδότοιχο, η στιγμιαία ανύψωση της στάθμης ενός ανακλώμενου κυματισμού δίνεται από τη σχέση (Καραμπάς, Κρεστενίτης, & Κουτίτας, 2015) ,

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) + C_R \frac{H}{2} \cos(kx + \omega t), \quad (2.41)$$

όπου C_R ο συντελεστής ανάκλασης, που κυμαίνεται από 0 έως 1 έτσι ώστε για:

$$C_R = \begin{cases} 1, & \text{πλήρης ανάκλαση} \\ 0, & \text{πλήρης απορρόφηση} \end{cases} \quad (2.42)$$

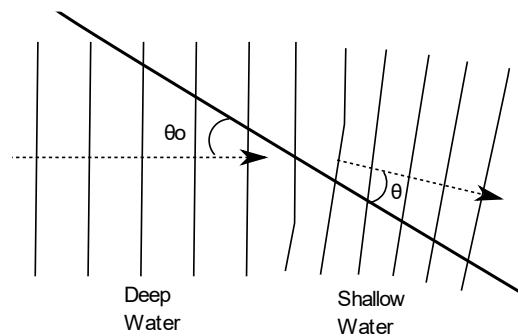
2.4 Διάθλαση κυματισμού (Refraction)

Καθώς ένας κυματισμός οδεύει προς την ακτή παρατηρείται επίδραση της ρήχωσης του πυθμένα, καθώς η κίνηση των μορίων του νερού πραγματοποιείται σε όλη τη στήλη του νερού και έτσι η επίδραση του βάθους συμβάλει στο μετασχηματισμό του.

Εφόσον στους κυματισμούς που εξετάζουμε δεν έχουμε μεταφορά της ύλης αλλά της ενέργειας, όπου η περίοδος κυματισμού T παραμένει σταθερή, η επίδραση του βάθους d έχει ως αποτέλεσμα τις μεταβολές στο μήκος κύματος L και στη φασική ταχύτητα c , με τα L και c στη γενική περίπτωση να υπολογίζονται από τις Εξισώσεις 2.26, 2.27 που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Στη φύση οι κυματισμοί διαδίδονται στον τρισδιάστατο χώρο. Η διάθλαση είναι ένα τρισδιάστατο φαινόμενο στα κύματα κατά το οποίο παρατηρείται αλλαγή στη κατεύθυνση των κυματισμών, καθώς διαδίδονται από ένα βάθος μικρότερο ή μεγαλύτερο σε ένα άλλο διαφορετικό. Το φαινόμενο αυτό πραγματοποιείται διότι οι κορυφογραμμές ενός κυματισμού σε ένα μικρότερο βάθος d ($d < d_0$), διαδίδονται με φασική ταχύτητα c ($c < c_0$) μικρότερη από αυτές που βρίσκονται σε μεγαλύτερο βάθος και έτσι διανύουν μικρότερη απόσταση για το ίδιο χρονικό διάστημα. Επίσης καθώς οι κυματισμοί πλησιάζουν την ακτή, διαδίδονται σε όλο και μικρότερα βάθη

με αποτέλεσμα να μεταβάλλεται η κατεύθυνση τους, διαθλώνται, Εικόνα 2.4 και τείνουν να προσπίπτουν κάθετα στην ακτογραμμή, καθώς οι κορυφογραμμές τους τείνουν να παραλληλιστούν με τις ισοβαθείς του πυθμένα.



Εικόνα 2.4 Διάθλαση κυματισμού λόγω επίδρασης του βάθους.

Εφόσον οι κορυφογραμμές τείνουν να γίνουν παράλληλες με τις ισοβαθείς, μπορεί να συγκλίνουν, όπως σε ένα ακρωτήριο ή να αποκλίνουν όπως σε έναν κόλπο, Εικόνα 2.5, ανάλογα με τη κάθε περίπτωση. Στην πρώτη περίπτωση υπάρχει αύξηση του ύψους του κύματος H , ενώ στη δεύτερη περίπτωση μείωση.



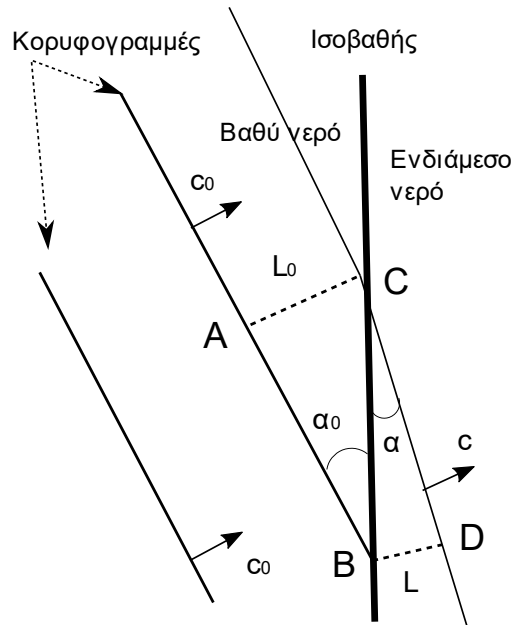
Εικόνα 2.5 Διάθλαση κυματισμού κοντά στην ακτή

Ας θεωρήσουμε ένα κυματισμό που διαδίδεται από βαθύ νερό με μήκος κύματος L_0 και στη συνέχεια εισέρχεται σε ενδιάμεσο βάθος με μήκος κύματος που μειώνεται σε L , ($L_0 > L$). Η γωνία πρόσπτωσης σε βαθύ νερό ορίζεται ως α_0 και σε ενδιάμεσο νερό με α . Έτσι λοιπόν όπως φαίνεται και στην Εικόνα 2.6, σε διάρκεια μιας περιόδου το κύμα σε βαθύ νερό διανύει μια απόσταση $AC = L_0$ και $BD = L$ σε ενδιάμεσο βάθος, με αποτέλεσμα να προκύπτουν εύκολα οι σχέσεις από τη τριγωνομετρία:

$$BC = \frac{L_0}{\sin \alpha_0} = \frac{L}{\sin \alpha} \quad \text{οπότε} \quad (2.43)$$

$$\frac{\sin a}{\sin a_0} = \frac{L}{L_0} \quad (2.44)$$

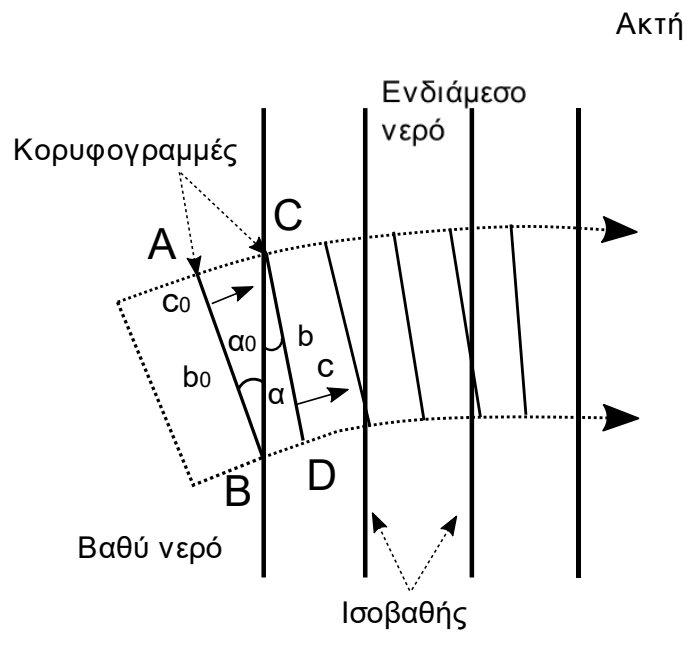
Η εξίσωση 2.44 είναι γνωστή και ως νόμος του Snell (Καραμπάς, Κρεστενίτης, & Κουτίτας, 2015).



Εικόνα 2.6 Διάθλαση κυματισμού και γραφική απεικόνιση του νόμου Snell

Αν θεωρήσουμε b_0 και b την απόσταση ανάμεσα στις κάθετες ευθείες με τη κορυφογραμμή, δηλαδή AB και CD αντίστοιχα όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.7, προκύπτει ότι, (Καραμπάς, Κρεστενίτης, & Κουτίτας, 2015):

$$BC = \frac{b_0}{\cos a_0} = \frac{b}{\cos a} \quad (2.45)$$



Εικόνα 2.7 Μεταβολή κατεύθυνσης των κυματισμών σε παράλληλες ισοβαθείς

Έτσι αν υποθέσουμε ότι η ισχύς που διέρχεται από το διάστημα b_0 είναι ίση με αυτήν στο διάστημα b , καθώς και ότι δεν έχουμε απώλειες ενέργειας, προκύπτει η εξίσωση διατήρησης της ισχύος:

$$P_0 = \frac{E_0 b_0 n_0}{T} = P = \frac{E b n}{T}, \quad (2.46)$$

όπου

- E , η ενέργεια που εμπεριέχεται σε ένα μήκος κύματος και ανά μονάδα εγκάρσιας κατεύθυνσης και ισούται με:

$$E = \frac{\rho g H^2 L}{8} \quad (2.47)$$

- n , συντελεστής που ισούται με $n = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right]$, με $n_0 = 0.5$ για βαθύ νερό και $n \leq 1$ για ρηχό νερό.

Η σύγκλιση και η απόκλιση των καθέτων των κυμάτων (b_0 και b) μαζί με τις επιπτώσεις της ρήχωσης, Εικόνα 2.7, προκαλούν στο κύμα τη διακύμανση του ύψους του από τα βαθιά νερά στα ενδιάμεσα, όπου με αντικατάσταση της E από την Εξίσωση 2.47 στην Εξίσωση 2.46, προκύπτει η σχέση:

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{n_0 L_0}{nL}} \sqrt{\frac{b_0}{b}} \quad (2.48)$$

με H_0 το ύψος κύματος σε βαθύ νερό και H το ύψος κύματος στο βάθος που εξετάζουμε.

Από την Εξίσωση 2.48 και 2.45 προκύπτει η εξίσωση:

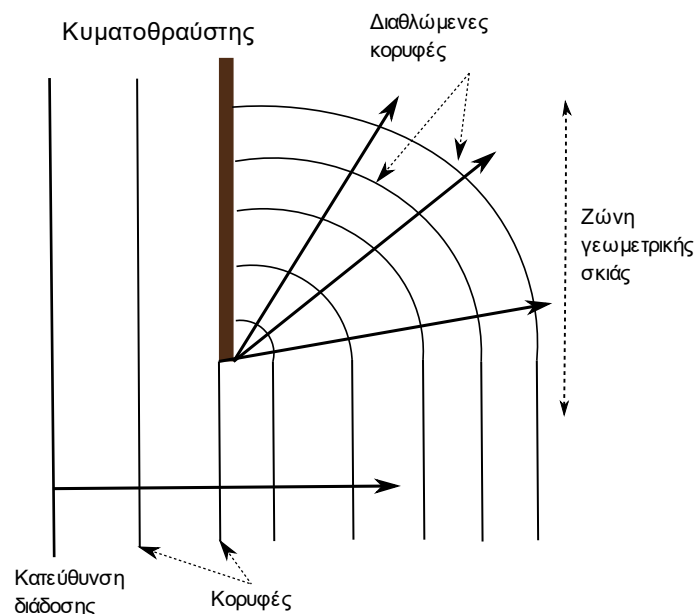
$$H = \left(\sqrt{\frac{n_0 L_0}{nL}} \right) \left(\sqrt{\frac{\cos a_0}{\cos a}} \right) H_0 = k_S k_R H_0 \quad (2.49)$$

όπου

- $k_S = \sqrt{\frac{n_0 L_0}{nL}}$ είναι ο συντελεστής ρήχωσης, δηλαδή η μεταβολή του ύψους H λόγω της μεταβολής του βάθους.
- $k_R = \sqrt{\frac{\cos a_0}{\cos a}}$ είναι ο συντελεστής διάθλασης, δηλαδή η μεταβολή του ύψους H λόγω της μεταβολής των καθέτων στη διάδοση του κύματος.

2.5 Περίθλαση κυματισμού (Diffraction)

Η περίθλαση των κυματισμών είναι ένα φαινόμενο κατά το οποίο η ενέργεια του κύματος διαχέεται πλευρικά και κάθετα σε σχέση με την αρχική κατεύθυνση διάδοσης των κυμάτων. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.8, το κύμα διαδίδεται κανονικά σε ένα κυματοθραύστη πεπερασμένου μήκους με αποτέλεσμα να εμφανίζεται το φαινόμενο της περίθλασης στη πίσω πλευρά του κυματοθραύστη. Η ζώνη διαταραχής και δημιουργίας περίθλασης στη πίσω πλευρά του κυματοθραύστη ονομάζεται, ζώνη γεωμετρικής σκιάς (geometric shadow zone). Τα πιο κοινά φυσικά εμπόδια που ευθύνονται για τη περίθλαση των κυμάτων είναι οι ύφαλοι, ακρωτήρια και μόλοι. Κατά τη περίθλαση, μειώνεται το ύψος του κυματισμού και αλλάζει η κατεύθυνση του. Είναι προφανές ότι η ποσοτική κατανόηση των επιπτώσεων της περίθλασης των κυματισμών σχετίζεται με το σχεδιασμό και την αξιολόγηση της διάταξης διαφόρων λιμανιών αλλά και των διαφόρων κατασκευών απορρόφησης κύματος.



Εικόνα 2.8 Περίθλαση κυματισμών πίσω από κυματοθραύστη

2.6 Συνδυασμός Διάθλασης – Περίθλασης (Combined Refraction-Diffraction)

Όπως προαναφέρθηκε, η διάθλαση (refraction) του κύματος που προκαλεί αλλαγή στη κατεύθυνση του και στο ύψος του λόγω του βάθους, όπως και η περίθλαση (diffraction), προκαλούνται συνήθως από την παρεμβολή κάποιου φυσικού ή τεχνητού εμποδίου, δημιουργώντας δυσάρεστα αποτελέσματα ιδίως όταν υπάρχει παραλία κοντά. Είναι επομένως απαραίτητο να μπορούν να αντιμετωπιστούν και τα δύο φαινόμενα ταυτόχρονα. Για την επίλυση τους, θεωρητικά το πρόβλημα είναι δύσκολο απαιτώντας τη λύση της εξίσωσης Laplace σε ένα χωρίο μεταβαλλόμενων παραμέτρων. Επομένως έπρεπε να γίνουν απλοποιήσεις – υποθέσεις όπως η απλούστευση που χρησιμοποιείται συχνά στη πράξη ότι η περίθλαση είναι σημαντική σε μερικά μήκη κύματος κοντά στη κατασκευή και πιο μακριά κυριαρχεί μόνο η διάθλαση. Ο Berkhoff, σύμφωνα με τους (Dean & Dalrymple, 1991), αναζητώντας ένα μοντέλο μιας εξίσωσης που διέπει το τρόπο διάδοσης του κύματος (που έχει εξάρτηση $\cosh(d + z)$ από το βάθος d σε περιοχές με μικρές κλίσεις στον πυθμένα, πολλαπλασίασε την εξίσωση Laplace με $\cosh(d + z)$ και την ολοκλήρωσε ως προς το βάθος. Αυτό δίνει μια εξίσωση στις δύο οριζόντιες διαστάσεις. Η εξίσωση κατά Berkhoff είναι η:

$$\nabla_h(cC_g \nabla_h F) + \omega^2 \left(\frac{C_g}{c}\right) F = 0 \quad (2.50)$$

όπου:

∇_h – ο οριζόντιος τελεστής κλίσης

c – η φασική ταχύτητα $c = \frac{\omega}{k} = \frac{L}{T}$

c_g – η ταχύτητα ομάδας $c_g = nc$

ω – η κυκλική συχνότητα του κύματος

n – ο συντελεστής $n = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right]$

k – ο κυματαριθμός

g – η επιτάχυνση της βαρύτητας

d – το βάθος

$F(x, y)$ – σύνθετη συνάρτηση που αντιπροσωπεύει το πλάτος κύματος και τη φάση.

Το συνολικό δυναμικό ταχύτητας προκύπτει ως:

$$\Phi(x, y, z) = F(x, y) \frac{\cosh k(d+z)}{\cosh(kd)} \quad (2.51)$$

2.7 Θραύση κυματισμών (Wave Breaking)

Η θραύση των κυματισμών είναι ένα φαινόμενο κατά το οποίο όταν το κύμα ξεπεράσει ένα επιτρεπόμενο όριο, τότε η κορυφή του κύματος θραύεται. Αποτελεί ένα φαινόμενο πολύ συνηθισμένο όχι μόνο για τη παράκτια ζώνη, αλλά και για την ανοιχτή θάλασσα (βαθύ νερό) για διαφορετικούς λόγους στη κάθε περίπτωση.

Όσον αφορά την ανοιχτή θάλασσα, δηλαδή σε βαθύ νερό, η θραύση οφείλεται στην αύξηση της κλίσης H_0/L_0 πάνω από ένα επιτρεπόμενο όριο. Για βαθύ νερό το όριο θραύσης είναι:

$$\left(\frac{H_0}{L_0} \right)_{max} = 0.142. \quad (2.52)$$

Έτσι σε περίπτωση που ξεπεραστεί το όριο αυτό, δηλαδή για $H_0/L_0 > 0.142$ ή $H_0/L_0 > 1/7$, ο κυματισμός καθίσταται υδροδυναμικά ασταθής και θραύεται.

Στη γενική περίπτωση το όριο θραύσης δίνεται από τη εξίσωση (Καραμπάς, Κρεστανίτης, & Κουτίτας, 2015)

$$\left(\frac{H}{L} \right)_{max} = 0.142 \tanh \left(\frac{2\pi d}{L} \right). \quad (2.53)$$

Όσον αφορά το ρηχό νερό, όταν το κύμα διαδίδεται στη παράκτια ζώνη εξαιτίας της επίδρασης της ρήχωσης, προκαλείται μια συνεχής ελάττωση της ταχύτητας καθώς ο κυματισμός διαδίδεται προς την ακτή. Λόγω της ελάττωσης της ταχύτητας, προκαλείται μείωση στο μήκος κύματος L , έτσι, προκειμένου η ενέργεια να παραμείνει σταθερή, το ύψος κύματος H αυξάνεται και οι ταχύτητες των σωματιδίων του ρευστού μεγαλώνουν. Στην κορυφή του κυματισμού όταν η μέγιστη οριζόντια ταχύτητα u τείνει να ξεπεράσει τη φασική ταχύτητα c ($u > c$), τότε τα υλικά σημεία του νερού στο ψηλότερο μέρος του κυματισμού αποσπώνται και στη συνέχεια καταδύονται προς τα εμπρός καθώς αρχίζει να θραύεται ο κυματισμός. Το φαινόμενο της θραύσης αποτελείται από απότομες αναταραχές και δίνες, ανάμιξη νερού με αέρα, έντονη τυρβώδη ροή, καθώς και μεγάλο ποσό χαμένης ενέργειας (με αποτέλεσμα την ελάττωση του ύψους κύματος H). Καθώς ο κυματισμός θραύεται στην ακτή, λόγω του βάθους που μειώνεται συνεχώς, η θραύση του κυματισμού συνεχίζεται με το φαινόμενο της αναρρίχησης στην ακτή. Η περιοχή του ρηχού νερού που πραγματοποιείται το παραπάνω φαινόμενο ονομάζεται ζώνη θραύσης – surf zone.

Ο λόγος, που αποτελεί κριτήριο θραύσης στο ρηχό νερό, είναι ο, γ_b που ισούται με το ύψος κύματος H_b προς το βάθος θραύσης d_b , και κατά επέκταση όταν ο λόγος αυτός ξεπεράσει μια κρίσιμη τιμή, ο κυματισμός θραύεται. Για τον έλεγχο της θραύσης του κυματισμού σε ρηχό νερό, έχει επικρατήσει μια θεωρητική τυπική τιμή:

$$\gamma_b = \frac{H_b}{d_b} = 0.78 \sim 0.9 \quad (2.54)$$

Στη διεθνή βιβλιογραφία ένα επίσης κριτήριο θραύσης γράφεται κατά (Κουτίτας, 1994):

$$\gamma_b = \frac{H_b}{d_b} = \xi^{0.17} + 0.08 \quad (2.55)$$

όπου:

- H_b : το ύψος κύματος στο σημείο θραύσης
- d_b : το βάθος του νερού στο σημείο θραύσης
- ξ : η παράμετρος Irribaren (Iribarren number, 2021) με:

$$\xi = \frac{\tan\beta}{\sqrt{\frac{H_o}{L_o}}} \quad (2.56)$$

όπου:

- $\tan\beta$ η κλίση του πυθμένα
- L_o, H_o , το μήκος και το ύψος κύματος για βαθύ νερό αντίστοιχα.

Σύμφωνα με τον (Weggel, 1972), μετά από μελέτη πειραματικών δεδομένων αρμονικών κυματισμών προέκυψε επίσης το παρακάτω κριτήριο για μικρές κλίσεις πυθμένα, όπου:

$$\gamma_b = \frac{H_b}{d_b} = \frac{1.56}{1 + e^{-19.5 \tan \beta}} - 43.8(1 - e^{-19.5 \tan \beta}) \frac{H_b}{gT^2} \quad (2.57)$$

για $\tan \beta < 0.1$ και $\frac{H_0 k_R}{L_0} < 0.06$

Το ύψος κύματος H_b στο σημείο θραύσης μπορεί να υπολογιστεί σύμφωνα με τη θεωρητική διατύπωση των (Komar & Gaughan, 1972), όπου το H_b εξαρτάται από την αρχική κλίση κυματισμού και τον συντελεστή διάθλασης k_R :

$$H_b = 0.56H_0 \left(\frac{H_0 k_R}{L_0} \right)^{-1/5} \quad (2.58)$$

Διαφορετικά μπορεί να υπολογιστεί και από τις σχέσεις των (Sakai & Battjes, 1980)

$$H_b = 0.3839H_0 \left(\frac{H_0}{L_0} \right)^{-0.3118}, \quad \text{για } \frac{H_0}{L_0} < 0.0208 \quad (2.59)$$

$$H_b = 0.6683H_0 \left(\frac{H_0}{L_0} \right)^{-0.1686}, \quad \text{για } 0.0208 < \frac{H_0}{L_0} < 0.1 \quad (2.60)$$

$$H_b = H_0, \quad \text{για } \frac{H_0}{L_0} \geq 0.1 \quad (2.61)$$

Επίσης, επειδή η κλίση του πυθμένα έχει καθοριστικό ρόλο στη ζώνη θραύσης, οι (LeMechaute & Koh, 1967) διερεύνησαν τα πειραματικά αποτελέσματα ημιτονοειδών κυματισμών σε κεκλιμένο πυθμένα και κατέληξαν στη σχέση:

$$H_b = 0.76H_0 \tan \beta^{\frac{1}{7}} \left(\frac{H_0}{L_0} \right)^{-\frac{1}{4}}, \quad \text{για } 0.02 \leq \tan \beta \leq 0.2 \quad (2.62)$$

Οι (Tsai, Chen, Hwing, & Huang, 2005) αφού διαπίστωσαν ότι πολλές εμπειρικές σχέσεις για τον υπολογισμό του ύψους θραύσης των κυματισμών βασίζονται σε μικρές κλίσεις πυθμένα, διερεύνησαν τη θραύση των κυματισμών σε απότομες κλίσεις $m > 0.2$, όπου m είναι η κλίση του πυθμένα και κατέληξαν στην εξίσωση:

$$H_b = 0.79H_0 \left(\frac{H_0}{L_0} \right)^{-0.19} m^{1/7} \quad (2.63)$$

Νεότερες μελέτες πραγματοποιήθηκαν επίσης από τους (Rattanapitikon & Shibayama, 2006) για κεκλιμένο πυθμένα $0 \leq m \leq 0.38$ και κλίση κύματος σε βαθύ νερό $H_0/L_0 < 0.112$, εξάγοντας αξιόπιστα συμπεράσματα για κυματισμούς που θραύονται σε ρηχό νερό καταλήγοντας στη παρακάτω σχέση:

$$H_b = (-0.57m^2 + 0.31m + 0.58)L_0 \left(\frac{H_0}{L_0}\right)^{0.83} \quad (2.64)$$

Επίσης οι (Camenen & Larson, 2007) αφού μελέτησαν τα πειραματικά αποτελέσματα από διάφορες μελέτες υπολογισμού της θραύσης των κυματισμών στα ρηχά νερά για κλίσεις πυθμένα $0 \leq m \leq 2$ και κατέληξαν στην εξίσωση:

$$\gamma_b = \frac{H_b}{d_b} = 0.284 \left(\frac{H_0}{L_0}\right)^{-0.5} \tanh \left[\left(0.87 + A \sin \left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{m}{m_{max}} \right)^a \right) \right) \pi \left(\frac{H_0}{L_0} \right) \right], \quad (2.65)$$

όπου

$$A = 0.32 + 14 \left(\frac{H_0}{L_0}\right), \quad m_{max} = 0.10 + 1.6 \left(\frac{H_0}{L_0}\right), \quad \mu\epsilon$$

$$\alpha = 1 + 14 \left(\frac{H_0}{L_0}\right) \quad \text{για } m \leq m_{max}$$

$$\alpha = - \left[1 + 20 \left(\frac{H_0}{L_0}\right) \right] \quad \text{για } m > m_{max}$$

Για τα κριτήρια θραύσης των κυματισμών και τις εξισώσεις υπολογισμού του ύψους κύματος θραύσης σε ρηχό νερό μπορεί να ανατρέξει κάποιος στη δημοσίευση των (Robertson, Zytner, Hall, & Nistor, 2013)

Τα κύματα που θραύονται σε μία παραλία, ανάλογα με τη τιμή της παραμέτρου Irrigaren – (ξ), συνήθως, ταξινομούνται σε τέσσερις κατηγορίες που απεικονίζονται στην Εικόνα 2.9.

- Θραύση υπερχείλισης – (Spilling)

Σε ακτές με μικρή κλίση πυθμένα $\xi < 0.5$ καθώς η θραύση ξεκινά, τύρβη και αφρός εμφανίζονται στη κορυφή του κύματος και στη συνέχεια απλώνονται στη μπροστινή πλευρά του καθώς διαδίδεται προς την ακτή. Η τύρβη διαχέει σταθερά την ενέργεια, με αποτέλεσμα να δημιουργεί μια ομοιόμορφη μείωση του ύψους κύματος καθώς το κύμα διαδίδεται προς τα εμπρός κατά μήκος της ζώνης θραύσης (surf zone) (Breaking wave, 2021).

- Θραύση κατάδυσης – (Plunging)

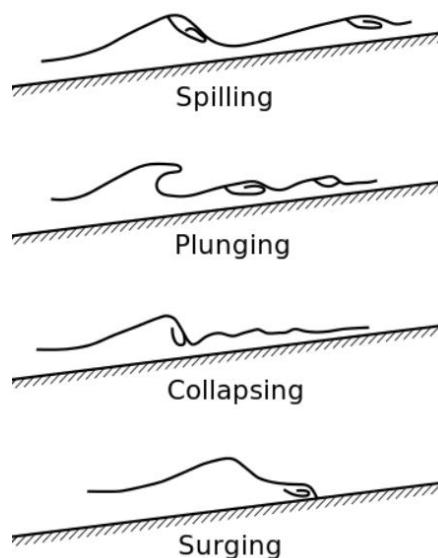
Για μεγαλύτερες κλίσης πυθμένα $0.5 < \xi < 3.3$, η κορυφή του κύματος γίνεται πολύ πιο απότομη, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 2.9, από την κορυφή ενός κύματος υπερχειλίσσης. Συγκεκριμένα η κορυφή του κύματος γίνεται κατακόρυφη καθώς στη συνέχεια κυρτώνεται και θραύεται πάνω στη κοιλάδα του κύματος, απελευθερώνοντας ταυτόχρονα το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας του με σχετικά απότομο τρόπο. Ένα κύμα κατάδυσης σπάει, σε σχέση με ένα μεγαλύτερο κύμα υπερχειλίσσης, με πιο πολύ ενέργεια. Το κύμα αυτό συνήθως συμπιέζει τον αέρα καθώς κυρτώνεται, κατά τη διαδικασία της θραύσης, δημιουργώντας έναν χαρακτηριστικό ήχο που γίνεται αισθητός από έναν παρατηρητή κοντά στην ακτή (Breaking wave, 2021).

- Θραύση κατάρρευσης – (Collapsing)

Τα κύματα κατάρρευσης είναι μία ενδιάμεση περίπτωση ανάμεσα στις κατηγορίες Plunging και Surging, στα οποία η κορυφή δε θραύεται ποτέ πλήρως, καθώς το μπροστινό μέτωπο του κυματισμού τείνει να γίνει κάθετο στη κοιλάδα του κύματος και να καταρρέει, με αποτέλεσμα τη δημιουργία αφρού (Breaking wave, 2021).

- Θραύση εφόρμησης – (Surging)

Για πολύ μεγάλες κλίσεις πυθμένα $\xi > 3.3$ και για κύματα με μεγάλη περίοδο κύματος, ο κυματισμός θραύεται πάνω στη κεκλιμένη ακτή και στη συνέχεια ανέρχεται και κατέρχεται. Επίσης στάσιμα κύματα, (Breaking wave, 2021), μπορεί να δημιουργηθούν σε απότομες κλίσεις όπου το κύμα μπορεί να ανακλάται από τον βυθό.



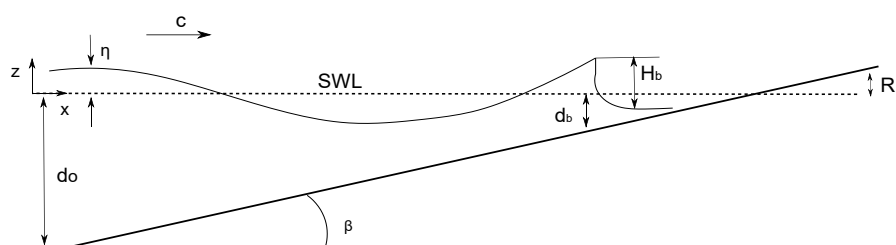
Εικόνα 2.9 Είδος θραύσης κυματισμού ανάλογα με τη μεταβλητή Iribarren (Classification of breaking wave types, 2015)

2.8 Αναρρίχηση κύματος (Wave run - up)

Αφού ο κυματισμός θραυτεί, δηλαδή ξεπεράσει το όριο θραύσης σε ρηχό νερό, μεταδίδεται στη ζώνη θραύσης – surf zone και έπειτα αναρριχάται στην ακτή (wave run-up).

Η πρόβλεψη της αναρρίχησης του κύματος είναι πολύ σημαντική για τον τομέα της ακτομηχανικής καθώς η σχεδίαση υπεράκτιων κατασκευών επηρεάζεται από τη μέγιστη αναρρίχηση του κύματος σε αυτές, με σκοπό να επιτυγχάνεται η αποκοπή των προσπιπτόντων κυματισμών και να αποφεύγονται φαινόμενα υπερπήδησης του κυματισμού (wave overtopping).

Στην Εικόνα 2.10 φαίνεται το προφίλ ενός κυματισμού στη ζώνη θραύσης, με μέγιστο ύψος αναρρίχησης πάνω από τη στάθμη ηρεμίας της θάλασσας (SWL) ίσο με R .



Εικόνα 2.10 Θραύση κυματισμού και αναρρίχηση στην ακτή

Το μέγιστο ύψος R της αναρρίχησης ενός κυματισμού μπορεί να εκτιμηθεί από τη γενική διατύπωση του (Hunt, 1967)

$$R = H_0 \xi \quad \text{για } \xi < 2 \quad (2.66)$$

Έπειτα από διάφορες μετρήσεις που έγιναν, οδήγησαν στην εμπειρική σχέση (Stockdon, et al., 2006) για τον υπολογισμό του R σε πραγματικές συνθήκες που είναι η παρακάτω:

$$R = 1.1 \left\{ 0.35 \tan \beta_f (H_0 L_0)^{0.5} + \frac{[H_0 L_0 (0.563 \tan \beta_f^2 + 0.004)]^{0.5}}{2} \right\} \quad (2.67)$$

με $\tan \beta_f$ την κλίση του πυθμένα στη ζώνη αναρρίχησης.

3 Εξισώσεις διατήρησης

3.1 Αρχή διατήρησης της μάζας (εξίσωση συνέχειας)

Η αρχή διατήρησης της μάζας για ένα ροϊκό στοιχείο ρευστού, απαιτεί την ακόλουθη σχέση ισορροπίας:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής μάζας} \\ \text{στο ροϊκό στοιχείο} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Ολική παροχή μάζας} \\ \text{μέσα από το ροϊκό στοιχείο} \end{array} \right]$$

Για να εξάγουμε την εξίσωση αυτή, εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μάζας σε έναν όγκο ελέγχου απειροστού μεγέθους διαμέσου του οποίου διέρχεται ένα ρευστό. Από τη διαφορά της εισρέουσας - εκρέουσας παροχής μάζας παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση, γνωστή και ως εξίσωση της συνέχειας, όπως φαίνεται σε διάφορες μορφές παρακάτω.

Για συμπίεστο ρευστό:

- Σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

- Διανυσματικά:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.2)$$

όπου div ή $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$ είναι ο διαφορικός τελεστής.

Ο πρώτος όρος $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ της Εξίσωσης 3.2 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της πυκνότητας στο χρόνο και δεύτερος όρος, $\text{div}(\rho \mathbf{u})$ τη καθαρή ροή μάζας εκτός του ροϊκού στοιχείου δια μέσω των ορίων του.

Για ασυμπίεστο ρευστό, (π.χ. ένα υγρό) η πυκνότητα ρ είναι σταθερή και η εξίσωση συνέχειας, Εξίσωση 3.2 παίρνει τη μορφή:

$$\text{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{ή} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.3)$$

3.2 Διαφορική εξίσωση ορμής

Η διαφορική εξίσωση ορμής αποτελεί ουσιαστικά τη μαθηματική διατύπωση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για ένα ορισμένο ροϊκό στοιχείο ρευστού σε έναν στοιχειώδες όγκο ελέγχου. Με βάση αυτόν, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με το άθροισμα όλων των δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτόν.

Ο ρυθμός αύξησης των συνιστωσών της ορμής κατά x, y, z ανά μονάδα όγκου ενός σωματιδίου ρευστού είναι:

$$\rho \frac{Du}{Dt}, \rho \frac{Dv}{Dt}, \rho \frac{Dw}{Dt} \quad (3.4)$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο ρευστό διακρίνονται σε δύο είδη:

τις επιφανειακές δυνάμεις:

- Δυνάμεις πίεσης
- Δυνάμεις ιξώδους

τις δυνάμεις σώματος:

- Δυνάμεις βαρύτητας
- Φυγοκεντρικές δυνάμεις
- Δυνάμεις Coriolis
- Ηλεκτρομαγνητική δύναμη

Η φυσική διατύπωση της αρχής διατήρησης της ορμής εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής της} \\ \text{ροή στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right] \\ & = \left[\begin{array}{l} \text{Ρυθμός εισροής} \\ \text{ορμής στον } O.E \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{Ρυθμός εκροής} \\ \text{ορμής από τον } O.E \end{array} \right] \\ & + \left[\begin{array}{l} \text{Άθροισμά όλων των εξωτερικών} \\ \text{δυνάμεων που δρούν στον } O.E \end{array} \right] \end{aligned}$$

Η εξίσωση της ορμής στην κατεύθυνση x δίνεται από την:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + S_{Mx} \quad (3.5)$$

όπου

- $\frac{(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$ η καθαρή δύναμη στο ρευστό ανά μονάδα όγκου λόγω της πίεσης και των τάσεων λόγω ιξώδους.

- S_{Mx} πηγή της ορμής x ανά μονάδα όγκου και ανά μονάδα χρόνου που περιλαμβάνει τη συνολική επίδραση των δυνάμεων σώματος

Με όμοιο τρόπο διατυπώνεται η αντίστοιχη σχέση και για τις άλλες κατευθύνσεις, οπότε η εξίσωση ορμής σε διανυσματική μορφή μπορεί να γραφτεί ως

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \text{div}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{S} \quad (3.6)$$

όπου \mathbf{S} η συνισταμένη των δυνάμεων πεδίου και $\boldsymbol{\tau}$ ο τανυστής των επιφανειακών τάσεων:

$$\text{div}\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \frac{(-p + \tau_{xx})}{\partial x} & \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} & \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} & \frac{(-p + \tau_{yy})}{\partial y} & \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} & \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} & \frac{(-p + \tau_{zz})}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Η διαφορική εξίσωση ορμής, Εξίσωση 3.6, για άτριβη ροή, ονομάζεται εξίσωση Euler και έχει τη μορφή:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p \quad \text{ή} \quad \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p \quad (3.7)$$

3.3 Εξισώσεις Navier-Stokes

Οι εξισώσεις Navier – Stokes πήραν το όνομα τους από τους δύο επιστήμονες που τις ανακάλυψαν, (ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον) το Γάλλο μηχανικό και φυσικό Claude Louis Navier και τον Άγγλο-Ιρλανδό φυσικό και μαθηματικό George Gabriel Stokes, το 19ο αιώνα (Navier–Stokes equations, 2021)

Οι εξισώσεις Navier-Stokes είναι ένα σύνολο μερικών διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν από την διαφορική εξίσωση της ορμής εφαρμόζοντας ένα νευτώνειο μοντέλο για τις τάσεις λόγω ιξώδους.

Οι εξισώσεις Navier-Stokes είναι πολύ σημαντικές καθώς περιγράφουν τη φυσική πολλών φαινομένων μηχανικού και επιστημονικού ενδιαφέροντος. Οι κύριες εφαρμογές της είναι :

- Μοντελοποίηση καιρού
- Μοντελοποίηση ροής ρευστών σε σωλήνες
- Μοντελοποίηση ωκεάνιων ρευμάτων
- Μοντελοποίηση ροής γύρω από ένα πτερόγιο

Συγκεκριμένα, οι εξισώσεις Navier-Stokes χρησιμοποιούνται για το σχεδιασμό αυτοκινήτων και αεροσκαφών, στη μελέτη ροής του αίματος, στην ανάλυση της ρύπανσης, στη μοντελοποίηση των θαλάσσιων κυματισμών και πολλά άλλων φαινομένων.

Οι εξισώσεις Navier-Stokes για ασυμπίεστο ρευστό, σε καρτεσιανές συντεταγμένες, γράφονται:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.8)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3.9)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.10)$$

όπου:

ρ – η πυκνότητα σε $[kg/m^3]$

t – ο χρόνος σε $[s]$

p – η πίεση σε $[Pa]$

$\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)$ – οι συνιστώσες της επιτάχυνσης της βαρύτητας σε $[m/s^2]$

μ – το δυναμικό ιξώδες σε $[Pa \cdot s]$

u, v, w – οι συνιστώσες της ταχύτητας στη x, y, z , διεύθυνση σε $[m/s]$

Οι Εξισώσεις 3.8, 3.9, 3.10 μπορούν να γραφτούν στη συνεπτυγμένη ανυσματική μορφή για ασυμπίεστο ρευστό, στη μορφή:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.11)$$

όπου ο πρώτος όρος της Εξίσωσης 3.11, $\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right)$ εκφράζει τις δυνάμεις αδράνειας, ο δεύτερος όρος $\rho \mathbf{g} - \nabla p$ τις δυνάμεις που προκύπτουν από τις διαφορές πίεσεως και ο τρίτος όρος $\mu \nabla^2 \mathbf{u}$ τις δυνάμεις λόγω ιξώδους.

Έτσι οι εξισώσεις Navier – Stokes στις τρεις διαστάσεις μαζί με την εξίσωση της συνέχειας, αποτελούν ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους, που είναι οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας (u, v, w) και η πίεση p .

Για την περιγραφή των ρευστών που μελετώνται στη παρούσα εργασία (νερό – αέρας), χρησιμοποιείται η εξίσωση Navier-Stokes για συμπιεστό ρευστό, όπως διατυπώνεται κατά (Jacobsen, 2017) και περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T = -\nabla p^* + \mathbf{g}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \nabla \rho + \nabla \cdot \mu \nabla \mathbf{u} \quad (3.12)$$

όπου:

∇ - ο διαφορικός τελεστής $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

\mathbf{x} - οι καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z)

\mathbf{u} - το διάνυσμα τη ταχύτητας

\mathbf{x}_r - είναι μια αναφορά τοποθεσίας όσον αφορά την ελεύθερη επιφάνεια

p^* - η δυναμική πίεση όπου $p^* = p - \rho \mathbf{g} \mathbf{x}$

με p η ολική πίεση και $\rho \mathbf{g} \mathbf{x}$ η υδροστατική πίεση

μ - το δυναμικό ιξώδες

3.4 Γενική μορφή της εξίσωσης μεταφοράς

Οι εξισώσεις διατήρησης (εξίσωση συνέχειας - ορμής) που περιγράφηκαν προηγουμένως, εκφράζονται στη γενική τους μορφή από την εξίσωση μεταφοράς για μία γενική μεταβλητή φ που είναι, (Versteeg & Malalasekera, 2007),:

$$\frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \text{div}(\rho \varphi \mathbf{u}) = \text{div}(\Gamma \text{grad} \varphi) + S_\varphi \quad (3.13)$$

όπου:

ρ : η πυκνότητα

φ : μια γενική μεταβλητή

\mathbf{u} : η ταχύτητα

Γ : συντελεστής διάχυσης της μεταβλητής φ

S_φ : ο όρος πηγής (π.χ. επιτάχυνση της βαρύτητας)

Το πρώτο σκέλος της εξίσωσης μεταφοράς εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της φ , $\frac{\partial \rho \varphi}{\partial t}$ συν το καθαρό ρυθμό της φ λόγω συναγωγής, $div(\rho \varphi \mathbf{u})$. Το δεύτερο σκέλος της εξίσωσης 3.13 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της φ λόγω διάχυσης, $div(\Gamma grad \varphi)$, συν τη μεταβολή της φ λόγω πηγών, S_φ .

3.5 Είδη ροής και οριακό στρώμα

Το ρευστό, στη στρωτή ροή, κινείται ομαλά και σε στρώσεις χωρίς να μεταφέρονται υλικά σημεία ρευστού από τη μια στρώση στην άλλη. Αντίθετα στην τυρβώδη ροή, τα υλικά σημεία του ρευστού κινούνται με τυχαίο και ακανόνιστο τρόπο σε τροχιές προς όλες τις διευθύνσεις. Γενικά η τύρβη εμφανίζεται σε ροές που υφίστανται ιξώδες διατμητικές τάσεις, που οφείλονται είτε σε μεγάλες κλίσεις ταχύτητας, είτε σε ασυνέχειες της ροής.

Η βασική παράμετρος για τον καθορισμό του είδους της ροής ενός ρευστού είναι ο αριθμός Reynolds, Re . Ο αριθμός αυτός είναι αδιάστατος και πολύ σημαντικός καθώς εκφράζει τη σχέση μεταξύ αδρανειακών δυνάμεων και δυνάμεων τριβής για μία ροή, (Παπαϊωάννου, 1996) και ορίζεται ως:

$$Re = \frac{(Αδρανειακές δυνάμεις)}{(ιξώδεις δυνάμεις)} = \frac{\rho * u * L}{\mu} = \frac{u * L}{\nu} \quad (3.14)$$

όπου

- ρ είναι η πυκνότητα του υγρού (ή του αερίου) σε (kg/m^3)
- μ το δυναμικό ιξώδες του σε $(Pa \cdot s$ ή $N \cdot s/m^2$ ή $kg/(m \cdot s)$
- u είναι μια χαρακτηριστική ταχύτητα της ροής (π.χ. η μέση ταχύτητα) σε (m/s)
- L ένα χαρακτηριστικό μήκος της ροής σε (m) .
- ν το κινηματικό ιξώδες σε (m^2/s)

Στη φύση η έναρξη των διαταραχών που οδηγούν σε σχηματισμό τύρβης δεν έχουν διασαφηνιστεί πλήρως, γι' αυτό στη πράξη δεχόμαστε ότι η μετάβαση της συνεκτικής ροής από στρωτή σε τυρβώδη, πραγματοποιείται όταν ο αριθμός Reynolds υπερβεί μία κρίσιμη τιμή (Re_{crit}).

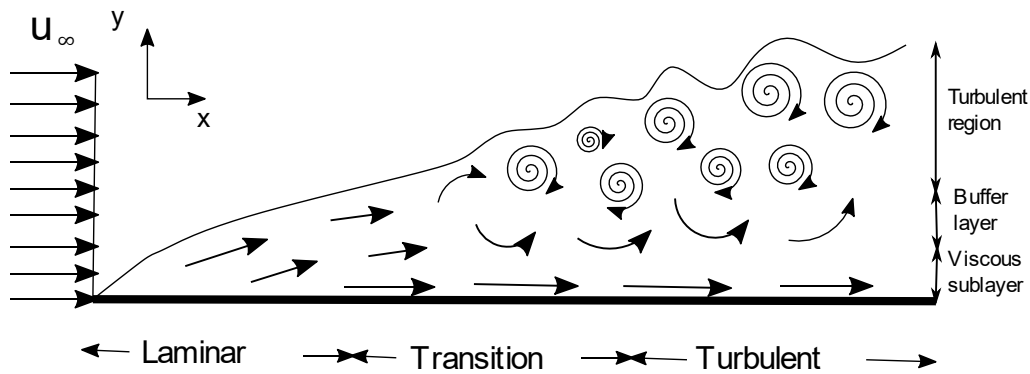
- Για $Re < Re_{crit}$, η ροή είναι ομαλή χωρίς τα γειτονικά στρώματα του ρευστού να μεταφέρονται από το ένα στρώμα στο άλλο.
- Για $Re > Re_{crit}$, η ροή είναι πολύπλοκη και στο τελικό στάδιο τυχαία και χαοτική.

Για αρκετά μεγάλο αριθμό Reynolds η ροή γίνεται τυρβώδης. Η μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή συνήθως, πραγματοποιείται οπουδήποτε με την κρίσιμη τιμή να είναι τάξης μεγέθους από 2000 έως και 10^6 , ανάλογα με τη ροή και τη μορφή του σώματος που αλληλοεπιδρά με αυτή.

Για μικρές ταχύτητες u , άρα και μικρές τιμές Re , εφόσον τα ποσά είναι ανάλογα, η ροή είναι στρωτή και καθορίζεται από τις ιξώδες δυνάμεις οι οποίες μπορούν και αποσβένουν κάθε διαταραχή που επιβάλλεται στη ροή. Όσο εξελίσσεται το φαινόμενο αυτό, αν υπάρξει αύξηση της ταχύτητας u , οι δυνάμεις αδρανείας αυξάνονται και από κάποια τιμή και πέρα, γίνονται πιο σημαντικές από τις ιξώδες δυνάμεις, δημιουργώντας μια διαταραχή στη ροή. Αν η διαταραχή αυτή απλώς διατηρείται και δεν επηρεάζει την υπόλοιπη ροή, τότε η ροή παραμένει στρωτή. Αντίθετα αν η διαταραχή αυτή ενισχύεται μεταφερόμενη στη διάδοση της ροής, διαχέεται καταλαμβάνοντας σημαντικό τμήμα του πεδίου ροής, μεταβάλλοντας τη ροή από στρωτή σε τυρβώδη, (Παπαϊωάννου, 1996).

Θεωρούμε μια παράλληλη ομοιόμορφη ροή πάνω από μια λεπτή πλάκα όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.1, με ομοιόμορφη ταχύτητα του ρευστού πριν φτάσει στο σώμα ($x = 0$), u_∞ . Η παρουσία του σώματος (επίπεδη πλάκα) και λόγω του ιξώδους του ρευστού, έχει ως αποτέλεσμα τον μηδενισμό της ταχύτητας για $x = 0$, καθώς και την ανάπτυξη διατμητικής τάσης που προκαλεί την επιβράδυνση της ροής κοντά στο τοίχωμα. Έτσι η ταχύτητα του ρευστού από μηδενική πάνω στη πλάκα αυξάνεται όσο απομακρύνεται κατά τη y διεύθυνση και μακριά από αυτήν θεωρείται ίση με την αρχική, u_∞ . Η περιοχή του πεδίου ροής, γειτονική της πλάκας στην οποία μεταβάλλεται η ταχύτητα του ρευστού ονομάζεται οριακό στρώμα. Για μικρές τιμές του x , δηλαδή μετά την αρχή της πλάκας, η ροή εντός του οριακού στρώματος είναι στρωτή (Laminar). Η ανάπτυξη του οριακού στρώματος συνεπάγεται με την εμφάνιση ανομοιόμορφης κατανομής της ταχύτητας υπό την επίδραση των διατμητικών τάσεων. Έτσι για μια απόσταση από το αρχικό σημείο της πλάκας η ροή παύει να είναι στρωτή και μετατρέπεται σε τυρβώδη (turbulent). Η περιοχή ανάμεσα στο στρωτό οριακό στρώμα και στο τυρβώδες οριακό στρώμα, ονομάζεται μεταβατικό στάδιο (transition) από την στρωτή στην τυρβώδη ροή. Το στάδιο αυτό δεν είναι πλήρως κατανοητό καθώς η ροή μπορεί να γίνει στρωτή ξανά ή τυρβώδης και η έκταση της εξαρτάται από τις συνθήκες της ροής, (Παπαϊωάννου, 1996). Το βασικό κριτήριο για το είδος του οριακού στρώματος είναι ο τοπικός αριθμός Reynolds, Re_x που ορίζεται από την εξίσωση:

$$Re_x = \frac{u_\infty \cdot x}{\nu} \quad (3.15)$$



Εικόνα 3.1 Οριακό στρώμα και διαχωρισμός στα επίπεδα της ροής

Το προφίλ του ρευστού στην τυρβώδη περιοχή, διακρίνεται σε τρία στρώματα κατά τον κατακόρυφο άξονα, y . Στο κατώτατο στρώμα, έχουμε το υπόστρωμα στρωτής ροής (viscous sub layer) στο οποίο η ταχύτητα του ρευστού επηρεάζεται από την αντίσταση του τοιχώματος και έχει μειωθεί σημαντικά με αποτέλεσμα η ροή να είναι στρωτή. Πιο πάνω έχουμε ένα μεταβατικό στρώμα ή στρώμα ισορροπίας ανάμεσα στην στρωτή και στην τυρβώδη ροή (buffer layer). Τέλος, στο ψηλότερο σημείο βρίσκεται το στρώμα στο οποίο η ταχύτητα του ρευστού είναι αρκετά μεγάλη ώστε να έχουμε μεταβεί από τη στρωτή στην τυρβώδη ροή (turbulent region)

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, η ροή κοντά σε ένα στερεό όριο μπορεί να αναλυθεί σε τρία στρώματα. Ο βασικός δείκτης είναι το αδιάστατο μήκος y^+ , ο οποίος αντιπροσωπεύει έναν αριθμό Reynolds με βάση τη κατακόρυφη απόσταση y και δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$y^+ = \frac{yU_\tau}{\nu} \quad (3.16)$$

όπου:

$$U_\tau - \text{η διατμητική ταχύτητα } U_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$$

τ_w - η διατμητική τάση του τοιχώματος

ρ - η πυκνότητα του ρευστού

y - η απόσταση από το στερεό όριο

ν - κινηματικό ιξώδες

- Ιξώδες υπόστρωμα (Viscous sub layer) με $y^+ < 10$

Επάνω στο στερεό σύνορο ($y = 0$) η ταχύτητα του ρευστού είναι μηδέν (συνθήκη μη-ολίσθησης) και από αυτήν την θέση και για μια μικρή απόσταση η ροή θεωρείται στρωτή και ανάλογη της απόστασης

- Ενδιάμεσο στρώμα εξισορρόπησης (buffer layer) με $10 < y^+ < 30$

Στο όριο αυτό η ροή βρίσκεται σε ένα μεταβατικό στάδιο από στρωτή σε τυρβώδης

- Λογαριθμικό στρώμα (Log-law region) $30 < y^+ < 500$

Στο όριο αυτό η ροή γίνεται πλήρως τυρβώδης και η μέση ταχύτητα του ρευστού σχετίζεται με τον λογάριθμο της απόστασης του από το στερεό σύνορο (επίπεδη πλάκα).

Ο (Kolmogorov, 1991) παρουσίασε στη θεωρία του τη βασική ιδέα ότι η μικρότερες κλίμακες τυρβώδους ροής μπορούν να είναι παρόμοιες για κάθε τυρβώδη ροή και εξαρτώνται μόνο από το κινηματικό ιξώδες ν και το μέσο ρυθμό σκέδασης ε της τυρβώδους κινητικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας. Η κινητική ενέργεια της τύρβης k δίνεται από τη σχέση,

$$k = \frac{(u'^2 + v'^2 + w'^2)}{2}, \quad (3.17)$$

όπου (u', v', w') η στιγμιαία διακύμανση της ταχύτητας και ε ο ρυθμός σκέδασης τυρβώδους κινητικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας, δίνεται από τη σχέση,

$$\varepsilon = 2\nu \overline{s'_{ij} \cdot s'_{ij}} \quad (3.18)$$

όπου ($s'_{ij} \cdot s'_{ij}$) οι συνιστώσες του ρυθμού παραμόρφωσης.

Με τη βοήθεια της διαστατικής ανάλυσης και την υπόθεση ότι ο αριθμός Reynolds των μικρότερων δινών ισούται με 1, μπορεί να ληφθούν οι μικρότεροι λόγοι κλίμακας του μήκους η , του χρόνου τ_η και της ταχύτητας u_η που ονομάζονται Kolmogorov microscales και είναι οι παρακάτω:

$$\text{Kolmogorov length scale } \eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \quad (3.19)$$

$$\text{Kolmogorov time scale } \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \quad (3.20)$$

$$\text{Kolmogorov velocity scale } u_\eta = (v\varepsilon)^{1/4} \quad (3.21)$$

Το φαινόμενο της τυρβώδους ροής αποτελεί πρόκληση για το μαθηματικό κόσμο λόγω της τυχαίας φύσης του, δημιουργώντας δυσκολίες στη προσομοίωσή του. Μια ροή με υψηλούς αριθμούς Reynolds είναι δύσκολο να προσομοιωθεί εφαρμόζοντας άμεση αριθμητική προσομοίωση – Direct Numerical Simulation – DNS για την επίλυση των εξισώσεων Navier–Stokes. Αυτή η συνθήκη βέβαια δε καθιστά τις DNS μεθόδους αδύνατες στο να περιγράψουν τη τυρβώδη ροή, διότι με σημαντική πύκνωση στο πλέγμα του υπολογιστικού χωρίου, ώστε να επιλύονται οι κλίμακες Kolmogorov, καθώς και με επαρκώς μικρά χρονικά βήματα ώστε να ικανοποιείται η περίοδος των ταχύτερων διακυμάνσεων, αυτή η μέθοδος καθίσταται αποτελεσματική. Βέβαια το μεγάλο υπολογιστικό κόστος, αποτελεί το βασικό μειονέκτημα της μεθόδου που τη καθιστά μη εμπορική.

Η πιο διαδεδομένη μέθοδος στο τομέα της βιομηχανίας είναι η χρήση των εξισώσεων Reynold Average Navier Stokes – RANS που χρησιμοποιούν τη παραδοχή ότι οι ταχύτητες και οι πιέσεις αναλύονται σε ένα άθροισμα μέσω τιμών (\bar{u}, \bar{p}) ως προς το χρόνο και μιας στιγμιαίας διακύμανσης (\tilde{u}, \tilde{p}) . Σε αυτές τις εξισώσεις ροής εμφανίζονται εξτρά όροι λόγω αλληλεπιδράσεων μεταξύ διαφόρων τυρβωδών διακυμάνσεων που μοντελοποιούνται με τα μοντέλα τύρβης. Έχουν αναπτυχθεί πολλά μοντέλα τύρβης ανάλογα με την ιδιαιτερότητα κάθε προσομοίωσης, δίνοντας τη δυνατότητα στο χρήστη να επιλέξει ένα πιο αραιό πλέγμα (coarse mesh). Τέτοια γνωστά μοντέλα είναι το Spalart-Allmaras, το μοντέλο $k - \varepsilon$, το μοντέλο $k - \omega$, το μοντέλο $SST k - \omega$, κ.α., τα οποία εφαρμόζονται για ένα συγκεκριμένο εύρος y^+ .

Μία ενδιαμέση επιλογή για τον υπολογισμό της τύρβης αποτελεί η μέθοδος Large Eddy Stimulation – LES, που περιλαμβάνει ένα χωρικό φιλτράρισμα των εξισώσεων Navier–Stokes πριν τους υπολογισμούς, που διακρίνει τις μεγαλύτερες δίνες, δηλαδή αυτές που είναι μεγαλύτερες από την χαρακτηριστική διάσταση των κελιών του χωρικού πλέγματος, και τις υπόλοιπες τις απορρίπτει.

3.6 Μέθοδος όγκου ρευστού (Volume Of Fluid - VOF)

Με τον όρο πολυφασική ροή – (multiphase flow) εννοούμε την ταυτόχρονη ροή δύο ή περισσότερων φάσεων, όπου ως φάση δεν ορίζεται αναγκαστικά η κατάσταση της ύλης (υγρή, στερεή, αέρια), καθώς μπορεί να έχουμε πολυφασική ροή για ταυτόχρονη ροή δύο ή περισσότερων υγρών ή αερίων. Η απλούστερη περίπτωση της πολυφασικής ροής είναι η διφασική. Η ροή αέρα – νερού που μελετάται στη παρούσα εργασία, χαρακτηρίζεται ως διφασική ροή. Τα δύο ρευστά αλληλοεπιδρούν στη φύση

με υψηλή πολυπλοκότητα, μέσω της διεπιφάνειας, που συχνά ονομάζεται ελεύθερη επιφάνεια – (free surface).

Η μέθοδος όγκου υγρού είναι μια Eulerian μέθοδος για διφασική ροή, η οποία αναπτύχθηκε από τους (Hirt & Nichols, 1981) και συνδυάζεται από στατικό ή δυναμικό πλέγμα.

Η μέθοδος Volume Of Fluid – VOF είναι η δημοφιλέστερη και χρησιμοποιείται από το OpenFOAM για τη μοντελοποίηση της ελεύθερης επιφάνειας μεταξύ δύο ρευστών με διαφορετική πυκνότητα. Είναι ουσιαστικά μια αριθμητική τεχνική που εντοπίζει την διεπιφάνεια (interface) μεταξύ των ρευστών. Για να την εφαρμογή της μεθόδου, καθορίζεται το ογκομετρικό κλάσμα - (volume of fraction), α κάθε ρευστού που υπάρχει σε κάθε κελί του υπολογιστικού πλέγματος (mesh) και ορίζεται ως:

$$\alpha = \frac{\text{όγκος ρευστού στο κελί}}{\text{συνολικός όγκος κελιού}} \quad (3.22)$$

Έτσι, για δύο ρευστά με πυκνότητες ρ_1 και ρ_2 , και ιξώδες μ_1 και μ_2 αντίστοιχα το α παίρνει τις τιμές:

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{αν το κελί περιέχει μόνο το ρευστό 1} \\ \text{τιμές ανάμεσα στο } (0,1) & \text{αν το κελί περιέχει και τα δύο ρευστά} \\ 0, & \text{αν το κελί περιέχει μόνο το ρευστό 2} \end{cases} \quad (3.23)$$

Για παράδειγμα σε ένα διφασικό πείραμα όπως αυτό που μελετάτε στη παρούσα εργασία, το κλάσμα όγκου με τιμή $\alpha = 1$ σημαίνει ότι το κελί είναι γεμάτο με νερό, ενώ για μία τιμή $\alpha = 0$, το κελί είναι γεμάτο με αέρα, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.2.

0	0	0	0
0,75	0,4	0,05	0
1	1	0,3	0
1	1	0,4	0

Εικόνα 3.2 Γραφική απεικόνιση του ογκομετρικού κλάσματος α σε ένα πλέγμα (Volume-of-Fluid method, 2014)

Το α θεωρείται ως μια ιδιότητα του ρευστού που κινείται με αυτό και έτσι θα ισχύουν οι αντίστοιχες αξιώσεις διατήρησης. Η εξίσωση που περιγράφει το ογκομετρικό κλάσμα είναι:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \nabla \cdot (a\mathbf{u}) = 0 \quad (3.24)$$

Το α λειτουργεί ως συνάρτηση βάρους, έτσι για τον υπολογισμό των ιδιοτήτων του συνολικού ρευστού θα θέσουμε τις αντίστοιχες σχέσεις:

$$\rho = \alpha\rho_1 + (1 - \alpha)\rho_2 \quad (3.25)$$

$$\mu = \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2 \quad (3.26)$$

καθώς στη συνέχεια εφαρμόζουμε τις εξισώσεις διατήρησης για ένα ενιαίο ρευστό με πυκνότητα ρ και δυναμικό ιξώδες μ .

Σύμφωνα με τον (Rusche, 2002) επειδή συχνά εμφανίζονται προβλήματα αριθμητικής διάχυσης στη διεπιφάνεια, εισάγεται ένας τεχνητός όρος - (artificial compression term) στην Εξίσωση 3.25 με σκοπό την ενίσχυση της ακρίβειας στη διεπιφάνεια, που είναι ο τρίτος όρος της Εξίσωσης 3.28 .

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \nabla \cdot (a\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{u}_c a(1 - a)) = 0 \quad (3.27)$$

όπου όρος $a(1 - a)$, διασφαλίζει ότι η τεχνική αυτή υπολογίζεται μόνο για τη περιοχή της διεπιφάνειας, δηλαδή για $0 < \alpha < 1$ και \mathbf{u}_c η artificial compression velocity που περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{u}_c = C_a |\mathbf{u}| \frac{\nabla a}{|\nabla a|} \quad (3.28)$$

με C_a μια παράμετρος που παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1 για τον έλεγχο της επίδρασης του όρου artificial compression.

3.7 Μέθοδοι επίλυσης κυματικών προβλημάτων με χρήση CFD

Για τη προσομοίωση της αριθμητικής δεξαμενής και τη δημιουργία – απόσβεση των κυματισμών με τη χρήση της ζώνης χαλάρωσης – (Relaxation Zone – RZ) στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, μελετήθηκαν διάφορες δημοσιεύσεις που έχουν γίνει σχετικά με τη μοντελοποίηση των αριθμητικών δεξαμενών σε υπολογιστικά προγράμματα ρευστοδυναμικής. Συγκεκριμένα στις παρακάτω δημοσιεύσεις παρουσιάζονται οι βασικές τεχνικές προσομοίωσης κυματισμών με τη χρήση

μεθόδων CFD, και μια σειρά από μεθόδους δημιουργίας και απόσβεσης των κυματισμών.

Οι (Li, et al., 2019), με τη χρήση προγραμμάτων CFD, αναλύουν τρεις μεθόδους μοντελοποίησης κυμάτων παρουσιάζοντας εφαρμογές ωκεάνιας μηχανικής. Συγκεκριμένα γίνεται η διερεύνηση και σύγκριση των μεθόδων Internal Wave Generator-(IWG), Relaxation Zone-(RZ) και της Spectral Wave Explicit Navier Stokes Equations-(SWENSE) method για τη δημιουργία ρεαλιστικής κατάστασης κύματος σε μία αριθμητική δεξαμενή και την αλληλεπίδραση τους, με ένα σταθερό κυλινδρικό σύστημα αγκύρωσης (Catenary Anchor Leg Mooring) σε κανονικά κύματα.

- Με την IWG μέθοδο επιτυγχάνεται η δημιουργία κύματος σε μια συγκεκριμένη περιοχή στην είσοδο όπως και με τη μέθοδο RZ, εισάγοντας μια πηγή ορμής, $r\rho a_I$, στην εξίσωση μεταφοράς:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \rho\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} = -\nabla p + \rho\mathbf{g} + \nabla \cdot (\mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)) + r\rho a_I$$

Με $r = 1$ στη περιοχή δημιουργίας του κύματος, $r = 0$ για τη περιοχή εκτός και a_I η επιτάχυνση στην είσοδο του wavemaker.

Πρέπει να σημειωθεί ότι στην έξοδο για να επιτευχθεί η απόσβεση του κύματος με τη μέθοδο αυτή, πρέπει να υπάρχει μια αριθμητική παραλία (numerical beach ή sponge layer).

- Η μέθοδος SWENSE είναι μια συγκεκριμένη μέθοδος που σχεδιάστηκε για να λύνει προβλήματα αλληλεπίδρασης κύματος με πλωτές κατασκευές χρησιμοποιώντας μια τεχνική διαχωρισμού του προβλήματος σε δύο μέρη, Incident + Complementary.

Η λύση του προβλήματος γράφεται ως ένα άθροισμα του προσπίπτοντος πεδίου χωρίς τη κατασκευή, συν έναν συμπληρωματικό όρο για την συνεισφορά της κατασκευής. Έτσι η λύση για το Incident πεδίο μπορεί να υπολογιστεί από αναλυτικές θεωρίες κυματισμών όπου στη συγκεκριμένη εργασία περιγράφεται από ένα φασματικό κυματικό μοντέλο (spectral wave model). Η λύση για συμπληρωματικό (complementary) πεδίο γράφεται με αντικατάσταση του αθροίσματος της μεταβλητής x (ταχύτητα, πίεση) $x = x_I + x_c$ στις εξισώσεις Navier–Stokes, όπου x_I, x_c η μεταβλητή του incident και complementary πεδίου αντίστοιχα.

- Στα πειράματα τους για τη μέθοδο της ζώνης χαλάρωσης – Relaxation zone, στην είσοδο χρησιμοποιήθηκε η αναλογία $L_{inlet} = 1.5L$ και στην έξοδο $L_{outlet} = 2L$

Κατέληξαν στα συμπεράσματα ότι από πλευράς ακρίβειας και οι τρεις μέθοδοι με ένα πυκνό πλέγμα μπορούν αν επιτύχουν καλή σύγκλιση σε σχέση με τα

αποτελέσματα του αρχικού φυσικού πειράματος. Παρ' όλα αυτά η μέθοδος SWENSE είναι πιο αποδοτική καθώς μπορεί να πετύχει καλά αποτελέσματα με πιο αραιό πλέγμα (25% των άλλων δύο μεθόδων) καθώς η μέθοδος IWG και RZ παρουσιάζουν άμεση εξάρτηση από τη πυκνωση του υπολογιστικού πλέγματος.

Στη δημοσίευσή τους, οι (Miquel, Kamath, Chella, Archetti, & Bihs, 2018), αναλύουν δύο διαφορετικές μεθόδους παραγωγής και απορρόφησης κυμάτων με τη χρήση μεθόδων CFD σε μία αριθμητική δεξαμενή. Για τη προσομοίωση της ροής χρησιμοποιούν τις εξισώσεις Reynolds Average Navier Stokes-(RANS) και το μοντέλο τύρβης $k - \omega$ μέσω ενός ανοιχτού λογισμικού, κατάλληλο για προσομοίωση κυμάτων, που ονομάζεται REEF3D. Για την προσομοίωση της ελεύθερης επιφάνειας, επιλέγεται η μέθοδος καθορισμένης στάθμης – Level Set Method-(LSM) που παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τους (Osher & Sethian, 1988)

Η μία μέθοδος δημιουργίας-απόσβεσης κυματισμών που παρουσιάζεται, είναι η Relaxation Zone - RZ, και η άλλη, η μέθοδος Dirichlet για τη δημιουργία κύματος στην είσοδο και η ενεργός απορρόφηση κυμάτων (Active Wave Absorption-AWA) για την έξοδο.

Για τη δημιουργία κυμάτων μέσω της μεθόδου Dirichlet Method – DM, εισάγονται οι ταχύτητες που απαιτούνται για τη δημιουργία των κυμάτων στο όριο της εισόδου χρησιμοποιώντας την κατάλληλη θεωρία κύματος. Οι επιλεγμένες ταχύτητες καθορίζουν στη συνέχεια την πίεση και την ελεύθερη επιφάνεια. Για την απορρόφηση του κύματος χρησιμοποιείται η μέθοδος AWA όπου η ταχύτητα του κύματος εισάγεται με αντίθετη φορά στο τέλος της δεξαμενής με σκοπό τη δημιουργία απόσβεσης. Η ταχύτητα του κύματος ορίζεται ως:

$$u(t) = \sqrt{\frac{g}{d}} \zeta(t)$$

όπου

$$\zeta(t) = \eta(t) - d$$

$\eta(t)$ η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και d η κάθετη απόσταση του πυθμένα από την ελεύθερη επιφάνεια, το βάθος.

Για τις δύο αυτές μεθόδους διεξήχθη ανάλυση ευαισθησίας προκειμένου να ποσοτικοποιηθεί και να συγκριθεί το ποσοστό απορρόφησης στην έξοδο της δεξαμενής, μεταξύ αυτών. Οι δοκιμές έγιναν για σε απλή δεξαμενή, για ένα κύμα που αλληλοεπιδρά και θραύεται πάνω σε ένα πλωτό κύλινδρο, αλλά και για τη προσομοίωση ενός κύματος που θραύεται υπό την επίδραση ενός κεκλιμένου πυθμένα στο τέλος της δεξαμενής.

Έτσι κατέληξαν στα συμπεράσματα ότι η μέθοδος AWA είναι πιο αποτελεσματική για long waves ενώ η μέθοδος RZ για short waves. Επίσης η απόσβεση των κυμάτων που βασίζεται στη μέθοδο χαλάρωσης, για τις περισσότερες περιπτώσεις, οδήγησε σε μικρότερο ποσοστό ανάκλασης κυματισμού, με μειονέκτημα την αύξηση του υπολογιστικού κόστους που εμφανίζουν σε σχέση με τη μέθοδο DM-AWA, σε ότι αφορά στον καθορισμό των περιοχών εισόδου και εξόδου.

Στη δημοσίευση (Windt, Davidson, Schmitt, & Ringwood, 2019) παρουσιάζεται μια ανάλυση από μετρήσεις και μεθοδολογίες που ανέπτυξαν όσον αφορά στους τρόπους δημιουργίας και απόσβεσης των κυματισμών με σκοπό τη φυσική αναπαράσταση των θαλάσσιων κυματισμών, σε μια αριθμητική δεξαμενή, στο ανοιχτό λογισμικό OpenFOAM.

Λαμβάνοντας υπόψη τρεις βασικές παραμέτρους:

- Ακρίβεια - accuracy
- Υπολογιστικές απαιτήσεις – computational requirements
- Διαθέσιμες δυνατότητες – available features

καταγράφουν τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της κάθε μεθόδου.

- Ζώνη χαλάρωσης - Relaxation zone method

Είναι μια τεχνική του εργαλείου waves2Foam και αποσκοπεί στην ομαλή μετάβαση της αναλυτικής θεωρίας ενός κυματισμού από τη χρήστη, σε μια λύση CFD. Περαιτέρω ανάλυση γίνεται αργότερα στο Κεφάλαιο 5.

- Static Boundary ή Dirichlet method – (DM) & Wave Absorption Method (AWA)

Η τεχνική αυτή αναφέρθηκε προηγουμένως στη δημοσίευση των (Miquel, Kamath, Chella, Archetti, & Bihs, 2018)

- Dynamic Boundary Method – DBM

Η DBM αντιπροσωπεύει την αριθμητική προσομοίωση ενός διεγέρτη κυμάτων, τύπου εμβόλου ή πτερυγίου από μία φυσική δεξαμενή κυματισμών. Έτσι ένα κινούμενο τοίχωμα, με τη δυναμική κίνηση του πλέγματος, επιτυγχάνει τη μίμηση της γεωμετρίας και της κίνησης του φυσικού διεγέρτη, ενώ ταυτόχρονα υφίσταται τις ίδιες πολυπλοκότητες. Το OpenFOAM δίνει τη δυνατότητα προσομοίωσης μέσω κινούμενου πλέγματος από την βιβλιοθήκη επίλυσης InterDyMFoam. Ομοίως η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την απόσβεση των κυμάτων στο τέλος της δεξαμενής. Για περισσότερες πληροφορίες μπορεί να ανατρέξει κάποιος στις δημοσιεύσεις των (Jia, Liu, Li, & Fan, 2020) και (Martinez-Ferrer, Qian, Ma, Causon, & Mingham, 2018)

Μέθοδος πηγής - Mass source method

Η μέθοδος αυτή προτάθηκε από τους (Lin & Liu, 1999). Επιπλέον αναφορές μπορεί να βρει κάποιος στις δημοσιεύσεις, (Lopez, Pereiras, Castro, & Iglesias, 2014), (Schmitt, Windt, Davidson, Rinqwood, & Whittaker, 2019). Αναφέρεται στην δημιουργία κυματισμών χρησιμοποιώντας μια πηγή μάζας που εισάγεται στις εξισώσεις RANS και αντικαθιστά την ελεύθερη επιφάνεια με μια εισροή – εκροή ρευστού. Ο όρος πηγής $s(x, t)$ για ένα γραμμικό μονοχρωματικό κύμα ορίζεται ως εξής:

$$s(t) = \frac{2cA_0}{A_\Omega} \sin(\omega t)$$

όπου c είναι η φασική ταχύτητα, και A_Ω είναι η επιφάνεια που καταλαμβάνει η πηγή. Ο όρος της πηγής, μέσω ενός όρου πηγής όγκου, περιλαμβάνεται στις εξισώσεις RANS και οδηγεί στη τροποποιημένη εξίσωση συνέχειας:

$$\nabla \cdot \rho U(x, t) = s(x, t)$$

Η μεθοδολογία αυτή δε περιλαμβάνει κάποιο τρόπο για απόσβεση κύματος οπότε στο τέλος της αριθμητικής δεξαμενής χρησιμοποιείται κάποιο μοντέλο απορρόφησης κυμάτων από αυτά που αναφέρονται παρακάτω εκτός της μεθοδολογίας με τη ζώνη χαλάρωσης και του δυναμικού πλέγματος.

- Αριθμητική παραλία ή πορώδες στρώμα - Numerical beach

Όπως στο φυσικό πείραμα χρειαζόμαστε μια φυσική κλίση για την απόσβεση του κύματος ή μια πορώδη κατασκευή, έτσι και στο υπολογιστικό χωρίο για την απόσβεση του κύματος έχουν δημιουργηθεί κάποιες μεθοδολογίες όπως η αριθμητική παραλία ή ένα πορώδες στρώμα (sponge layer) με σκοπό την απορρόφηση του κύματος. Μια τέτοια εφαρμογή παρουσιάζεται στην εργασία (Schmitt, P.; Elsaesser, B., 2015) όπου προστίθεται ο επιπλέον όρος στην εξίσωση (RANS), $S(x)\rho U(x, t)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho U(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \rho U(x, t) U(x, t) \\ = -\nabla p(x, t) + \nabla \cdot T(x, t) + \rho f_b(x, t) + S(x)\rho U(x, t) \end{aligned}$$

ο οποίος περιγράφει τον όρο απόσβεσης που χρησιμοποιείται για την εφαρμογή της αριθμητικής παραλίας (numerical beach). Η συνάρτηση $S(x)$ ελέγχει την ένταση της απόσβεσης με μηδενική τιμή στο χωρίο της διάδοσης και με αυξανόμενη τιμή στην περιοχή της αριθμητικής παραλίας.

- Κεκλιμένος πυθμένας - Slope bathymetry

Η τοποθέτηση μιας κεκλιμένης βαθυμετρίας στο τέλος της δεξαμενής έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή της διάταξης του υπολογιστικού χωρίου με σκοπό τη προσομοίωση της φυσικής παραλίας και των φυσικών επιδράσεων της. Έτσι επιτυγχάνεται η καταστροφή της κυματικής ενέργειας και πολλές φορές χρησιμοποιείται για τη μελέτη της θραύσης του κυματισμού. Παραδείγματα τέτοιας εφαρμογής βρέθηκαν στις αναφορές (Lopez, Pereiras, Castro, & Iglesias, 2014).

- Αυξάνοντας το πλέγμα - Mesh stretching

Αυξάνοντας το μήκος της αριθμητικής δεξαμενής και κατ' επέκταση το μήκος του πλέγματος προς την έξοδο της αριθμητικής δεξαμενής επιτυγχάνεται η εξασθένηση της ενέργειας του κυματισμού. Εμπειρικά έχει βρεθεί ότι δύο φορές το μήκος της αριθμητικής δεξαμενής είναι αρκετό για να επιτευχθεί αυτό όπως αναφέρεται στη δημοσίευση των (Davidson, Giorgi, & Ringwood, 2015).

Όσο αφορά τη μέθοδο ζώνη χαλάρωσης - relaxation zone, κατέληξαν στα συμπεράσματα ότι αφενός παρέχει ένα εύχρηστο περιβάλλον στο χρήστη για τη δημιουργία κυμάτων, μέσα από ένα ευρύ φάσμα κυματικών θεωριών, αφετέρου έδειξε καλά αποτελέσματα μέσα από ένα εύρος δοκιμών για διάφορες καταστάσεις θάλασσας. Παρ' όλα αυτά, ενώ παρέχει ευελιξία όσον αφορά τον έλεγχο της ακρίβειας μέσω του ορισμού της ζώνης χαλάρωσης, απαιτεί σχετικά υψηλό υπολογιστικό κόστος.

Τέλος έπειτα από ανάλυση ευαισθησίας που πραγματοποίησαν κατέληξαν στα εξής αποτελέσματα:

- Ζώνη χαλάρωσης εισόδου (Generation relaxation zone)

Το μήκος της ζώνης χαλάρωσης L_g στη περιοχή παραγωγής του κυματισμού, βρέθηκε βέλτιστο για $L_g = 2L$ καθώς είχε πολύ μικρά σφάλματα στο ύψος κύματος. Γενικά επιλογές $L_g > L$ θεωρούνται καλές.

- Ζώνη χαλάρωσης εξόδου (Absorption relaxation zone)

Το μήκος της ζώνης χαλάρωσης L_a στη περιοχή απορρόφησης του κυματισμού, είναι βέλτιστο για τη μικρότερη δυνατή περιοχή αφού μεγάλο μήκος L_a σημαίνει αύξηση του υπολογιστικού κόστους, αλλά και συναρτήσει των μικρότερων σφαλμάτων που προκύπτουν. Έτσι αν και για $L_a = 3L$ έχουμε μικρότερο σφάλμα, για $L_a = 2L$ έχουμε τη βέλτιστη επιλογή συνυπολογίζοντας το υπολογιστικό κόστος.

4 Αριθμητική επίλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων

4.1 Διακριτοποίηση των εξισώσεων διατήρησης

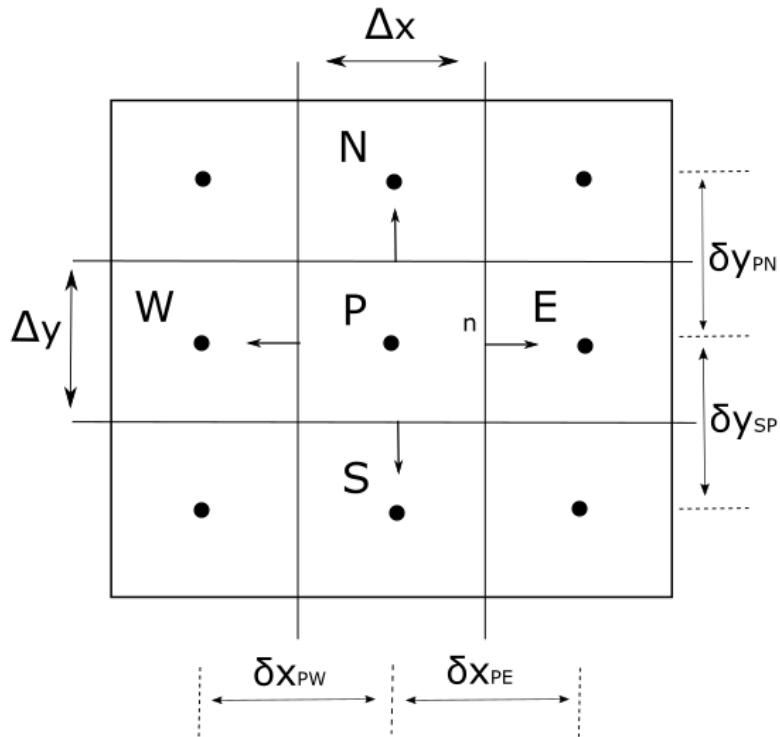
Οι εξισώσεις που αναφέρθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους είναι αρκετά πολύπλοκες και καθίστανται αδύνατο να επιλυθούν αναλυτικά. Έχουν λυθεί αναλυτικά για πολύ περιορισμένο αριθμό περιπτώσεων και απευθύνονται σε αρκετά απλοποιημένες ροές. Για το λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί αριθμητικές τεχνικές χρησιμοποιώντας μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης που μετατρέπουν τις μερικές διαφορικές εξισώσεις που αντιπροσωπεύουν τους νόμους διατήρησης, σε διακριτές αλγεβρικές εξισώσεις μέσα σε ένα συγκεκριμένο υπολογιστικό χωρίο.

Μια τέτοια μέθοδος, που εφαρμόζεται και από το ανοιχτό λογισμικό OpenFOAM, είναι η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων (Finite Volume Method – FVM). Όπως με τις άλλες μεθόδους (πεπερασμένων διαφορών - Finite Difference, πεπερασμένων στοιχείων - Finite Element), αρχικά γίνεται η διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου. Ολοκληρώνοντας την εξίσωση μεταφοράς σε έναν όγκο ελέγχου V_p , προκύπτει η σχέση:

$$\int_{V_p} \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \int_{V_p} \nabla \cdot (\rho u \varphi) = \int_{V_p} \nabla \cdot (\rho \Gamma_\varphi \nabla \varphi) + \int_{V_p} S_\varphi, \quad (4.1)$$

όπου στη μέθοδο FVM η διακριτοποίηση γίνεται σε πεπερασμένους όγκους που ονομάζονται κελιά (cells). Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά της μεθόδου είναι ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε δύσκολες γεωμετρίες (έντονες κλίσεις, καμπύλες γραμμές και σφαιρικά σώματα).

Στην Εικόνα 4.1 φαίνεται ένα δισδιάστατο ομοιόμορφο πλέγμα όπου ως όγκος ελέγχου V_p ορίζεται η περιοχή που περικλείει τον υπολογιστικό κόμβο P . Η τιμή της φ από την εξίσωση μεταφοράς υπολογίζεται στους κόμβους των κελιών, π.χ. στο κόμβο P . Οι διαστάσεις κάθε κελιού ισούται με Δx και Δy . Το σύνολο των κελιών σε ένα πρόβλημα απαρτίζουν το αριθμητικό πλέγμα (mesh) το οποίο οριοθετεί το υπολογιστικό χωρίο (computational domain) που μελετάμε.



Εικόνα 4.1 Δισδιάστατο ομοιόμορφο πλέγμα

Ας θεωρήσουμε μια μόνιμη ροή, δηλαδή ανεξάρτητη του χρόνου ώστε από την εξίσωση μεταφοράς να κρατήσουμε μόνο τους όρους της μόνιμης συναγωγής και διάχυσης. Τότε, (Versteeg & Malalasekera, 2007),

$$\int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \varphi) = \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \Gamma_\varphi \nabla \varphi) + \int_{V_P} S_\varphi, \quad (4.2)$$

Αυτή η εξίσωση αντιπροσωπεύει το ισοζύγιο της ροής σε έναν όγκο ελέγχου V_P , καθώς το αριστερό σκέλος αντιπροσωπεύει τη μεταφερόμενη ροή στον όγκο ελέγχου λόγω συναγωγής, και το δεξιό σκέλος τη μεταφερόμενη ροή λόγω διάχυσης και την παραγωγή ή τη καταστροφή της φ .

Το βασικό πρόβλημα στη διακριτοποίηση των όρων συναγωγής και διάχυσης είναι ο υπολογισμός της ποσότητας φ στις έδρες του κελιού. Έτσι από το θεώρημα Gauss η Εξίσωση 4.2 γράφεται:

$$\int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{u} \varphi) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \Gamma_\varphi \nabla \varphi) dA + \overline{S_\varphi} \Delta V, \quad (4.3)$$

όπου A είναι το εμβαδόν διατομής της έδρας του όγκου ελέγχου, n είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της έδρας με θετική φορά προς τα έξω και $\overline{S_\varphi}$ είναι η μέση τιμή της πηγής στον όγκο ελέγχου.

Για ευκολία χωρίζουμε την εξίσωση σε δύο μέρη συναγωγής-διάχυσης και από το θεώρημα μέσης τιμής η εξίσωση μεταφοράς για κάθε γειτονική έδρα θα γραφτεί ως:

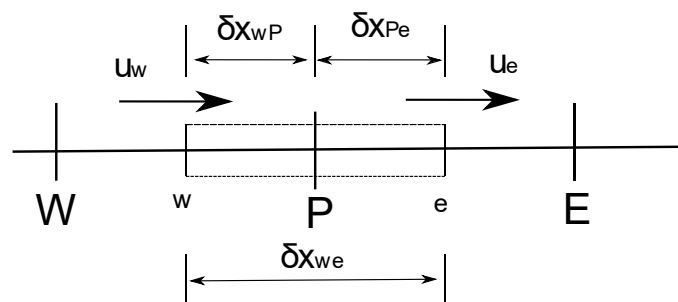
Όρος συναγωγής - (advection)

$$\int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{u} \varphi) dA = \varphi_n v_n \delta x - \varphi_s v_s \delta x - \varphi_w u_w \delta y + \varphi_e u_e \delta y \quad (4.4)$$

Όρος διάχυσης - (diffusion)

$$\begin{aligned} \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \Gamma_\varphi \nabla \varphi) dA + \overline{S_\varphi} \Delta V \\ = \Gamma_{\varphi n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_n \delta x - \Gamma_{\varphi s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_s \delta x - \Gamma_{\varphi w} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_w \delta y \\ + \Gamma_{\varphi e} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_e \delta y + \overline{S_\varphi} \Delta V \end{aligned} \quad (4.5)$$

Έστω ότι εξετάζουμε τη τιμή της φ σε μία μονοδιάστατη ροή, Εικόνα 4.2



Εικόνα 4.2 Μονοδιάστατο πλέγμα

Η τιμή της $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ στο κόμβο P , μπορεί να προσεγγιστεί από ένα ανάπτυγμα Taylor, όπως γίνεται και στη θεωρία των πεπερασμένων διαφορών, και να προκύψουν διάφορα σχήματα:

$$\varphi_E = \varphi_P + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_P \Delta x + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_P + \dots \quad (4.6)$$

Αν κρατήσουμε τον όρο πρώτης τάξης $\varphi_E = \varphi_P + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_P \Delta x$ και αγνοήσουμε τους υπόλοιπους, προκύπτει το γνωστό σχήμα:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_P = \frac{\varphi_E - \varphi_P}{\Delta x} \quad (4.7)$$

κατάντη διαφοράς ή downwind το οποίο είναι πρώτης τάξης ως προς την ακρίβεια. Με παρόμοια διαδικασία προκύπτει για τους κόμβους P και W το σχήμα:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_P = \frac{\varphi_P - \varphi_W}{\Delta x} \quad (4.8)$$

που ονομάζεται ανάντη διαφορά ή upwind και είναι πρώτης τάξης. Επίσης αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις προκύπτει το σχήμα κεντρικών διαφορών ή central difference με ακρίβεια της φ να είναι δεύτερης τάξης.

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_P = \frac{\varphi_E - \varphi_W}{2\Delta x} \quad (4.9)$$

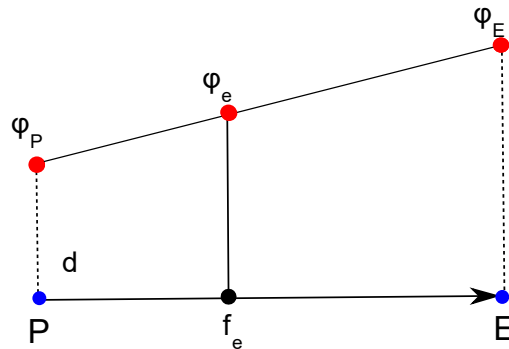
Για τον υπολογισμό της δεύτερης παραγώγου της φ , με προσέγγιση από ανάπτυγμα Taylor γύρω από τα σημεία E, W και προσθέτοντας κατά μέλη, προκύπτει το σχήμα κεντρικών διαφορών για τη δεύτερη παράγωγο της φ που είναι:

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_P = \frac{\varphi_E - 2\varphi_P + \varphi_W}{\Delta x^2} \quad (4.10)$$

Για τον υπολογισμό της φ στις έδρες των κελιών έχουν αναπτυχθεί διάφορα σχήματα παρεμβολής με τα πιο βασικά από αυτά να αναφέρονται στη συνέχεια.

Το σχήμα γραμμικής παρεμβολής ή κεντρικών διαφορών δεύτερης τάξης - (linear interpolation ή central differencing scheme), Εικόνα 4.3, είναι απλό και οδηγεί σε γρήγορη σύγκλιση, αλλά μπορεί να προκαλέσει αστάθεια στη λύση. Ο υπολογισμός

της φ στην έδρα f του κελιού με γραμμική – κεντρική παρεμβολή υπολογίζεται από την Εξίσωση 4.11 με γραμμικό συντελεστή f_e που δίνεται από την Εξίσωση 4.12

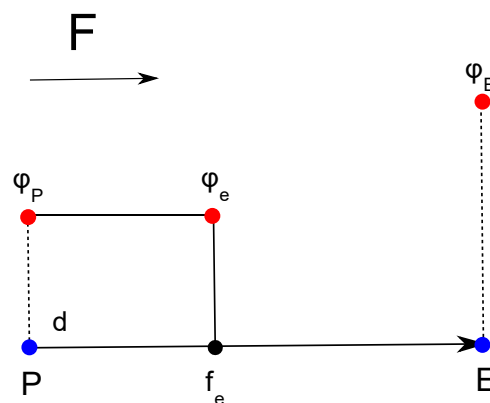


Εικόνα 4.3 Σχήμα γραμμικής παρεμβολής ή κεντρικών διαφορών

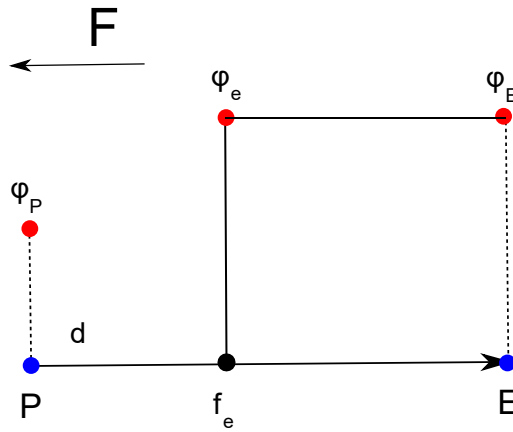
$$\varphi_e = f_e \varphi_E + (1 - f_e) \varphi_P \quad (4.11)$$

$$f_e = \frac{|x_e - x_P|}{|x_E - x_P|} = \frac{|x_e - x_P|}{|d|} \quad (4.12)$$

Το σχήμα ανάντη - upwind είναι γραμμικό, αρκετά ευσταθές, αλλά παρουσιάζει έντονη αριθμητική διάχυση. Όπως φαίνεται στις Εικόνες 4.4, 4.5, ανάλογα με τη κατεύθυνση της ροής F η τιμή της φ ισούται με την Εξίσωση 4.13.



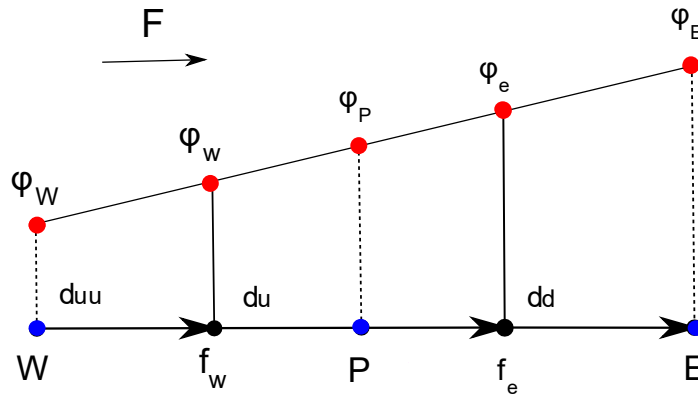
Εικόνα 4.4 Ανάντη σχήμα 1^{ης} τάξης ακρίβεια



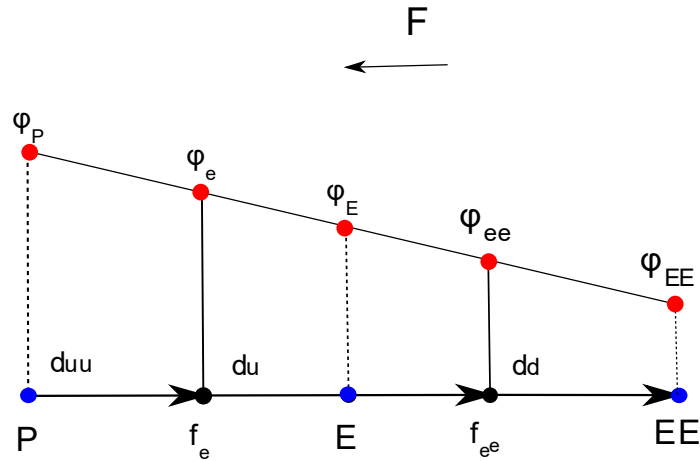
Εικόνα 4.5 Κατάντη σχήμα 1^{ης} τάξης ακρίβεια

$$\varphi_e = \begin{cases} \varphi_e = \varphi_P, & F \geq 0 \\ \varphi_e = \varphi_E, & F < 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

Ένα πιο σύνθετο σχήμα ανάλογο με τη κατεύθυνση της ροής F , παρουσιάζεται στις Εικόνες 4.6, 4.7 και περιγράφεται από την Εξίσωση 4.14. Είναι γνωστό ως σχήμα ανάντη δεύτερης τάξης – Second Order Upwind differencing (SOU) ή Linear Upwind Differencing (LUD), είναι δεύτερης τάξης ακρίβειας και χρησιμοποιείται για ροές που παρουσιάζουν ισχυρή συναγωγή και μεγάλες κλίσεις στα μεγέθη,



Εικόνα 4.6 Ανάντη σχήμα 2^{ης} τάξης ακρίβεια



Εικόνα 4.7 Κατάντη σχήμα 2^{ης} τάξης ακρίβεια

$$\varphi_e = \begin{cases} \varphi_P + \frac{1}{2}(\varphi_P - \varphi_W) = \frac{2}{3}\varphi_P - \frac{1}{2}\varphi_W, & F \geq 0 \\ \varphi_E + \frac{1}{2}(\varphi_E - \varphi_{EE}) = \frac{2}{3}\varphi_E - \frac{1}{2}\varphi_{EE}, & F < 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Τα αριθμητικά σχήματα έχουν καθοριστικό ρόλο όσον αφορά την ακρίβεια της λύσης, την ευστάθεια, αλλά και τη ταχύτητα της σύγκλισης.

Ένα βασικό χαρακτηριστικό είναι η μεταφορικότητα – (transportiveness) καθώς περιγράφει το τρόπο με τον οποίο μια πληροφορία (π.χ. η μεταβλητή φ) διαδίδεται μεταξύ των σημείων του πεδίου ροής. Οι δύο βασικοί παράγοντες της διάδοσης της πληροφορίας είναι οι όροι συναγωγής – (convection) και διάχυσης – (diffusion). Ως μέτρο ισχύος της μεταφορικότητας ορίζεται ο αδιάστατος αριθμός Peclet ως:

$$Pe = \frac{\text{συναγωγή}}{\text{διάχυση}} = \frac{\rho U}{\Gamma_\varphi / \Delta x} \quad (4.15)$$

όπου ρ η πυκνότητα, U η ταχύτητα ροής, Γ_φ ο συντελεστής διάχυσης και Δx το χαρακτηριστικό μήκος κελιού. Εύκολα συμπεραίνουμε ότι:

$$Pe = \begin{cases} 0, & \text{μηδενική συναγωγή και καθαρή διάχυση} \\ \infty, & \text{καθαρή συναγωγή και μηδενική διάχυση} \end{cases} \quad (4.16)$$

Σύμφωνα με τους (Versteeg & Malalasekera, 2007) έχει αποδειχθεί ότι το ανάντη – (upwind) σχήμα λαμβάνει υπόψη τη κατεύθυνση της ροής και είναι αποδοτικό για

ροή με έντονη συναγωγή. Παρ' όλα αυτά είναι αρκετά απλό και σε ορισμένες περιπτώσεις δημιουργείται το φαινόμενο της ψευτοδιάχυσης - (false diffusion), κυρίως σε προβλήματα που η ροή δεν είναι παράλληλη με τις γραμμές του πλέγματος. Σημαντική βελτίωση ως προς την ακρίβεια και τη διατήρηση των πλεονεκτημάτων του σχήματος upwind έχουν τα σχήματα ανάντη δεύτερης τάξης – (Second Order Upwind – SOU) ή το σχήμα Quick. Παρ' όλα αυτά έχουν παρατηρηθεί προβλήματα ευστάθειας της λύσης σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Το σχήμα γραμμικής ή κεντρικής παρεμβολής – (Central Differencing – CD) παρουσιάζει ακρίβεια δεύτερης τάξης διακριτοποιώντας καλά τις ροές με έντονη διάχυση. Παρ' όλα αυτά δε λαμβάνει υπόψη τη κατεύθυνση της ροής και σε μεγάλους αριθμούς Peclet, δίνει πλασματικές ταλαντώσεις ή έντονες αυξομειώσεις. Για την επίλυση προβλημάτων με έντονες αυξομειώσεις της ροής έχουν αναπτυχθεί τα ευσταθή σχήματα μεγαλύτερης τάξης που διατηρούν τη μονοτονία και ονομάζονται Total Variation Diminishing – TVD schemes και έχουν τη παρακάτω μορφή:

$$\varphi_e = \varphi_p + \frac{1}{2} \psi(r)(\varphi_E - \varphi_P) \quad (4.17)$$

με r ο λόγος της κλίσης της ανάντη πλευράς προς τη κλίση της κατάντη πλευράς, $r = \left(\frac{\varphi_P - \varphi_W}{\varphi_E - \varphi_P} \right)$ και $\psi(r)$ η περιοριστική συνάρτηση (limiter function) της ροής. Έτσι ανάλογα με τη τιμή που θα έχει η περιοριστική συνάρτηση $\psi(r)$, προκύπτει και το αντίστοιχο σχήμα παρεμβολής – (interpolation scheme). Εύκολα συμπεραίνουμε ότι για $\psi(r) = 0$ το σχήμα είναι UD, ενώ για $\psi(r) = 1$ το σχήμα είναι CD. Έτσι ανάλογα τη τιμή της περιοριστικής συνάρτησης $\psi(r)$ προκύπτει και το αντίστοιχο σχήμα παρεμβολής, με τα πιο διαδεδομένα ανώτερης τάξης να είναι το MUSCL, Van Leer, Van Albada, SuperBee κ.α. Για περεταίρω πληροφορίες μπορεί να ανατρέξει κάποιος στις αναφορές των (Sweby, 1984), (Ferziger & Peric, 2002), (Versteeg & Malalasekera, 2007).

Ο πιο απλός και ευσταθής τρόπος για τον προσδιορισμό των τιμών της φ και της παραγώγου της φ στις έδρες, είναι το σχήμα upwind ή ανάντη διαφορές. Αν υποθέσουμε ότι η τιμή στην έδρα είναι ίση με τη τιμή στο κέντρο του κελιού τότε από τις σχέσεις προκύπτει:

Όρος συναγωγής - (advection)

$$\begin{aligned} \varphi_n v_n \delta x - \varphi_s v_s \delta x - \varphi_w u_w \delta y + \varphi_e u_e \delta y \\ = A_n v_P \varphi_P - A_s v_S \varphi_S - A_w u_W \varphi_W + A_e u_P \varphi_P \end{aligned} \quad (4.18)$$

Όρος διάχυσης - (diffusion)

$$\begin{aligned}
 & \Gamma_{\varphi n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_n \delta x - \Gamma_{\varphi s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_s \delta x - \Gamma_{\varphi w} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_w \delta y + \Gamma_{\varphi e} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_e \delta y + \bar{S}_\varphi \Delta V \\
 & = \Gamma_n A_n \frac{(\varphi_N - \varphi_P)}{\delta y_{PN}} - \Gamma_s A_s \frac{(\varphi_P - \varphi_S)}{\delta y_{SP}} - \Gamma_w A_w \frac{(\varphi_P - \varphi_W)}{\delta x_{PW}} \\
 & + \Gamma_e A_e \frac{(\varphi_E - \varphi_P)}{\delta x_{EP}} + \bar{S}_\varphi \Delta V
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Έτσι, με μία αναδιάταξη του συνδυασμού των όρων συναγωγής – διάχυσης, θα δώσει την τελική τιμή στο κέντρο του κελιού ως συνάρτηση των ποσοτήτων φ στα γειτονικά κελιά.

$$\begin{aligned}
 & \varphi_P \left(A_n v_P + A_e u_P + \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}} + \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}} + \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{PW}} + \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{EP}} - S_P \right) \\
 & = \varphi_W \left(A_w u_W + \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{PW}} \right) + \varphi_N \left(\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}} \right) + \varphi_E \left(\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{EP}} \right) \\
 & + \varphi_S \left(A_s v_S + \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}} \right) + S_u
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Ο όρος πηγής αντιπροσωπεύεται στη γραμμικοποιημένη μορφή ως $\bar{S}_\varphi \Delta V = S_u + S_P \varphi_P$,

Η εξίσωση για λόγους ευκολίας μπορεί να απλοποιηθεί και να προκύψει η γενική διακριτοποιημένη μορφή εξίσωσης για εσωτερικούς κόμβους:

$$\alpha_P \varphi_P = a_W \varphi_W + a_N \varphi_N + a_E \varphi_E + a_S \varphi_S + S_u = \sum_{nb} a_{nb} \varphi_{nb} + S \tag{4.21}$$

Όπου Σ το άθροισμα του συνόλου των γειτονικών κόμβων, nb του P , και των συντελεστών a_{nb} .

Έτσι αφού διακριτοποιηθεί η εξίσωση μεταφοράς μπορεί να λυθεί επαναληπτικά για όλα τα κελιά του χωρίου.

4.2 Αριθμός Courant

Οι (Courant, Friedrichs, & Lewy, 1967) εισήγαγαν τη συνθήκη Courant Friedrichs Lewy – CFL που είναι μια αναγκαία συνθήκη σύγκλισης όταν λύνουμε αριθμητικά μια διαφορική εξίσωση με ένα συγκεκριμένο σχήμα διακριτοποίησης. Συγκεκριμένα το χωρίο εξάρτησης της αριθμητικής μεθόδου πρέπει να περιλαμβάνει το αναλυτικό χωρίο εξάρτησης του προβλήματος για να διασφαλιστεί η ευστάθεια του σχήματος.

Στη μονοδιάστατη ροή η συνθήκη CFL μεταφράζεται στην παρακάτω εξίσωση:

$$Co = \frac{\text{Fluid Distance}}{\text{Cell Distance}} = \frac{u\Delta t}{\Delta x} < Co_{max} \quad (4.22)$$

όπου Co ο αριθμός Courant, με Δt το μέγιστο χρονικό βήμα, Δx το μέγεθος του κελιού στη διεύθυνση της ταχύτητας και u η χαρακτηριστική ταχύτητα στη διεύθυνση του κελιού. Ο αριθμός αυτός είναι αδιάστατος και πολύ σημαντικός στις προσομοιώσεις CFD καθώς ελέγχει τη ροή (u) που θα περάσει από ένα υπολογιστικό κελί (Δx) σε ένα δεδομένο χρονικό βήμα (Δt). Η τιμή του μέγιστου αριθμού Courant, Co_{max} εξαρτάται από το σχήμα διακριτοποίησης της διαφορικής εξίσωσης με τη πιο σύνηθες τιμή για ένα άμεσο (explicit) σχήμα επίλυσης να είναι, $Co_{max} = 1$

Η έκφραση του αδιάστατου αριθμού Courant σε δύο διαστάσεις ορίζεται ως:

$$Co = \frac{u\Delta t}{\Delta x} + \frac{w\Delta t}{\Delta z} \leq Co_{max} \quad (4.23)$$

και σε γενική περίπτωση ορίζεται ως:

$$Co = \Delta t \left(\sum_{i=1}^n \frac{u_{xi}}{\Delta x_i} \right) \leq Co_{max} \quad (4.24)$$

Στη δημοσίευση των (Choi, et al., 2020) παρουσιάζεται ένα άλλος τρόπος για την εκτίμηση του αριθμού Courant, που είναι:

$$C_0 = \sqrt{C_{0x}^2 + C_{0y}^2} \quad (4.25)$$

όπου

$$C_{0x} = \frac{u_{wave} \Delta t}{\Delta x} \text{ και } C_{0y} = \frac{w_{wave} \Delta t}{\Delta y} \quad (4.26)$$

Με u_{wave} , w_{wave} οι συνιστώσες της ταχύτητας που υπολογίζονται από την αναλυτική θεωρία των κυματισμών.

5 Δημιουργία προσομοίωσης διάδοσης κυματισμών με το λογισμικό OpenFOAM.

5.1 Εισαγωγή στο OpenFOAM

Το λογισμικό OpenFOAM, όπως αναφέρει ο (Greenshields, 2020) είναι ένα ανοιχτό λογισμικό πακέτο που κυκλοφόρησε για πρώτη φορά το 2004 για την επίλυση προβλημάτων στο τομέα της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (CFD). Είναι ουσιαστικά μια βιβλιοθήκη σε γλώσσα προγραμματισμού C++ που χρησιμοποιείται για τη δημιουργία εφαρμογών (applications) για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων. Αυτές οι εφαρμογές μπορεί να είναι επιλυτές (solvers) ή βοηθητικά προγράμματα (utilities). Οι επιλυτές σχεδιάζονται για την επίλυση συγκεκριμένων φυσικών προβλημάτων ενώ τα βοηθητικά προγράμματα για την εκτέλεση εργασιών που περιλαμβάνουν διαχείριση δεδομένων. Το OpenFOAM αποτελείται από πολλούς έτοιμους λύτες και βοηθητικά προγράμματα καθώς το γεγονός ότι είναι ανοιχτό λογισμικό δίνει τη δυνατότητα σε όποιον χρήστη επιθυμεί, να γράψει τον δικό του κώδικα και αντίστοιχα να φτιάξει τον δικό του επιλυτή. Αυτό βέβαια απαιτεί πολύ καλή γνώση της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής καθώς και τη κατανόηση της φυσικής του προβλήματος. Παρ' όλο που το OpenFOAM δεν διαθέτει γραφικό περιβάλλον εργασίας (user interface), η ευελιξία του, το έκανε δημοφιλή επιλογή για χρήστες που επιθυμούν τη μοντελοποίηση ενός φυσικού προβλήματος. Το OpenFOAM χρησιμοποιείται από πολλούς εμπορικούς και ακαδημαϊκούς οργανισμούς και ιδιαίτερα σε πολλές επιστημονικές εργασίες και δημοσιεύσεις. Η γενική μεθοδολογία σχεδίασης - επίλυσης ενός προβλήματος είναι:

- η προ-επεξεργασία (Pre-processing)
- η επίλυση (Solving)
- και η μετά-επεξεργασία (Post-processing)

Η προ-επεξεργασία και η μετά-επεξεργασία είναι βήματα ελεγχόμενα από το χρήστη στη διαδικασία προσομοίωσης CFD. Η διακριτοποίηση των εξισώσεων που περιγράφουν τη ροή, ο καθορισμός των φυσικών παραμέτρων του προβλήματος, η δημιουργία του πλέγματος και η εισαγωγή των οριακών συνθηκών, είναι οι κύριες διεργασίες της προ-επεξεργασίας. Η μετά-επεξεργασία περιλαμβάνει την οπτικοποίηση και την επεξεργασία των επιθυμητών μεταβλητών και αποτελεσμάτων με σκοπό να παρουσιαστούν και να συγκριθούν με τα αντίστοιχα των πρωτότυπων πειραμάτων. Στο βήμα επίλυσης του OpenFOAM, ο χρήστης πρέπει να επιλέξει το λογισμικό επίλυσης και στη συνέχεια το ίδιο το πρόγραμμα δημιουργεί τη προσομοίωση.

5.1.1 Προσομοίωση κυματισμού με χρήση του waves2Foam-(Wave generation with waves2Foam)

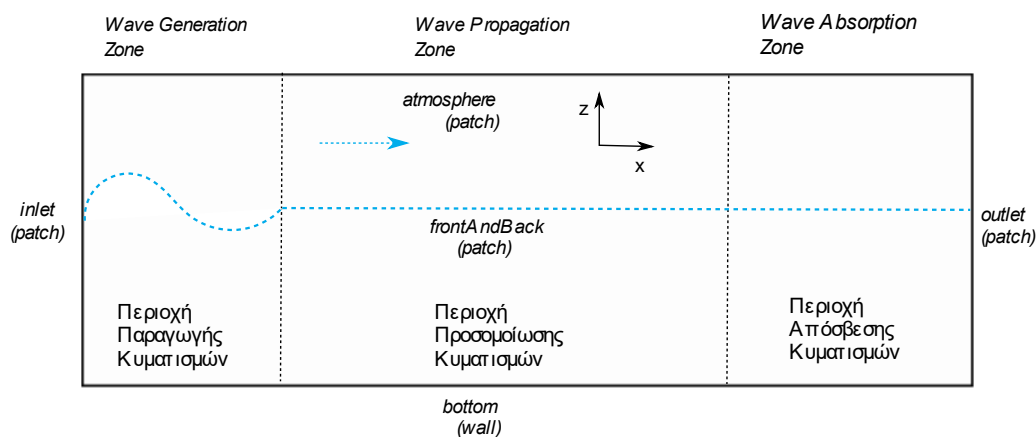
Αναπτύχθηκε στο τεχνολογικό πανεπιστήμιο της Δανίας από τον (Jacobsen, 2017). Το waves2Foam είναι μια εργαλειοθήκη λογισμικού (βιβλιοθήκες και επιλυτές) για την προσομοίωση προβλημάτων διάδοσης κυματισμών. Αποτελεί μια εξέλιξη του InterFoam για τη προσομοίωση κυματισμών στο OpenFOAM, εισάγοντας μια καινούργια τεχνική παραγωγής – απόσβεσης κυματισμών, τη ζώνη χαλάρωσης (Chenari B. , 2014). Τα κύματα παράγονται στην είσοδο (inlet) της αριθμητικής δεξαμενής και αποσβένονται ή απορροφούνται στην έξοδο (outlet) για να μην υπάρχουν φαινόμενα ανάκλασης, όπως αναλύεται παρακάτω, εφαρμόζοντας την τεχνική της ζώνης χαλάρωσης (relaxation zone). Το waves2Foam υποστηρίζει ένα μεγάλο εύρος από διάφορες κυματικές θεωρίες που είναι ενσωματωμένες στη βιβλιοθήκη του και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη δημιουργία του κύματος στην είσοδο της αριθμητικής δεξαμενής. Επίσης οι χρήστες έχουν τη δυνατότητα να δημιουργήσουν τη δική τους κυματική θεωρία ορίζοντας τις επιθυμητές σχέσεις και παραμέτρους εισόδου. Για την εισαγωγή της θεωρίας του κυματισμού που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε καθώς και τον καθορισμό των χαρακτηριστικών του κύματος, χρησιμοποιείται ένα αρχείο με το όνομα waveProperties.input το οποίο αναλύεται στη συνέχεια.

5.2 Αριθμητική δεξαμενή κυματισμών (Numerical wave tank)

Χρησιμοποιώντας το ανοιχτό λογισμικό OpenFOAM και waves2Foam μπορούμε να δημιουργήσουμε την αριθμητική δεξαμενή κυματισμών ξεκινώντας από το πλέγμα και την εισαγωγή της βαθυμετρίας και συνεχίζοντας με το καθορισμό των οριακών συνθηκών και των φυσικών παραμέτρων με σκοπό τη σωστή προσομοίωση της φυσικής του προβλήματος. Τέλος με την επιλογή των σχημάτων διακριτοποίησης των εξισώσεων ροής, καθώς και με την επιλογή του αλγόριθμου επίλυσης συνθέτουμε τη τελική μοντελοποίηση.

Το μέγεθος της αριθμητικής δεξαμενής είναι πολύ σημαντικό καθώς επηρεάζει άμεσα το χρόνο, το κόστος και την ακρίβεια της προσομοίωσης. Το υπολογιστικό χωρίο, Εικόνα 6.1, για τη παραγωγή κυμάτων έχει τρεις περιοχές:

- Περιοχή παραγωγής κυματισμών – Wave generation zone
- Περιοχή προσομοίωσης κυματισμών CFD – Wave propagation zone
- Περιοχή απόσβεσης - απορρόφησης κυματισμών – Wave absorption zone



Εικόνα 6.1 Αριθμητική δεξαμενή κυματισμών - (Numerical wave tank)

Το μέγεθος κάθε περιοχής καθορίζεται με βάση διαφορετικούς παράγοντες. Έτσι εάν τα μεγέθη των περιοχών είναι μικρά, η ροή δεν έχει αρκετό χώρο για να αναπτυχθεί σωστά με αποτέλεσμα να επηρεάζονται σημαντικά τα αποτελέσματα. Εάν το υπολογιστικό χωρίο είναι μεγαλύτερο από όσο πρέπει, τότε οδηγεί σε υψηλό υπολογιστικό κόστος καθώς μεγαλώνει ο απαιτούμενος χρόνος που χρειάζεται για να εκτελεστεί η προσομοίωση.

5.2.1 Οριακές συνθήκες - (Boundary conditions)

Το όριο στην είσοδο της αριθμητικής δεξαμενής – (**inlet**) που είναι και το όριο δημιουργίας του κυματισμού, θεωρείται ανοιχτό όριο (patch) και η κατανομή των ταχυτήτων καθορίζεται από τη συνθήκη waveVelocity καθώς στο σύνορο αυτό ξεκινάει η ζώνη χαλάρωσης και έτσι ο ορισμός της κατανομής της ταχύτητας προκύπτει από την αναλυτική λύση μέσω του waves2Foam. Αντίστοιχα ισχύει και για το ογκομετρικό κλάσμα α που παίρνει την οριακή συνθήκη waveAlpha. Για τη πίεση δεν μπορούμε να γνωρίζουμε τη τιμή της γι' αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε την οριακή συνθήκη Neumann δηλαδή καθορίζοντας την κλίση της πίεσης στο όριο, και συγκεκριμένα παίρνει τη τιμή zeroGradient, δηλαδή μηδενική κλίση.

Το όριο στην έξοδο της αριθμητικής δεξαμενής – (**outlet**) θεωρείται ένα ανοιχτό όριο (patch) και είναι το όριο μέχρι το οποίο αποσβένεται ο κυματισμός. Έτσι λόγω της τεχνικής του Relaxation Zone μπορούμε να έχουμε συνθήκες Dirichlet (τύπος συνοριακής στο OpenFOAM FixedValue) για τη ταχύτητα για την οποία επιβάλλουμε να είναι μηδέν. Για τη πίεση και το ογκομετρικό κλάσμα χρησιμοποιούμε τις οριακές συνθήκες Neumann καθώς δε γνωρίζουμε τις τιμές τους, θεωρώντας μηδενική κλίση για τα μεγέθη μέσω της παραμέτρου zeroGradient.

Το πάνω όριο της αριθμητικής δεξαμενής – (**atmosphere**), είναι ένα ανοιχτό όριο (patch) και περιλαμβάνει το όριο της ατμόσφαιρας. Για το καθορισμό της πίεσης χρησιμοποιείται η συνοριακή συνθήκη totalPressure που είναι FixedValue και υπολογίζεται από το τύπο:

$$p = \begin{cases} p_0, & \text{όταν έχουμε εκροή} \\ p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2, & \text{όταν έχουμε εισροή (ασυμπίεστη ροή)} \end{cases} \quad (6.1)$$

με p_0 η ολική πίεση. Επίσης από το OpenFOAM χρησιμοποιείται η default συνθήκη με όνομα inletOutlet που ορίζεται ως συνθήκη zeroGradient όταν υπάρχει εκροή και FixedValue, όταν υπάρχει εισροή. Μια τέτοια συνθήκη χρησιμοποιήθηκε για το ογκομετρικό κλάσμα, α , ενώ για τη ταχύτητα χρησιμοποιήθηκε η αντίστοιχη συνθήκη pressureInletOutletVelocity.

Το κάτω όριο της δεξαμενής – (**bottom**), είναι ένα κλειστό όριο και αναπαριστά το πυθμένα του φυσικού προβλήματος. Στα κλειστά όρια χρησιμοποιούμε την ονομασία wall και ορίζονται οι συνθήκες μη εισχώρησης και μη ολίσθησης – (no slip), δηλαδή τίθεται σταθερή τιμή - (οριακή συνθήκη FixedValue) για τη ταχύτητα που είναι ίση με μηδέν. Για τη πίεση και το ογκομετρικό κλάσμα χρησιμοποιούμε τις οριακές συνθήκες Neumann καθώς δε γνωρίζουμε τις τιμές τους, θεωρώντας μηδενική κλίση για τα μεγέθη μέσω της παραμέτρου zeroGradient.

Για τις έδρες στη y διεύθυνση, δηλαδή η μπροστινή και η πίσω πλευρά της δεξαμενής – (**frontAndBack**), τα όρια και οι φυσικοί παράμετροι (π.χ. u, α, p) παίρνουν τη συνθήκη empty καθώς η προσομοίωση είναι 2D και δε λαμβάνεται υπόψη η αλληλεπίδραση της ροής στη διάσταση y .

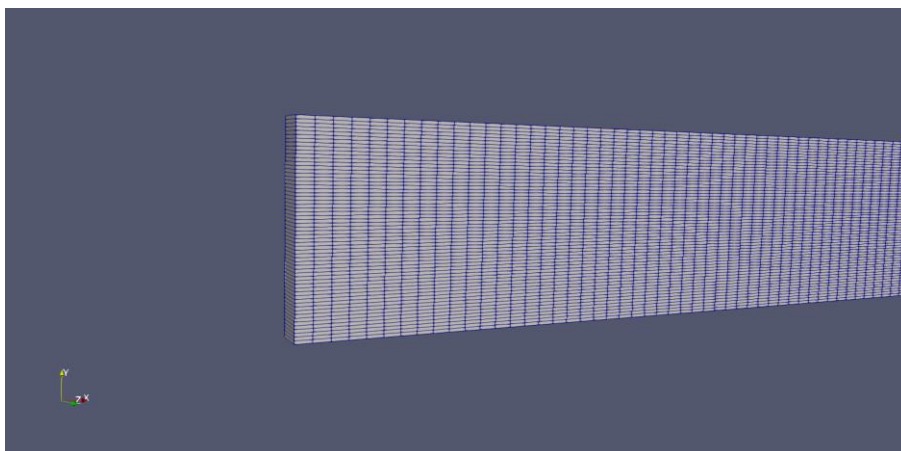
5.3 Δημιουργία πλέγματος (Meshing)

5.3.1 BlockMesh

Για τη δημιουργία πλέγματος, για απλές γεωμετρίες, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το εργαλείο blockMesh που είναι μέρος των βοηθητικών εργαλείων του OpenFOAM. Το εργαλείο αυτό παράγει υψηλής ποιότητας πλέγματα και είναι ιδανικό για εύκολες γεωμετρίες όπως κύβοι, τετράπλευρα, κύλινδροι, σφαίρες κ.α.

Δημιουργεί δομημένα παραμετρικά πλέγματα χρησιμοποιώντας ευθύγραμμα τμήματα (verticals) ή καμπύλες (curved) για τον ορισμό των πλευρών (edges) που καθαρίζονται από συγκεκριμένα χαρακτηριστικά σημεία (pooints) και ορίζουν το περίγραμμα των επιφανειών (faces) που περικλείουν τον όγκο ελέγχου. Συγκεκριμένα το πλέγμα δημιουργείται από ένα αρχείο που ονομάζεται BlockMeshDict και βρίσκεται μέσα στο φάκελο του constant/polyMesh μιας προσομοίωσης (case). Ένα τυπικό παράδειγμα πλέγματος με εξαέδρα κελιά με την

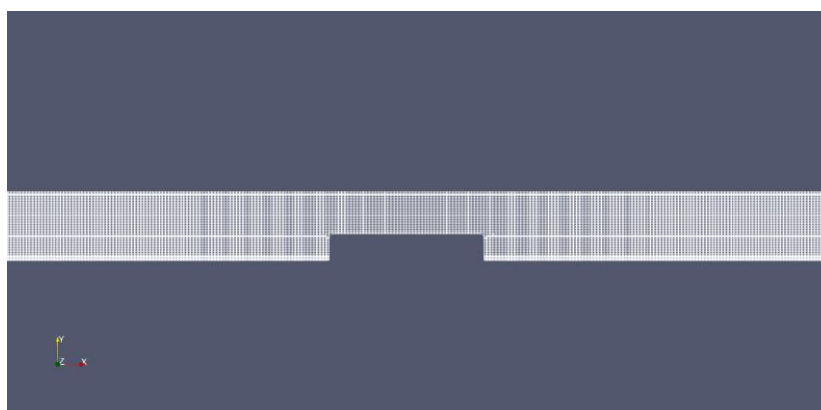
εντολή του blockMesh, φαίνεται στη Εικόνα 5.1. Για μια λεπτομερή περιγραφή μπορεί να ανατρέξει κάποιος στο εγχειρίδιο του OpenFOAM, (Greenshields, 2020)



Εικόνα 5.1 Ομοιόμορφο πλέγμα από το εργαλείο blockMesh

5.3.2 SnappyHexMesh

Το εργαλείο snappyHexMesh είναι ένα βοηθητικό εργαλείο δημιουργίας πλέγματος από εξάεδρα και αποτελεί μέρος των βοηθητικών εργαλείων του OpenFOAM. Ουσιαστικά εισάγει τη γεωμετρία ενός σώματος (π.χ. μια γάστρα, μια αεροτομή ή ένα αυτοκίνητο) σε μορφές τρισδιάστατης γεωμετρίας (π.χ. Stereolithography-STL ή WavefrontObject-OBJ ή STEP -STP) μέσα σε ένα χωρίο που ήδη έχει δημιουργηθεί μέσω του blockMesh. Ουσιαστικά, αφού εισαχθεί η γεωμετρία μέσα στο βασικό πλέγμα γίνεται μια πυκνωση κατά μήκος της γεωμετρίας που καθορίζεται ποιοτικά και ποσοτικά από το χρήστη. Στη συνέχεια με μια επαναληπτική διαδικασία επιτελούνται οι διορθώσεις για ένα βέλτιστο πλέγμα είτε περιμετρικά της γεωμετρίας (external mesh), είτε στο εσωτερικό της (internal mesh). Για περεταίρω αναφορές μπορεί να ανατρέξει κάποιος στο εγχειρίδιο του OpenFOAM, (Greenshields, 2020). Στη παρούσα εργασία το ζητούμενο είναι η εισαγωγή μιας βαθυμετρίας μέσω του snappyHexMesh όπως φαίνεται στην Εικόνα 5.2.



Εικόνα 5.2 Εισαγωγή βαθυμετρίας με το εργαλείο snappyHexMesh

5.4 Προ-επεξεργασία (Pre-processing)

Είναι το βασικό βήμα της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής με τη χρήση του ανοιχτού λογισμικού OpenFOAM. Όλες οι βασικές διενέργειες που χρειάζονται για τη δημιουργία της αριθμητικής δεξαμενής καθορίζονται από το χρήστη σε αυτό το βήμα και έχουν άμεση σύνδεση με την ακρίβεια και την ορθότητα των αποτελεσμάτων. Αυτό βέβαια προϋποθέτει καλή γνώση της φυσικής των προσομοιώσεων αλλά και αρκετή έρευνα με σκοπό τη βέλτιστη λύση.

Η προ-επεξεργασία περιλαμβάνει τρεις διαφορετικούς φακέλους στο OpenFOAM, και είναι οι εξής:

- Constant folder
- 0 folder
- System folder

5.4.1 Φάκελος Constant – (Constant folder)

Ο φάκελος Constant περιλαμβάνει τα βασικά αρχεία που καθορίζουν το υπολογιστικό χωρίο, όπως οι φυσικές ιδιότητες του ρευστού, το πλέγμα, τη ζώνη χαλάρωσης καθώς και τις χαρακτηριστικές ιδιότητες του κύματος.

5.4.2 Εισαγωγή παραμέτρων κύματος – (waveProperties)

Στο βήμα αυτό, μέσω του αρχείου waveProperties.input εισάγεται το είδος της κυματικής θεωρίας (Γραμμική θεωρία κυματισμών, Stokes 2^{ης} τάξης, Stokes 5^{ης} τάξης, φασματική θεωρία κ.α.), καθώς και τα χαρακτηριστικά του κύματος:

- το ύψος κύματος, H_0
- η περίοδος, T
- το βάθος, d_0
- η φάση, φ
- και η κατεύθυνση διάδοσης

Επίσης καθορίζεται η μέθοδος της ζώνης χαλάρωσης (Relaxation Zone – RZ), αλλά και η παράμετρος χρονικής μεταβολής T_{soft} - (Ramp time), που αναλύονται παρακάτω. Στο κώδικα της Εικόνας 5.3 φαίνεται μια τυπική διάταξη ενός αρχείου waveProperties.input που χρησιμοποιήθηκε στη παρούσα εργασία.

```

seaLevel      0.0;

relaxationNames ( inlet outlet );

initializationName outlet;

inletCoeffs
{
    waveType      stokesFirst;
    Tsoft         8.046;
    depth         0.5;
    period        1.341;
    direction     ( 1 0 0 );
    phi           0;
    height        0.05;

    relaxationZone
    {
        relaxationScheme Spatial;
        relaxationShape  Rectangular;
        beachType        Empty;
        relaxType        INLET;
        startX           ( 0 0 0 );
        endX             ( 4.9 0 0.005 );
        orientation      ( 1 0 0 );
    }
}

outletCoeffs
{
    waveType      potentialCurrent;
    U              ( 0 0 0 );
    Tsoft         2;

    relaxationZone
    {
        relaxationScheme Spatial;
        relaxationShape  Rectangular;
        beachType        Empty;
        relaxType        OUTLET;
        startX           ( 16 0 0 );
        endX             ( 21 0 0.005 );
        orientation      ( 1 0 0 );
    }
}

```

Εικόνα 5.3 Παρουσίαση ενός αρχείου waveProperties.input

5.4.3 Ζώνες χαλάρωσης – (Relaxation Zones - RZ)

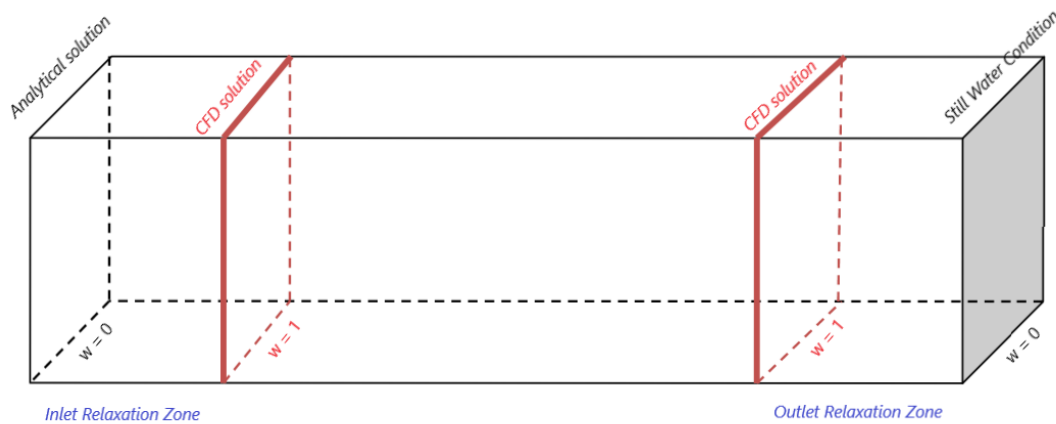
Στην είσοδο του υπολογιστικού χωρίου υπάρχει ανάγκη, σε μια περιοχή – ζώνη, να διαμορφωθεί το κυματικό πεδίο έτσι ώστε αυτό να προσεγγίζει την αναλυτική λύση που επιθυμεί ο χρήστης ως προσπίπτον κυματισμό (γραμμική θεωρία, δευτεροτάξια Stokes κλπ.). Αυτή η ζώνη ονομάζεται *ζώνη χαλάρωσης εισόδου* (inlet relaxation zone ή generation relaxation zone), (Jacobsen, 2017). Ομοίως κατά την έξοδο του διαδιδόμενου κυματισμού από το υπολογιστικό χωρίο υπάρχει ανάγκη για τον ορισμό μιας αντίστοιχης *ζώνης χαλάρωσης εξόδου* (outlet relaxation zone) στην οποία γίνεται απόσβεση αυτού, αποφεύγοντας έτσι φαινόμενα ανάκλασης και επομένως «μόλυνσης» της αριθμητικής λύσης στην περιοχή της προσομοίωσης. Στην Εικόνα 5.4 φαίνονται οι δύο ζώνες χαλάρωσης καθώς και η ενδιάμεση περιοχή προσομοίωσης.

Για την ομαλή προσέγγιση των εξισώσεων χρησιμοποιείται ένα σχήμα χαλάρωσης (relaxation scheme) το οποίο είναι:

$$\Phi = (1 - w_R)\Phi_{target} + w_R\Phi_{computed} \quad (5.1)$$

όπου για Φ_{target} και $\Phi_{computed}$ αντιστοιχεί η ταχύτητα u ή το ογκομετρικό κλάσμα α για αναλυτική και CFD λύση αντίστοιχα, και $w_R \in [0,1]$, μια συνάρτηση βάρους (weighting function). Όπως φαίνεται στην Εικόνα 5.4 στην είσοδο, για την αναλυτική λύση έχουμε $w_R = 0$ στην αρχή της και $w_R = 1$ στο τέλος της ζώνης χαλάρωσης.

Αντίστοιχα η συνάρτηση βάρους ισούται με $w_R = 1$ για αρχή της ζώνης χαλάρωσης εξόδου και με $w_R = 0$ στο τέλος της.



Εικόνα 5.4 Απεικόνιση της μεθόδου Relaxation Zone στο υπολογιστικό χωρίο

Η τυπική (default) συνάρτηση βάρους w_R που εφαρμόζεται είναι η:

$$w_R = 1 - \frac{\exp(\sigma^p) - 1}{\exp(1) - 1}, \quad (5.2)$$

όπου, ο εκθέτης p είναι μια σταθερή μεταβλητή με $p = 3.5$ και σ η τοπική συντεταγμένη κατά μήκος της ζώνης. Υπάρχει δυνατότητα, μέσω των αρχείων εισόδου, να επιλεγεί συνάρτηση βάρους διαφορετικού τύπου από αυτόν της Εξίσωσης 5.2, π.χ. πολυωνυμικού τύπου.

Στο αριθμητικό πείραμα γίνεται χρήση ορθογώνιας ζώνης χαλάρωσης (rectangular relaxation shape) η οποία λειτουργεί εξίσου καλά για δισδιάστατες 2D και τρισδιάστατες 3D προσομοιώσεις. Ορίζεται βάσει των συντεταγμένων δύο σημείων της κύριας διαγώνιου και με κατεύθυνση τη μια πλευρά της δεξαμενής (κατεύθυνση χαλάρωσης κατά x, y, z). Ο κώδικας του σχήματος χαλάρωσης δίνεται στην Εικόνα 5.3.

Ζώνη χαλάρωσης εισόδου (Inlet relaxation zone)

Σύμφωνα με τους (Windt, Davidson, Schmitt, & Ringwood, 2019) το βέλτιστο μήκος της ζώνης χαλάρωση, L_g , στην περιοχή παραγωγής του κυματισμού, είναι $L_g = 2L$ (όπου L το μήκος κύματος) καθώς δίνει πολύ μικρά σφάλματα στο ύψος κύματος, σε σχέση με την επιθυμητή αναλυτική λύση. Γενικά η επιλογή $L_g > 1L$ θεωρείται αποδεκτή, ενώ η επιλογή $L_g \geq 2L$ θεωρείται βέλτιστη.

Ζώνη χαλάρωσης εξόδου (Outlet relaxation zone)

Σύμφωνα με τους (Windt, Davidson, Schmitt, & Ringwood, 2019), αν και για $L_a = 3L$ έχουμε το μικρότερο σφάλμα, για $L_a = 2L$ έχουμε τη βέλτιστη επιλογή, συνυπολογίζοντας το υπολογιστικό κόστος. Επίσης οι (Chen, Zang, Hillis, Morgan, & Plummer, 2014) αναφέρουν ότι για $L_a = 0.5L$ ο συντελεστής ανάκλασης ισούται με 11% ενώ για $L_a = 2L$ ισούται περίπου με 1%.

5.4.4 Χρονική μεταβλητή T_{soft}

Όπως προαναφέρθηκε στη ζώνη χαλάρωσης εισόδου (Inlet Relaxation Zone), πραγματοποιείται η μετάβαση της εξίσωσης κύματος που ορίζεται από το χρήστη, σε μία πλήρως μη γραμμική λύση που θα προκύψει από την επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes. Καθώς γίνεται αυτή η μετάβαση στη ζώνη χαλάρωσης, έχει παρατηρηθεί, κυρίως για κυματισμούς μικρού μήκους κύματος, μια αριθμητική αστάθεια στο πρώτο προφίλ των παραγόμενων κυματισμών, δημιουργώντας επιπρόσθετους υψίσυχνους κυματισμούς (high-frequency waves). Έτσι, σύμφωνα με τη δημοσίευση των (Zhao, Hu, Sun, & Liang, 2010), για την ομαλή προσέγγιση των εξισώσεων στη περιοχή αυτή, χρησιμοποιείται η χρονική μεταβλητή T_{soft} ή ramp time που καθορίζει πόσο ομαλά γίνεται η μετάβαση, ανάλογα, με το χρονικό σχήμα που έχει ορίσει ο χρήστης. Στη δημοσίευση τους παρουσιάζονται τρία χρονικά σχήματα που διαχωρίζονται ανάλογα με την ποσοτική τους επίδραση (smooth-steep) στις εξισώσεις:

$$\Phi(t) = \Phi(t)\xi_i(t) \quad (5.3)$$

με

$$\xi_1(t) = \begin{cases} (3\mu^2 - 8\mu + 6)\mu^2, & t \leq T_{soft} \\ 1, & t > T_{soft} \end{cases}, \quad \mu = t/T_{soft} \quad (5.4)$$

$$\xi_2(t) = \begin{cases} \sin(\mu), & t \leq T_{soft} \\ 1, & t > T_{soft} \end{cases}, \quad \mu = t/T_{soft} \quad (5.5)$$

$$\xi_3(t) = \begin{cases} \mu, & t \leq T_{soft} \\ 1, & t > T_{soft} \end{cases}, \quad \mu = t/T_{soft} \quad (5.6)$$

Στη βιβλιοθήκη του wave2Foam χρησιμοποιείται ένα αντίστοιχο χρονικό σχήμα που οριοθετείτε στη περιοχή της ζώνης χαλάρωσης (Relaxation zone) και προσθέτει μία χρονική εξάρτηση στη μετάβαση της λύσης όπως φαίνεται στην εξίσωση:

$$\xi(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi t}{4T_{\text{soft}}}\right), & t \leq T_{\text{soft}} \\ 1, & t > T_{\text{soft}} \end{cases} \quad (5.7)$$

Στη πειραματική διαδικασία που ακολουθεί γίνεται μια διερεύνηση (sensitivity analysis) στη παράμετρο T_{soft} και την επίδραση που έχει στην εξίσωση κύματος στην αρχή της προσομοίωσης, σε μία αριθμητική δεξαμενή.

5.4.5 Φυσικές ιδιότητες

Οι φυσικές ιδιότητες που πρέπει να προσδιοριστούν, είναι ο καθορισμός της πυκνότητας και του κινηματικού ιξώδους για κάθε ρευστό, η επιτάχυνση της βαρύτητας, καθώς και η επιφανειακή τάση. Οι τιμές των φυσικών μεγεθών καθορίζονται στο αρχείο constant/transportProperties όπως φαίνονται στο Πίνακα 5.1.

Πίνακας 5.1 Φυσικές ιδιότητες ρευστών

Επιτάχυνση της βαρύτητας g	9.81	m/s
Πυκνότητα νερού ρ_{water}	1000	Kg/m^3
Πυκνότητα αέρα ρ_{air}	1,2	Kg/m^3
Κινηματικό ιξώδες νερού ν_{water}	10^{-6}	m^2/s
Κινηματικό ιξώδες αέρα ν_{air}	1.48×10^{-5}	m^2/s
Επιφανειακή τάση (σ)	0	N/m

Σύμφωνα με τους (Αθανασούλης & Μπελιμπασάκης, 2019) η επίδραση της επιφανειακής τάσης στη προσομοίωση κυματισμών με μήκος κύματος, τάξης μεγέθους μέτρου, είναι αμελητέα και για αυτό το λόγο μπορεί να αγνοηθεί.

5.4.6 Φάκελος 0 - (0 folder)

Για τα δισδιάστατα (2D) πειράματα, οι οριακές συνθήκες των φυσικών παραμέτρων (U, p, a) σε κάθε συνοριακή επιφάνεια (boundary face), φαίνονται στον Πίνακα 5.2.

Πίνακας 5.2 Καταγραφή οριακών συνθηκών στις έδρες της αριθμητικής δεξαμενής

Όνομα συνόρου	Αρχείο U	Αρχείο $\alpha 1$	Αρχείο P_rgh
<i>inlet</i>	<i>waveVelocity</i>	<i>waveAlpha</i>	<i>zeroGradient</i>
<i>outlet</i>	<i>fixedValue</i>	<i>zeroGradient</i>	<i>zeroGradient</i>
<i>bottom</i>	<i>fixedValue</i>	<i>zeroGradient</i>	<i>zeroGradient</i>
<i>atmosphere</i>	<i>pressureInletOutletVelocity</i>	<i>inletOutlet</i>	<i>TotalPressure</i>
<i>frontAndBack</i>	<i>empty</i>	<i>empty</i>	<i>empty</i>

5.4.7 Φάκελος system - (System folder)

Αυτός ο φάκελος περιλαμβάνει το αρχείο fvSolution στο οποίο καθορίζεται ο επιλυτής των γραμμικών εξισώσεων, οι ανοχές και τα κριτήρια σύγκλισης καθώς και η μέθοδος για την επίλυση των εξισώσεων Navier Stokes (π.χ. SIMPLE, PISO κλπ.), καθώς και το αρχείο fvSchemes στο οποίο καθορίζονται τα σχήματα διακριτοποίησης των διαφορικών τελεστών των εξισώσεων. Επίσης περιλαμβάνει το αρχείο controlDict που είναι απαραίτητο για το καθορισμό της διάρκειας της προσομοίωσης (startTime – endTime), την επιλογή του χρονικού βήματος κάθε επανάληψης (deltaT), την επιλογή του χρονικού βήματος αποθήκευσης των αποτελεσμάτων (writeInterval) καθώς και τον καθορισμό του τοπικού και μέγιστου αριθμού Courant (C_o)

5.5 Περιγραφή του στάδιου της επίλυσης της προσομοίωσης (Solving)

Για τη προσομοίωση του διφασικού προβλήματος χρησιμοποιήθηκε η βιβλιοθήκη wave2Foam, όπως ήδη έχει αναφερθεί. Η βιβλιοθήκη χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο PIMPLE – (Piso-SIMPLE) για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes, για την προσομοίωση της ροής στο πεδίο του χρόνου (unsteady). Ο αλγόριθμος αυτός είναι ένα υβριδικό μοντέλο που συνδυάζει τους αλγόριθμους SIMPLE και PISO με σκοπό τη συνδυαστική επίλυση των πεδίων πίεσης – ταχύτητας.

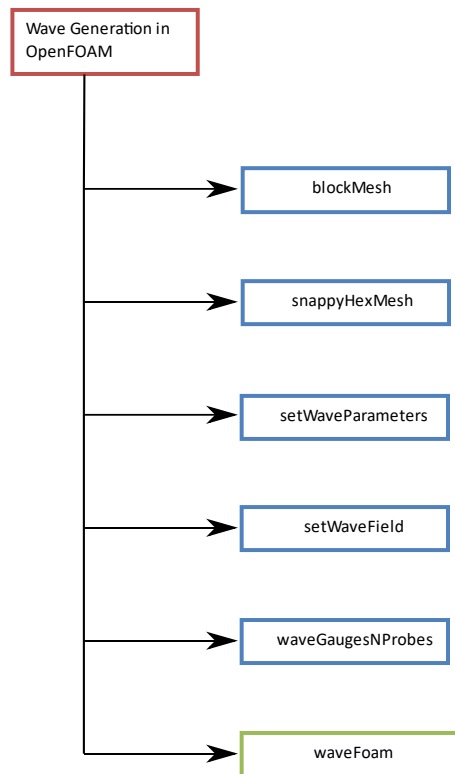
Ο αλγόριθμος SIMPLE - (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations) που διατυπώθηκε από τους (Pantakar & Spalding, 1983) αποτελεί μια επαναληπτική διαδικασία εκτίμησης και διόρθωσης για τον υπολογισμό της πίεσης. Συνήθως χρησιμοποιείται για μόνιμες ροές και ακολουθεί τα εξής βήματα:

- Υπολογίζει τις διακριτοποιημένες εξισώσεις ορμής χρησιμοποιώντας μια υποθετική τιμή για τη πίεση
- Αφού υπολογίσει τις καινούργιες ταχύτητες λύνει την εξίσωση διόρθωσης της πίεσης
- Έπειτα ακολουθεί το βήμα για τις διορθώσεις της πίεσης και των ταχυτήτων
- Λύνει όλες τις διακριτοποιημένες εξισώσεις μεταφοράς
- Εάν επιτυγχάνεται η σύγκλιση τότε ο αλγόριθμος τερματίζει

Ο αλγόριθμος PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) που διατυπώθηκε από τον (Issa, 1986), είναι μια διαδικασία υπολογισμού πίεσης – ταχύτητας που περιλαμβάνει ένα βήμα πρόβλεψης και ένα ακόμα βήμα διόρθωσης. Μπορεί να θεωρηθεί επέκταση του αλγόριθμου SIMPLE με ένα επιπλέον βήμα διόρθωσης, και χρησιμοποιείται κυρίως για μη μόνιμες ροές. Αυτό το βήμα καθορίζεται από τον αλγόριθμο με την εντολή **nCorrectors** και συνήθως παίρνει τιμές μεταξύ 2 και 3 αναλόγως πόσες διορθώσεις θέλει να κάνει ο χρήστης. Στον αλγόριθμο PIMPLE περιλαμβάνεται μια σημαντική εντολή που είναι η **nOuterCorrectors** που αν πάρει τη τιμή 1 τότε ο αλγόριθμος λειτουργεί σαν τον PISO, ενώ αν πάρει τιμή μεγαλύτερη,

τότε ενεργοποιείται μια επαναληπτική διαδικασία σε όλα τα βήματα για μεγαλύτερη ακρίβεια. Λεπτομερής περιγραφή των αλγορίθμων που αναφέρθηκαν μπορεί να βρει κάποιος στους (Ferziger & Peric, 2002) και (Issa, 1986) αντίστοιχα.

Στο στάδιο της επίλυσης (solving) ξεκινάει η επίλυση της προσομοίωση ενεργοποιώντας το βασικό επιλυτή που είναι, ο waveFoam (κουτάκι με πράσινο χρώμα), αφού πρώτα έχει ολοκληρωθεί το στάδιο της προ-επεξεργασίας (pre-processing) (κουτάκια με μπλε χρώμα), που απεικονίζονται στην Εικόνα 5.5.



Εικόνα 5.5 Βήματα παραγωγής κυματισμού στο OpenFOAM

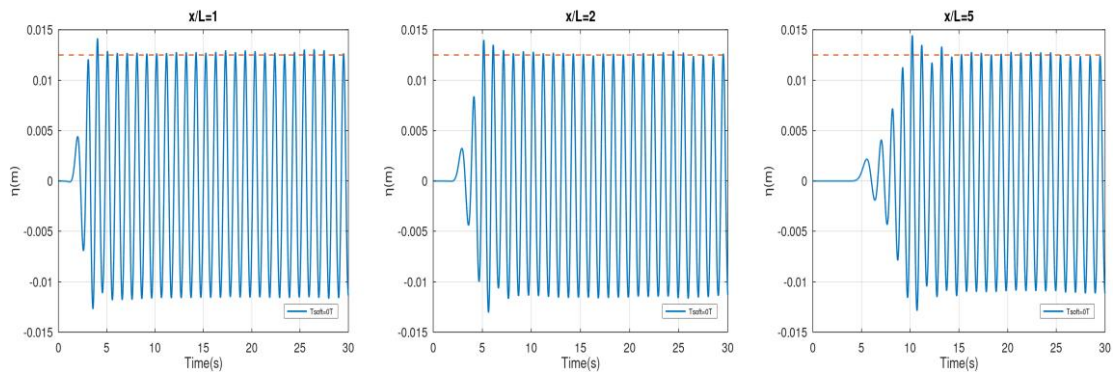
- I. Η εντολή blockMesh δημιουργεί τα όρια (boundaries), τις επιφάνειές (faces), τα σημεία (points), όπως ορίζονται στο αρχείο blockMeshDict με σκοπό της δημιουργία του αρχικού πλέγματος όπως ήδη αναφέρθηκε. Εάν το υπολογιστικό χωρίο δεν έχει οριστεί σωστά, τότε, το OpenFOAM δε θα είναι σε θέση να δημιουργήσει τα χαρακτηριστικά του πλέγματος και θα εμφανιστεί ένα σφάλμα στην γραμμή εντολών.
- II. Η εντολή snappyHexMesh τροποποιεί το βασικό υπολογιστικό χωρίο που ήδη έχει δημιουργηθεί μέσω του blockMesh, εισάγοντας τη γεωμετρία ενός σώματος σε μορφή τρισδιάστατης γεωμετρίας.

- III. Μόλις δημιουργηθεί το τελικό πλέγμα, χρησιμοποιείται ένα βοηθητικό εργαλείο με όνομα `setWaveProperties` με σκοπό να οριστούν οι παράμετροι του κύματος. Έτσι αφού ο χρήστης έχει ρυθμίσει καταλλήλως το αρχείο `waveProperties.input`, το `waves2Foam` μπορεί να υπολογίσει τη κυματική θεωρία που έχει επιλεγεί καθώς και τις παραμέτρους του κύματος που ήδη προαναφέρθηκαν για τη δημιουργία της αριθμητικής δεξαμενής.
- IV. Το βοηθητικό εργαλείο `setWaveField` ορίζει την αρχική κατάσταση στο υπολογιστικό χωρίο σύμφωνα με τα αρχείο `waveProperties`. Αυτό το βοηθητικό πρόγραμμα ελαχιστοποιεί το χρόνο προσομοίωσης, ρυθμίζοντας την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, καθώς και τις ταχύτητες και τις πιέσεις του ρευστού στις αρχικές συνθήκες, όπως δηλαδή έχουν οριστεί από το χρήστη στο φάκελο 0, πριν ξεκινήσει η προσομοίωση.
- V. Το βοηθητικό εργαλείο `waveGaugesNProbes` χρησιμοποιώντας το φάκελο `probeDefinitions` και `surfaceElevation.sets` ορίζει τις επιθυμητές θέσεις και μέτρησης των αποτελεσμάτων (π.χ. ανύψωση ελεύθερης επιφάνειας)
- VI. Αφού δημιουργηθεί το πλέγμα και οριστούν οι οριακές και φυσικές συνθήκες, ο επιλυτής `waveFoam` εκτελείται έτσι ώστε να ξεκινήσει η λύση της προσομοίωσης.

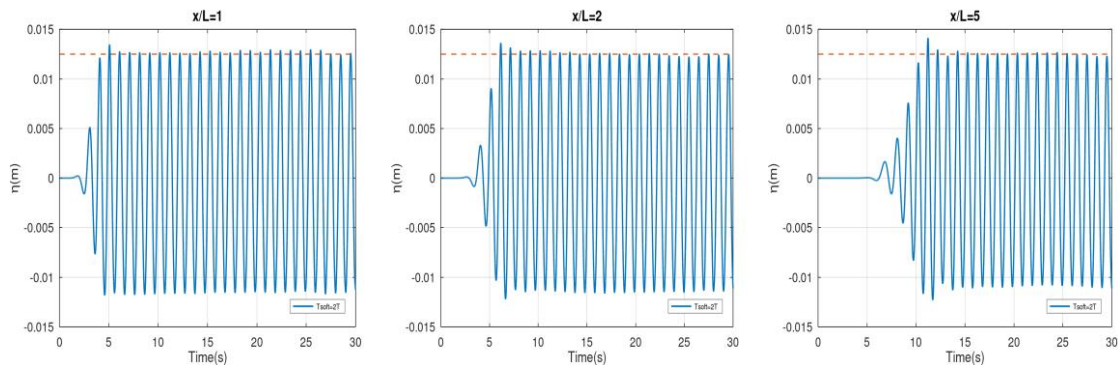
6 Αριθμητικές προσομοιώσεις

6.1 Ανάλυση ευαισθησίας στη μεταβλητή χρόνου T_{soft} - (Sensitivity analysis on rump time - T_{soft})

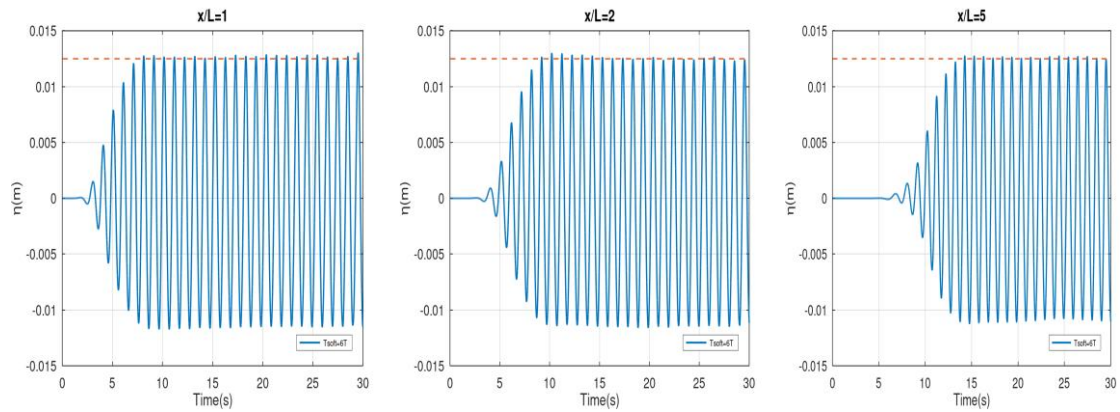
Η εργαλειοθήκη του waves2Foam χρησιμοποιεί τη χρονική μεταβλητή T_{soft} , όπως αναλύθηκε στη θεωρία, που καθορίζει το αρχικό χρονικό διάστημα (από τον συνολικό χρονικό διάστημα της προσομοίωσης) κατά το οποίο γίνεται η μετάβαση της εξίσωσης κύματος που δίνεται από το χρήστη για το inlet, στην πλήρως μη γραμμική αριθμητική λύση του CFD. Για τη διερεύνηση της ποσοτικής και ποιοτικής επιρροής που έχει η μεταβλητή αυτή στα αποτελέσματα της ανύψωσης του κυματισμού στη ζώνη προσομοίωσης, πραγματοποιήθηκε ανάλυση ευαισθησίας σε μια αριθμητική δεξαμενή με επίπεδο πυθμένα (βάθους $d_0 = 0.25\text{ m}$) για διάφορες τιμές του T_{soft} . Στις παρακάτω εικόνες παρουσιάζονται τα διαγράμματα της ανύψωσης συναρτήσεως του χρόνου για τις τιμές του T_{soft} , $T_s = 0T$, $T_s = 2T$, $T_s = 6T$, $T_s = 10T$, στις θέσεις $x/L = 1$, $x/L = 2$ και $x/L = 5$. Ο αρμονικός κυματισμός στην είσοδο της προσομοίωσης έχει ύψος κύματος $H_0 = 0.025\text{ m}$ περίοδο $T_0 = 1.018\text{ s}$ και μήκος κύματος $L_0 = 1.336\text{ m}$. Ο κυματισμός αυτός έχει μικρό μήκος κύματος και επιλέχθηκε γιατί σύμφωνα με τους (Zhao, Hu, Sun, & Liang, 2010) οι κυματισμοί με μικρό μήκος κύματος παρουσιάζουν μεγαλύτερη αριθμητική αστάθεια.



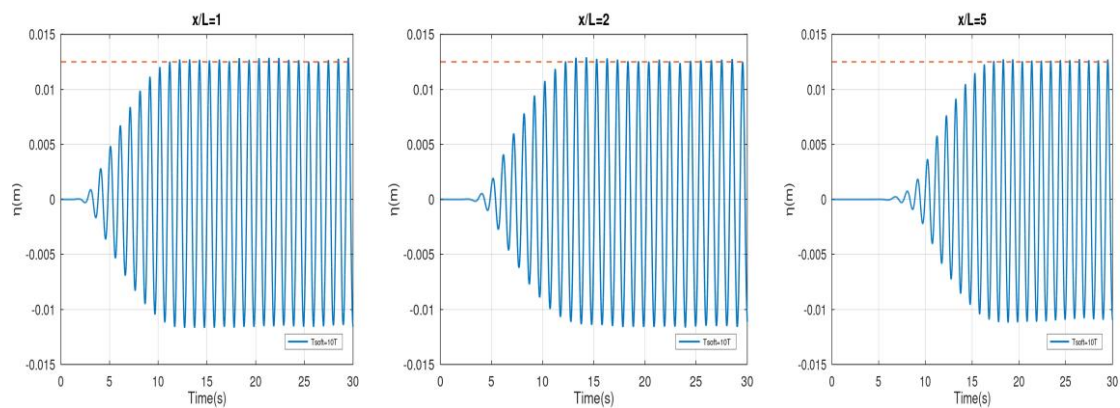
Εικόνα 6.1 Ανύψωση του κυματισμού για $T_s=0T$ στις θέσεις $x/L=1$, $x/L=2$, $x/L=5$



Εικόνα 6.2 Ανύψωση του κυματισμού για $T_s=2T$ στις θέσεις $x/L=1$, $x/L=2$, $x/L=5$



Εικόνα 6.3 Ανύψωση του κυματισμού για $T_s=6T$ στις θέσεις $x/L=1, x/L=2, x/L=5$



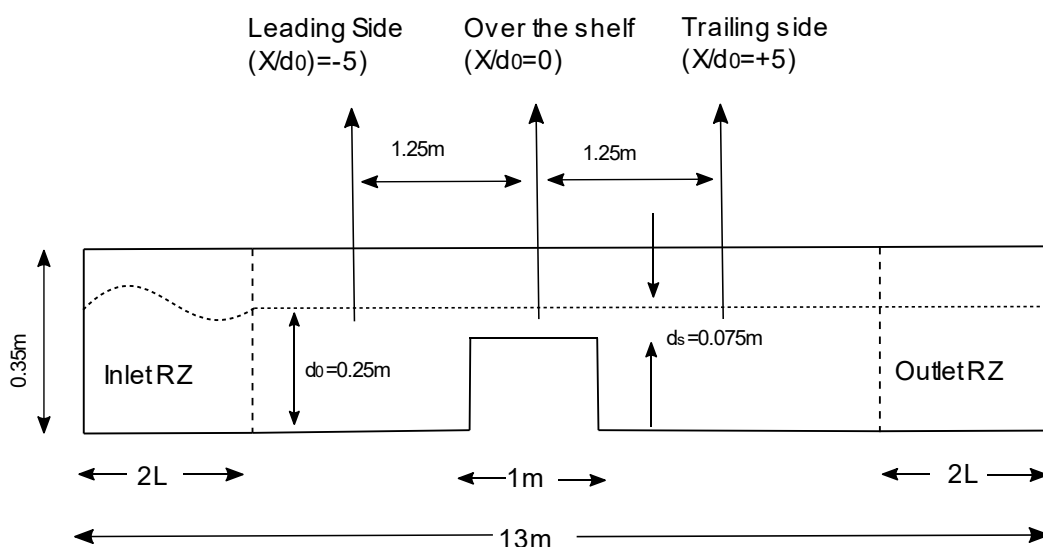
Εικόνα 6.4 Ανύψωση του κυματισμού για $T_s=10T$ στις θέσεις $x/L=1, x/L=2, x/L=5$

Σύμφωνα με τα διαγράμματα της Εικόνας 6.1 παρατηρείται μια αριθμητική αστάθεια για τα πρώτα μήκη κύματος με $T_{soft} = 0T$ και καθώς ο κυματισμός διαδίδεται κατά μήκος της δεξαμενής δημιουργείται μεγαλύτερη αστάθεια όπως φαίνεται στη θέση $x/L = 5$ της Εικόνας 6.1. Όπως αναφέρεται και στη δημοσίευση των (Zhao, Hu, Sun, & Liang, 2010), καθώς αυξάνεται το T_{soft} ($T_s = 6T$ και $T_s = 10T$) η αριθμητική αστάθεια που δημιουργείται στα πρώτα μήκη κύματος αποσβένεται όπως φαίνεται στις Εικόνες 6.3, 6.4, καθώς η μετάβαση της αναλυτικής λύσης στη ζώνη χαλάρωσης, σε μια λύση CFD γίνεται πολύ ομαλά (smooth), χωρίς διαταραχές. Η μόνο αρνητική επίδραση της αύξησης του T_{soft} που διαπιστώθηκε είναι ότι μεγαλώνει το υπολογιστικό κόστος κάτι που αποτυπώνεται και στα διαγράμματα, καθώς η κυματομορφή αργεί να λάβει τις μέγιστες τιμές της.

6.2 Περίπτωση A - Προσομοίωση κύματος πάνω από μία παραλληλόγραμμη υφαλοκρηπίδα.

Στη δημοσίευση των (Ohgama & Nadaika, 1994) παρουσιάζεται η μελέτη συμπεριφοράς των κυμάτων πάνω από μια παραλληλόγραμμη υφαλοκρηπίδα σε μία αριθμητική δεξαμενή. Οι συγγραφείς χρησιμοποιώντας τη μη γραμμική θεωρία Stokes 5^{ης} τάξης (Fenton, 1985) στην είσοδο της αριθμητικής δεξαμενής προσομοίωσαν τη διάδοση αρμονικού κυματισμού που εισέρχεται σε μια περιοχή ενδιαμέσου βάθος $d_0 = 0.25 \text{ m}$ καθώς διαδίδεται πάνω από μια βυθισμένη υφαλοκρηπίδα μορφής σκαλοπατιού, Εικόνα 6.5, βάθους $d_s = 0.075 \text{ m}$. Για την επαλήθευση των αριθμητικών αποτελεσμάτων τους, έγινε σύγκριση με αντίστοιχα πειραματικά.

Στην Εικόνα 6.5 απεικονίζεται η γεωμετρία της αριθμητικής δεξαμενής, με μήκος 13 m και ύψος 0.35 m . Το πλάτος είναι αμελητέο καθώς το πείραμα είναι $2D$ και γι' αυτό επιλέγεται να έχει τη διάσταση ενός κελιού. Το βάθος του νερού είναι 0.25 m και η περιοχή της ατμόσφαιρας 0.1 m ($0.1 + 0.25 = 0.35$ ύψος δεξαμενής). Το μήκος της υφαλοκρηπίδας $D = 1 \text{ m}$ και το ύψος της 1.75 m . Το προφίλ του κυματισμού μετρήθηκε σε τρεις θέσεις, μία πάνω από το κέντρο της υφαλοκρηπίδας και οι άλλες δύο σε απόσταση 0.125 m από το κέντρο της, όπως φαίνεται στην Εικόνα 6.5. Έτσι για $X = 0$ στο κέντρο της υφαλοκρηπίδας, προκύπτουν οι τρεις μετρήσεις στη τοποθεσία: Over the shelf: $X/d = 0$ και Leading – Trailing side $X/d = \pm 5$. Για τη ρύθμιση της φάσης μεταξύ του πειραματικού – υπολογιστικού προφίλ των κυμάτων, ορίζεται ως η χρονική στιγμή στην οποία η ανύψωση του κύματος η είναι ίση με μηδέν στη πρώτη περιοχή μέτρησης, δηλαδή στο (Leading side).



Εικόνα 6.5 Απεικόνιση αριθμητικής δεξαμενής (Περίπτωση A)

Για τη δημιουργία του βασικού πλέγματος χρησιμοποιήθηκε το εργαλείο του OpenFOAM, το blockMesh. Το βασικό πλέγμα που οριοθετεί την αριθμητική δεξαμενή δεν περιλαμβάνει κάποια βαθυμετρία ή κάποιο κατασκευαστικό στοιχείο. Έτσι η εισαγωγή της βαθυμετρίας γίνεται με τη βοήθεια του εργαλείου snappyHexMesh εισάγοντας την υφαλοκρηπίδα σε μορφή Stereolithography (STL) που δημιουργήθηκε στο πρόγραμμα Rhinoceros. Η τελική μοντελοποίηση του υπολογιστικού χωρίου με τη βαθυμετρία φαίνεται στην Εικόνα 6.6, όπου με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται το νερό ($\alpha = 1$) και με μπλε χρώμα ο αέρας ($\alpha = 0$).



Εικόνα 6.6 Υπολογιστικό χωρίο και η μοντελοποίηση των ρευστών με τη μέθοδο VOF

Για τη προσομοίωση του κύματος στην είσοδο της δεξαμενής χρησιμοποιήθηκε η μη γραμμική θεωρία κυματισμού Stokes 5^{ης} τάξης με τα χαρακτηριστικά του κύματος που φαίνονται στον Πίνακα 6.1

Πίνακας 6.1 Παρουσίαση χαρακτηριστικών κυματισμού

Χαρακτηριστικά Κυματισμού - Wave Properties		
Θεωρία κυματισμού	Stokes Fifth Order	
Βάθος (d)	0.25	m
Περίοδος (T)	1.018	s
Ύψος κύματος (H_0)	0.025	m
Μήκος κύματος (L_0)	1.336	m
Φασική ταχύτητα (c)	1.313	m/s
Κυματαριθμός (κ)	4.7014	m^{-1}
Κυκλική συχνότητα (ω)	6.721	rad
Κατεύθυνση διάδοσης	$x - \acute{\alpha}\xi\sigma\nu\alpha\varsigma$	

Το μήκος κύματος και η φασική ταχύτητα στην είσοδο της δεξαμενής που υπολογίστηκε στο πρόγραμμα Octave με τη χρήση της μεθόδου Newton-Rampson για ενδιάμεσο βάθος είναι:

$$\text{wavelength } (L_0) = \frac{2\pi}{\kappa} = \frac{2 * 3.14159}{4.7014} = 1.336 \text{ m}$$

$$\text{phaseVelocity } (c) = \frac{L_0}{T} = \frac{1.336}{1.018} = 1.313 \text{ m/s}$$

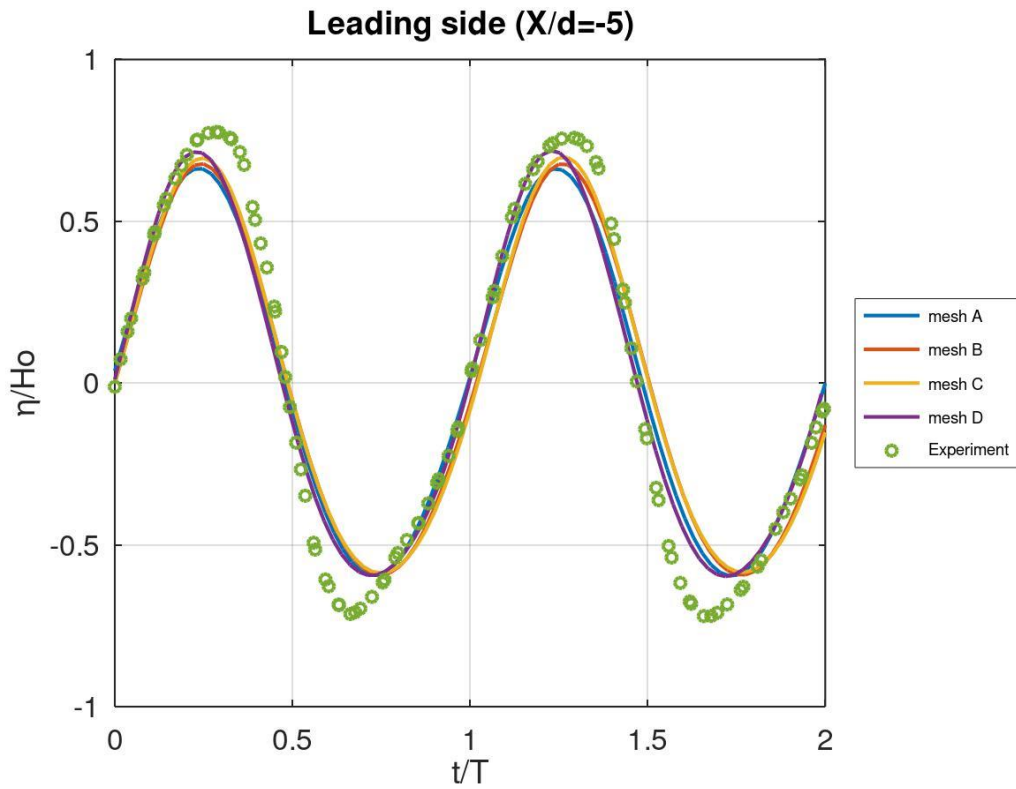
Για φασική ταχύτητα περίπου ίση με $c = 1.3 \text{ m/s}$ το κύμα θα χρειαστεί περίπου $13/1.3 = 10 \text{ s}$, για να διανύσει ολόκληρο το υπολογιστικό χωρίο, όπου 13 m είναι το ολικό μήκος της αριθμητικής δεξαμενής. Προσεγγίστηκα παρατηρήθηκε ότι για τα έξι πρώτα μήκη κύματος η κυματομορφή δεν έχει αναπτυχθεί πλήρως στη περιοχή της προσομοίωσης λόγω της χρονικής μεταβολής T_{soft} στη ζώνη χαλάρωσης εισόδου (Inlet relaxation zone). Έτσι χρειάζεται περίπου $10 + 6 * T \approx 17 \text{ s}$. Οπότε ο τελικός χρόνος προσομοιώσεις είναι 25 s (endTime).

Για τη μελέτη και τη προσομοίωση της συμπεριφοράς των κυματισμών χρησιμοποιήθηκαν τέσσερα πλέγματα με διαφορετική πυκνωση όπως φαίνεται στον Πίνακα 6.2.

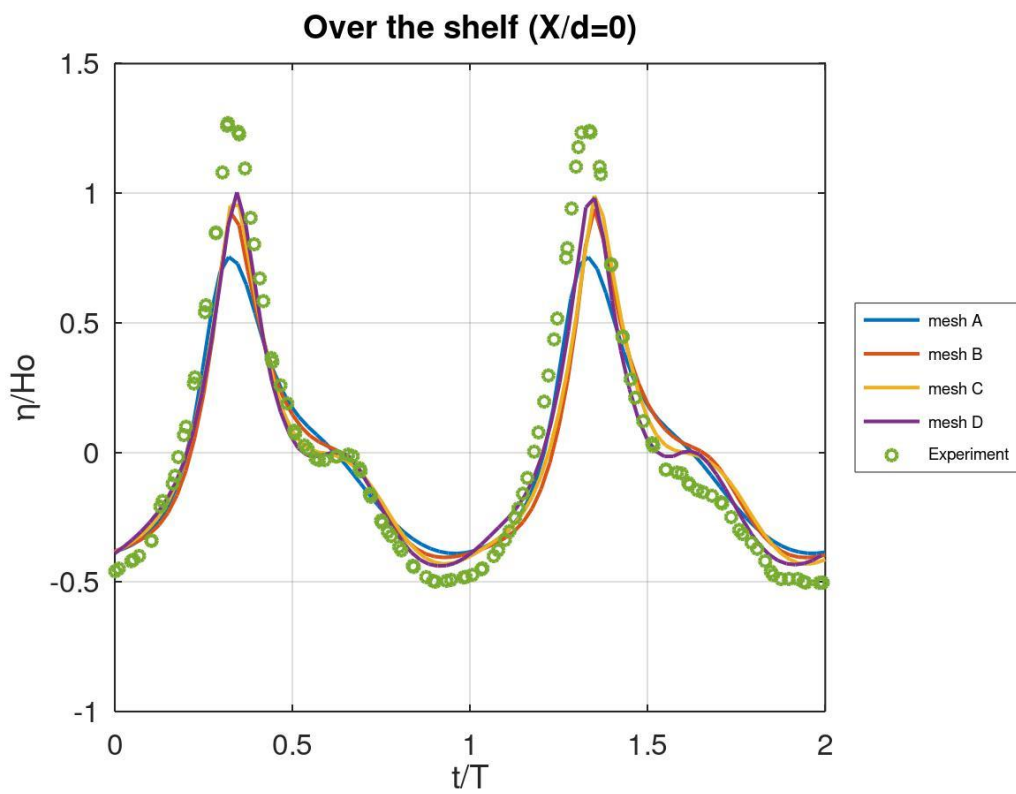
Πίνακας 6.2 Παρουσίαση πλεγμάτων

Πλέγμα (<i>Mesh</i>)	Μήκος κελιού Στον άξονα x (Δx)	Μήκος κελιού στον άξονα z (Δz)	Πληροφορίες για το πλέγμα
A	0.02	0.01	Πλέγμα (Coarse)
B	0.01	0.01	Πλέγμα (Coarse)
C	0.005	0.005	Πλέγμα (Fine)
D	0.0025	0.0025	Πλέγμα (Fine)

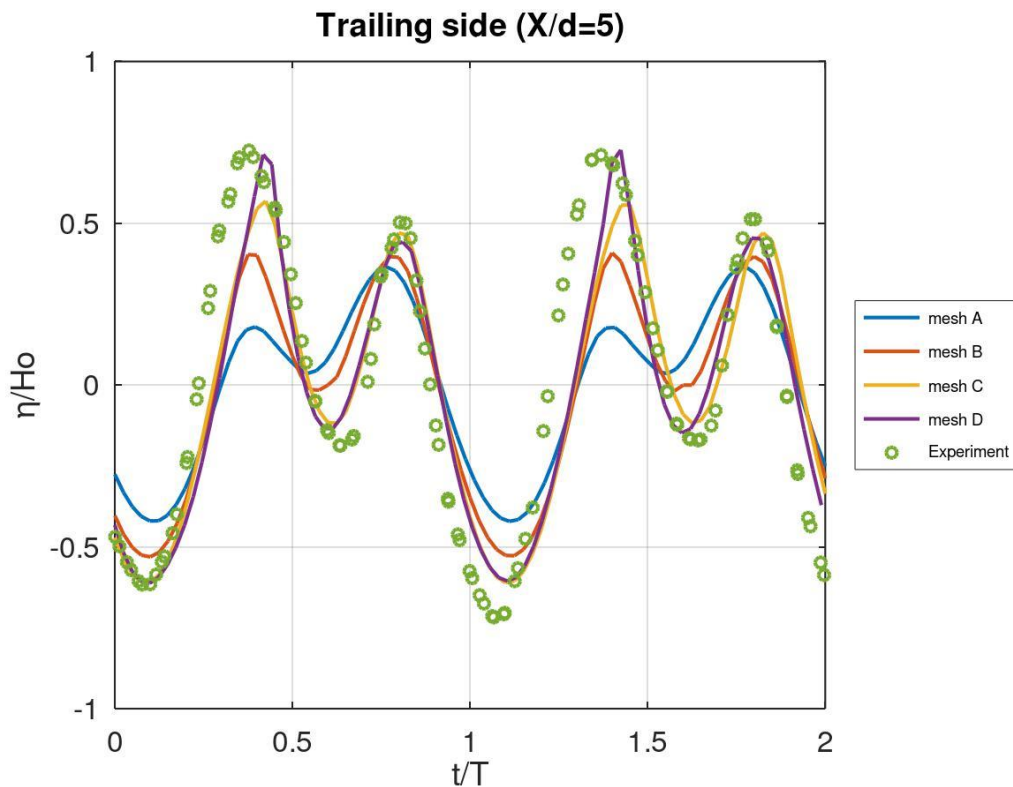
Όπως φαίνεται στα Διαγράμματα 6.1, 6.2, 6.3, στις τρεις μετρήσεις που έγιναν, χρησιμοποιήθηκαν διάφορα πλέγματα, βλέπε Πίνακα 6.2 και παρουσιάζονται με σκοπό την εύρεση του βέλτιστου πλέγματος, δηλαδή το πλέγμα που προσεγγίζει καλύτερα τη πειραματική λύση.



Διάγραμμα 6.1 Απεικόνιση του προφίλ ανύψωσης στη περιοχή Leading Side



Διάγραμμα 6.2 Απεικόνιση του προφίλ ανύψωσης στη περιοχή Over the Shelf

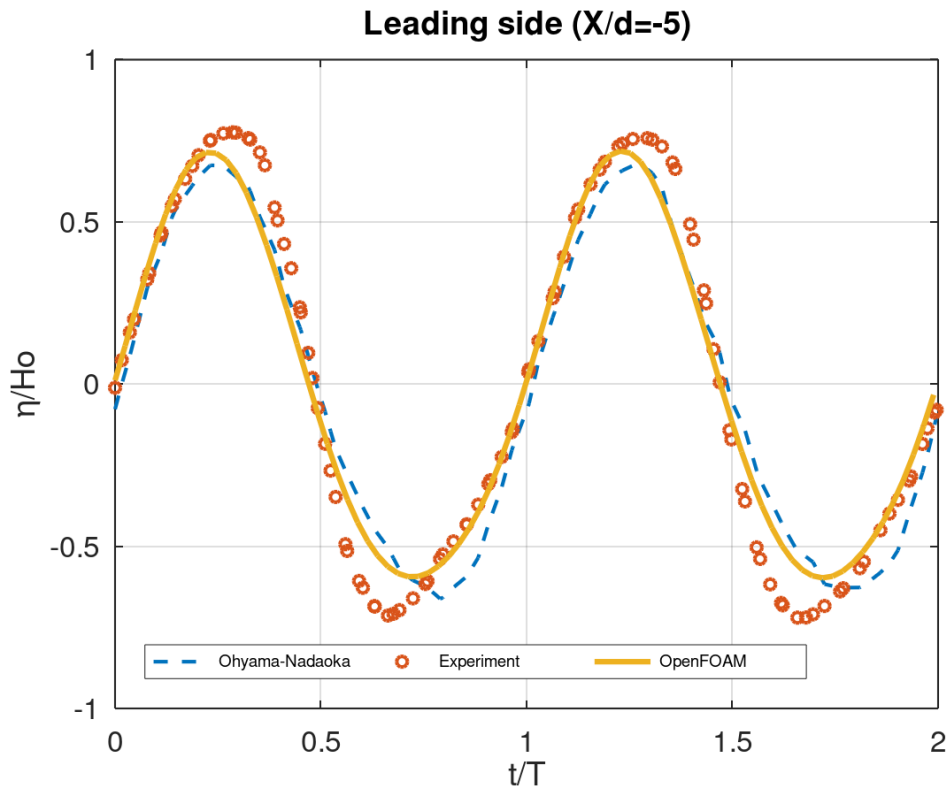


Διάγραμμα 6.3 Απεικόνιση του προφίλ ανύψωσης στη περιοχή Trailing Side

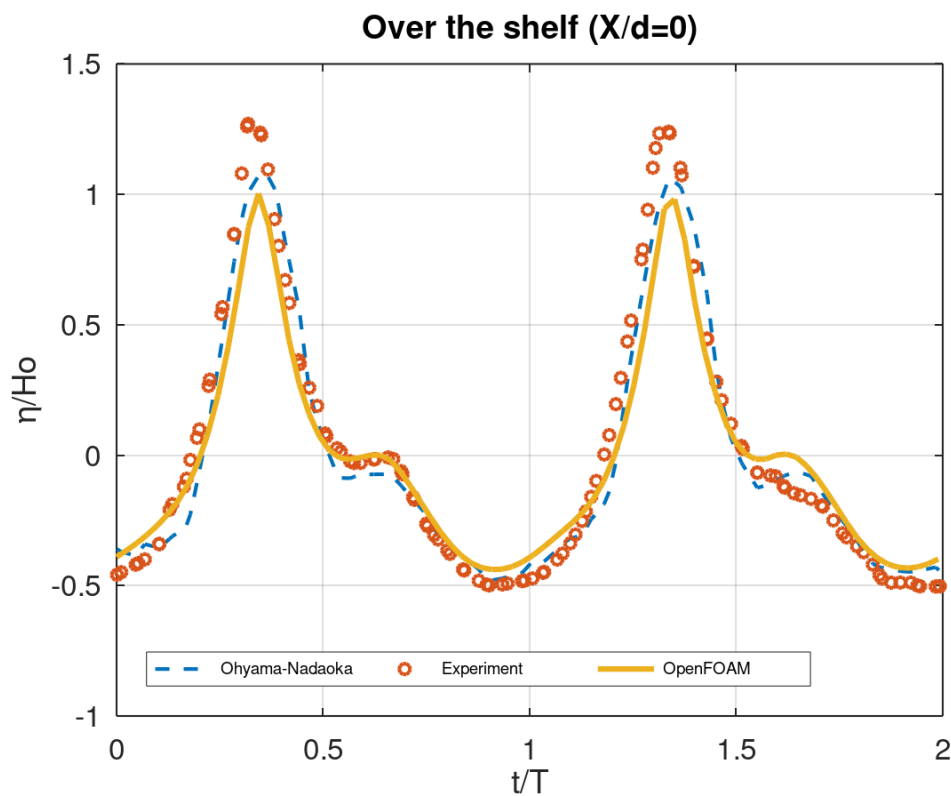
Η λύση ανάλογα με τη πυκνωση του πλέγματος διαφέρει αρκετά όπως φαίνεται και από τα Διαγράμματα 6.1-3. Το βέλτιστο πλέγμα που επιλέγεται για να συγκριθεί με την πειραματική και την αναλυτική λύση είναι το meshD, ($\Delta x = 0.0025, \Delta z = 0.0025$) που είναι και το πιο πυκνό, δηλαδή έχει τη μικρότερη απόσταση κατά $\Delta x, \Delta z$ και φαίνεται ότι προσεγγίζει καλύτερα τη πειραματική λύση.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων σε σχέση με τη πειραματική, την αναλυτική και τη προσομοίωση μέσω OpenFOAM, για κάθε σημείο φαίνεται στα Διαγράμματα 6.4, 6.5, 6.6.

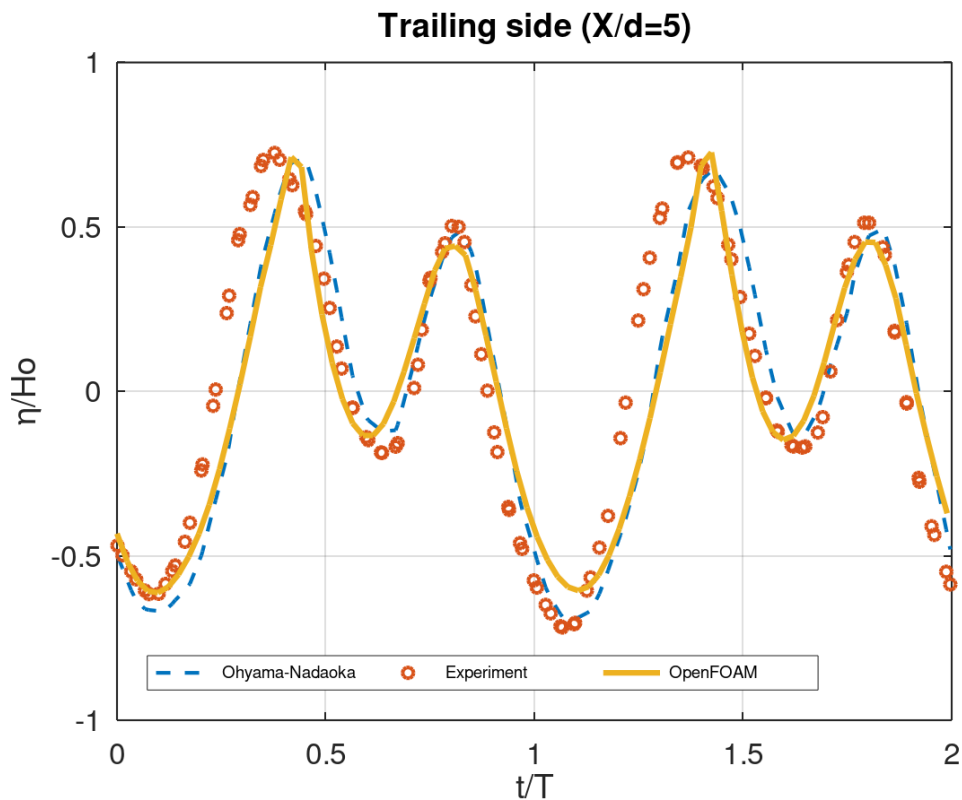
Η μορφή του κύματος στο Διάγραμμα 6.4 θυμίζει έναν απλό αρμονικό κυματισμό, παρ' όλα αυτά λόγω ότι βρίσκεται πολύ κοντά στην υφαλοκρηπίδα, φαίνεται η επίδραση της ρήξης καθώς υπάρχει μια μικρή αύξηση στις κορυφές του κυματισμού. Το κύμα που απεικονίζεται στο Διάγραμμα 6.5, δηλαδή πάνω από την υφαλοκρηπίδα στη θέση, Over the shelf: $X/d = 0$, θυμίζει την αποσύνθεση ενός μοναχικού κύματος (solitary wave) που διαδίδεται σε ρηχό νερό (Ohyama & Nadaika, 1994). Αν και οι κύριες κορυφές των κυμάτων γίνονται απότομες και πιο στενές, δεν παρατηρείται το φαινόμενο της θραύσης και το κύμα διατηρεί τη μορφή του. Στη θέση του Trailing Side, δηλαδή 1.75 m μετά το κέντρο της υφαλοκρηπίδας, Διάγραμμα 6.6, μπορεί να παρατηρηθεί μια εμφανής αποσύνθεση στη μορφή του κύματος καθώς ο κυματισμός λόγω της ρήξης είναι έντονα μη-γραμμικός.



Διάγραμμα 6.4 Απεικόνιση του προφίλ της ανύψωσης στη περιοχή Leading Side



Διάγραμμα 6.5 Απεικόνιση του προφίλ της ανύψωσης στη περιοχή Over the Shelf



Διάγραμμα 6.6 Απεικόνιση του προφίλ της ανύψωσης στη περιοχή TrailingSide

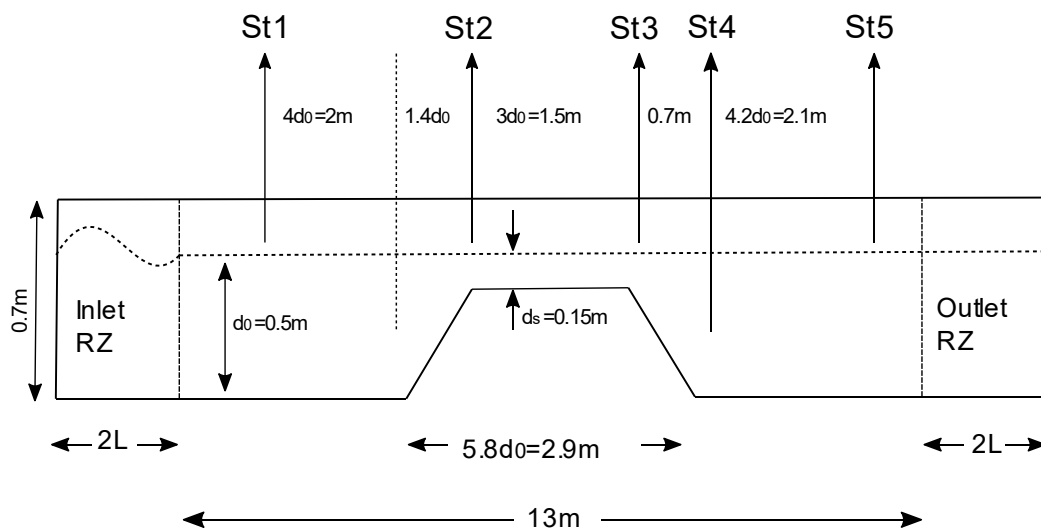
Από τα Διαγράμματα 6.4, 6.5 ,6.6, εύκολα διακρίνεται ότι το προφίλ του κύματος από τη προσομοίωση με το OpenFOAM, προσεγγίζει σε καλό βαθμό το αντίστοιχο πειραματικό και αναλυτικό, δείχνοντας έτσι, ότι το παρόν υπολογιστικό μοντέλο είναι αρκετά αξιόπιστο.

Παρ' όλα αυτά υπάρχει μια μικρή απόκλιση κυρίως στις μέγιστες τιμές της ανύψωσης κύματος (κορυφές-κοιλάδες) των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης σε σχέση με τις πειραματικές μετρήσεις. Η ίδια βέβαια απόκλιση παρατηρείται και στις τιμές της αναλυτικής μεθόδου σε σχέση με τις πειραματικές. Επίσης παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα της προσομοίωσης είναι πιο κοντά στα αποτελέσματα των (Ohyama & Nadaika, 1994) παρά στη πειραματική.

6.3 Περίπτωση Β - Προσομοίωση κύματος πάνω από μια τραπεζοειδή υφαλοκρηπίδα

Στη δημοσίευση των (Ohgama, Kioka, & Tada, 1995) παρουσιάζεται η μελέτη συμπεριφοράς των κυμάτων πάνω από μία τραπεζοειδή υφαλοκρηπίδα σε μία αριθμητική δεξαμενή. Οι συγγραφείς χρησιμοποιώντας τη θεωρία Stokes 2^{ης} τάξης (Fenton, 1985), τη Boussinesq wave theory (Boussinesq approximation (buoyancy), 2020) και ένα πλήρως μη γραμμικό μοντέλο βασισμένο στη θεωρία δυναμικού (Fully non-linear theory) (Ohgama & Nadaika, 1994), προσομοίωσαν τη διάδοση ενός αρμονικού κυματισμού που εισέρχεται σε μια περιοχή ενδιαμέσου βάθους $d_0 = 0.5\text{ m}$ καθώς διαδίδεται πάνω από μια βυθισμένη υφαλοκρηπίδα μορφής τραπέζιου, Εικόνα 6.7, βάθους $d_s = 0.15\text{ m}$. Για την επαλήθευση των αριθμητικών αποτελεσμάτων τους έγινε σύγκριση με τα αντίστοιχα πειραματικά.

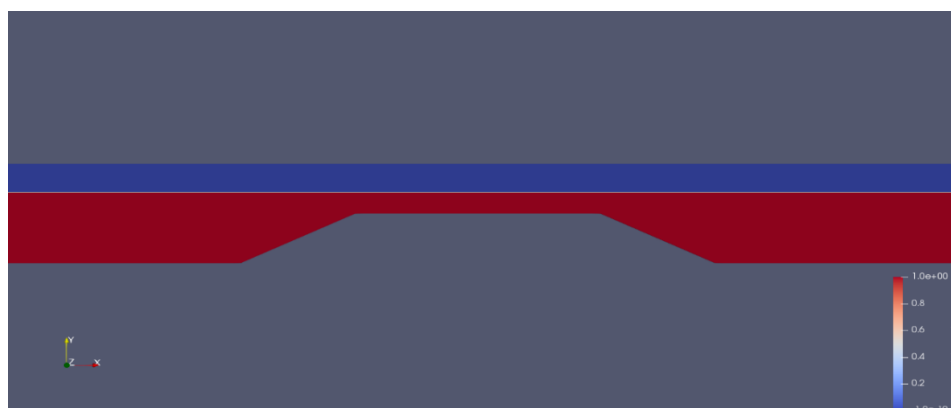
Στην Εικόνα 6.7 απεικονίζεται η γεωμετρία της αριθμητικής δεξαμενής, με μήκος προσομοίωσης κυματισμού 13 m και ύψος 0.7 m . Το ολικό μήκος της αριθμητικής δεξαμενής αλλάζει ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του κυματισμού λόγω των Relaxation zone. Το πλάτος είναι αμελητέο καθώς το πείραμα είναι 2D και γι' αυτό επιλέγεται να έχει τη διάσταση ενός κελιού. Το βάθος του νερού είναι 0.5 m και η περιοχή της ατμόσφαιρας 0.2 m . Το μήκος της υφαλοκρηπίδας $D = 1\text{ m}$ και η κλίση της $m = 0.5$.



Εικόνα 6.7 Απεικόνιση αριθμητικής δεξαμενής (Περίπτωση Β)

Όπως προαναφέρθηκε στη Περίπτωση Α, για τη δημιουργία του βασικού πλέγματος χρησιμοποιήθηκε το εργαλείο του OpenFOAM blockMesh, ενώ για την εισαγωγή της βαθυμετρίας, που δημιουργήθηκε στο σχεδιαστικό πρόγραμμα Rhinoceros, το εργαλείο snappyHexMesh. Η τελική μοντελοποίηση του υπολογιστικού χωρίου

φαίνεται στην Εικόνα 6.8, όπου με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται το νερό ($\alpha = 1$) και με μπλε χρώμα ο αέρας ($\alpha = 0$).



Εικόνα 6.8 Υπολογιστικό χωρίο και η μοντελοποίηση των ρευστών με τη μέθοδο VOF

Η μελέτη της προσομοίωσης έγινε για δύο διαφορετικές περιόδους T που αντιστοιχούν σε short waves (κυματισμοί με μικρό μήκος κύματος)-(Case 1-2) και long waves (κυματισμός με μεγάλο μήκος κύματος)-(Case 3), αλλά και για δύο διαφορετικές τιμές του ύψους κύματος H που αντιστοιχούν σε small waves (κυματισμός με μικρό ύψος κύματος)-(Case 1) και larger waves (κυματισμοί με μεγαλύτερο ύψος κύματος)-(Case 2-3). Έτσι στον Πίνακα 6.3 παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά του κυματισμού για κάθε περίπτωση

Πίνακας 6.3 Πίνακας με τις καταστάσεις κυματισμών

Καταστάσεις κυματισμών - Wave conditions				
Case	Περίοδος	Ύψος κύματος	Παράμετρος Ursell	
	$T_0\sqrt{g/h_0}$	H_0/d_0	$(U_r)_0$	$(U_r)_s$
1	5.94	0.05	1.8	21.6
2	5.94	0.1	3.5	43.3
3	11.88	0.1	14.1	201.5

Τα χαρακτηριστικά του κυματισμού για κάθε Case φαίνονται στον Πίνακα 6.4.

Πίνακας 6.4 Χαρακτηριστικά κυματισμών

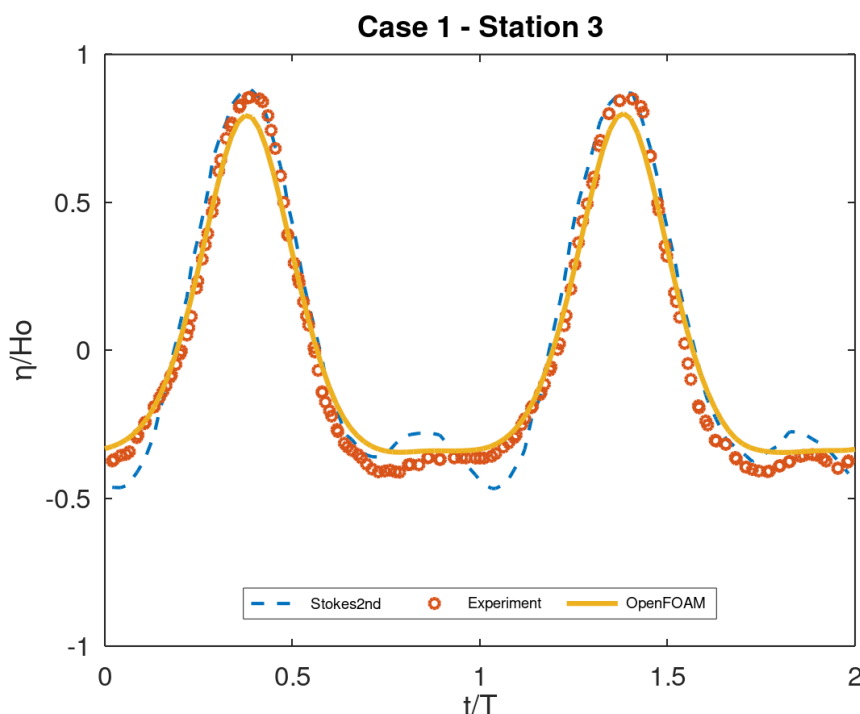
Χαρακτηριστικά κυματισμών- Wave properties					
Case	Περίοδος	Ύψος κύματος	Μήκος κύματος	Βάθος	Φασική ταχύτητα
	T_0 (s)	H_0 (m)	L_0 (m)	d_0 (m)	c (m/s)
1	1.341	0.025	2.419	0.5	1.804
2	1.341	0.5	2.419	0.5	1.804
3	2.682	0.5	5.662	0.5	2.111

Χρησιμοποιήθηκε ομοιόμορφο πλέγμα με πύκνωση κατά $\Delta x = \Delta z = 0.005$ m για τα Case 1-2 και $\Delta x = \Delta z = 0.01$ m για το Case 3. Το μήκος κύματος και η φασική ταχύτητα στην είσοδο της δεξαμενής υπολογίστηκε από πρόγραμμα στο Octave με

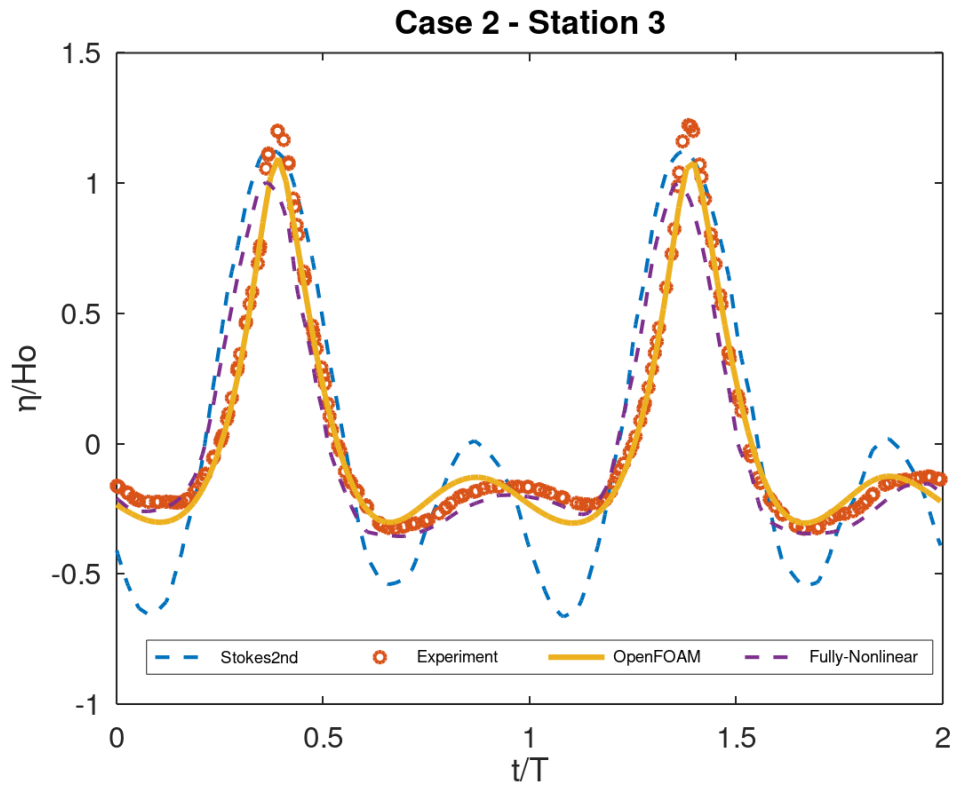
τη χρήση της μεθόδου Newton-Rampson για ενδιάμεσο βάθος, όπως και στη περίπτωση Α.

Για Case 1-2 με φυσική ταχύτητα περίπου ίση με $c = 1.804 \text{ m/s}$ το κύμα θα χρειαστεί $13/1.804 \approx 7,2 \text{ s}$, κατά προσέγγιση για να διανύσει ολόκληρο το χωρίο προσομοίωσης, ενώ για Case 3, $13/2.1 = 6.2 \text{ s}$. Έτσι ανάλογα το μέγεθος της ζώνης χαλάρωσης στη είσοδο και στην έξοδο αντίστοιχα, αλλά και λαμβάνοντας υπόψιν την επίδραση της μεταβλητής T_{soft} που έχει οριστεί, υπολογίζεται ο τελικός χρόνος (endTime) προσομοίωσης για κάθε περίπτωση.

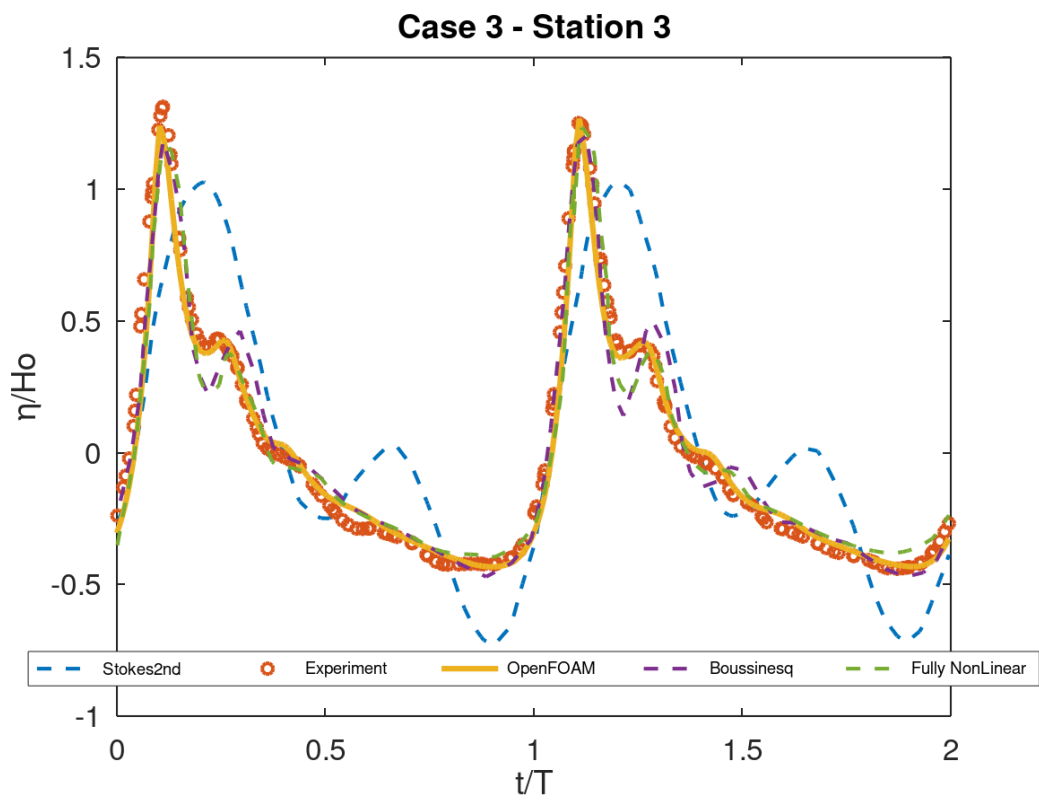
Στα Διαγράμματα 6.7-6.12 παρουσιάζεται το προφίλ της αδιάστατης ανύψωσης (η/H_0) των κυματισμών για δύο περιόδους που μετρήθηκε στο Σταθμό 3 (St3) και 5 (St 5), Εικόνα 6.7, δηλαδή πάνω από τη βυθισμένη υφαλοκρηπίδα που το κύμα θα έχει το μέγιστο ύψος και μετά από αυτήν, σε απόσταση 2.8 m . Έτσι για τις δύο αυτές θέσεις και για κάθε Case (Case 1-2-3), στα διαγράμματα που ακολουθούν, παρουσιάζεται το προφίλ του κύματος που υπολογίστηκε από το λογισμικό OpenFOAM και συγκρίνεται με τη πειραματική και την αναλυτική λύση (Stokes 2^{ης} τάξης, Boussinesq theory, Fully non-Linear) που παρουσιάστηκε στη δημοσίευση. Για τη ρύθμιση της φάσης μεταξύ του πειραματικού και υπολογιστικού προφίλ των κυμάτων, ορίζεται ως αρχική, η χρονική στιγμή στην οποία η ανύψωση του κύματος η είναι ίση με μηδέν στο Σταθμό 1, (St 1).



Διάγραμμα 6.7 Ανύψωση κύματος στο Σταθμό 3, Case 1

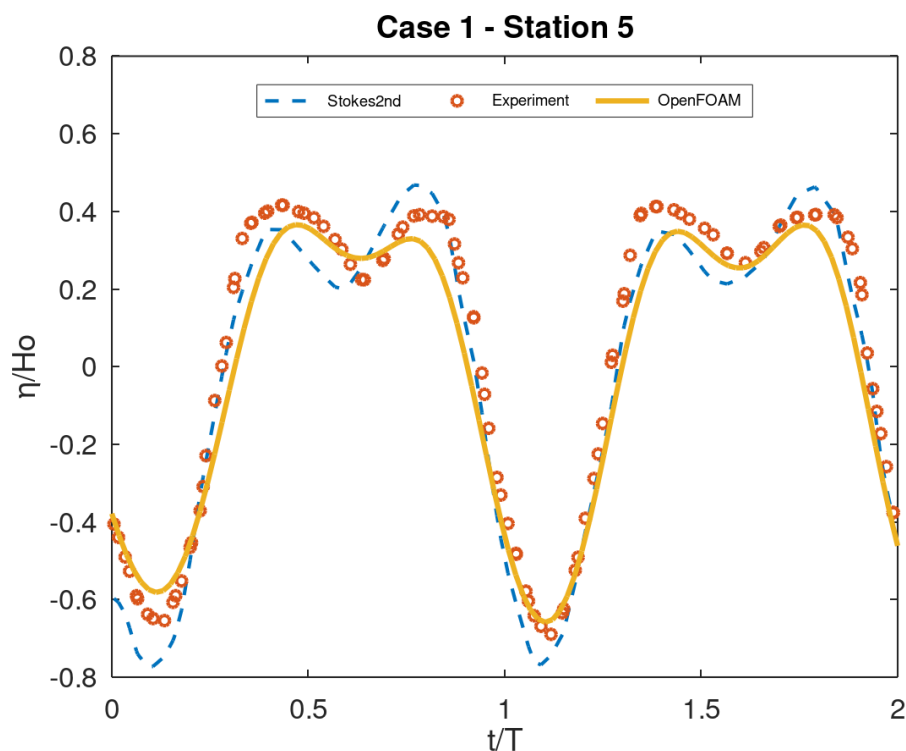


Διάγραμμα 6.8 Ανύψωση κύματος στο Σταθμό 3, Case 2

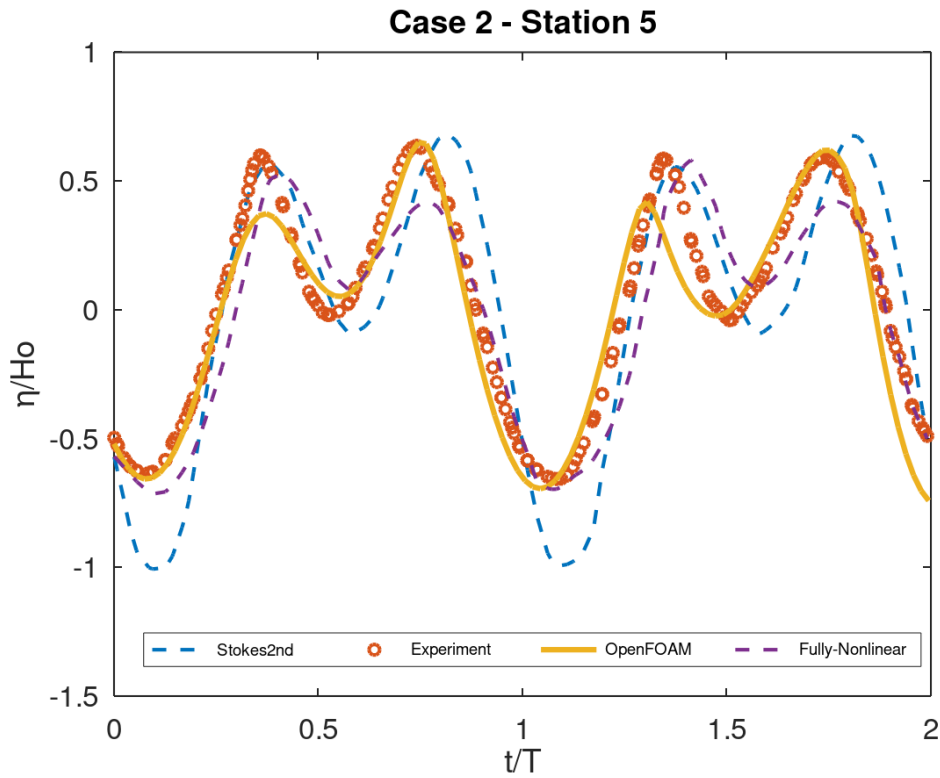


Διάγραμμα 6.9 Ανύψωση κύματος στο Σταθμό 3, Case 3

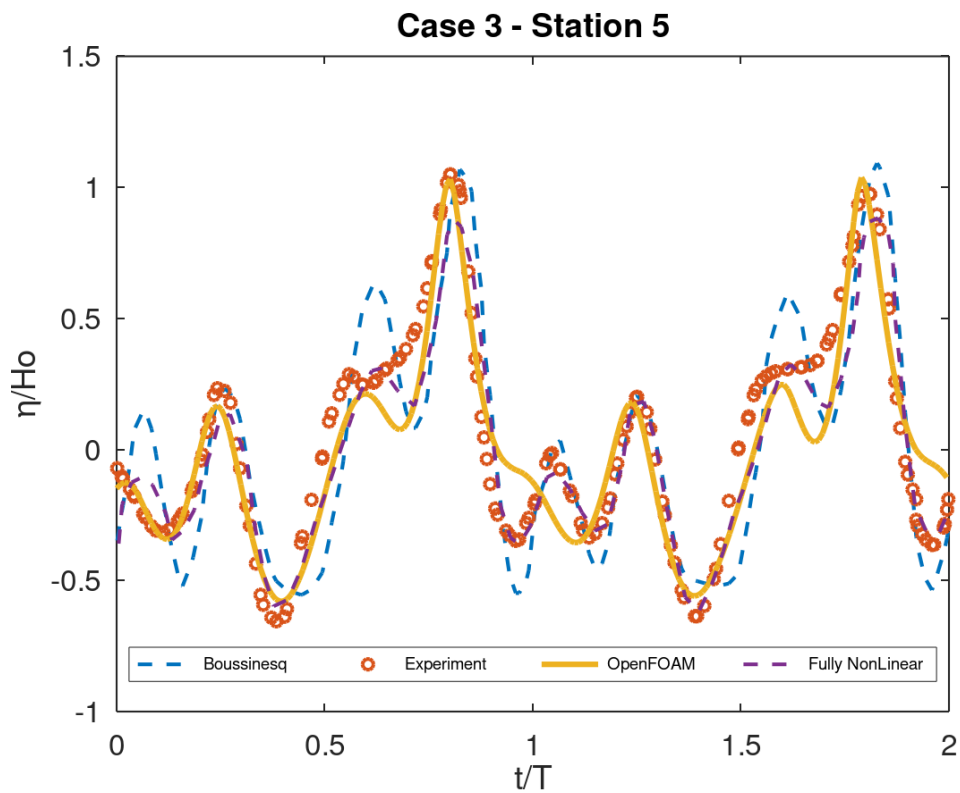
Σύμφωνα με τα Διαγράμματα 6.7, 6.8 και 6.9 παρατηρούμε ότι εξαιτίας της επίδρασης της ρήχωσης του πυθμένα (λόγω της υφαλοκρηπίδας), προκειμένου ο κυματισμός να διατηρήσει την ενέργεια του, λόγω μείωσης του μήκους κύματος και της φασικής ταχύτητας, αυξάνεται αισθητά το ύψος κύματος. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης σχεδόν συμπίπτουν με τη κυματομορφή των πειραματικών δεδομένων στο Σταθμό 3 έχοντας μια μικρή απόκλιση κυρίως στις κορυφές του κυματισμού. Επίσης είναι εμφανές ότι τα αποτελέσματα από το OpenFOAM είναι πιο ακριβή από τα αντίστοιχα των δημοσιεύσεων (Ohyama, Kioka, & Tada, 1995) και ιδίως από τα αποτελέσματα της Stokes 2^{ης} τάξης. Αυτό βέβαια ήταν αναμενόμενο καθώς η θεωρία αυτή δεν έχει καλή εφαρμογή σε ρηχό νερό και ιδιαίτερα σε περιπτώσεις που αυξάνεται σημαντικά το ύψος κύματος H_0 όπως συμβαίνει στα Case 2 – 3. Αντιθέτως η κυματική θεωρία Boussinesq και η Fully Nonlinear προσεγγίζουν καλά τα πειραματικά αποτελέσματα όπως φαίνεται στα Διαγράμματα 6.8 και 6.9 με τη λύση του OpenFOAM να συγκλίνει σε μεγαλύτερο βαθμό με τα πειραματικά δεδομένα.



Διάγραμμα 6.10 Ανύψωση κύματος στο Σταθμό 5, Case 1

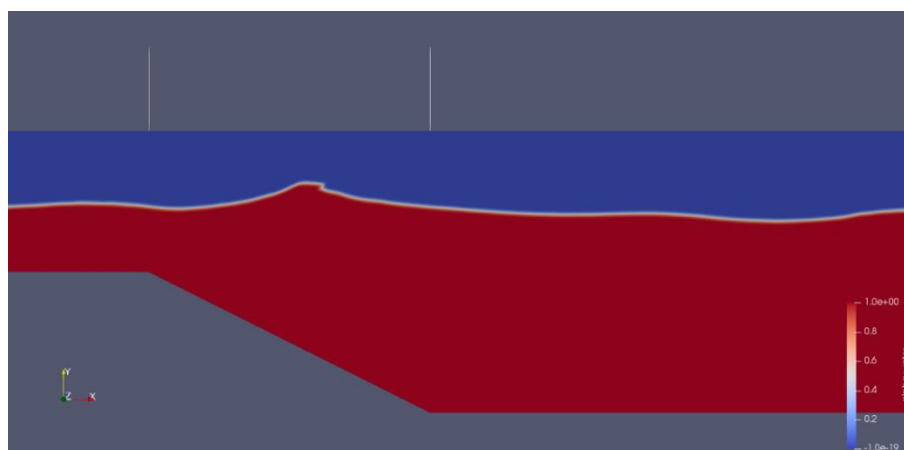


Διάγραμμα 6.11 Ανύψωση κύματος στο Σταθμό 5, Case 2



Διάγραμμα 6.12 Ανύψωση κύματος στο Σταθμό 5, Case 3

Στο Σταθμό 5 (St 5), ο κυματισμός μετά την υφαλοκρηπίδα είναι έντονα μη γραμμικός καθώς λόγω της ρήχωσης, όπως φαίνεται στα Διαγράμματα 6.10, 6.11 και 6.12. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης προσεγγίζουν καλά τη κυματομορφή των πειραματικών αποτελεσμάτων για το Case 1-2, καθώς στο Case 3 εμφανίζεται μεγαλύτερη απόκλιση. Αυτό μπορεί να συμβαίνει διότι για το Case 3 παρατηρείται θραύση του κυματισμού, Εικόνα 6.9 ανάμεσα στους Σταθμούς 3 (Station 3) και 4 (Station 4) με αποτέλεσμα να αλλάζει σημαντικά η κυματομορφή μέχρι το Σταθμό 5 (Station 5).



Εικόνα 6.9 Θραύση κυματισμού στο Case 3

Σύμφωνα με τη δημοσίευση των (Tsai, Chen, Hwing, & Huang, 2005), στο σημείο θραύσης, για τον υπολογισμό του ύψους κύματος, και για κλίσεις πυθμένα $m > 0.2$, εφαρμόζεται η Εξίσωση 2.63 και συγκρίνονται τα αποτελέσματα με το OpenFOAM στον Πίνακα 6.5. Παρατηρείται ότι το ύψος κύματος στο σημείο θραύσης είναι κοντά στη θεωρητική τιμή έχοντας απόκλιση γύρω στο 3.2%.

Πίνακας 6.5 Σύγκριση αποτελεσμάτων τους ύψους κύματος στο σημείο θραύσης.

Ύψος κύματος στο σημείο θραύσης, H_b σε m		
Case	(Tsai et al.) 2005	OpenFOAM
3	0.0879 m	0.0851 m

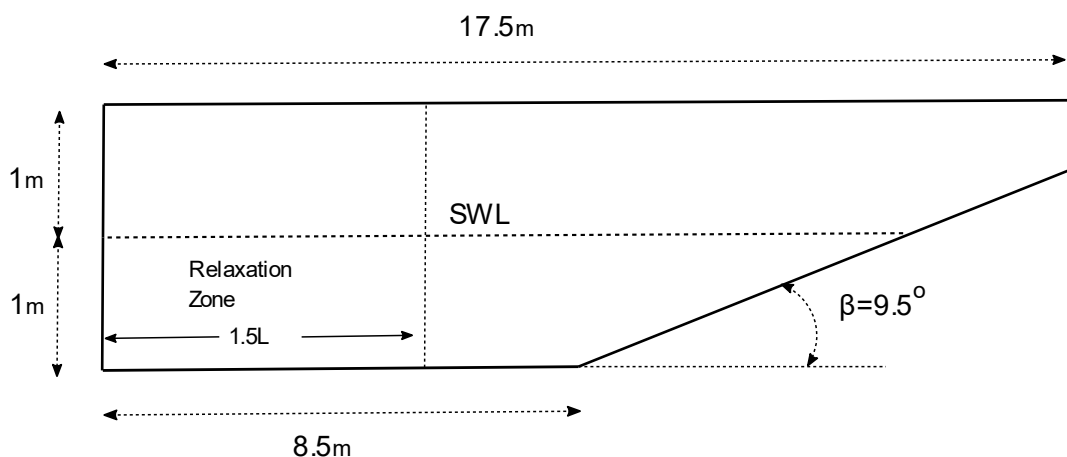
Η θεωρία Stokes 2^{ης} τάξης δε μπορεί να εφαρμοστεί για το Case 2-3 καθώς δεν αποδίδει ρεαλιστικά αποτελέσματα όπως φαίνεται και στα Διαγράμματα 6.8,6.9, 6.11, καθώς επιβεβαιώνεται και από τον αριθμό Ursell, $(U_r)_3 = 201.5 > \frac{8\pi^2}{3} = 26.32$ και $(U_r)_2 = 43.3 > \frac{8\pi^2}{3} = 26.32$. Το ίδιο συμβαίνει και με τη θεωρία Boussinesq στο Διάγραμμα 6.12 που αποκλίνει αρκετά από την πειραματική κυματομορφή. Έτσι οι συγγραφείς χρησιμοποιώντας τη Fully non-linear theory προσέγγισαν τη κυματομορφή στο Σταθμό 5, Διαγράμματα 6.11, 6.12, σε καλό βαθμό.

6.4 Προσομοίωση θραύσης κυματισμού σε κεκλιμένο πυθμένα (Wave breaking stimulation in a sloped bathymetry)

Στην Εικόνα 6.10 φαίνεται η αριθμητική δεξαμενή για τη προσομοίωση ενός κυματισμού που θραύεται σε κεκλιμένο πυθμένα με γεωμετρικά χαρακτηριστικά και συνθήκες κυματισμού όπως παρουσιάζονται στη δημοσίευση των (Chenari, Saadatian, & Ferreira, 2015). Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2, σχετικά με το είδος θραύσης, στη συγκεκριμένη περίπτωση γίνεται η μελέτη για τη προσομοίωση ενός κύματος που θραύεται στην ακτή, με θραύση τύπου κατάδυσης - *Plunging Breaker*. Ο αρμονικός κυματισμός έχει μήκος κύματος, $L_0 = 5m$, ύψος κύματος $H_0 = 0.2m$ και περίοδο $T = 1.94m$, καθώς προσπίπτει σε κεκλιμένο πυθμένα με κλίση $m = \tan \beta = 0.167$. Για την επιβεβαίωση του είδους θραύσης υπολογίζεται η θεωρητική σταθερά *Irribarren* που ισούται με:

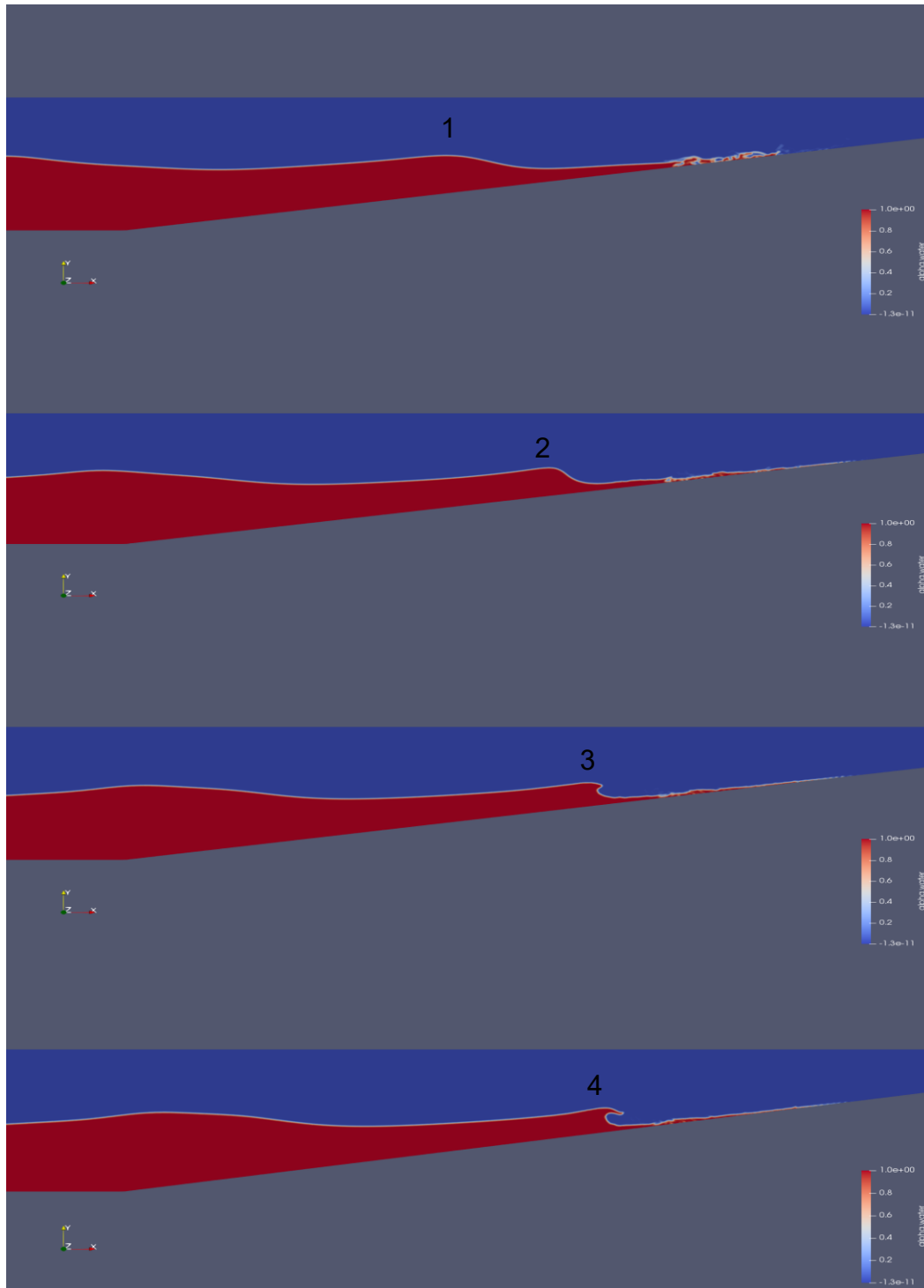
$$\xi = \frac{\tan \beta}{\frac{\sqrt{H_0}}{\sqrt{L_0}}} = \frac{0.167}{\sqrt{0.040}} = 0.83$$

και παρατηρούμε ότι ικανοποιείτε το κριτήριο *Plunging Breaker*: $0.5 < \xi < 3.3$

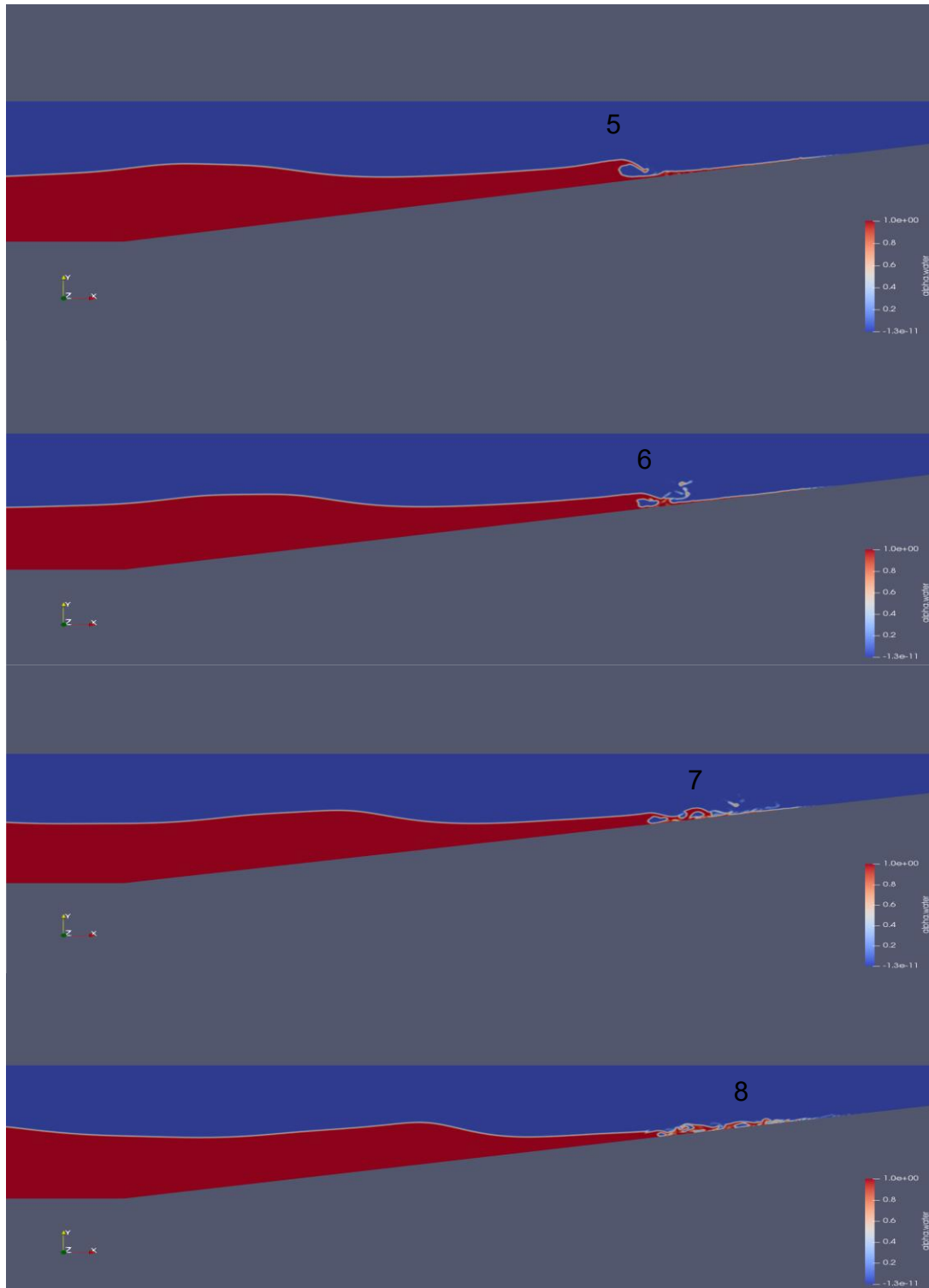


Εικόνα 6.10 Γεωμετρία κεκλιμένου πυθμένα

Στις Εικόνες 6.11, 6.12 απεικονίζεται η προσομοίωση της θραύσης του κυματισμού τύπου *Plunging Breaker*, σε οχτώ στιγμιότυπα καθώς θραύεται στη κεκλιμένη βαθυμετρία. Η μοντελοποίηση της θραύσης του κύματος στο OpenFOAM έγινε για χρονική διάρκεια προσομοίωσης $Time = 20s$ θεωρώντας περισσότερο αξιόπιστα τα αποτελέσματα μετά τις πρώτες δύο θραύσεις του κυματισμού, λόγω της επίδρασης του T_{soft} , καθώς στις δύο πρώτες θραύσεις που πραγματοποιούνται, ο κυματισμός δεν έχει προλάβει να λάβει τις μέγιστες τιμές ανύψωσης καθώς εξέρχεται από τη ζώνη χαλάρωσης εισόδου.



Εικόνα 6.11 Θραύση κυματισμού τύπου Plunging σε τέσσερα στιγμιότυπα (1-4)



Εικόνα 6.12 Θραύση κυματισμού τύπου Plunging σε τέσσερα στιγμιότυπα (5-8)

Μετά τη θραύση, ο κυματισμός ανέρχεται και κατέρχεται στον κεκλιμένο πυθμένα χωρίς η ενέργεια του κυματισμού να προλάβει να αποσβεστεί τελείως με αποτέλεσμα να δημιουργούνται αυξομειώσεις στο προφίλ του κύματος κατά τη διάρκεια των διαδοχικών θραύσεων και να αλλάζει το σημείο θραύσης σε κάθε διαδοχικό κυματισμό. Έπειτα από μετρήσεις που έγιναν για τον υπολογισμό του

ύψους κύματος στο σημείο θραύσης κατά τη διάρκεια πέντε διαδοχικών θραύσεων υπολογίστηκαν οι τιμές παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.10

Πίνακας 6.10 Αποτελέσματα OpenFOAM για το ύψος κύματος στο σημείο θραύσης

α/α	Ύψος κύματος στο σημείο θραύσης H_b από το OpenFOAM
H_{b3} (3d Breaking)	0.213m
H_{b4} (4th Breaking)	0.216m
H_{b5} (5th Breaking)	0.223m
H_{b6} (6th Breaking)	0.225m
H_{b7} (7th Breaking)	0.219m
H_b (mean value)	0.219m

Για τη σύγκριση των αποτελεσμάτων του Πίνακα 6.10 λήφθηκαν υπόψη οι θεωρητικές σχέσεις για τον υπολογισμό του ύψους κύματος στο σημείο θραύσης, που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 2.7 και συγκεκριμένα από τις Εξισώσεις: 2.58 2.60, 2.62, 2.64 για τις οποίες ικανοποιούνταν τα κριτήρια εφαρμογής τους. Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας αποτελεσμάτων:

Πίνακας 6.11 Αποτελέσματα του ύψους κύματος στο σημείο θραύσης από τις θεωρητικές σχέσεις

α/α	Θεωρητικές σχέσεις	Ύψος κύματος στο σημείο θραύσης H_b	Απόκλιση
1	LeMechaute & Koh, (1967)	0.263m	17%
2	Komar & Gaughan, (1972)	0.213m	3.3%
3	Sakai & Battjes, (1980)	0.230m	4.7%
4	Rattanapitikon & Shibayama, (2006)	0.212m	2.8%

Σύμφωνα με τους δύο Πίνακες 6.10, 6.11 τα αποτελέσματα έχουν πολύ μικρή απόκλιση, καθώς η τιμή H_b (mean value) που υπολογίστηκε από το OpenFOAM είναι σχεδόν ίδια με τα αποτελέσματα από τις σχέσεις των Komar & Gaughan, Sakai & Battjes, Rattanapitikon & Shibayama ενώ λίγο μικρότερη από τη σχέση των LeMechaute & Koh. Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 6.11 για τις σχέσεις 2,3,4 η απόκλιση με τα αποτελέσματα της προσομοίωσης είναι (3.3%, 4.7%, 2.8%) αντίστοιχα, ενώ από τη σχέση 1, η απόκλιση είναι της τάξης του 17%, κάτι που είναι αναμενόμενο καθώς η σχέση των LeMechaute & Koh αποκλίνει έτσι και αλλιώς από τις υπόλοιπες θεωρητικές. Εφόσον τα αποτελέσματα από τις θεωρητικές και πειραματικές μετρήσεις είναι αρκετά κοντά, συμπεραίνουμε ότι το OpenFOAM μπορεί να προσομοιώσει αρκετά καλά τη θραύση ενός κύματος τύπου κατάδυσης – Plunging Breaker.

7 Συμπεράσματα και Προτάσεις

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η δημιουργία αριθμητικής δεξαμενής με σκοπό τη προσομοίωση κυματισμών με μεθόδους υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (CFD). Συγκεκριμένα διερευνήθηκε η αλληλεπίδραση των κυματισμών με μεταβαλλόμενη βαθυμετρία, όπου ως βαθυμετρία δοκιμάστηκε μία παραλληλόγραμμη υφαλοκρηπίδα, μία τραπεζοειδής καθώς και ένας κεκλιμένος πυθμένας (ακτή) με σκοπό της προσομοίωση της ζώνης θραύσης.

Τα αποτελέσματα όσον αφορά τη περίπτωση της υφαλοκρηπίδας ήταν πολύ ενθαρρυντικά καθώς το OpenFOAM μπορεί να μοντελοποιήσει σε πολύ καλό βαθμό ένα μη γραμμικό κυματισμό καθώς δέχεται την επίδραση του βάθους, δίνοντας ρεαλιστικά αποτελέσματα. Για τις περισσότερες περιπτώσεις που παρουσιάστηκαν στις Παραγράφους 6.2, 6.3, τα αποτελέσματα της προσομοίωσης ήταν αρκετά κοντά με τα αντίστοιχα πειραματικά και σε μερικές περιπτώσεις πιο ακριβή από τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις αναλυτικές θεωρίες κυματισμών σύμφωνα με τις δημοσιεύσεις των (Ohyama, Kioka, & Tada, 1995) (Ohyama & Nadaika, 1994), όπως στη περίπτωση της μη γραμμικής θεωρίας Stokes δεύτερης τάξης και Boussinesq. Στις μετρήσεις που έγιναν πριν την υφαλοκρηπίδα αλλά κυρίως στη διάδοση του κυματισμού πάνω από αυτήν, τα αποτελέσματα ήταν πολύ κοντά στα πειραματικά και καλύτερα από τα αντίστοιχα θεωρητικά, Διαγράμματα 6.5, 6.7, 6.8, 6.9. Στη περιοχή μετά την υφαλοκρηπίδα Διαγράμματα 6.6, 6.10, 6.11, 6.12, μπορεί να παρατηρηθεί μια εμφανής αποσύνθεση στη μορφή του κύματος καθώς ο κυματισμός λόγω της ρήξης είναι έντονα μη-γραμμικός και η προσομοίωση ήταν καλή για τις περισσότερες περιπτώσεις όπως φαίνεται στα Διαγράμματα 6.6, 6.10 και 6.11. Στη περίπτωση του Case 3 (Διάγραμμα 6.12) που υπήρξε απόκλιση ίσως οφείλεται στη θραύση του κυματισμού που παρατηρήθηκε, όπως αναλύθηκε στη Παράγραφο 6.3. Στη περιοχή αυτή ο κυματισμός είναι αρκετά δύσκολο να προσομοιωθεί από τις περισσότερες αναλυτικές θεωρίες καθώς μόνο μια πλήρως μη γραμμική θεωρία δυναμικού όπως παρουσιάζεται στις δημοσιεύσεις των (Ohyama, Kioka, & Tada, 1995) (Ohyama & Nadaika, 1994) παρουσίασε καλά αποτελέσματα.

Οι πιο γνωστές αναλυτικές θεωρίες κυματισμών έχουν περιορισμό όσον αφορά τη γεωμετρία του πυθμένα και τη κλίση του, καθώς γίνονται συγκεκριμένες υποθέσεις και απλοποιήσεις (π.χ. επίπεδος πυθμένας). Αντίθετα στις προσομοιώσεις με CFD δεν υπάρχει αυτός ο περιορισμός, καθώς οι εξισώσεις Navier -Stokes λύνονται για όλο το υπολογιστικό χωρίο χωρίς περιορισμό για το πυθμένα. Παρ' όλα αυτά όσον αφορά τις αναλυτικές μεθόδους έχουν ένα πλεονέκτημα έναντι των μεθόδων CFD που είναι το μικρό υπολογιστικό κόστος. Έτσι μια λύση για τη μείωση του υπολογιστικού κόστους στις προσομοιώσεις που πραγματοποιήθηκαν, θα ήταν η τοπική πύκνωση του πλέγματος (fine mesh) κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια και ένα πιο αραιό πλέγμα

(coarse mesh) προς τα όρια του υπολογιστικού χωρίου όπως παρουσιάστηκε στις δημοσιεύσεις των (Choi, et al., 2020), (Refvik, 2016) (Mostafa, 2010).

Ένα βασικό πλεονέκτημα των προσομοιώσεων με μεθόδους υπολογιστικής ρευστοδυναμικής έναντι του φυσικού πειράματος, είναι η μείωση του κόστους και η ευελιξία που δίνει στο χρήστη να μπορεί να εξάγει αποτελέσματα για πολλές περιπτώσεις πυθμένα, καθώς και να χρησιμοποιηθεί για προβλήματα βελτιστοποίησης.

Η μέθοδος δημιουργίας – απόσβεσης κυματισμών, ζώνη χαλάρωσης - relaxation zone, έχει καλή εφαρμογή καθώς παράγει κύματα αρκετά ρεαλιστικά και με τον απαραίτητο καθορισμό του μήκους, της ζώνης εξόδου (π.χ. $L_a = 2L$ ή $L_a = 3L$), δεν παρατηρήθηκαν φαινόμενα ανάκλασης. Παρ' όλα αυτά ένα βασικό μειονέκτημα της, είναι το υψηλό υπολογιστικό κόστος καθώς απαιτεί τη δέσμευση μεγάλου ποσοστού του υπολογιστικού χωρίου για το καθορισμό του wave generator – absorption zone.

Σύμφωνα με τη ανάλυση ευαισθησίας που πραγματοποιήθηκε στη Παράγραφο 6.1, η χρονική μεταβλητή T_{soft} επηρεάζει τη χρονική μετάβαση της αναλυτικής λύσης κυματισμού σε μία πλήρως μη γραμμική λύση CFD στην ζώνης χαλάρωσης εισόδου (Inlet Relaxation Zone). Αν δε καθοριστεί αυτή η παράμετρος, η δημιουργία επιπρόσθετων υψίσυχνων κυματισμών στις πρώτες περιόδους μπορεί να δημιουργήσει αστάθεια στη λύση του υπολογιστικού χωρίου. Σύμφωνα με τους (Zhao, Hu, Sun, & Liang, 2010), αλλά όπως παρατηρήθηκε και στο Κεφάλαιο 6.1 για $T_{soft} = 0T$ η αριθμητική αστάθεια είναι αισθητή, ενώ για $T_{soft} = 6T$ ή $T_{soft} = 10T$ έχουμε την βέλτιστη επιλογή. Βέβαια επειδή όσο αυξάνεται η μεταβλητή T_{soft} , τόσο καθυστερεί η λύση να αναπτυχθεί πλήρως, είναι αναμενόμενο να αυξάνεται και το υπολογιστικό κόστος.

Όσον αφορά την προσομοίωση του κυματισμού στη ζώνη θραύσης, εφόσον τα αποτελέσματα της προσομοίωσης είναι αρκετά κοντά με τα αντίστοιχα των θεωρητικών σχέσεων, συμπεραίνουμε ότι το OpenFOAM μπορεί να προσομοιώσει αρκετά καλά τη θραύση ενός κυματισμού τύπου κατάδυσης – Plunging Breaker. Το βασικό πλεονέκτημα στη προσομοίωση κυματισμών μέσω CFD είναι ότι λαμβάνει υπόψη τη συνεκτικότητα των ρευστών και έτσι μπορεί να προσομοιώσει τη θραύση των κυματισμών, καθώς και να μοντελοποιήσει φαινόμενα ανάμειξης, την αποκόλληση της ροής, τυχών δίνες που μπορεί να εμφανιστούν (λόγω τυρβώδους ροής), αλλά και να διαχειριστεί τα φαινόμενα ανάκλασης που παρουσιάζονται στην έξοδο της αριθμητικής δεξαμενής.

Στη παρούσα εργασία μελετήθηκαν δισδιάστατες προσομοιώσεις με σκοπό να διερευνηθούν συγκεκριμένοι παράγοντες, για αυτό το λόγο θα ήταν αξιοσημείωτο να διερευνηθεί περεταίρω η προσομοίωση κυματισμών σε μια τρισδιάστατη αριθμητική

δεξαμενή με σκοπό τη προσομοίωση της κατευθυντικότητας των κυματισμών στο τρισδιάστατο χωρίο.

Τέλος αντί μιας βυθισμένης υφαλοκρηπίδας, όπως παρουσιάζεται και σε διάφορες δημοσιεύσεις, θα ήταν εύλογο να γίνει η μοντελοποίηση αριθμητικής δεξαμενής για τη προσομοίωση της αλληλεπίδρασης των κυματισμών με μια πλωτή κατασκευή.

Βιβλιογραφία

- Airy wave theory*. (2008). (Kraaiennest, Producer) Retrieved from Wikipedia: is licensed under CC BY-SA 3.0
https://en.wikipedia.org/wiki/Airy_wave_theory#/media/File:Orbital_wave_motion.svg
- Boussinesq approximation (buoyancy)*. (2020). Retrieved from Wikipedia:
[https://en.wikipedia.org/wiki/Boussinesq_approximation_\(buoyancy\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Boussinesq_approximation_(buoyancy))
- Breaking wave*. (2021). Retrieved from Wikipedia:
https://en.wikipedia.org/wiki/Breaking_wave
- Camenen, B., & Larson, M. (2007). Predictive formulas for breaking depth index and breaker type. *Journal of Coastal Research*, 234, pp. 1028-1041.
doi:10.2112/05-0566.1
- Chen, L. F., Zang, J., Hillis, A. J., Morgan, G. C., & Plummer, A. R. (2014). Numerical investigation of wave–structure interaction using OpenFOAM. *Ocean Engineering*, 88, pp. 91-109. doi:10.1016/j.oceaneng.2014.06.003
- Chenari, B. (2014). *Numerical Modelling of Regular Wave Propagation Using OpenFOAM*. Master Thesis, University of Coimbra, Fevereiro.
- Chenari, B., Saadatian, S., & Ferreira, A. (2015). Numerical Modelling of Regular Waves Propagation and Breaking Using Waves2Foam. *Journal of Clean Energy Technologies*, 3(4), pp. 276-281. doi:10.7763/JOCET.2015.V3.208
- Choi, Y. M., Kim, Y. J., Bouscasse, B., Seng, S., Gentaz, L., & Ferrant, P. (2020). Performance of different techniques of generation and absorption of free-surface waves in Computational Fluid Dynamics. 214, p. 107575.
doi:10.1016/j.oceaneng.2020.107575
- Classification of breaking wave types*. (2015). Retrieved from Wikipedia: is licensed under CC BY-SA 3.0
https://en.wikipedia.org/wiki/Breaking_wave#/media/File:Breaking_wave_types.svg
- Coast*. (2021). Retrieved from Wikipedia: <https://en.wikipedia.org/wiki/Coast>
- Courant, R., Friedrichs, K., & Lewy, H. (1967). On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal of Research and Development*, 11(2), pp. 215-234. doi:10.1147/rd.112.0215
- Davidson, J., Giorgi, S., & Ringwood, J. V. (2015). Linear parametric hydrodynamic models for ocean wave energy converters identified from numerical wave

- tank experiments. *Ocean Engineering*, 103, pp. 31-39.
doi:<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2015.04.056>
- Dean, R. G., & Dalrymple, R. A. (1991). *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists* (Vol. 2). Advanced Series on Ocean Engineering.
doi:<https://doi.org/10.1142/1232>
- Fenton, J. D. (1985). A Fifth-Order Stokes Theory for Steady Waves. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 111(2), pp. 216-234.
doi:[doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-950X\(1985\)111:2\(216\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-950X(1985)111:2(216))
- Ferziger, H. J., & Peric, M. (2002). *Computational Methods for Fluid Dynamics* (3 ed.). Heidelberg: Springer International Publishing. doi:doi.org/10.1007/978-3-642-56026-2
- Greenshields, J. C. (2020). *UserGuide*. Retrieved from The OpenFOAM Foundation:
<https://openfoam.org/>
- Hirt, C. W., & Nichols, B. D. (1981). Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39(1), pp. 201-225.
doi:[10.1016/0021-9991\(81\)90145-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90145-5)
- Hunt, I. A. (1967). Design of seawalls and breakwaters. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 126(4), pp. 542-570. doi:[10.1147/rd.112.0215](https://doi.org/10.1147/rd.112.0215)
- Iribarren number*. (2021). Retrieved from Wikipedia:
https://en.wikipedia.org/wiki/Iribarren_number
- Issa, R. I. (1986). Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *Journal of Computational Physics*, 62(1), pp. 40-65.
doi:[10.1016/0021-9991\(86\)90099-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(86)90099-9)
- Jacobsen, G. N. (2017). *waves2Foam Manual*. Retrieved from Researchgate:
https://www.researchgate.net/publication/319160515_waves2Foam_Manual
- Jia, W., Liu, S., Li, J., & Fan, Y. (2020). A Three-Dimensional Numerical Model with an L-Type Wave-Maker System for Water Wave Simulations by the Moving Boundary Method. *Water*, 12(1), p. 161. doi:[10.3390/w12010161](https://doi.org/10.3390/w12010161)
- Kolmogorov, A. (1991). The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds' Numbers. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 434(1890), pp. 9-13.
doi:[10.1098/rspa.1991.0075](https://doi.org/10.1098/rspa.1991.0075)

- Komar, P. D., & Gaughan, M. K. (1972). AIRY WAVE THEORY AND BREAKER HEIGHT PREDICTION. *1*(13). doi:10.9753/icce.v13.20
- LeMechaute, B., & Koh, R. C. (1967). On the breaking of waves arriving at an angle to the shore. *Journal of Hydraulic Research*, *5*(1), pp. 67-88.
doi:10.1080/00221686709500189
- Li, Z., Deng, G., Queutey, P., Bouscasse, B., Ducrozet, G., Gentaz, L., . . . Ferrant, P. (2019). Comparison of wave modeling methods in CFD solvers for ocean. *Ocean Engineering*, *188*, p. 106237. doi:10.1016/j.oceaneng.2019.106237
- Lin, P., & Liu, P. (1999). Internal Wave-Maker for Navier-Stokes Equations Models. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, *125*(4), pp. 207-215. doi:10.1061/(ASCE)0733-950X(1999)125:4(207)
- Lopez, I., Pereiras, B., Castro, F., & Iglesias, G. (2014). Optimisation of turbine-induced damping for an OWC wave energy converter using a RANS–VOF numerical model. *127*, pp. 105-114. doi:10.1016/j.apenergy.2014.04.020
- Martinez-Ferrer, P. J., Qian, L., Ma, Z., Causon, D. M., & Mingham, C. G. (2018). Improved numerical wave generation for modelling ocean and coastal engineering problems. *Ocean Engineering*, *152*, pp. 257-272.
doi:10.1016/j.oceaneng.2018.01.052
- Mei, C., Stiassnie, M., & Yue, D. (2005). *Theory and applications of ocean surface waves. Part 2: Nonlinear Aspects*. World Scientific.
- Miquel, M. A., Kamath, A., Chella, A. M., Archetti, R., & Bihs, H. (2018). Analysis of Different Methods for Wave Generation and Absorption in a CFD-Based Numerical Wave Tank. *Journal of Marine Science and Engineering*, *6*(2), p. 73.
doi:10.3390/jmse6020073
- Mostafa, A. A. (2010). *Numerical Wave Generation In OpenFOAM*. Master of Science Thesis, CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, Shipping and Marine Technology, Gothenburg. Retrieved from <https://orbit.dtu.dk/en/publications/numerical-wave-generation-in-openfoam>
- Munk ICCE 1950 Fig1 - Wind wave*. (2015). (W. H. Munk, Producer) Retrieved 2021, from Wikipedia: is licensed under CC BY-SA 3.0
https://en.wikipedia.org/wiki/Wind_wave#/media/File:Munk_ICCE_1950_Fig1.svg
- Navier–Stokes equations*. (2021). Retrieved from Wikipedia:
https://en.wikipedia.org/wiki/Navier%E2%80%93Stokes_equations

- Ohyama, T., & Nadaika, K. (1994). Transformation of a nonlinear wave train passing over a submerged shelf without breaking. *Coastal Engineering*, 24(1-2), pp. 1-22. doi:10.1016/0378-3839(94)90024-8
- Ohyama, T., Kioka, W., & Tada, A. (1995). Applicability of numerical models to nonlinear dispersive waves. *Coastal Engineering*, 24(3-4), pp. 297-313. doi:10.1016/0378-3839(94)00033-T
- Osher, S., & Sethian, A. J. (1988). Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1), pp. 12-49. doi:10.1016/0021-9991(88)90002-2
- Pantakar, S. V., & Spalding, D. B. (1983). A CALCULATION PROCEDURE FOR HEAT, MASS AND MOMENTUM TRANSFER IN THREE-DIMENSIONAL PARABOLIC FLOWS. In *Numerical Prediction of Flow, Heat Transfer, Turbulence and Combustion* (pp. 54-73). Elsevier. doi:doi.org/10.1016/B978-0-08-030937-8.50013-1
- Rattanapitikon, W., & Shibayama, T. (2006). Breaking Wave Formulas for Breaking Depth and Orbital to Phase Velocity Ratio. *Coastal Engineering Journal*, 48(4), pp. 395-416. doi:10.1142/S0578563406001489
- Refvik, B. H. (2016). *Study Investigating Wave Loads on a Torus at Deep Sea*. Master Thesis, Norwegian University of Life Sciences, Mathematical Sciences and Technology, As. Retrieved from <https://nmbu.brage.unit.no/nmbu-xmlui/handle/11250/2449843?locale-attribute=en>
- Robertson, B., Zytner, G. R., Hall, R. K., & Nistor, I. (2013). Breaking Waves: Review of Characteristic Relationships. *Coastal Engineering Journal*, 55(1), pp. 1350002-1-1350002-40. doi:10.1142/S0578563413500022
- Rusche, H. (2002). *Computational fluid dynamics of dispersed two-phase flows at high phase fractions*. PhD Thesis, Imperial College of Science, Technology & Medicine, Mechanical Engineering, London. Retrieved from <https://spiral.imperial.ac.uk/handle/10044/1/8110>
- Sakai, T., & Battjes, J. A. (1980). Wave Shoaling Calculated from Cokelet's Theory. *Coastal Engineering*, 4, pp. 65-84. doi:10.1016/0378-3839(80)90006-X
- Schmitt, P., Windt, C., Davidson, J., Rinqwood, J., & Whittaker, T. (2019). The Efficient Application of an Impulse Source Wavemaker to CFD Simulations. *Journal of Marine Science and Engineering*, 7(3), p. 71. doi:10.3390/jmse7030071
- Schmitt, P.; Elsaesser, B. (2015). A Review of Wave Makers for 3D Numerical Simulations. *VI International Conference on Computational Methods in*

- Marine Engineering MARINE 2015*. F. Salvatore, R. Broglia and R. Muscari (Eds). Retrieved from International Conference on Computational Methods in Marine Engineering:
https://pureadmin.qub.ac.uk/ws/portalfiles/portal/15696097/Marine2015_PSCHMITT.pdf
- Sweby, P. K. (1984). High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21(5), pp. 995-1011. doi:10.1137/0721062
- Tsai, C., Chen, H., Hwing, H., & Huang, M. (2005). Examination of empirical formulas for wave shoaling and breaking on steep slopes. *Ocean Engineering*, 32(3-4), pp. 469–483. doi:10.1016/j.oceaneng.2004.05.010
- Ursell, F. (1953). The long-wave paradox in the theory of gravity waves. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 49(4). doi:10.1017/S0305004100028887
- Versteeg, K. H., & Malalasekera, W. (2007). *An Introduction to Computational Fluid Dynamics* (2 ed.).
- Volume-of-Fluid method*. (2014). (Iksaeder - Eigenes Werk, Producer) Retrieved from Wikipedia: is licensed under CC BY-SA 3.0
https://de.wikipedia.org/wiki/Volume-of-Fluid-Methode#/media/Datei:Vof_scheme.png
- Weggel, R. (1972). Maximum breaker height for design. *13th International Conference on Coastal Engineering*, 419-432. doi:10.1061/9780872620490.024
- Windt, C., Davidson, J., Schmitt, P., & Ringwood, V. J. (2019). On the Assessment of Numerical Wave Makers in CFD Simulation. *Journal of Marine Science and Engineering*, 7(2), p. 47. doi:10.3390/jmse7020047
- Zhao, X., Hu, S., Sun, Z., & Liang, s. (2010). Validation of the initialization of a numerical wave flume using a time ramp. *Fluid Dynamics Research*, 42(4), p. 045504. doi:10.1088/0169-5983/42/4/045504
- Αθανασούλης, Γ. Α., & Μπελιμπασάκης, Κ. (2019). *Σημειώσεις για το μάθημα ΚΥΜΑΤΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΣΤΟ ΘΑΛΑΣΣΙΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ*. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Αθήνα.
- Καραμπάς, Θ., Κρεστενίτης, Γ., & Κουτίτας, Χ. (2015). *Ακτομηχανική - Έργα Προστασίας Ακτών*. Αθήνα: Εκδόσεις Κάλλιπος. Ανάκτηση από <http://hdl.handle.net/11419/2095>

Κουτίτας, Χ. (1994). *Εισαγωγή στην παράκτια τεχνική και τα λιμενικά έργα Θεωρία*.
Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Παπαϊωάννου, Α. Θ. (1996). *Μηχανική των Ρευστών*. Αθήνα: Εκδόσεις Κοράλι.