



Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής
Σχολή Διοικητικών, Οικονομικών και Κοινωνικών Επιστημών
Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής
Π.Μ.Σ. «Δημόσια Οικονομική & Πολιτική»



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:

ΠΕΡΙ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΚΑΙ ΤΟΚΙΣΜΟΥ

Κωνσταντίνος Σπυρίδωνος Ραυτόπουλος
(Α.Μ. 21064)

Διπλωματική Εργασία υποβληθείσα στο Τμήμα Λογιστικής &
Χρηματοοικονομικής του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής για την
απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Δημόσια
Οικονομική και Πολιτική

Αιγάλεω, Έτος 2023



University of West Attica
School of Administration, Economic, and Social Sciences
Department of Accounting & Finance
M.Sc. in Public Economics and Policy



PERI QUANTITY AND MONEY INTEREST

Constantinos Spyridonos Rhautopoulos
R.N. 21064

:

Supervisor: Alina Hyz (Ph. D.)

Master Thesis submitted to the Dept. of Accounting & Finance of the
University of West Attica in partial fulfillment of the requirements for the
degree of M.Sc. in Public Economics and Policy

Aegaleo, Greece, 2023

Κυδαλίμοιο :

“Στους γονείς οφείλομεν το ζην, στους δε διδασκάλους το ευ ζην”

Το κύδος εις άπαντας τους δασκάλους μου στο Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής για την διεύρυνση του γνωστικού μου ορίζοντα.

Ιδιαίτερα για την επιβλέπουσα θεωρώ ότι ισχύουν τα λόγια του Ν.Καζαντζάκη:
“Ο ιδανικός δάσκαλος είναι εκείνος που γίνεται γέφυρα για να περάσει αντίπερα ο μαθητής του. Κι όταν πια του διευκολύνει το πέρασμα, αφήνεται χαρούμενα να γκρεμιστεί, ενθαρρύνοντας τον μαθητή του να φτιάξει δικές του γέφυρες”

Kudos :

"We owe life to parents, and to teachers good life”

My thanks and glory towards my teachers of Dept. of Accounting & Finance of the University of West Attica for broadening my gnostic horizon.

Especially for the supervisor, I believe that the words of N. Kazantzakis apply:
“The ideal teacher is the one who becomes a bridge for his student to cross. And when he makes it easier for him to pass, he happily lets himself fall, encouraging his student to build his own bridges”



“Περί Μεγέθους και Τοκισμού”

Μέλη Εξεταστικής Επιτροπής

Εγκρίθηκε από την εξεταστική επιτροπή την 9η Νοεμβρίου 2023

A/α	ΟΝΟΜΑ ΕΠΩΝΥΜΟ	ΒΑΘΜΙΔΑ/ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΨΗΦΙΑΚΗ ΥΠΟΓΡΑΦΗ
1.	Αλίνα Χυζ	Καθηγήτρια Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής / Πρόεδρος Τμήματος	
2.	Βασίλειος Πανάγου	Καθηγητής Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής	
3.	Μιλτιάδης Χαλικιάς	Καθηγητής Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής	

ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο/η κάτωθι υπογεγραμμένος/η **Κωνσταντίνος Ραυτόπουλος** του **Σπυρίδωνος**, με αριθμό μητρώο **21064** φοιτητής/τρια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών Δημόσιας Οικονομικής και Πολιτικής του Τμήματος Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής της Σχολής Διοικητικών, Οικονομικών και Κοινωνικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής, δηλώνω ότι:

«Είμαι συγγραφέας αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της, είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, οι όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε ακριβώς είτε παραφρασμένες, αναφέρονται στο σύνολό τους, με πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία έχει συγγραφεί από μένα αποκλειστικά και αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου, όσο και του Ιδρύματος.

Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του πτυχίου μου».

Δεν επιθυμώ την απαγόρευση πρόσβασης στο πλήρες κείμενο της εργασίας μου.

Ο/Η Δηλών/ούσα

Κων/νος Σπυρίδωνος Ραυτόπουλος



ΣΚΟΠΟΣ

Η σημασία του σαφούς ορισμού του εκάστοτε οικονομικού μεγέθους, της ταξινόμησής τους και προτυποποίησής τους. Χρήση προθεμάτων και εξισώσεων μεγεθών στα οικονομικά μαθηματικά. Γενικά, ανάδειξη του “μετρικού” τρόπου σκέψης με καλώς ορισμένα μεγέθη, διαστάσεις, προθέματα μονάδων μέτρησης, εξισώσεις μεγεθών έναντι του καθεστώτος, που χρησιμοποιεί εξισώσεις αριθμητικών τιμών και χαρακτηρίζεται από έλλειψη προθεμάτων. Εφαρμογή των άνω στον τοκισμό, ανατοκισμό και συναφή των. Τέλος, ενθάρρυνση όσων διδασκόντων επιθυμούν να διδάξουν ή να ελέγξουν τα προτεινόμενα με παροχή υλικού στο Παράρτημα.

PURPOSE

The importance of the clear definition of each economic quantity, their classification and standardization. Use of prefixes and equations of quantities in financial mathematics. In general, highlighting the "metric" way of thinking with well-defined quantities, dimensions, prefixes of units of measurement, equations of quantities against the regime, which uses equations of numerical values and is characterized by a lack of prefixes. Application of the above to interest, compound interest and related. Finally, encouragement of those teachers who wish to teach or test the proposed by providing material in the Appendix.

ΠΕΡΙ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΚΑΙ ΤΟΚΙΣΜΟΥ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η **Εισαγωγή** αναζητά την έννοια του όρου “μέγεθος” στα Χρηματοοικονομικά και ισχυρίζεται ότι η μελέτη, ταξινόμηση, κατηγοριοποίηση, προτυποποίηση των μεγεθών δύναται να επιτευχθεί κατά τα πρότυπα φυσικών επιστημών. Περιλαμβάνει τον ισχυρισμό ότι η σύγχρονη ταξινόμηση και μεθοδολογία των φυσικών επιστημών μπορεί να φανεί χρήσιμη στη περίπτωση του τοκισμού, ανατοκισμού και συναφών τους.

Η **Βιβλιογραφική Ανασκόπηση** αφορά τις πρόσφατες συγγραφές σε σχέση με το καθεστώς της μεθοδολογίας, που τηρείται στη μελέτη τοκιστικών φαινομένων, κάνει παρατηρήσεις και θέτει ερωτήματα σε πρακτικό και θεωρητικό επίπεδο.

Η **Ιστορική Αναδρομή** αφορά την έννοια του μεγέθους και του σύμφυτού της με την ανθρώπινη λογική και πως αυτή διαχρονικά αναδείχθηκε και εξελίχθηκε μέσω του εμπορίου και της Χρηματοοικονομικής γενικότερα. Δίνει έμφαση στον “αγγλοσαξονικό-αυτοκρατορικό” τρόπο αντιμετώπισης των μεγεθών (τον επικρατέστερο μέχρι σήμερα στα οικονομικά) έναντι του “γαλλικού-επαναστατικού” τρόπου διαχείρισής τους. Παίρνει σαφή θέση υπέρ του δεύτερου τρόπου, του επικρατέστερου στον χώρο των φυσικών επιστημών και των μηχανικών.

Η **Θεωρία** χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος πραγματεύεται την έννοια του μεγέθους κατά τα πρότυπα των φυσικών επιστημών και πως ίσως θα έπρεπε να γίνει μελλοντικά μια ενδεδειγμένη ταξινόμησή τους. Επίσης, παρουσιάζεται η έννοια της διάστασης ενός μεγέθους και η σημασία χρήσης εξισώσεων μεγεθών έναντι εξισώσεων αριθμητικών τιμών. Τέλος, εισάγει και την έννοια του προθέματος στις μονάδες μέτρησης, ειδικά του χρήματος. Το δεύτερο μέρος ειδικεύεται στην μελέτη τοκιστικών φαινομένων, κάνει χρήση του πρώτου μέρους και εξάγει ένα γενικό τύπο, νόμο, που προφανώς είναι μεγεθών και όχι αριθμητικών τιμών τους.

Η **Εφαρμογή Γενικού Τύπου Τοκισμού** είναι ένας καταγιγισμός παραδειγμάτων, φαινομενικά διαφορετικών τοκιστικών περιπτώσεων, που επιλύονται με τη χρήση του. Μάλιστα, δίδεται και σχετική “Ταμπλέτα Ανατοκισμού” για εκείνους, που

πρωτομαθαίνουν τη μέθοδο. Επίσης, δημιουργήθηκε και σχετική ηλεκτρονική εφαρμογή σε Excel βασισμένη σε αυτή τη μεθοδολογία..

Η Έρευνα αφορά τη σχέση (4.2) και τη σχετική ταμπλέτα, που δημιουργήθηκε από συγγραφέα για επίλυση προβλημάτων τοκισμού και συναφών. Συγκρίνεται με τη παραδοσιακή μεθοδολογία. Προτείνεται επίσης και πειραματική διδασκαλία.

Το Παράρτημα περιέχει τα έγγραφα, που διανεμήθηκαν στην έρευνα και διάλογο με Chatgpt.

Σημαντικοί Όροι: μέγεθος, αριθμητική τιμή, μέτρο (ή τιμή), μονάδα μέτρησης, διάσταση, προθέματα μονάδων μέτρησης, εξίσωση αριθμητικών τιμών, εξίσωση μεγεθών, τοκισμός, ανατοκισμός, επιτόκιο, απόδοση.

PERI QUANTITY AND MONEY INTEREST

ABSTRACT

The **Introduction** looks for the meaning of the term "quantity" in finance and claims that the study, classification, categorization and standardization of quantities can be achieved according to the standards of natural sciences. It is argued that the modern classification and methodology of the natural sciences can be useful in the case of simple interest, compounding, and the like.

The **Bibliographic Review** concerns the recent writings in relation to the status of the methodology, which is observed in the study of interest, makes observations and poses questions at a practical and theoretical level.

The **Historical Retrospect** concerns the concept of quantity and its innateness with human reason and how it emerged and evolved over time through trade and the economy in general. It emphasizes the "Anglo-Saxon-imperial" way of dealing with the quantities (the most prevalent to date in the science of Economics) against the "French-revolutionary" way of managing them. He takes a clear position in favor of the second way, the dominant one in the field of natural sciences and engineering.

The **Theory** is divided into two parts. The first part deals with the concept of quantity according to the standards of the natural sciences and how perhaps a thorough classification of them should be done in the future. Also introduced is the concept of the dimension of a quantity and the importance of using quantity equations versus numerical value equations. Finally, it also introduces the concept of prefix to units of measurement, especially money. The second part specializes in the study of interest phenomena, makes use of the first part and derives a general formula, which is obviously of their magnitudes and not their numerical values.

The **Application of the General Formula of Money Interest** is a flurry of examples of seemingly disparate usurious cases solved by its use. In fact, a relevant "Compounding Tablet" is given for those who are learning the method for the first time. Based on this, a related electronic application was created in Excel based on this methodology.

The **Research** concerns the formula (4.2) and the related “Compounding Tablet”, created by author for solving interest and related problems. It is compared to the traditional methodology. Experimental teaching is also suggested.

The **Appendix** contains the documents, distributed in the research and dialogue with Chatgpt.

Keywords: Quantity, numerical (arithmetic) value, value, unit of measurement, dimension, prefixes of units of measurement, numerical (arithmetic) value equation, quantity equation, interest, compound interest, interest rate, yield of interest rate

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Μέλη Εξεταστικής Επιτροπή	VII
ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ	IX
ΣΚΟΠΟΣ	XI
PURPOSE	XI
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	XIII
ABSTRACT	XV
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	XVII
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ	XIX
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ & ΠΙΝΑΚΑ	XXI
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1.1 Γενικά περί εργασίας	1
1.2 Ιχνηλάτηση του όρου μέγεθος	1
1.3 Διεπιστημονικότητα	2
1.4 Τα ουσιώδη	4
2. ΚΡΙΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ	5
2.1 Λίστα βιβλίων	5
2.2 Παρατηρήσεις-ερωτήματα	6
3. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ	9
3.1 Πρώιμη περίοδος	9
3.2 Ακμάζουσα περίοδος	9
3.3 Μοντέρνα περίοδος	12
3.4 Μεταμοντέρνα περίοδος	13
3.5 Κατακλείδα αναδρομής	14
4. ΘΕΩΡΙΑ	17
Α' ΜΕΡΟΣ : “ΠΕΡΙ ΜΕΓΕΘΩΝ”	17
4.1 ΜΕΓΕΘΟΣ	17
4.1.1 Μέγεθος στα Μαθηματικά	17
4.1.2 Μέγεθος στη Φυσική	17
4.1.3 Συμβολισμός βαθμωτού μεγέθους	18
4.2 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΜΕΓΕΘΩΝ	21
4.2.1 Ως προς την τάξη	21
4.2.2 Ως προς το είδος	24
4.2.3 Ως προς την έκταση	26
4.2.4 Θεμελιώδη και παράγωγα μεγέθη	27
4.3 ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΡΑΞΕΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ	27
4.4 ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΜΕΓΕΘΟΥΣ	30
4.4.1 Η έννοια της διάστασης μεγέθους	30
4.4.2 Εξισώσεις μεγεθών έναντι αριθμητικών τιμών	32
4.5 ΠΡΟΘΕΜΑΤΑ & ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ ΜΟΝΑΔΩΝ ΜΕΤΡΗΣΗΣ	33
4.5.1 Συμβολισμός μονάδων μέτρησης	33
4.5.2 Προθέματα μονάδων μέτρησης	34
Β' ΜΕΡΟΣ “ΠΕΡΙ ΤΟΚΙΣΤΙΚΩΝ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ”	38
4.6 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ	38
4.6.1 Το ποσοστό	38
4.6.2 Μεταβολή ενός μεγέθους	39
4.6.3 Ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους	40
4.6.4 Η νομισματική μονάδα	41
4.6.5 Ο Τόκος (I)	42
4.6.6 Η Απόδοση (i)	42

4.6.7 Το Επιτόκιο (r).....	43
4.7 ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΙΣΜΟΣ.....	45
4.7.1 Σχέση Τόκου (I) και Επιτοκίου(r).....	45
4.7.2 Τύπος Απλού Τοκισμού.....	45
4.8 ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΤΟΚΙΣΜΟΣ.....	46
4.8.1 Τύπος Ανατοκισμού.....	46
4.8.2. Εναλλακτικοί τύποι ανατοκισμού.....	49
4.8.3 Πραγματική και ονομαστική απόδοση.....	50
4.8.4. Τύπος Ανατοκισμού με Μεταβλητό Επιτόκιο.....	50
5. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΓΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΤΟΚΙΣΜΟΥ.....	53
6. ΕΡΕΥΝΑ.....	63
6.1 Σκοπός έρευνας.....	63
6.2 Ερευνητικά ερωτήματα.....	63
6.3 Περιγραφή της έρευνας.....	64
6.4 Αποτελέσματα της έρευνας.....	66
6.5 Προτεινόμενη πειραματική έρευνα.....	75
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	79
1Α. ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΕΡΕΥΝΑΣ.....	79
1Β. ΒΟΗΘΗΤΙΚΟ ΕΓΓΡΑΦΟ ΕΡΕΥΝΑΣ.....	81
2. ΣΥΝΟΜΙΛΙΑ ΜΕ Default (GPT-3.5).....	83
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	89

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

$X = \{X\}[X]$	18
$\alpha\% = \alpha/100 = \alpha : 100 = 0,01\alpha$	38
$r = i/t$	43
$X = X_0 (1 + r t)$	45
$X = X_0 (1 + r t)^{t/T}$	47
$X = X_0 (1 + i)^v$	48
$X = X_0 (1 + i)^{t/T}$	49
$X = X_0 (1 + r t)^v$	49
$X = X_0 (1 + r t_\alpha)^{t_\alpha/T} (1 + r t_\beta)^{t_\beta/T} (1 + r t_\gamma)^{t_\gamma/T} \dots$	51

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ & ΠΙΝΑΚΑ

Εικόνα 1:Τανυστές.....	22
Εικόνα 2 : Αριθμητική παράσταση έναντι παράστασης μεγεθών με χρήση προθεμάτων μονάδων μέτρησης.....	36
Εικόνα 3: Χρήση προθεμάτων σε γραφικές παραστάσεις.....	37
Εικόνα 4: Επιτόκιο συναρτήσει του χρόνου.....	44
Εικόνα 5: Γενικός τύπος ανατοκισμού-τοκισμού.....	47
Εικόνα 6:Ταμπλέτα Ανατοκισμού.....	53
Εικόνα 7: Excel τοκισμού.....	54
Εικόνα 8: Χρονοδιάγραμμα έρευνας.....	65
Εικόνα 9: Δείγμα.....	66
Εικόνα 10: Συνολικά αποτελέσματα.....	67
Εικόνα 11: Αποτελέσματα δείγματος μεταπτυχιακών φοιτητών.....	69
Εικόνα 12: Αποτελέσματα δείγματος προπτυχιακών μεσαίων ικανοτήτων.....	71
Εικόνα 13: Αποτελέσματα δείγματος προπτυχιακών υψηλών ικανοτήτων.....	73
Εικόνα 14: Πειραματική διδασκαλία.....	77
Πίνακας 1: Προθέματα Μονάδων Μέτρησης.....	34

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Γενικά περί εργασίας

Η παρούσα εργασία προτείνει μια σειρά από μεθοδολογικά εργαλεία στο χώρο των οικονομικών και δη των χρηματοοικονομικών. Θα γίνει απόπειρα με απλό τρόπο και φιλικό ύφος να γίνονται κατανοητά και σαφή τα γραφόμενα, ειδικά τα μαθηματικού-φυσικού περιεχομένου, γενικά δεν δόθηκε ο απαιτούμενος χρόνος και έμφαση από την δευτεροβάθμια εκπαίδευση με αποτέλεσμα να φαίνονται αρχικά δυσνόητα. Ο υποκειμενισμός είναι αναπόφευκτος γιατί δεν υπάρχει κάτι αντίστοιχο, επίσημα υιοθετημένο στα οικονομικά αλλά απαντάται σε φυσικές επιστήμες. Δεν είναι λοιπόν θέσφατα τα γραφόμενα στα οικονομικά αλλά σε άλλες επιστήμες, γι αυτό γίνεται λόγος για υποκειμενισμό. Μια επισήμανση, που είναι απόρροια αυτού του γεγονότος, αυτής της μάλλον καινοτόμου προσπάθειας, η παρούσα εργασία έχει την ατέλεια της περιορισμένης βιβλιογραφίας. Τα διδαχθέντα από τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και κάποιες βασικές έννοιες, που είναι προδήλως γνωστές στους μύστες φυσικών επιστημών, είναι ικανά να καλύψουν επαρκώς το αντικείμενο.

1.2 Ιχνηλάτηση του όρου μέγεθος

Πολύ συχνά, γίνεται λόγος περί “οικονομικών μεγεθών” και ο ορισμός, τι ακριβώς είναι το “μέγεθος” στην Χρηματοοικονομική, μάλλον ασαφής, όταν απαντάται. Υπάρχει αντικειμενική δυσκολία στο διαδίκτυο να βρεις σαφή ορισμό, ενώ εύκολα βρίσκεις για άλλες επιστήμες. Βρίσκεις το εξής στο [Βικιλεξικό](#) (2023) στο λήμμα μέγεθος : “οικονομικό μέγεθος είναι κάθε παράγοντας, που επηρεάζει μια επιχείρηση ή μια χώρα” ή σύνολα αυτών Το “σύνολα αυτών” συμπληρώθηκε από τον γράφοντα για να καταστεί λίγο πιο ακριβής. Είναι ο επικρατέστερος ορισμός; Ο αναφερθείς είναι χαλαρός, συγχέει τα φαινόμενα με τα μεγέθη. Η λέξη “παράγοντας” μπορεί να σημαίνει π.χ. ένα πόλεμο ή μια καταστροφή, ή μια ευνοϊκή συνθήκη κλπ., αλλά αυτά δεν είναι προφανώς μεγέθη. Ας πάρουμε ένα παράδειγμα από καθημερινότητα για να αποσαφηνιστεί ότι οι λέξεις παράγοντας και μέγεθος δεν είναι ταυτόσημες. Σε ένα

αυτοκινητιστικό ατύχημα καθοριστικά σύμφωνα με τους πραγματογνώμονες ήταν: η ταχύτητα του αυτοκινήτου, η ολισθηρότητα του δρόμου, η ομιλία του οδηγού στο κινητό. Και τα τρία είναι παράγοντες, όμως μόνο τα δύο πρώτα είναι μεγέθη: η ταχύτητα του αυτοκινήτου γιατί μπορεί να μετρηθεί και μετρήθηκε και η ολισθηρότητα του δρόμου (συντελεστής τριβής) γιατί και αυτή μπορεί να μετρηθεί ή να θεωρηθεί ότι είχε κάποια τιμή. Η ομιλία του οδηγού στο κινητό είναι παράγοντας, αλλά όχι μέγεθος δεν έχει μέτρο εκτός και αν μπορούσαμε να μετρήσουμε πόσο μεταβλήθηκε ο χρόνος αντίδρασης του οδηγού και πάλι όμως θα ήταν παράγοντας, που θα συνδεόταν με το μετρούμενο δηλαδή το χρόνο αντίδρασης.

Ο τρόπος μελέτης μάλλον έχει ατέλειες, γιατί δεν υπάρχει διαφανής ορισμός, αλλά όπως προείπαμε χαλαρή χρήση του όρου “μέγεθος”. Απόρροια είναι ένας σχεδόν ανύπαρκτος καμβάς ταξινόμησης, κατηγοριοποίησης και προτυποποίησης των οικονομικών μεγεθών. Πιθανολογώ, γιατί δεν βρήκα ρητή δήλωση, αλλά την εξάγω από συμφραζόμενα, ότι το εκάστοτε οικονομικό μέγεθος θα μπορούσε να οριστεί ως κάθε ποσό που επιδέχεται αύξηση ή μείωση και επομένως μπορεί να μετρηθεί και να εκφραστεί με αριθμούς δηλαδή εκδοχή σύμφωνη με τα Μαθηματικά και αποδεκτή κατ’ ουσία και από τις φυσικές και τεχνολογικές επιστήμες. Ας συμφωνήσουμε καταρχήν ότι είναι το “προϊόν” μέτρησης άμεσης ή έμμεσης. Τα μαθηματικά ορθά έχουν δώσει ένα γενικό ορισμό, που είναι στη διακριτική ικανότητα του κάθε επιστημονικού πεδίου να τον ειδικεύσει. Το ερώτημα, που τίθεται είναι απλό, παρατηρώντας γραφή π.χ. χρήματος ως 10\$, 100€, 1000sl ή επιτόκια 10% ετήσιο (ουσιαστικά 10% / year) , 5% ανά εξάμηνο (ουσιαστικά 5% / 6month) δηλαδή βλέποντας “μέτρα” και όχι “σκέτους αριθμούς”, εννοούμε το “μαθηματικό ορισμό” του μεγέθους ή την ειδικεύσή του, τον “φυσικό ορισμό” (θα τον δούμε στο κεφάλαιο με τίτλο Θεωρία) του μεγέθους;

1.3 Διεπιστημονικότητα

Οι επιστήμες σχετιζόμενες με την Οικονομία και της Φυσικής είναι τελείως διαφορετικές επιστήμες;

Ναι είναι, γιατί μελετούν οικονομικά φαινόμενα/γεγονότα, ενώ η επιστήμη της Φυσικής μελετά φυσικά φαινόμενα/γεγονότα. Οι οικονομικές επιστήμες προσπαθούν να αναπτύξουν οικονομικές θεωρίες και να ανακαλύψουν οικονομικούς νόμους, που διέπουν τα οικονομικά φαινόμενα/γεγονότα και να προβλέψει την πορεία

τους και εξέλιξή τους, κάνει μελλοντικές προβλέψεις στηριζόμενη στις θεωρίες της και στους νόμους της. Η επιστήμη της Φυσικής προσπαθεί να αναπτύξει φυσικές θεωρίες και να ανακαλύψει φυσικούς νόμους, που διέπουν τα φυσικά φαινόμενα/γεγονότα και να προβλέψει την πορεία τους και εξέλιξή τους, κάνει μελλοντικές προβλέψεις στηριζόμενη στις θεωρίες της και στους νόμους της. Οι οικονομικές επιστήμες για τις θεωρίες της, για τους νόμους της και γενικά για τη παρατήρηση, παρακολούθηση, κατανόηση και μελέτη των οικονομικών φαινομένων/γεγονότων χρησιμοποιούν ένα μεγάλο πλήθος από οικονομικά μεγέθη δηλαδή μετρούμενων ποσοτήτων. Η επιστήμη της Φυσικής για τις θεωρίες της, για τους νόμους της και γενικά για τη παρατήρηση, παρακολούθηση, κατανόηση και μελέτη των φυσικών φαινομένων/γεγονότων χρησιμοποιεί ένα μεγάλο πλήθος από φυσικά μεγέθη δηλαδή μετρούμενων ποσοτήτων.

Ως προς τη φύση τους, σε καμία περίπτωση δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν νόμοι και συμπεράσματα φυσικών επιστημών στο πεδίο των οικονομικών επιστημών διαφορετικό τελείως το αντικείμενο τους. Ως προς την μεθοδολογία, όμως; Τουλάχιστον σε κάποια πεδία όπως στα οικονομικά μαθηματικά και στα χρηματοοικονομικά μπορούν να υιοθετηθούν εργαλεία και νοοτροπία φυσικών επιστημών και μηχανικών, ώστε να απλοποιηθούν οι υπολογιστικές διαδικασίες, να γίνουν οι έννοιες σαφέστερες και κατανοητότερες και παράλληλα να δημιουργηθεί ένα στέρεο πλαίσιο για την μελέτη των. Διαυγής και εμπειριστατωμένη ταξινόμηση, κατηγοριοποίηση, προτυποποίηση και μεθοδολογία είναι πολύ πιθανόν να ανοίξουν νέες προοπτικές γενικότερα στα οικονομικά, που είναι σαφώς δυσκολότερα από εκείνα της Φυσικής γιατί στα οικονομικά φαινόμενα/γεγονότα πρωταγωνιστεί ο Άνθρωπος. Δε θα πρέπει λοιπόν τα θεμέλια αυτού του “κτιρίου” να είναι στιβαρά δομημένα; Δε πρέπει να φωτίσουμε και να αποσαφηνίσουμε την έννοια του μεγέθους και την ποικιλία του; Στο κεφάλαιο της θεωρίας δίνονται οι άξονες, πως ενδεχόμενα μπορεί να γίνει αυτό και οι τρόποι ταξινόμησης τους.

Τα Μαθηματικά παρέχουν τα εργαλεία σε κάθε επιστήμη, αλλά η χρήση τους και η τροποποίησή τους καθορίζεται από την κάθε επιστήμη, αρκεί να χαρακτηρίζεται από μαθηματική συνέπεια. Κατάλληλα, τροποποιημένα μαθηματικά εργαλεία κατά τα πρότυπα των φυσικών επιστημών θα μπορούσαν να σταθούν χρήσιμα αρχικά στα Χρηματοοικονομικά. Αυτό λοιπόν θα γίνει στην εργασία. Θα

μιλήσουμε για τα μεγέθη και πως ταξινομούνται και θα δούμε την ωφέλεια καλώς ορισμένων μεγεθών στα Χρηματοοικονομικά μέσα από τον τοκισμό και συναφών του.

1.4 Τα ουσιώδη

Για να γίνουν πιο συγκεκριμένα τα παραπάνω και να τονιστούν τα ουσιώδη της εργασίας, στην παρούσα περιλαμβάνονται τα εξής:

- Ορισμός του μεγέθους
- Κανόνες πράξεων μεγεθών
- Ταξινόμηση μεγεθών
- Προθέματα μονάδων μέτρησης
- Γενικός νόμος τοκισμού
- Ταμπλέτα ανατοκισμού (τοκισμού)
- Εφαρμογή σε Excel της ταμπλέτας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2. ΚΡΙΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

2.1 Λίστα βιβλίων

Η έννοια του μεγέθους ανήκει στην κατηγορία των μαθηματικών, που καλούνται στοιχειώδη μαθηματικά ([Βικιπαίδεια, 2023](#)) και ο εναργής ορισμός τους, ιδιαίτερα για τα μεγέθη, χρόνος, κεφάλαιο, τόκος επιτόκιο, απόδοση και οι τύποι τοκισμού, ανατοκισμού, ονομαστικής και πραγματικής ετησιοποιημένης απόδοσης άπτονται των οικονομικών μαθηματικών, με τα οποία ασχολείται διεξοδικά η παρούσα εργασία. Οπότε:

Στα πλαίσια της εργασίας μελετήθηκαν τα παρακάτω βιβλία από θεωρητική και πρακτική σκοπιά. Αναφέρονται όλα τους, όπως ήδη είπαμε, στα λεγόμενα Οικονομικά Μαθηματικά, που είναι τα μαθηματικά που απαιτούνται για την αντιμετώπιση προβλημάτων στην οικονομική ανάλυση. Κατά συνέπεια τα γραφόμενα τους διαχέονται και επηρεάζουν τον ευρύτερο χώρο των οικονομικών επιστημών. Αποτέλεσαν τον καθοριστικό παράγοντα συγγραφής του πονήματος μου. Μελετήθηκε αυτό το σεβαστό πλήθος βιβλίων, όλα από έγκριτους επιστήμονες, για να διαπιστωθεί, αν υπάρχει ουσιαστική διαφοροποίηση μεταξύ τους και αν κάποια προσεγγίζουν τα αναφερθέντα στην πρώτη παράγραφο με τρόπο και ουσία εγγύτερους προς τις φυσικές επιστήμες.

Αλεξανδρόπουλος Α., Παλιατσός Α., Σάσσαλος Σ. (2004), “Οικονομικά Μαθηματικά (Τόμος Α’), Μαθηματικά για Οικονομολόγους”, Σύγχρονη Εκδοτική

Αναστασάκης Α. (2020), Χρηματοοικονομικά μαθηματικά, εκδ. Δίσιγμα

Αποστολόπουλος Θ. (1996), Οικονομικά μαθηματικά, Ίδρυμα Ευγενίδου

Ελευθεριάδη Β.Χ. (1990), Οικονομικά μαθηματικά, ΟΕΔΒ

Καραπιστόλης Δ. (1999), Οικονομικά μαθηματικά, Μακεδονικές Εκδόσεις

Κατωπόδης Ε. και Κικίλιας Π. (1994), Οικονομικά μαθηματικά, εκδόσεις Δηρός

Κιόχος Π. και Α. (1999), Οικονομικά μαθηματικά, Εκδ.οίκος Interbooks

Λουκάκης Μ. (2012), Πρόσκληση στα μαθηματικά οικονομικών και διοικητικών επιστημών (Τόμος Α'), Εκδόσεις Σοφία

Μάγειρος Ε. (1993), Οικονομικά μαθηματικά και αξιολόγηση επενδύσεων, εκδόσεις Gutenberg

Παναγιωτόπουλος Α. (1995), Μαθηματικά οικονομικών και διοικητικών επιστημών (Τόμος Β'), Εκδόσεις Α.Σταμούλης

Παπαμιχαήλ Δ. (1993), Οικονομικά μαθηματικά- μαθηματικά πίστεως, Εκδόσεις Α.Σταμούλης

Σγουρινάκης Ν. (2015), Οικονομικά μαθηματικά και Εφαρμοσμένα, Εκδόσεις Οικονομική Βιβλιοθήκη

Τσεβιάς Α. και Τζούτης Σ. (2003), Οικονομικά μαθηματικά (Α' Τόμος), Μακεδονικές Εκδόσεις

Χουβαρδάς Β. (2010), Οικονομικά Μαθηματικά, Μακεδονικές Εκδόσεις

Bradley T. (2015), Μαθηματικά για τα οικονομικά και τη διοίκηση (βελτιωμένη έκδοση), Εκδόσεις Κριτική

Jacques I. (2015), Μαθηματικά των επιστημών οικονομίας και διοίκησης, Εκδόσεις Broken Hill

2.2 Παρατηρήσεις-ερωτήματα

Τα θέματα του τόκου, τοκισμού (απλού και σύνθετου), παρούσας αξίας, τελικής αξίας κλπ. καλύπτονται επαρκώς και εκτενώς από την παρούσα βιβλιογραφία στην οποία παρουσιάζονται και εναλλακτικοί τρόποι υπολογισμού. Μια όμως προσεκτικότερη ματιά, κάνει κάποιον να αναρωτιέται αν ο καταγιγισμός από τύπους για το καθετί είναι εκπαιδευτικά ορθός; Μελλοντικά ο διδασκόμενος θα είναι σε θέση να λύσει προβλήματα σχετιζόμενα με αυτούς; Επίσης, τίθεται το ερώτημα: θα είναι σε θέση να λύσει προβλήματα, που παρουσιάζουν “ανώμαλα” δεδομένα π.χ. επιτόκιο 2% ανά 7 εβδομάδες και το αποτέλεσμα να μην παρουσιάζει μεγάλο προσεγγιστικό σφάλμα; Παρατηρείται ότι άλλοι τύποι χρησιμοποιούνται αν π.χ. ο χρόνος είναι σε έτη, μήνες, μέρες και τίθεται το ερώτημα, αν μελλοντικά η ανθρωπότητα υιοθετήσει νέες μονάδες μέτρησης θα χρειαστεί να εισάγουμε επιπλέον τύπους; Η τωρινή μεθοδολογία, μεθοδολογία εφαρμογής τύπων, προάγει τη σκέψη ή είναι στεία; Αυτά είναι μερικά βασικά ερωτήματα, που δημιουργούνται εξετάζοντας από πρακτική άποψη την υπάρχουσα μεθοδολογία. Στα χρηματοοικονομικά είναι διαπιστωμένος ο λεγόμενος “χρηματοοικονομικός αναλφαβητισμός”, ευθύνονται

αποκλειστικά οι “αναλφάβητοι” ή και οι ταγοί της συγκεκριμένης γνώσης στον τρόπο μεταλαμπάδευσής της; Τέλος, στη μελετηθείσα βιβλιογραφία δεν παρατηρήθηκε ουσιαστική διαφοροποίηση στον τρόπο επίλυσης των προβλημάτων. Γίνεται εκτεταμένη χρήση εξισώσεων αριθμητικών τιμών και ποτέ χρήση εξισώσεων μεγεθών, που θα συνέβαινε σε μεθοδολογία εγγύτερη των φυσικών επιστημών.

Η θεωρητική σκοπιά, συνήθως υποβαθμισμένη σε πολλές πτυχές της σύγχρονης εποχής, είναι εξίσου σημαντική. Στο προκείμενο διαχέεται και στο υπόλοιπο πεδίο των οικονομικών επιστημών, που χρησιμοποιούν μεγέθη όπως το επιτόκιο, ή έννοιες όπως ο ρυθμός μεταβολής μεγέθους. Θα δούμε στο Κεφάλαιο 4 “Θεωρία” την λεπτή διάκριση και την ειδίκευση του όρου *μεγέθους* στη φυσική, που έγινε για να καταστούν τα μεγέθη χρηστικότερα. Θυμόμαστε από την δευτεροβάθμια παιδεία μας, την προσήλωση σε βαθμό εμμονής της/του φυσικού κατά τον ορισμό ενός μεγέθους, να είναι εφοδιασμένο απαραίτητα με ένα μαθηματικό τύπο (εξίσωση μεγεθών και όχι εξίσωση αριθμητικών τιμών) εφόσον ήταν παράγωγο μέγεθος και να διαθέτει μονάδα μέτρησης (διαστάσεις) ή “σκέτο” (αδιάστατο), καθώς και τον τρόπο με τον οποίο θα μετρηθεί ή συνιστάται να μετρηθεί (όργανο μέτρησης σε άμεση). Αυτή η ενάργεια είναι τελικώς εμμονή ή απαραίτητη συνθήκη για αξιοποιηθούν κατά το βέλτιστο τρόπο τα μεγέθη και τελικώς να ερμηνευθούν ή να προβλεφθούν τα φαινόμενα με ακρίβεια;

Θα εξεταστεί ως παράδειγμα το αξιόλογο βιβλίο με τίτλο “Οικονομικά Μαθηματικά (Τόμος Α’), Μαθηματικά για Οικονομολόγους” του 2004 από τους Αντ. Αλεξανδρόπουλο, Αθ. Παλιατσό και Σπ. Σάσσαλο. Καλογραμμένο και προσεγμένο σε μορφή και παραδείγματα, περιέχει μερικά σημεία στα οποία υπάρχει σχετική ασάφεια εξαιτίας μη εναργών ορισμών των μεγεθών κατά τα πρότυπα φυσικών επιστημών. Συγκεκριμένα, γράφονται τα εξής: “Ειδικά το κοινό μέτρο με το οποίο μετριέται η αξία όλων των αγαθών ή, πιο απλά, η βασική μονάδα με την οποία μετριέται το χρήμα, ονομάζεται Νομισματική Μονάδα (monetary unit), θα τη συμβολίζουμε με ν.μ. και κάθε χώρα έχει τη δική της νομισματική μονάδα.” (Αλεξανδρόπουλος και άλλοι, 2004, σελ. 18). Άρα, λέει κάποιος με αυτό που διαβάζει, η νομισματική μονάδα έχει διάσταση [ΧΡΗΜΑ]. Είναι έτσι όμως; ή πρέπει να τη θεωρούμε “οντότητα” και άρα αδιάστατη. Στην ίδια σελίδα: “Κεφάλαιο (Capital) ορίζεται σαν οικονομικό αγαθό, που έχει εκφραστεί σε νομισματικές μονάδες και ...” Άρα, συμπεραίνει ορθά κάποιος ότι το κεφάλαιο έχει διάσταση [ΧΡΗΜΑ]. Στην σελίδα 19: “Έτσι στο αρχικό κεφάλαιο του (δανειστή) προστίθεται

και ένα επιπλέον ποσό (η πρόσθετη αμοιβή) που λέγεται Τόκος (Interest)...” Άρα, ο τόκος έχει ορθά διάσταση και αυτός [ΧΡΗΜΑ]. στις σελίδες 19-20 η αναφορά για το χρόνο προκαλεί σύγχυση στον αμύητο αναγνώστη “...ή μπορεί να είναι και χρονικής διάρκειας οσοδήποτε μικρής ή μεγάλης, δηλαδή συνεχής, με τιμές στο διάστημα $[0, t)$, που σημαίνει ότι το κεφάλαιο παράγει τόκο ανά πάσα χρονική στιγμή.” Άρα, έχει διάσταση [ΧΡΟΝΟΣ]. Επίσης, “...άρα να παίρνει τιμές από την ακολουθία 0, 1, 2, 3 ...” εδώ μιλάει για αυτό που λένε οι φυσικοί αριθμητική τιμή του μεγέθους, αλλά δεν ξεκαθαρίζεται. Άρα, ο χρόνος λαμβάνεται αδιάστατος [1], όταν είναι σε έτη, μήνες, έτη. Στην σελίδα 20: “Επιτόκιο (Rate of Interest) και ορίζεται ως ο τόκος μιας νομισματικής μονάδας σε μια χρονική μονάδα.”, εδώ προβληματιζόμαστε με $\dim r = [\text{ΧΡΗΜΑ}] / [\text{ΧΡΟΝΟΣ}]$ ή σκέτο [ΧΡΗΜΑ] αναρωτιέται κάποιος. “Συνήθως, για χρονική μονάδα παίρνουμε το έτος και έτσι το επιτόκιο, που συμβολίζεται* με το γράμμα i , είναι ο τόκος που παράγει μια νομισματική μονάδα ...” ο αστερίσκος επεξηγείται στο βιβλίο στην υποσημείωση του ότι το επιτόκιο συμβολίζεται στη ξένη βιβλιογραφία και με r . Στη “μαθηματική” αντιμετώπιση των τοκιστικών φαινομένων σιωπηρά λαμβάνεται ως μονάδα μέτρησης η εκάστοτε τοκιστική περίοδος (ή περίοδος ανατοκισμού) και οι χρόνοι εκφράζονται με βάση αυτή. Δεν είναι φυσικά λάθος, αλλά απόλυτα σωστό, αρκεί να μην λησμονούμε ότι οι διαστάσεις των μεγεθών δεν αλλάζουν και ότι το να συμπίπτει η αριθμητική τιμή του επιτοκίου με την απόδοση δε σημαίνει ότι είναι και τα ίδια μεγέθη. Στην σελίδα 38 έχουμε για τον τόκο τον τύπο $I = C * t * i$ “υπολογίζουμε τον απλό τόκο ενός γνωστού κεφαλαίου που τοκίζεται για ορισμένο (γνωστό) χρόνο με γνωστό επιτόκιο.” Δοκιμάστε οποιοδήποτε συνδυασμό από τις παραπάνω διαστάσεις των μεγεθών επιθυμείτε, αλλά δε θα έχετε διαστατική ομοιογένεια.

Σχόλιο: Απόρροια των άνωθι είναι να αντιμετωπίζεται το επιτόκιο και από άλλες οικονομικές επιστήμες, όπου χρησιμοποιείται, ως αδιάστατο μέγεθος και γενικά να συγχέονται οι διαστάσεις των μεγεθών. Αυτά δημιουργούνται ελλείψει ενάργειας στους ορισμούς των μεγεθών με απλότητα συνάμα. Ρητορικές ερωτήσεις: Γιατί στις φυσικές επιστήμες λέτε να τροποποιήθηκε (χωρίς να αλλάζει κατ’ ουσίαν) ο ορισμός του μεγέθους σε σχέση με τα μαθηματικά; Γιατί στις φυσικές επιστήμες χρησιμοποιούνται εξισώσεις μεγεθών και σπάνια εξισώσεις αριθμητικών τιμών;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

3.1 Πρώιμη περίοδος

Η ικανότητα του Ανθρώπου να μετρά και να ποσοτικοποιεί χάνεται στα βάθη της προϊστορίας του. Εικάζεται ότι είναι σύμφυτή του, την έχει προίκα από τη Φύση λόγω ανεπτυγμένου εγκεφάλου. Είναι αποδεδειγμένο από τους βιολόγους ότι την ικανότητα στοιχειώδους μέτρησης και συγκρίσεων την έχουν και αρκετά ζώα ([Boysen και Berntson, 1989](#)) μέχρι και είδος βατράχου, δεντροβάτραχος του Ειρηνικού ([Beckman, 2022](#)).

Η μέτρηση γέννησε την έννοια του μεγέθους ή αλλιώς της ποσότητας. Από τους αρχαίους χρόνους, οι άνθρωποι προσπαθούσαν να στηρίζουν τις μετρήσεις τους σε κάτι που θεωρούσαν ως “σταθερό” και κατανοητό από την ομήγυρή τους. Για παράδειγμα, μέχρι και το πόδι του βασιλιά λαμβανόταν ως κάτι “σταθερό” και “πρότυπο”, κοινώς αποδεκτό από όλο το βασίλειο. Επίσης η μέτρηση των αποστάσεων με την μέρα, μιας μέρας δρόμος, δυο μέρες δρόμος κ.ο.κ. υπονοούσε πως ένας άνθρωπος περπατούσε με δεδομένο, “σταθερό” ρυθμό δηλαδή ταχύτητα.

Η ανάγκη της ποσοτικοποίησης και δημιουργίας διαφόρων μεγεθών και παράλληλα κοινής αποδοχής αυτών των μονάδων μέτρησης εμφανίστηκε εντονότερα την εποχή που οι άνθρωποι άρχισαν να κάνουν διάφορες ανταλλαγές με άλλες κοινωνίες. Το πρώιμο εμπόριο δημιούργησε ώθηση, ώστε οι άνθρωποι να μετρούν αποστάσεις, μάζες, χρόνους ταξιδιού. Διαρκώς, αναπτύσσεται η ανάγκη για περισσότερη μέτρηση και περισσότερα μεγέθη καθώς κατασκευάζονται πιο εξελιγμένα εργαλεία, μέσα και προϊόντα από τους πρώτους μηχανικούς, γιατί η Χρηματοοικονομική το επιβάλλει.

3.2 Ακμάζουσα περίοδος

Περίπου στα μέσα του 19ου αιώνα, ως συνέπεια της αλματώδους ανάπτυξης της βιομηχανίας και του διεθνούς εμπορίου οι ανάγκες για μέτρηση και, κατά συνέπεια, καθορισμού μονάδων μέτρησης αυξάνεται με αλματώδη ρυθμό, δηλαδή πάλι χάρη της Χρηματοοικονομικής. Στα 1822, ο σπουδαίος Γάλλος μαθηματικός και φυσικός Jean-Baptiste Joseph Fourier (γνωστός από τις σειρές Fourier στα μαθηματικά)

εισήγαγε την έννοια των διαστάσεων ενός μεγέθους στη μελέτη θερμοδυναμικών συστημάτων. Αργότερα έγινε επιτακτική ανάγκη να υιοθετηθεί από όλους τους ασχολούμενους με τις φυσικές επιστήμες και τους μηχανικούς για να ανταποκριθούν στους νέους καιρούς, που η Χρηματοοικονομική για πολλοστή φορά επιβάλλει. Οι φυσικές επιστήμες και οι μηχανικοί συστηματοποίησαν την μελέτη των μεγεθών, που χρησιμοποιούσαν, δημιούργησαν πρότυπα συστήματα μονάδων μέτρησης και ταξινόμησαν όσο πιο καλά μπορούσαν τα μεγέθη.

Η πρώτη αξιομνημόνευτη προσπάθεια ενδεδειγμένης συστηματοποίησης και ταξινόμησης των μεγεθών και των μονάδων μέτρησής τους, είχε ήδη αρχίσει με τη Γαλλική Επανάσταση, όταν προτάθηκε το Μετρικό Σύστημα. Για αυτό το λόγο πολλοί όροι σχετικά με τα μεγέθη διατυπώνονται στη Γαλλική. Το Μετρικό Σύστημα είναι ο πρόγονος του Διεθνούς Συστήματος Μονάδων (SI, *Système International d'Unités*, *International System of Units*). Οι Άγγλοι, που δε τα πήγαιναν ποτέ καλά με τους Γάλλους -τουλάχιστον τότε, λόγω ειδικά και των πρόσφατων Ναπολεόντειων Πολέμων- έκαναν τη δική τους προσπάθεια και ανέπτυξαν το δικό τους σύστημα, ως απάντηση. Ήταν το Αγγλικό σύστημα μέτρησης (Βρετανικό Αυτοκρατορικό Σύστημα, *British Imperial System*), που υιοθέτησε σταδιακά η Βρετανική Αυτοκρατορία και ορίστηκε αρχικά από το [Weights&Measures Act 1824](#), πλέον από το [Weights&Measures Act 1985](#). Το *Imperial System* αντικατέστησε το σύστημα *Winchester*, το οποίο ίσχυε από το 1588 έως το 1825 ([Chaney, 1897](#)). Μέχρι τα τέλη του 20ου αιώνα, τα περισσότερα έθνη της πρώην Βρετανικής Αυτοκρατορίας, νυν Κοινοπολιτείας, είχαν υιοθετήσει επίσημα το μετρικό σύστημα ως το κύριο σύστημα μέτρησης. Αλλά το *Imperial System* εξακολουθεί να χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα μαζί με το μετρικό στον Καναδά και στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής και δε φαίνεται να εξαλείφεται ολοκληρωτικά στο άμεσο μέλλον, στο Ηνωμένο Βασίλειο (*UK Metric Association, UKMA*).

Παράλληλα και συγχρόνως, από τους Γάλλους την περίοδο μετά την επανάσταση θεωρήθηκε ότι τα νέα μέτρα του λεγόμενου μετρικού συστήματος δεν είχαν την κατάλληλη κλίμακα για όλες τις μετρήσεις και εργασίες. Τα προθέματα μονάδων μέτρησης έδωσαν την έξυπνη λύση, ώστε να δημιουργηθούν με συστηματικό τρόπο και εύκολο στην αναφορά οι κατάλληλες μονάδες μέτρησης. Προτάθηκε η χρήση αποκλειστικά του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης για να συνάδει με τον αριθμό των ψηφίων (και προφανώς των χρησιμοποιούμενων

δακτύλων για αρίθμηση) προς αντικατάσταση του τότε δωδεκαδικού (της ντουζίνας), το οποίο είναι εμφανώς και πιο δύσχρηστο και αργό σε μετατροπές μονάδων μέτρησης. Η αρχική ιδέα ήταν η χρήση ελληνικών προθεμάτων για τα πολλαπλάσια (deca, hecto, kilo) και λατινικών για τις υποδιαιρέσεις (deci, centi, milli). Σήμερα τα προθέματα έχουν επεκταθεί και χρησιμοποιούνται και εκτός του συστήματος SI. Τα χρησιμοποιούν και άλλες επιστήμες π.χ. στους υπολογιστές και στην πληροφορική, γνωστά ακόμα και σε αδαείς είναι οι λέξεις “κίλο” (kilo, k), “μέγα” (mega, M), “γίγα” (giga, G), “τέρα” (tera, T). Χρησιμοποιείται επίσης πολύ το “εκατοστό” (centi) (τα cents άλλωστε ως υποδιαιρέσεις νομισμάτων, όπως του δολαρίου και του ευρώ, είναι το πρόθεμα ουσιαστικά), πολύ επίσης το “κίλο” (kilo) ως καθημερινή σύντμηση του κίλογραμ (του χιλιογράμμου), σπανίως το “δέκατο” (deci) και το “δέκα” (deca) και ουσιαστικά ποτέ το “εκατό” (hecto). Το δεκαδικό σύστημα με τα προθέματα μονάδων μέτρησης μαζί με τις εξισώσεις μεγεθών έχει αποδειχτεί ένα εύχρηστο και ευκόλως κατανοητό σύστημα με οικιακή, βιομηχανική, εκπαιδευτική και επιστημονική χρηστικότητα.

Οι Βρετανοί παραδοσιακοί πάντα, ήταν πολύ δύσκολο να υιοθετήσουν κάτι διαφορετικό και μάλιστα από τους παραδοσιακά άσπονδους φίλους τους. Όποιος δε, αμφισβητεί την εμμονή των Αγγλοσαξόνων στην παράδοση και το αυτοκρατορικό σύνδρομο, δεν έχει παρά να σκεφτεί την οδήγηση οχημάτων στο αριστερό ρεύμα κυκλοφορίας, που είναι μαζί με την Ιρλανδία και τις πρώην αποικίες της Κύπρου και της Μάλτας με αυτή την επιλογή, τα μόνα κράτη σε όλη την Ευρώπη. Η Χρηματοοικονομική , ως επιστήμη κύρια γαλουχημένη από Άγγλους και Αμερικάνους διαπιστώνουμε ότι οφείλει πλείστα σε αυτούς θετικά αλλά στερείται και χρήσιμων εργαλείων π.χ. είναι ανύπαρκτη η χρήση προθεμάτων, τουλάχιστον στο χρήμα. Τίθεται το εύλογο ερώτημα γιατί δε χρησιμοποιούνται τα προθέματα μονάδων, όχι φυσικά στη λογιστική, όπου εκεί πρέπει οι αριθμοί να εμφανίζονται σε πλήρη ανάπτυξη αλλά στην εκπαιδευτική και επιστημονική συνεννόηση; Το ερώτημα είναι κατά βάση ρητορικό. Χαρακτηριστικά του χάους και του δύσχρηστου του British Imperial System, μπορεί κάποιος να τα δει ανατρέχοντας στην εγκυκλοπαίδεια Britannica και να αναζητήσει Imperial Units (unit of measurement). Το “upper stiff lip” είναι ακόμα και σήμερα δύσκολο να αποδεχτεί ολοκληρωτικά διαστάσεις, εξισώσεις μεγεθών, μονάδες μέτρησης και προθέματα προερχόμενα από την απέναντι όχθη της Μάγχης. Για δε τις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής, από την

εγκυκλοπαίδεια [Britannica \(2023\)](#), αναφέρεται το εξής: “Ενώ οι Βρετανοί μεταρρύθμιζαν τα μέτρα και τα σταθμά τους τον 19ο αιώνα, οι Αμερικανοί απλώς υιοθετούσαν μονάδες βασισμένες σε εκείνες που απορρίφθηκαν από την πράξη του 1824” δηλαδή της Weights and Measures Act of 1824. Το Γόητρο είναι πολύ σημαντικός παράγοντας και διαχρονικά ζητούμενο, από τις χώρες και διαπερνά και το χώρο της επιστήμης.

3.3 Μοντέρνα περίοδος

Το διαρκώς και ακατάπαυστα αυξανόμενο διεθνές εμπόριο έκανε πιο έντονη την ανάγκη να καθιερωθούν διεθνείς συμφωνίες όσον αφορά τις μονάδες μέτρησης και έτσι ιδρύθηκε η Συνθήκη του Μέτρου (Meter Convention) το 1875. Αυτή καθορίζει το πλαίσιο για διακυβερνητικές συμφωνίες σε θέματα που είναι σχετικά με τη μετρολογία και τις μονάδες μέτρησης. Στη συνέχεια, δημιουργήθηκαν τρεις διεθνείς οργανισμοί, το Γραφείο Διεθνών Μέτρων και Σταθμών (Bureau International des Poids et Mesures, BIPM), η Γενική Συνδιάσκεψη για Μέτρα και Σταθμά (General Conference on Weights and Measures, Conférence Générale des Poids et Mesures, CGPM) και η Διεθνής Επιτροπή για Μέτρα και Σταθμά (International Committee for Weights and Measures, Comité International des Poids et Mesures, CIPM). Κατόπιν, τα προηγμένα εμπορικά και βιομηχανικά κράτη δημιούργησαν τα δικά τους εθνικά εργαστήρια για πρότυπα, αποσκοπώντας σε εμπορική και οικονομική υπεροχή. Εν συνεχεία, αρκετές χώρες έχουν τα δικά τους Εθνικά Ινστιτούτα Μετρολογίας (National Metrology Institutes, NMI). Για παράδειγμα στην Πολωνία, το NMI , γνωστό στην πολωνική GUM (Główny Urząd Miar, Κεντρικό Γραφείο Μέτρων) ως Εθνικό Ινστιτούτο Μετρολογίας έχει στόχο να παρέχει τις πηγές ιχνηλασιμότητας των μετρήσεων στο υψηλότερο δυνατό επίπεδο για μετρήσεις στον τομέα της Οικονομίας. Επιτελεί καθήκοντα στο πεδίο της επιστημονικής, βιομηχανικής και απαιτούμενης ακρίβειας μέτρησης στην Πολωνία μέσω υλοποίησης και διατήρησης προτύπων μέτρησης και διάδοσης των μετρήσεων (αυτό αφορά τις μονάδες SI και άλλες νόμιμες μονάδες μέτρησης). Το GUM εκτελεί βαθμονομήσεις και αξιολογήσεις ειδικών οργάνων μέτρησης, αξιολόγηση συμμόρφωσης οργάνων μέτρησης και έγκριση τύπου και επαλήθευση οργάνων μέτρησης ([Fidelus, 2023](#)).

Το Διεθνές Σύστημα Μονάδων είναι ένα εξελισσόμενο σύστημα, μετατρέπεται καθώς αναδύεται νέα γνώση, νέα μεγέθη και νέες ανάγκες να

μετρηθούν αυτά. Αναφέρουμε επίσης τον Διεθνή Οργανισμό Τυποποίησης (International Organization for Standardization, ISO), ο οποίος είναι μια παγκόσμια συνεργασία, απαρτιζόμενη από οργανισμούς εθνικών προτύπων (οργανισμοί μέλη του ISO). “We develop and publish International Standards” (2023) και καλύπτει 97 τομείς. Τις επιμέρους εργασίες τυποποίησης τις αναλαμβάνουν τεχνικές επιτροπές του ISO. Η τεχνική επιτροπή ISO/TC 12 έχει σκοπό την τυποποίηση των μονάδων, των συμβόλων για τις διάφορες ποσότητες και μονάδες και τα μαθηματικά σύμβολα που χρησιμοποιούνται στις διάφορες περιοχές της επιστήμης και της τεχνολογίας. Παρέχονται, όπου χρειάζεται, διευκρινήσεις και αυστηροί ορισμοί αυτών των ποσοτήτων και των μονάδων. Μια άλλη ευθύνη αυτής της επιτροπής είναι να δίνει τυποποιημένους συντελεστές μετατροπής μεταξύ των διαφόρων μονάδων. Ο ISO συνεργάζεται στενά με την Διεθνή Επιτροπή της Ηλεκτροτεχνίας (International Electrotechnical Commission, IEC). Στην χώρα μας την Ελλάδα, η υπεύθυνη υπηρεσία για τα θέματα τυποποίησης είναι ο ΕΛΟΤ (Ελληνικός Οργανισμός Τυποποίησης). Η CODATA (Committee on Data for Science and Technology) είναι η επιτροπή που διαχειρίζεται τα αποτελέσματα διαφόρων μετρήσεων και δημοσιεύει τις τιμές των μετρήσεων με τις αβεβαιότητές τους προς το τέλος του χρόνου κάθε τέσσερα χρόνια (Δρης, 2022).

3.4 Μεταμοντέρνα περίοδος

Δυστυχώς όμως, η Οικονομία, η μεγάλη αδελφή, που ώθησε τις άλλες αδελφές, έμεινε πίσω και εκτός πανηγυριού... λέτε να είναι το βάρος της πρωτότοκης, που μεγαλώνει τις αδελφές της εις βάρος της δικής της εξέλιξης και μετά δεν καταδέχεται τίποτα από αυτές! Τον Φεβρουάριο 2016, ιδρύθηκε στη χώρα μας, το Ινστιτούτο Χρηματοοικονομικού Αλφαριθμητισμού (Hellenic Financial Literacy Institute), που αποτελεί την πρώτη αστική μη κερδοσκοπική εταιρεία στη χώρα μας, το έργο της οποίας είναι αφιερωμένο στη διάδοση της χρηματοοικονομικής γνώσης και στην καταπολέμηση του χρηματοοικονομικού αναλφαριθμητισμού.

Σχόλιο: Επικροτείται προφανώς η προσπάθεια και θετικά επιδοκιμάζεται και όλοι ελπίζουμε να αποδειχτεί πυλώνας και μοχλός θετικών αλλαγών και στην εκπαίδευση.

Αρκετοί κλασικοί οικονομολόγοι βλέπουν με σκεπτικισμό τις τελευταίες δυο δεκαετίες τη δημιουργία ενός νέου κλάδου στην Χρηματοοικονομική, ο οποίος ονομάζεται Econophysics (Οικονοφυσική, στην αυτολεξεί μετάφραση) και στα

ελληνικά έχει επικρατήσει το όνομα Οικονομική Φυσική. Είναι ένα νέο επιστημονικό πεδίο, γέννημα συνεργασίας μεταξύ οικονομολόγων, φυσικών και μαθηματικών. Εφαρμόζει ιδέες, μεθόδους, εργαλεία και μοντέλα από την στατιστική φυσική για την ανάλυση πολύπλοκων δεδομένων στα οικονομικά φαινόμενα. Ηχεί παράξενο ότι η κρισιμότητα και η πρόβλεψη σεισμών, χρησιμοποιούνται επίσης για να καταλάβουν οι ειδικοί την χρηματιστηριακή κατάρρευση. Ηχεί παράξενο ότι τα μοντέλα των καρδιακών επεισοδίων μπορούν να εξηγήσουν τις διακυμάνσεις του χρηματιστηρίου. Ηχεί εξωτικός ο τίτλος πανεπιστημιακού μαθήματος “Στατιστική Φυσική και Θερμοδυναμική: Προσέγγιση στην Οικονομία ” με επίσης εξωτικές ενότητες όπως: Η πιθανοθεωρητική προσέγγιση των οικονομικών μεταβλητών. Η στατιστική μηχανική των Οικονομικών. Η Στατιστική Levy στην Οικονομία. Το μοντέλο Ising στην Οικονομία. Η κατανομή Boltzmann-Gibbs στην ενέργεια και διατήρηση του χρήματος. Η κατανομή Boltzmann-Gibbs στο χρήμα. Μοντέλα χρέους. Δεδομένα και Μοντέλα για κατανομή Εσόδων. Μια Θερμοδυναμική Μοντελοποίηση της Οικονομίας, ο Πρώτος Νόμος της Χρηματοοικονομικής, ο Δεύτερος Νόμος της Οικονομίας – Εντροπία και συνάρτηση Παραγωγής – Πίεση. Προσωπική ελευθερία – η εντροπία στην Οικονομία. Η διαδικασία Carnot στην Παραγωγή και το Εμπόριο ([Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, 2023](#)).

Σχόλιο: Χαριτολογώντας θα πω ότι κάποιοι αιρετικοί φυσικοί, οικονομολόγοι και επαγγελματίες συγκεντρώνονται σε ετήσια βάση (Econophysics Colloquium) για να συζητήσουν στατιστικές μεθόδους, ποσοτικά μέτρα, προσεγγίσεις μοντελοποίησης, αριθμητικές προσομοιώσεις και μη συμβατικές μεθόδους εξόρυξης δεδομένων που εφαρμόζονται σε χρηματοοικονομικά, οικονομικά και κοινωνικά συστήματα.

“Μα η Οικονομία είναι Κοινωνική Επιστήμη! Και δεν επιδέχεται να εφαρμόζονται τέτοιες θεωρήσεις.” Ταπεινά θα προσθέσω: το Μέλλον θα δείξει και η Ιστορία θα γράψει σε τι βαθμό αυτός ο “γάμος θα είναι ανθόσπαρτος”.

3.5 Κατακλείδα αναδρομής

Η ιστορική αναδρομή, την οποία θεωρώ σημαντικό κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, που αφορούσε τη διαχρονική μελέτη των μεγεθών, των μονάδων μέτρησής τους και της οφειλόμενης μεθοδολογικά ολιστικής (ανεξάρτητα από επιμέρους επιστήμες και χώρες) αντιμετώπισής τους, είχε ως σκοπό να προβληματίσει κυρίως και να αφυπνίσει. Επίσης, να τονίσει την συνθετικότητα των γεγονότων στις ανθρώπινες

κοινωνίες και πώς φαινομενικά διαφορετικοί τομείς και μεταβολές σε αυτούς (εμπόριο, οικονομικά, μαθηματικά, φυσικές επιστήμες, πολιτική και νοοτροπία) διαπλέκονται για να συνθέσουν και να επηρεάσουν σκέψη και γνώση, που δυστυχώς δε διαχέεται -ως όφειλε- σε όλες τις επιστήμες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4. ΘΕΩΡΙΑ

Α' ΜΕΡΟΣ : “ΠΕΡΙ ΜΕΓΕΘΩΝ”

4.1 ΜΕΓΕΘΟΣ

4.1.1. Μέγεθος στα Μαθηματικά

Ως **μαθηματικός όρος**, μέγεθος ονομάζεται κάθε ποσό που επιδέχεται αύξηση ή μείωση και επομένως μπορεί να μετρηθεί και **να εκφρασθεί με αριθμούς**. Ο αριθμός που αποτελεί το μέτρο κάποιου μεγέθους είναι το πηλίκο (ο λόγος, το κλάσμα) του συγκεκριμένου μεγέθους προς άλλο ομοειδές το οποίο έχει επιλεγεί ως μονάδα μέτρησης ([Βικιπαίδεια, 2023](#)). Λοιπόν ουσιαστικά, αντιμετωπίζονται ως αριθμοί από τους Μαθηματικούς και τίποτα παραπάνω. Όταν επιλύονται εξισώσεις ή ανισώσεις δεν εμφανίζονται μονάδες μέτρησης και έχουμε τελικά μαθηματικές σχέσεις αριθμητικών τιμών με βάση την σκοπιά της Φυσικής. Όπως ήδη έχει επισημανθεί στην Εισαγωγή, έχει δοθεί ένας γενικός ορισμός για να καλύπτει όλες τις επιστήμες.

4.1.2 Μέγεθος στη Φυσική

Οι φυσικοί αναπροσάρμοσαν τον γενικό ορισμό δηλαδή τον δοθέντα ορισμό από τους μαθηματικούς για να είναι χρηστικότερος στο δικό τους πεδίο. Αντί λοιπόν να έχουμε ένα κλάσμα, έχουμε ένα γινόμενο. Οι μαθηματικοί θεωρούν μέγεθος αυτό: $\{X\} = X/[X]$, ενώ οι φυσικοί αυτό $X = \{X\}[X]$, τα άγκιστρα $\{\}$ δηλώνουν την αριθμητική τιμή και οι αγκύλες $[]$ τη μονάδα μέτρησης. Επί της ουσίας και όπως είναι πρόπον καμία διαφορά.

Ως **όρος στη Φυσική**, κάτι για να είναι μέγεθος **πρέπει να έχει μέτρο**. Άρα, για ένα φυσικό, χημικό, βιολόγο, μηχανικό το τυπικό μέγεθος είναι ένας πραγματικός αριθμός (όχι μιγαδικός) με μια μονάδα μέτρησης (επιλεγμένο πρότυπο μέγεθος) “κολλημένη” σε αυτόν (ουσιαστικά, πολλαπλασιασμός της αριθμητικής τιμής με τη μονάδα μέτρησης) δηλαδή **γινόμενο αριθμού επί μονάδα μέτρησης** (αυτό δεν ισχύει για τα μεγέθη κατάταξης, με τα οποία δε θα ασχοληθούμε και απλώς αναφέρονται

παρακάτω). Επίσης, ένας ευρύτερος ορισμός είναι ό,τι μπορεί να μετρηθεί δηλαδή να ποσοτικοποιηθεί, εξ ου και το μέγεθος λέγεται εναλλακτικά και **ποσότητα (quantity)**.

Οι εξισώσεις ή ανισώσεις αφορούν μεγέθη εκτός αν ρητά αναφέρεται ότι πρόκειται περί αριθμητικών τιμών και αν πολλές φορές δεν αναγράφονται οι μονάδες μέτρησης σε αυτές είναι γιατί έχει πρωτότερα διευκρινιστεί το σύστημα μονάδων (συνήθως το SI, Διεθνές Σύστημα Μονάδων, *Système International d'Unités*). Φαίνεται σαν να έχουν παραλειφθεί αλλά είναι εκεί στην εξίσωση, όμως αόρατες γιατί είναι σύμφωνες (coherent)! Δικαιούμαστε να γράψουμε στο τελικό αποτέλεσμα, αν έχουμε επεξεργαστεί μεγέθη π.χ. ...= 3\$, αν όμως έχουμε επεξεργαστεί αριθμητικές τιμές με πολύ αυστηρά μαθηματικά δεν έχουμε αυτό το δικαίωμα και πρέπει να το απαντήσουμε κατόπιν με λόγια π.χ. ...= 3 δηλαδή 3\$.

Σχόλιο: Η τυπολατρία επιβάλλει για να ξεχωρίζουμε κάτι ότι είναι βαθμωτό μέγεθος στα βιβλία να γράφεται με πλάγια γράμματα (italic), αλλά θεωρώ ότι δεν είναι αναγκαία τόση τυπικότητα στην παρούσα εργασία, αφού όλα εδώ αντιμετωπίζονται ως μεγέθη και όχι ως αριθμοί. Τα διανυσματικά μεγέθη τυπώνονται με έντονα (bold) γράμματα ή υπερκείμενα βέλη στα συγγράμματα, αλλά στην παρούσα δε θα ασχοληθούμε με αυτά, οπότε ό,τι είναι τυπωμένο με έντονα γράμματα δεν είναι διανυσματικό αλλά τυπώνεται έτσι για έμφαση.

4.1.3 Συμβολισμός βαθμωτού μεγέθους

Συμβολικά, ένα τυπικό μονόμετρο (βαθμωτό, scalar, scalaire) μέγεθος (ή ποσότητα, quantity, grandeur) γράφεται στην εξής μορφή:

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{X}\}[\mathbf{X}]$$

όπου: X το μέτρο (ή τιμή)

{X} η αριθμητική τιμή

[X] η μονάδα μέτρησης

Υπενθυμίζεται, η αριθμητική τιμή δηλώνεται με χρήση αγκίστρων και η μονάδα μέτρησης (διάσταση) με χρήση αγκυλών.

Ουσιαστικά, το **μέτρο ή τιμή** (valeur d'une grandeur, valeur, quantity value, value of a quantity, value) μας δείχνει το **πόσες φορές** μεγαλύτερο (ή μικρότερο, αν η αριθμητική τιμή είναι μικρότερη της μονάδας) είναι το μέγεθος σε σχέση με την

επιλεγμένη μονάδα μέτρησης. Αλλιώς, η αριθμητική τιμή είναι ο πολλαπλασιαστής, ο συντελεστής της μονάδας μέτρησης.

Η **αριθμητική τιμή μεγέθους**, (valeur numérique, valeur numérique d'une grandeur, numerical quantity value, numerical value of a quantity, numerical value) είναι ο αριθμός, που αναγράφεται πριν την μονάδα μέτρησης (δύναται να έχουμε διαφορετική αριθμητική τιμή αλλά τα μεγέθη να είναι ίσα).

Η **μονάδα μέτρησης** (unité de mesure, unité; measurement unit; unit of measurement) είναι μια πραγματική (μη μιγαδική) μονόμετρον (βαθμωτή) συγκεκριμένη ποσότητα (η οποία ορίστηκε συμβατικά και έγινε αποδεκτή) με την οποία μπορεί να συγκριθεί κάθε άλλη ομοειδής ποσότητα (μέγεθος) έτσι ώστε ο λόγος (πηλίκο) των δυο ποσοτήτων να εκφραστεί ως ένας πραγματικός αριθμός. Έχουμε δικαίωμα να δηλώσουμε οτιδήποτε ως μονάδα μέτρησης, που είναι σταθερό και προφανώς ευρέως αντιληπτό (συνήθως κάτι τοπικά ή καλύτερα παγκόσμια θεσπισμένο) με σκοπό να κάνουμε απλούστερη τη μελέτη του φαινομένου. π.χ.

Παράδειγμα Α

Μονάδα χρόνου το “1 κουτουρού” δεν είναι αντιληπτό παρά μόνο ίσως από αυτόν που το σκέφτηκε, άρα δε μπορεί να είναι μονάδα μέτρησης.

Παράδειγμα Β

Το μήκος του ανθρώπινου δακτύλου δεν είναι σταθερό, διαφέρει από δάκτυλο σε δάκτυλο και από άνθρωπο σε άνθρωπο και αλλάζει ηλικιακά, άρα δε μπορεί να οριστεί ως μονάδα μέτρησης.

Παράδειγμα Γ

Μπορούμε όμως να τα κάνουμε μονάδες μέτρησης και να ορίσουμε ότι 1 κουτουρού = 3,5 sec και 1 δάκτυλο = 4,18 cm, αν το συσχετίσουμε δηλαδή με μία ευρέως αποδεκτή μονάδα μέτρησης ... είναι η μαγική μαθηματική λέξη “θέτω”, που συνδέει την επιλεγμένη μονάδα μέτρησης από εμάς με την ευρέως αποδεκτή μονάδα μέτρησης. Κλασσικά παραδείγματα είναι όταν θέσαμε το ευρώ ή όταν μια χώρα αλλάζει το όνομα του νομίσματος της και καθορίζει την ισοτιμία του σε σχέση με το παλιό.

Επίσης, αν το μέτρο δεν εκφράζεται με μια κοινώς αποδεκτή μονάδα μέτρησης ή μπορεί να εκφράζεται με βάση το μέτρο ενός μεγέθους, που μπορεί μελλοντικά να αλλάξει ή δεν είναι ευρέως αποδεκτό, τότε μιλάμε για **σχετική τιμή**.

Το μέτρο μπορεί να λάβει **θετική** ή **αρνητική** τιμή. Δηλώνεται με αυτό το τρόπο η “φύση” της ποσότητας π.χ. στη Φυσική η παραγωγή έργου δύναμης έχει θετικό πρόσημο, ενώ η κατανάλωση αρνητικό, στη Χρηματοοικονομική το πλεόνασμα μιας οικονομικής ποσότητας προσημαίνεται θετικά, ενώ το έλλειμμα αρνητικά. Όταν μάλιστα μιλάμε για κατανάλωση έργου δύναμης δε βάζουμε πλέον το πρόσημο (που αποκλειστικό σκοπό είχε τη δήλωση της “φύσης” του ποσού), το ίδιο συμβαίνει και στην Χρηματοοικονομική, όταν μιλάμε για ελλείμματα αγνοούμε το πρόσημο και μάλιστα πολύ σωστά θεωρούμε τα πλεονάσματα σε αυτή την περίπτωση αρνητικά (για να δηλωθεί πάλι η αντίθετη “φύση” της ποσότητας).

Παράδειγμα Α

χρονικό διάστημα 10 sec σημαίνει 10 φορές μεγαλύτερο του sec (δευτερόλεπτο) είναι ουσιαστικά αυτός ο πολλαπλασιασμός $10 * sec$.

Παράδειγμα Β

χρονικό διάστημα 0,1 sec = $1/10 sec$ σημαίνει ότι είναι 10 φορές μικρότερο του sec δηλαδή πολλαπλασιασμός με το $1/10$ του sec ή διαίρεση με το 10.

Παράδειγμα Γ

$0,5 hour = 30 min = 1800 sec$, τα μεγέθη είναι ίσα αλλά έχουν διαφορετικές αριθμητικές τιμές. Αυτό είναι πολύ βολικό γιατί είναι δυνατή η αντικατάσταση ενός μεγέθους με μη επιθυμητή μονάδα μέτρησης με ένα ίσο του με επιθυμητή μονάδα μέτρησης.

Παράδειγμα Δ

$2 m = 20 dm = 200 cm = 2000 mm$, τα μεγέθη είναι ίσα αλλά διαφορετικές αριθμητικές τιμές 2, 20, 200, 2000. Παρόλο, που το deci = $1/10$, το centi = $1/100$, το milli = $1/1000$ δηλώνουν αριθμούς (προθέματα μονάδων μέτρησης) είναι τμήμα της αναφοράς δηλαδή της μονάδας μέτρησης.

Παράδειγμα Ε

Έστω G ο μισθός εργάτη στην Ελλάδα, U στην Αμερική, I στην Ιταλία, αν έχουμε επιλέξει ως μονάδα μέτρησης τον μισθό στην Ελλάδα τότε τα μέτρα (τιμές) $U = 2 G$,

$I = 1,5 G$, έχει επικρατήσει να τα ονομάζουμε σχετικές τιμές, ενώ αν ήταν σε δολάρια ή ευρώ θα τις θεωρούσαμε απλά τιμές.

Σχόλιο: Είναι ζήτημα καθαρά θεώρησης-σύμβασης και όχι ουσίας ο όρος «σχετική τιμή» και ίσως δεν πρέπει να διορθώνεται κάποιος, όταν λέει απλά τιμή, γιατί οι σχετικές τιμές μπορούν να θεωρηθούν απλά τιμές αλλά και οι “απόλυτες” τιμές να θεωρηθούν ως σχετικές. Ο παρατηρητής του φαινομένου είναι και ο άρχοντας του, αρκεί να βγάζει αληθή αποτελέσματα με τρόπο συνεπή.

4.2 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΜΕΓΕΘΩΝ

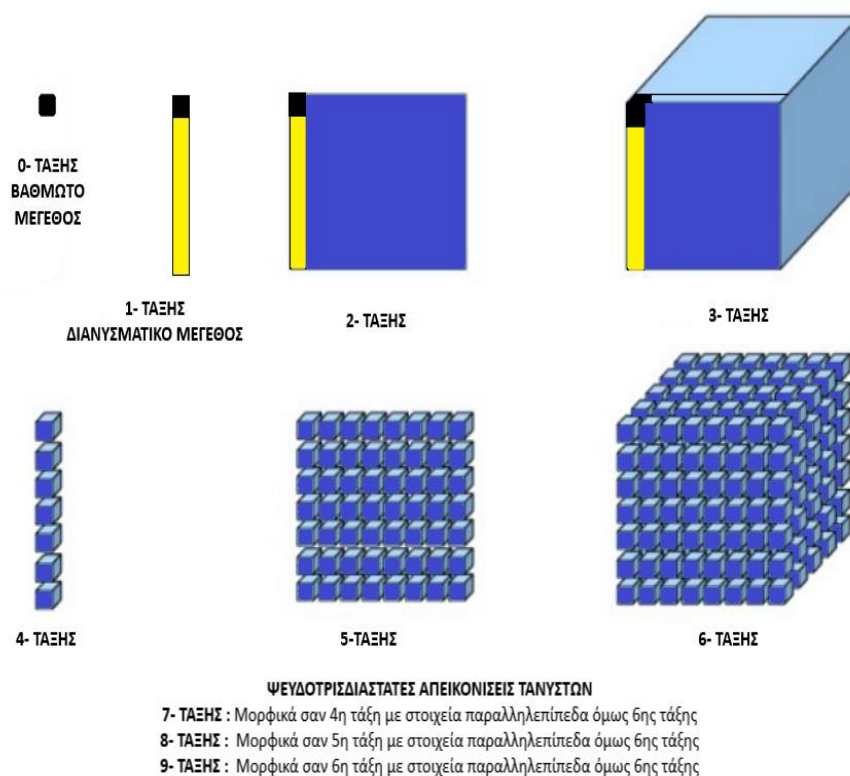
4.2.1 Ως προς την τάξη

Η “υπερκατηγορία” των μεγεθών είναι τα **τανυστικά** μεγέθη (tensor quantities) ή πιο απλά **τανυστές** (tensors) ή **υπερδιανυσματικά** ή **γενικευμένα διανυσματικά** μεγέθη και εκφράζουν σχέσεις μεταξύ διανυσματικών μεγεθών (ή μεταξύ άλλων τανυστών μικρότερης τάξης και τελικώς διανυσμάτων). Απεικονίζονται με χρήση πολυδιάστατων ορθογώνιων διατάξεων τιμών, γνωστοί και ως γενικευμένοι πίνακες (generalized matrix). Αν έχουμε δισδιάστατη διάταξη δηλαδή πίνακα (μήτρα, matrix) απαιτούνται δύο δείκτες για να ονοματιστεί και να διαχωριστεί ένα στοιχείο του πίνακα και είναι τανυστικό μέγεθος 2ης τάξης. Αν απαιτούνται 3 δείκτες (σκεφτείτε κάτι σαν παραλληλεπίπεδο ή κύβο, τον πίνακα να εκτείνεται και καθ' ύψος) τότε 3ης τάξης, αν απαιτούνται 4 δείκτες (αυτό αδυνατούμε να το φανταστούμε ως γεωμετρικό σχήμα, έναν υπερκύβο, ένα τεσσεράκτιο) 4ης τάξης κ.ο.κ.

Ένας απλός τρόπος απεικόνισης των τανυστών είναι αυτός της Εικόνας 1 ως ορθογώνιες διατάξεις. Φανταστείτε ότι έχουμε το μαύρο κουτάκι. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη θέση του σε μια δομή. Αν είναι μόνο του δε χρειάζεται καμία πληροφορία, είναι το ίδιο η δομή ολόκληρη (μηδενικής τάξης τανυστής). Αν είναι σε μια στήλη (ή γραμμή) με άλλα ίδιου σχήματος κουτάκια τότε χρειαζόμαστε έναν αριθμό για να μας δηλωθεί η θέση του (1ης τάξης τανυστής). Αν έχουμε πολλές στήλες από κουτάκια τη μια δίπλα στην άλλη, φτιάξουμε δηλαδή μια ορθογώνια διάταξη, τότε χρειαζόμαστε δυο αριθμούς για να βρούμε το μαύρο κουτάκι μας (2ης τάξης τανυστής). Αν δημιουργήσουμε ορθογώνιες διατάξεις, τη μια πίσω από την άλλη, τότε θα χρειαστούμε 3 αριθμούς για να το βρούμε (3ης τάξης τανυστής). Αν έχουμε φτιάξει τώρα μια στήλη (ή γραμμή) με ένα σύνολο από τις προηγούμενες

διατάξεις (3ης τάξης τανυστές), για να βρούμε το μαύρο κουτάκι μας θα χρειαστούμε τέσσερις αριθμούς, ο ένας θα δηλώνει πού βρίσκεται η τρισδιάστατη διάταξη και οι άλλοι τρεις τη θέση του κουτιού στην εν λόγω τρισδιάστατη διάταξη (4ης τάξης τανυστής) κ.ο.κ.

TANYSΤΕΣ (TENSORS)



Εικόνα 1:Τανυστές

Πηγή:Επεξεργασία του συγγραφέα

Αλλά αυτή η περιγραφή χάνει την πιο σημαντική ιδιότητα ενός τανυστή! Ένας τανυστής είναι μια μαθηματική οντότητα που ζει σε μια δομή και αλληλεπιδρά με άλλες μαθηματικές οντότητες. Εάν κάποιος μετασχηματίζει τις άλλες οντότητες στη δομή με κανονικό τρόπο, τότε ο τανυστής πρέπει να υπακούει σε σχετικό κανόνα μετασχηματισμού. Αυτή η "δυναμική" ιδιότητα ενός τανυστή είναι το κλειδί που τον διακρίνει από έναν απλό πίνακα. Είναι ένας ομαδικός παίκτης του οποίου οι αριθμητικές αξίες αλλάζουν μαζί με εκείνες των συμπαικτών του όταν εισάγεται μια μεταμόρφωση που τους επηρεάζει όλους.” (Steinke, 2017). Ο τανυστικός λογισμός αναπτύχθηκε γύρω στο 1890 από τον Γκρεγκόριο Ρίτσι-Κουρμπάστρο με την ονομασία απόλυτος διαφορικός λογισμός, και αρχικά παρουσιάστηκε από τον Ρίτσι

το 1892. Ήρθαν στο επιστημονικό προσκήνιο και έτυχαν ευρύτερης αποδοχής χάριν της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (είναι γραμμένη εξ ολοκλήρου στη “γλώσσα των τανυστών”) στα 1915, ως τανυστική ανάλυση.

Στη Φυσική και στους Μηχανικούς είναι χρήσιμοι γιατί παρέχουν ένα συνοπτικό και συμπαγές μαθηματικό πλαίσιο για την επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων, στην επιστήμη των υπολογιστών και στο machine learning δοκιμάζεται με επιτυχία σήμερα για τους ίδιους λόγους πολυπλοκότητας. Επίσης, θα συναντήσουμε τους τανυστές στους πιο απίθανους για πολλούς επιστημονικούς κλάδους, όπως η Ιατρική: “Η παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία αποσκοπεί στη μελέτη της εγκεφαλικής λειτουργικής συνδεσιμότητας, η οποία έχει εξαχθεί από ηλεκτροεγκεφαλογραφικά δεδομένα ... Προκειμένου να διερευνηθούν οι σχετιζόμενες με την κατηγοριοποίηση δυνατότητες της λειτουργικής συνδεσιμότητας ενδελεχώς, είναι απαραίτητη η χρήση εκλεπτυσμένων εργαλείων ως προς την αναπαράσταση αλλά και τη διαδικασία της κατηγοριοποίησης, όπως τανυστές (...)” ([Παπαγιαννάκη, 2017](#)). Να επισημάνουμε ότι οι τανυστές και η τανυστική ανάλυση δεν είναι ένα εύκολο κομμάτι των Μαθηματικών, χαρακτηριστικά: “Ο Αϊνστάιν είχε μάθει γι αυτούς, με μεγάλη δυσκολία, από τον μαθηματικό γεωμετρίας Μαρσέλ Γκροσμάν.” ([Pais, Abraham 2005](#))

Τα **διανυσματικά** μεγέθη (vector quantity) είναι και αυτά τανυστές 1ης τάξης, μπορούν να απεικονιστούν, όπως είδαμε στο παραπάνω σχήμα, ως πίνακας μιας στήλης ή πίνακας μιας γραμμής (μονοδιάστατη διάταξη). Στη μελέτη τους ακολουθείται ο διανυσματικός λογισμός (μέτρο, διεύθυνση ή φορέας, φορά και κατά περίπτωση σημείο εφαρμογής) και απεικονίζονται ως βέλη στο επίπεδο ή τον χώρο (διανύσματα ή ανύσματα = προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα). Περισσότερο ενδείκνυται για την μελέτη τους ο λογισμός των πινάκων, ωστόσο είναι λιγότερο κατανοητός από το ευρύ κοινό, σε σχέση με τα διανύσματα (στο επίπεδο ή στο χώρο) για τα οποία έχουμε ευκόλως κατανοητές γεωμετρικές απεικονίσεις.

Τα **μονόμετρα** ή **βαθμωτά** μεγέθη είναι και αυτά τανυστές, μηδενικής τάξης (έχουν μόνο τιμή) δηλαδή πίνακας-στοιχείο. Ο λογισμός που τηρείται είναι ο γνωστός σε όλους αλγεβρικός λογισμός.

Σχόλιο: Ουσιαστικά, όλα τα μεγέθη είναι τανυστές. Το ζήτημα και το ερώτημα είναι πόσο χρήσιμοι μπορούν να αποδειχθούν σε οικονομικά πεδία, αλλά καλό είναι να γνωρίζουμε την ύπαρξη τέτοιας θεώρησης και ταξινόμησης, αν μη τι άλλο, ως πηγή

έμπνευσης. Ισχύει πάντα η αρχή: Δεν πρέπει κάτι να γίνεται πολυπλοκότερο, αν δεν υπάρχει λόγος. Οι τανυστές παρόλο που είναι της μόδας θα πρέπει να χρησιμοποιούνται λόγω αναγκαιότητας γιατί ενδέχεται να εισάγουν περιττή πολυπλοκότητα.

4.2.2 Ως προς το είδος

Τα τυπικά μεγέθη είναι τα μονόμετρα (ή βαθμωτά), που όπως είπαμε και παραπάνω έχουν αριθμητική τιμή και μονάδα μέτρησης και ισχύουν γι αυτά οι κανόνες της Άλγεβρας. Θα δούμε και μερικές άλλες κατηγορίες μεγεθών, που μπορούν να θεωρηθούν βαθμωτά (άρα να εμπίπτουν στους κανόνες της Άλγεβρας) ή όχι.

Υπάρχουν και μεγέθη, που δεν έχουν μονάδα μέτρησης είναι όπως λέμε **αδιάστατα** (*grandeur sans dimension, grandeur de dimension un; quantity of dimension one, dimensionless quantity*) $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}\}[1] = \{\mathbf{X}\}$ (ιστορικά τηρούμε αυτή την ορολογία, γιατί κανονικά έχουν διάσταση [1], θα εξηγήσουμε παρακάτω στην έννοια της διάστασης). Η απόδοση i είναι παράδειγμα αδιάστατου μεγέθους δηλαδή μεγέθους, που έχει μόνο αριθμητική τιμή χωρίς μονάδα μέτρησης $i = \{i\} [1] = \{i\}$. Τονίζεται εδώ και θα τονιστεί αρκετές φορές προς εμπέδωση ότι το επιτόκιο r , δεν είναι αδιάστατο μέγεθος, αλλά έχει μονάδα μέτρησης και διάσταση όχι [1]. Η κακή όμως συνήθεια να αντιμετωπίζουμε τα μεγέθη ως αριθμητικές τιμές και μόνο, κατέληξε στο να έχουμε αυτή την παρανόηση και να ακολουθούμε όχι τον επιστημονικό λόγο αλλά τον αγοραίο λόγο. Στις Θετικές Επιστήμες κάτι ανάλογο είχαμε τους προηγούμενους αιώνες με τις έννοιες της μάζας και του βάρους και την αδιάκριτη χρήση τους και το βλέπουμε και σήμερα στην καθομιλουμένη, που η λέξη “βάρος” σημαίνει τη λέξη “μάζα”.

Συνήθως, τα αδιάστατα μεγέθη προκύπτουν ως λόγος (κλάσμα, πηλίκο) δύο ομοειδών μεγεθών και τέτοια στην Χρηματοοικονομική είναι πολλά π.χ. οι αριθμοδείκτες (το υπονοεί και η ονομασία τους), είναι γνωστά και ως **μεγέθη σύγκρισης**. Θεωρούνται βαθμωτά μεγέθη στον τρόπο χειρισμού τους, παρόλο που δεν έχουν μονάδα μέτρησης και προφανώς ισχύουν γι αυτά οι κανόνες της Άλγεβρας.

Υπάρχουν και τα **μεγέθη κατάταξης** (*grandeurs ordinales; ordinal quantities*) π.χ. οι χαρακτηρισμοί χρηματοπιστωτικών οίκων αξιολόγησης για την πιστοληπτική ικανότητα/ διαβάθμιση (credit rating) εταιρειών, χρεογράφων και χωρών. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα από τα γυμνασιακά μας χρόνια είναι η μέτρηση της

σκληρότητας των ορυκτών κατά Μος (Mohs), με το διαμάντι να έχει τιμή 10 (το μέγιστο) ως το πιο σκληρό υλικό. Δεν ισχύουν γι αυτά οι κανόνες της Άλγεβρας. Δεν είναι δυνατή η πρόσθεση (ή αφαίρεση) και ο πολλαπλασιασμός (ή διαίρεση), δε δίνουν κάποιο λογικό αποτέλεσμα, γιατί κατά βάση δε δηλώνουν αυτά τα μεγέθη το πόσο αλλά το πόστο. Αν στη Φυσική και στις οικονομικές επιστήμες το αποτέλεσμα μιας πράξης δεν επιδέχεται ερμηνεία (φυσική, οικονομική), τότε θεωρείται απλά ως ανοησία! Μαθηματικώς βέβαια, μια χαρά θα μπορούσατε να προσθέσετε π.χ. τις σκληρότητες δυο υλικών από τη στιγμή, που βλέπατε δυο αριθμούς, αλλά αλήθεια τι νόημα θα είχε; Στις οικονομικές επιστήμες όμως κατ' εξαίρεση, μπορούν σε αναρίθμητες άλλες περιπτώσεις να προστεθούν (ή να αφαιρεθούν) μεταξύ τους ποσότητες μεγεθών κατάταξης! καθώς και να εφεύρουμε κατά το δοκούν μεγέθη κατάταξης, με όποια αριθμητική κλίμακα επιθυμούμε. Αυτό γίνεται γιατί υπεισέρχεται ο Άνθρωπος και πρέπει να εφεύρουμε τρόπους για να ποσοτικοποιηθεί η προτίμησή του.

Παράδειγμα

Θέλετε να σφυγμομετρήσετε την συνολική προτίμηση των καταναλωτών σε ένα προϊόν X, μπορείτε να εφεύρετε το μέγεθος κατάταξης, που το ορίζετε “ατομική προτίμηση στο X”, να δημιουργήσετε μια κατάταξη επιλογών, στις οποίες μπορούν να αντιστοιχιστούν με μεγάλη αυθαιρεσία στο “όχι” το -2, στο “ίσως όχι” το -1, στο “έτσι και έτσι” το 0, στο “ίσως ναι” το +1, στο “ναι” το +2. Στη συνέχεια, ορίζετε ένα άλλο μέγεθος “συνολική προτίμηση στο X” και αθροίζετε την “ατομική προτίμηση στο X”. Και όντως, υπάρχουν αυτά τα μεγέθη και είναι γνωστά ως οριακή και συνολική χρησιμότητα. Από εκεί και πέρα, είναι άλλο θέμα το πόσο χρήσιμο και ουσιαστικό είναι αυτό, που κάνατε. Θα κριθεί από τους συνανθρώπους σας.

Σχόλιο: “Πάντων χρημάτων μέτρον ἐστὶν ἄνθρωπος...” (Πρωταγόρας)

Μια άλλη έννοια είναι η **κλίμακα τιμών μεγέθους** (échelle de valeurs, échelle de mesure ; quantity-value scale, measurement scale). Πρόκειται για σύνολο διατεταγμένων τιμών μεγεθών για δεδομένου είδους μέγεθος, που χρησιμοποιείται για κατάταξη, σύμφωνα με αριθμητική τιμή μεγεθών αυτού του συγκεκριμένου είδους. Παραδείγματα είναι, η κλίμακα θερμοκρασίας Κελσίου, η κλίμακα του χρόνου” (Δρης, 2022). Άλγεβρικά έχουν νόημα μόνο οι διαφορές (αφαιρέσεις) π.χ. στην κλίμακα του χρόνου το 2023 μ.Χ. είναι μετά 222 χρόνια από το 1821 μ.Χ.

(διαφέρουν κατά 222 έτη, 2023έτος – 1821έτος) αλλά το πηλίκο, το γινόμενο και το άθροισμα δεν έχουν καμία λογική ερμηνεία.

Τέλος, έχουμε και την έννοια που αναφέρεται ως **κατηγορία (είδος) μεγέθους** (nature de grandeur; kind of quantity). Χρησιμοποιείται για να χαρακτηρίσει συγκρίσιμα μεταξύ τους μεγέθη. Αυτός ο διαχωρισμός είναι λίγο-πολύ αυθαίρετος. π.χ. τα έσοδα, τα έξοδα, οι φόροι κ.ο.κ. είναι συγκρίσιμες ποσότητες, ενώ ο συντελεστής φορολόγησης και ο φόρος παρόλο που συνδέονται δεν είναι μεγέθη ίδιας κατηγορίας. Ένας απλός τρόπος για να διακρίνουμε ότι μεγέθη δεν ανήκουν στην ίδια κατηγορία είναι η μονάδα μέτρησης ή οι διαστάσεις τους.

Σε μια κατηγορία, επίσης, γίνεται διάκριση μεταξύ **γενικού** και **επιμέρους μεγεθών** π.χ. η δημόσια δαπάνη είναι γενικό μέγεθος, πληρωμή συντάξεων, επιδοτήσεις κ.ο.κ. επιμέρους μεγέθη. Αυτή η διάκριση υπάρχει ήδη στην Οικονομία στο γενικό πλαίσιο της και το “γενικό μέγεθος” καλείται μακροοικονομικό ή συνολικό και το “επιμέρους μέγεθος καλείται ατομικό ή μικροοικονομικό. Θα πρέπει να γίνει σαφές όμως ότι η διάκριση αυτή σε γενικό-επιμέρους μέγεθος έχει μια ευρύτερη έννοια και μπορεί να ισχύσει ακόμα και σε ατομικό επίπεδο π.χ. ο δείνα είχε ετήσια έξοδα (γενικό μέγεθος) και μηνιαία έξοδα (επιμέρους μεγέθη) ή να θεωρήσουμε μηνιαία έξοδα ως γενικό μέγεθος και τα μηνιαία έξοδα για σίτιση, στέγαση, συντήρηση και αγορά ειδών κλπ ως επιμέρους έξοδα ή οι μηνιαίες αγορές να θεωρηθούν ως γενικό και οι διάφορες αγορές ως επιμέρους. Η θεώρηση τι είναι γενικό και τι επιμέρους είναι αυθαίρετη και εξαρτώμενη από το μελετούμενο σύστημα και κυρίως το επιστημονικά συμπεφωνημένο.

4.2.3 Ως προς την έκταση

Τα μεγέθη μπορούν να ταξινομηθούν και σε δύο άλλες κατηγορίες: τα εντατικά και τα εκτατικά, αναλόγως με το εάν η τιμή τους είναι διαφορετική επειδή το σύστημα είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο.

Ένα **εντατικό μέγεθος** ενός συστήματος έχει τιμή ανεξάρτητη από το πόσο μεγάλο είναι το σύστημα.

Ένα **εκτατικό μέγεθος** ενός συστήματος έχει τιμή προσθετική, δηλαδή ίση με το άθροισμα (πρόσθεση) των τιμών του για τα υποσυστήματα.

Παράδειγμα

Ένας κατά κεφαλήν φόρος 1000\$ είναι εντατικό μέγεθος γιατί δεν παίζει ρόλο πόσοι είναι αυτοί, που τον επιβαρύνονται, αυτή η τιμή δεν αλλάζει, είτε αποφασίσουν να τον πληρώσουν λίγοι, είτε πολλοί. Αντίθετα, οι κρατικές εισροές από την επιβολή αυτού του φόρου είναι εκτατικό μέγεθος γιατί παίζει ρόλο πόσοι θα τον πληρώσουν και οι εισροές είναι το άθροισμα των κατά κεφαλήν φόρων.

4.2.4. Θεμελιώδη και παράγωγα μεγέθη

Θεμελιώδες μέγεθος ή βασικό μέγεθος ή μέγεθος αναφοράς (grandeur de base; base quantity) είναι το μέγεθος (ποσότητα) που ανήκει σε ένα υποσύνολο (το μικρότερο σε πλήθος μελών) του δεδομένου συστήματος μεγεθών και κανένα μέγεθος του υποσυνόλου αυτού δε δύναται να εκφραστεί ως συνάρτηση των άλλων μεγεθών του υποσυνόλου. Αυτό το υποσύνολο έχει τη δυνατότητα να παράξει όλες τις μονάδες μέτρησης για τα μεγέθη του συστήματος. Η επιλογή του υποσυστήματος των θεμελιωδών μεγεθών είναι αυθαίρετη (αρκεί να είναι ικανή να παράξει τα υπόλοιπα μεγέθη του συστήματος) και κοινώς αποδεκτή παγκόσμια και διαχρονικά π.χ. στις Φυσικές Επιστήμες θα μπορούσε αντί της μάζας να είχε επιλεγθεί η δύναμη ως θεμελιώδες μέγεθος ή ο όγκος αντί του μήκους (διόλου βολικό αλλά εφικτό).

Παράγωγο μέγεθος (grandeur dérivée; derived quantity) είναι το μέγεθος του συστήματος μεγεθών που ορίζεται με βάση τα θεμελιώδη μεγέθη του συστήματος. Είναι ουσιαστικά όλα τα μεγέθη του συστήματος εκτός από τα θεμελιώδη.

4.3 ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΡΑΞΕΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

Όλοι μας, στην καθημερινή ζωή και όχι μόνο στην επιστήμη, είμαστε εξοικειωμένοι με την έννοια του μέτρου (τιμής) και του μεγέθους. Παρόλα αυτά δυσκολευόμαστε, όταν έχουμε να κάνουμε πράξεις με μεγέθη εξαιτίας του ότι περιέχουν όχι μόνο αριθμητικές τιμές αλλά και μονάδες μέτρησης.

1ος κανόνας: Ισχύουν οι κανόνες της Άλγεβρας π.χ. στον πολλαπλασιασμό (ή στην διαίρεση) μεγεθών, αν X, Y δύο μεγέθη τότε:

$$XY = \{X\}[X] \{Y\}[Y] = \{X\}\{Y\} [X] [Y] = \{XY\}[XY]$$

$$X/Y = \{X\} [X] / (\{Y\} [Y]) = \{X/Y\} [X/Y]$$

2ος κανόνας: Μπορούμε να προσθέσουμε (ή να αφαιρέσουμε) και να συγκρίνουμε μόνο ομοειδή μεγέθη και εφόσον έχουμε κάνει ίδιες τις μονάδες μέτρησης τους δηλαδή είναι **σύμφωνες (coherent)**.

Παράδειγμα Α

3 μέρες + 2 δολάρια, δεν προστίθενται και σίγουρα έχει γίνει λογικό λάθος

Παράδειγμα Β

Κλασική ερώτηση- παγίδα από γυμνασιακά μας χρόνια: «ποιο είναι μεγαλύτερο το 1 m/sec ή το 1 m/sec² ». Όμοια: “ποιο είναι μεγαλύτερο 10% ετήσιο επιτόκιο ή 0,1 απόδοση;” Δε μπορεί να γίνει σύγκριση, είναι διαφορετικά μεγέθη.

Παράδειγμα Γ

7 δολάρια + 5 ευρώ, προστίθενται αρκεί τα δολάρια να γίνουν ευρώ ή τα ευρώ δολάρια δηλαδή να γίνουν σύμφωνες οι μονάδες μέτρησης.

Ουσιαστικά, είναι εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας

$$\alpha * \gamma + \beta * \gamma = (\alpha + \beta) * \gamma$$

7 δολάρια + 5,4 δολάρια = (7 + 5,4) δολάρια = 12,4 δολάρια δηλαδή εξαγωγή κοινού παράγοντα, τη μονάδα μέτρησης. Είναι άμεσα αντιληπτό ότι αν δεν υπάρχει τρόπος τα μεγέθη να εκφραστούν στην ίδια μονάδα μέτρησης (επειδή είναι ετεροειδή) δε μπορεί να γίνει η πρόσθεση γιατί δεν εξάγεται κοινός παράγοντας. Γι αυτό και 7 πορτοκάλια + 5 μήλα δεν προστίθενται ...εκτός αν θεωρηθούν φρούτα! οπότε εξάγεται κοινός παράγοντας και απαντάμε 7 φρούτα + 5 φρούτα = (7 + 5) φρούτα = 12 φρούτα. Στις μονάδες μέτρησης φυσικών και οικονομικών μεγεθών δε μπορούμε να κάνουμε όμως τέτοια νοητικά τρικ γιατί όπως θα δούμε παρακάτω έχουν διαφορετικές διαστάσεις. Τα τρικ πίνουν μόνο σε αθροίσεις και διαφορές “οντοτήτων”, που έτσι κι αλλιώς θεωρούνται αδιάστατες, όπως θα δούμε.

3ος κανόνας: Μπορούμε να αντικαθίσταμε μια ποσότητα (μέγεθος) με μία ίση ποσότητα (μέγεθος). Προφανώς τα μεγέθη πρέπει να είναι ομοειδή. Εφαρμόζεται στη διαδικασία μετατροπής των μονάδων μέτρησης για να γίνουν σύμφωνες και να μπορέσουμε να εκτελέσουμε τις πράξεις με τους κανόνες της Άλγεβρας , που ισχύουν όπως ακριβώς και με τους αριθμούς. Δεν είναι τίποτε άλλο από διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς (ή διαιρέσεις) για να πετύχουμε τη μετατροπή.

Ισχύει επίσης, ο εξής προφανής κανόνας, αν χ , ψ είναι μονάδες μέτρησης και $\chi = c \psi$ ότι στη θέση του ψ σε μια σχέση μπορώ χωρίς σκέψη να αντικαταστήσω χ/c δηλαδή τον αντίστροφο του c . Αυτό κατά κόρον ξεχνιέται από την πλειονότητα π.χ. 1ίντσα = 2,54cm περίπου και προσπαθούν να βρουν το 1cm πόσες ίντσες είναι με άσκοπη χρήση αριθμομηχανής ή από πίνακες, αντί κατευθείαν να αντικαταστήσουν στη σχέση $1/2,54$. Το τραγικό αυτό το βλέπεις στις ισοτιμίες επίσης, βρίσκει κάποιος κάπου την ισοτιμία π.χ. 1ευρώ=1,08 δολάρια και μετά ψάχνει μανιωδώς το 1 δολάριο πόσα ευρώ είναι. Είναι ορθότερο, να αντικαθιστάς τον αντίστροφο σε όλες τις περιπτώσεις, που η διαίρεση δίνει αριθμό με άπειρα μη μηδενικά δεκαδικά ψηφία γιατί μειώνονται τα σφάλματα προσέγγισης π.χ. $1/1,08=0,925925925\dots=0,(925)$ είναι ένας περιοδικός (επαναλαμβανόμενος) δεκαδικός αριθμός (με 925 περίοδο, επανάληψη, repetend), που αν υπολογιστεί εκ των προτέρων και όχι εντός της εξίσωσης θα παραχθεί σίγουρα μεγαλύτερο προσεγγιστικό σφάλμα. Πολύ συχνά, έχουμε διαιρέτες πολλαπλάσια του 3 και τη δύσκολη απόφαση μέχρι πόσα δεκαδικά θα “κρατήσουμε” (στις μετατροπές συνήθως του χρόνου). Αν αντικαθιστάμε με τον αντίστροφο, δε χρειάζεται τέτοιου είδους ενδιάμεση απόφαση.

Παράδειγμα Α

$$3 \text{ hour} = 3 * (60 \text{ min}) = 180 \text{ min} = 180 * (60 \text{ sec}) = 10800 \text{ sec}$$

Παράδειγμα Β

3 ώρες και 50 λεπτά και 40 δευτερόλεπτα δηλαδή

$$3 \text{ h} + 50 \text{ min} + 40 \text{ sec} = 3 * (60 \text{ min}) + 50 * (60 \text{ sec}) + 40 \text{ sec} =$$

$$180 \text{ min} + 3000 \text{ sec} + 40 \text{ sec} = 180 * (60 \text{ sec}) + 3040 \text{ sec} =$$

$$10800 \text{ sec} + 3040 \text{ sec} = 11140 \text{ sec}, \text{ αν τα θέλουμε σε δευτερόλεπτα}$$

και $11140 * (1/60 \text{ min}) = 185,67 \text{ min}$, αν τα θέλαμε σε λεπτά και επί $1/60$, αν τα θέλουμε σε ώρες

Παράδειγμα Γ

$$3 \text{ εξάμηνα} / 4 + 0,25 \text{ τρίμηνα} + 0,5 \text{ έτη} + 75 \text{ μέρες} =$$

$$3 * 6 \text{ month} / 4 + 0,25 * 3 \text{ month} + 0,5 * 12 \text{ month} + 75 * (1 / 30) \text{ month} =$$

$$4,5 \text{ month} + 0,75 \text{ month} + 6 \text{ month} + 2,5 \text{ month} = 13,75 \text{ month}, \text{ σε αυτό το}$$

παράδειγμα αν η μέρα είχε αντικατασταθεί αντί για $1 / 30$ (ο αντίστροφος) ως

0,033 του μήνα. χρησιμοποιώντας αριθμομηχανή για να μετατραπεί ο μήνας σε μέρες, θα είχαμε τελευταίο όρο της παράστασης 2,475 αντί για το ορθό 2,5 και συνεπώς σφάλμα.

Παράδειγμα Δ

Με δοθείσες ισοτιμίες $1\text{€} = 1,1\text{\$}$ και $1\text{zł} = 0,2\text{\$}$, η παρακάτω παράσταση μέτρων υπολογίζεται εύκολα και γρήγορα:

$$50\text{\$} + 30\text{€} + 60\text{zł} + 20\text{\$} = 50\text{\$} + 30 * 1,1\text{\$} + 60 * 0,2\text{\$} + 20\text{\$} =$$

$$(50 + 33 + 12 + 20)\text{\$} = 115\text{\$}$$

Παράδειγμα Ε

Έστω το συμμιγές μέγεθος 365 ημέρες, 6 ώρες, 9 λεπτά, 9 δευτερόλεπτα (αστρικό έτος) και θέλουμε να εκφραστεί σε μέρες, απλά αθροίζουμε τα επιμέρους μέτρα, αφού τα μετατρέψουμε όλα σε μέρες (d), δηλαδή

$$365\text{d} + 6\text{h} + 9\text{min} + 9\text{s} =$$

$$365\text{d} + 6 * (1/24) * \text{d} + 9 * (1/24) * (1/60)\text{d} + 9 * (1/24) * (1/60) * (1/60)\text{d} =$$

$$365,256363051\text{d}$$

Σχόλιο: Το όλο ζήτημα είναι να γίνουν οι μονάδες σύμφωνες (coherent), από το σημείο αυτό και πέρα η επίλυση είναι απλές πράξεις. Στα παραδείγματα που μόλις είδαμε, ήταν απλές προσθέσεις.

4.4 ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΜΕΓΕΘΟΥΣ

4.4.1 Η έννοια της διάστασης μεγέθους

Ο σπουδαίος Γάλλος μαθηματικός και φυσικός Jean Batist Joseph Fourier, πιο γνωστός από τις “σειρές Fourier”, εισήγαγε την έννοια της “διαστάσεως” το 1822 για τα μεγέθη στη μελέτη του στη Θερμοδυναμική “Theorie analytique de la chaleur”. Η έννοια της διαστάσεως επεκτάθηκε και στα υπόλοιπα φυσικά μεγέθη και τελικά υιοθετήθηκε από όλες τις θετικές επιστήμες και τους μηχανικούς. Όπως έχουμε πει πριν, τα μεγέθη μπορούν να οργανωθούν κατά σύμβαση σε ένα σύστημα με βάση λίγα θεμελιώδη μεγέθη, το καθένα από τα οποία θεωρείται ότι έχει τη δική του ομώνυμη διάσταση. Για παράδειγμα, στο υποσύστημα της Φυσικής, την Μηχανική

υπάρχουν τρία βασικά μεγέθη, Χρόνος (t) με διάσταση [Χρόνος] ή συμβολικά [T] , Μήκος (l) με διάσταση [Μήκος] ή συμβολικά [L] και Μάζα (m) με διάσταση [Μάζα] ή συμβολικά [M]. Έτσι λοιπόν τα παράγωγα μεγέθη έχουν διαστάσεις π.χ. εμβαδόν $[L]^2$, όγκος $[L]^3$, ταχύτητα $[L] [T]^{-1}$, η δύναμη $[M] [L] [T]^{-2}$.

Κάλλιστα στην Χρηματοοικονομική, μπορούμε να θεωρήσουμε θεμελιώδη μεγέθη το Χρήμα (να συμφωνηθεί ότι συμβολίζεται με κεφαλαίο X, με διάσταση [Χρήμα] ή συμβολικά [X] και το άλλο προφανώς μέγεθος θα είναι ο Χρόνος με τα σύμβολα και την διάσταση, που μόλις πριν αναφέρθηκαν.

Η εισαγωγή της έννοιας της διάστασης τακτοποιεί τα μεγέθη και τα κάνει ευδιάκριτα ώστε να μην συγχέονται μεταξύ τους. Ομοειδή μεγέθη έχουν τις ίδιες διαστάσεις και μπορούν να συγκριθούν άμεσα μεταξύ τους, σε ίδιες μονάδες, ακόμη και αν αρχικά εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης, όπως ήδη έχουμε πει. Αντίθετα, μεγέθη διαφορετικών διαστάσεων (ετεροειδή) δε μπορούν να εκφραστούν με ίδιες μονάδες και επομένως να συγκριθούν με έννοια μεγαλύτερου ή μικρότερου. Με τη βοήθεια της διαστατικής ανάλυσης, συσχετίζονται μεταξύ τους διαφορετικά μεγέθη (ποσότητες), ταυτοποιώντας τα θεμελιώδη μεγέθη. Η διαστατική ανάλυση εφαρμόζεται ευρέως στις Θετικές Επιστήμες και τη Μηχανική ως τεχνική μετατροπής μονάδων μέτρησης με κανόνες της Άλγεβρας, όπως είδαμε πρωτύτερα.

Έχουμε αναφέρει πριν, ότι υπάρχουν και αδιάστατα μεγέθη (έτσι , αναφέρονται ιστορικά και το έχουμε διατηρήσει) κανονικά η διάστασή τους είναι το [1] και υπάρχει αυτή εξ' ορισμού και θεωρείται θεμελιώδης σε όλα τα συστήματα. Και είναι [1] γιατί όλοι οι εκθέτες των παραγόντων που αντιστοιχούν στα θεμελιώδη μεγέθη στη σχέση για τη διάστασή του, είναι μηδέν. Τα μεγέθη αυτά προκύπτουν είτε από σύγκριση (λόγος, πηλίκο) ομοειδών μεγεθών, είτε δε δύναται να εκφραστούν σε σχέση με τα θεμελιώδη ή τα θεωρήσαμε εμείς αυθαίρετα έτσι. Επί παραδείγματι, το πλήθος οντοτήτων, όπως το πλήθος των κατοίκων ενός τόπου, το πλήθος των ανέργων ενός τόπου, το πλήθος μηχανημάτων σε μια επιχείρηση κτλ. Ο συμβολισμός [1] είναι νοητός και δε γράφεται ποτέ σε αυτά τα μεγέθη π.χ. δε θα γράψουμε για το πληθυσμό της τάδε χώρας 10 000 000 [1].

4.4.2 Εξισώσεις μεγεθών έναντι αριθμητικών τιμών

Μία **εξίσωση μεγεθών** (équation aux grandeurs; quantity equation) είναι μαθηματική σχέση μεταξύ ποσοτήτων (μεγεθών). Αυτές ισχύουν ανεξάρτητα από τις μονάδες μέτρησης. Όταν αντικαθιστάμε τα μέτρα των μεγεθών, τονίζουμε ότι γράφεται όχι μόνο η αριθμητική τιμή τους αλλά και η μονάδα μέτρησης δίπλα στον αριθμό, εκτός βέβαια αν είναι αδιάστατο μέγεθος.

Οποιαδήποτε εξίσωση, ισότητα (ή ανίσωση, ανισότητα) με λογικό νόημα πρέπει να έχει ίδιες διαστάσεις στο αριστερό και δεξί μέλος (αμφοτέρωθεν), η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **διαστατική ομοιογένεια**. Ο έλεγχος της διαστατικής ομοιογένειας το λεγόμενο *sanity check* είναι μια κοινή εφαρμογή της διαστατικής ανάλυσης, που εξυπηρετεί στον έλεγχο ορθότητας των παραγόμενων υπολογισμών και εξισώσεων, το κάνουμε σχεδόν αυθόρμητα και ας μην γνωρίζουμε την επιστημονική ορολογία. Επίσης, χρησιμεύει ως οδηγός και περιοριστής των παραγόμενων εξισώσεων, που περιγράφουν ένα σύστημα ή φαινόμενο, εάν δεν χρησιμοποιούμε διαστάσεις χρειαζόμαστε πολλές εξισώσεις αριθμητικών τιμών, όπως θα δούμε παρακάτω στην περίπτωση του τοκισμού-ανατοκισμού και συναφών τους. Οι φυσικοί νόμοι πάντα στη γενική μορφή γράφονται ως εξισώσεις μεγεθών.

Μια **εξίσωση αριθμητικών τιμών** (équation aux valeurs numériques; numerical value equation, numerical quantity value equation) είναι μαθηματική σχέση μεταξύ αριθμητικών τιμών μεγεθών (ποσοτήτων), που στηρίζεται σε δεδομένη εξίσωση μεγεθών και καθορισμένες μονάδες μέτρησης.

Γενικά, αποφεύγουμε εξισώσεις αριθμητικών τιμών γιατί για την περιγραφή ενός φαινομένου ή συστήματος προκύπτει μεγάλος αριθμός εξισώσεων, εξαιτίας των ποικίλων μονάδων μέτρησης. Επίσης, θα πρέπει να μετατρέψουμε κατάλληλα τις μονάδες μέτρησης, πριν τις εισάγουμε σε δεδομένη εξίσωση αριθμητικών τιμών. Είναι χρήσιμες προφανώς (γιατί λαμβάνονται έτοιμες από κάποια πηγή) για όσους έχουν σχεδόν μηδενική παιδεία (επιπέδου πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης) ή για γρήγορους υπολογισμούς, αν χρησιμοποιούνται οι ίδιες μονάδες μέτρησης διαρκώς.

4.5 ΠΡΟΘΕΜΑΤΑ & ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ ΜΟΝΑΔΩΝ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

4.5.1 Συμβολισμός μονάδων μέτρησης

Ακόμα και στις θετικές επιστήμες δεν έχουν καθιερωθεί διεθνώς αποδεκτοί συμβολισμοί για κάποιες από τις μονάδες μέτρησης, έτσι ώστε να μιλάμε παγκόσμια την ίδια επιστημονική γλώσσα. Όσο και να φαίνεται παράξενο, ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο χρόνος, ενώ έχουμε τους υποχρεωτικούς συμβολισμούς: για το δευτερόλεπτο το s, για το λεπτό το min, για την ώρα το h, για τη μέρα το d, δεν έχουν θεσπιστεί επίσημα συμβολισμοί για την εβδομάδα (*week*), το μήνα (*month*), το έτος (*year*). Είναι και κάπως λογικό για το μήνα και το έτος, αφού οι μήνες και τα έτη έχουν ποικιλία διάρκειας και είναι ανέφικτη ουσιαστικά από πρακτικής απόψεως η λήψη του αστρικού έτους (365 ημέρες και 6 ώρες και 9 λεπτά και 9 δευτερόλεπτα), ως μονάδα μέτρησης του χρόνου για φαινόμενα με συνηθισμένες διάρκειες (γιατί για αστρονομικά γεγονότα, γεωλογικές περιόδους, εξέλιξη άβιων και έμβιων και μέτρηση αποστάσεων μέσω χρήσης της ταχύτητας του φωτός, ότι και να θεωρηθεί ως έτος είτε 360, είτε 365, είτε 366, είτε 365,256363051 δεν έχει σημασία). Δεν είμασταν τυχεροί ώστε η περιφορά της Γης γύρω από τον Ήλιο, να είναι σχεδόν περίπου στις 365 ημέρες ή 366 ημέρες, γι αυτό το λόγο για να έχουμε σφάλμα μόνο 1 μέρα κάθε 3300 έτη, εισάγαμε τον εξής κανόνα: οι μέρες του ετήσιου χρονολογίου μας είναι 365, αλλά έχουμε 366 (δίσεκτο έτος), αν η χρονολογία διαιρείται τέλεια από το 4, αν τη διαιρεί όμως το 100 τέλεια τότε δεν είναι δίσεκτο, αν όμως τη διαιρεί τέλεια το 400 είναι. Αυτό το έτος έχει επικρατήσει γενικά να ονομάζεται **πολιτικό έτος** και να λαμβάνεται στους υπολογισμούς **365 ή 366 ημέρες**, θα μπορούσαμε διεθνώς να το συμβολίσουμε ως “y” ή “yr” ή ολογράφως “year”. Όμως και οι μήνες δεν έχουν ακέραιο πλήθος σε μια πλήρη περιφορά της Γης, οπότε έχουμε εφεύρει θεωρώντας τους μήνες ότι έχουν διάρκεια ο καθένας 30 μέρες, το **εμπορικό (ή μεικτό) έτος** $12 * 30 \text{ d} = 360 \text{ d}$, αυτό θα μπορούσαμε να το συμβολίζουμε με “cy” ή “cyr” ή “cyear” δηλαδή από το αρχικό της λέξης commercial. Δεν πρόκειται να υπάρξει καμία σύγχυση με το centi (c) πρόθεμα, γιατί προθέματα για χρονικές μονάδες μέτρησης εκτός του second (δευτερολέπτου) δεν είναι διεθνώς αποδεκτές.

Θα ήταν εφικτό και καθόλου περίπλοκο να υιοθετηθούν λοιπόν στην Χρηματοοικονομική οι μονάδες sec (s) , min, hour (h), day (d) , week (w), month (mon) για μήνα 30 ημερών, year (y), χωρίς τον πληθυντικό τους, όπως γίνεται και για

τα φυσικά μεγέθη, δημιουργώντας έτσι μια κοινή γλώσσα για διεθνή συνεννόηση. Για τις μετατροπές χρηματικών ποσών, ήδη υπάρχουν οι ισοτιμίες, εύκολα προσβάσιμες με τους κατάλληλους συμβολισμούς των νομισμάτων, αλλά δεν είναι ανάγκη να θυμόμαστε τα σύμβολα, τα πρώτα γράμματα αρκούν για ομόγλωσσους.

4.5.2 Προθέματα μονάδων μέτρησης

Όπως ήδη αναφέρθηκε στην ιστορική αναδρομή, για τα προθέματα μονάδων μέτρησης η αφετηρία τους είναι η γαλλική επανάσταση, κατά την οποία προτάθηκε η χρήση αποκλειστικά του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης προς αντικατάσταση του τότε δωδεκαδικού. Θα δείξουμε στο παράδειγμα (α) παρακάτω ότι η χρήση προθεμάτων είναι σχεδόν αυθόρμητη και αυτό αποτελεί ένα μεγάλο πλεονέκτημα του μετρικού συστήματος. Δε θα αναφέρουμε εδώ, όλα τα προθέματα αλλά αυτά που παρουσιάζουν την μεγαλύτερη χρηστική αξία για τα περισσότερα οικονομικά φαινόμενα και δη για το χρήμα. Συνήθως, οι πιο μικρές ποσότητες χρήματος είναι της τάξεως των χιλιοστών, οι οποίες στρογγυλοποιούνται σε εκατοστά και οι μεγαλύτερες ποσότητες είναι τρισεκατομμύρια. Δεν περιλαμβάνονται, στο παρακάτω πίνακα, το d- (deci-, δέκατο-), το da- (deca-, δέκα-) και το h- (hecto-, εκατό-), γιατί δε χρησιμοποιούνται ιδιαίτερα.

Πολλαπλασιαστής	Δύναμη	Name	Όνομα	Σύμβολο
1 000 000 000 000 000	10^{15}	peta-	πετα-	P
1 000 000 000 000	10^{12}	tera-	τερα-	T
1 000 000 000	10^9	giga-	γιγα-	G
1 000 000	10^6	mega-	μεγα-	M
1 000	10^3	kilo-	χιλιο-, κιλο-	k
0,01	10^{-2}	centi-	εκατοστο-, σεντι-	c
0,001	10^{-3}	milli-	χιλιοστό-, μιλι-	m

Πίνακας 1: Προθέματα Μονάδων Μέτρησης

Πηγή: συγγραφέας

“Καλό είναι να αναφερθεί ότι στις αγγλόφωνες χώρες, γενικώς σήμερα, το δισεκατομμύριο (billion) θεωρείται ότι είναι το 10^9 και το τρισεκατομμύριο (trillion)

10^{12} . Παρόλα αυτά σε μερικά κείμενα κάποιος μπορεί να θεωρούν ότι το billion σημαίνει 10^{12} και το trillion 10^{18} . Χρειάζεται προσοχή.” ([Δρης, 2022](#))

Τα παραπάνω προθέματα είναι ουσιαστικά οι λέξεις “χίλια” k, “εκατομμύριο” M, “δισεκατομμύριο” G, “τρισεκατομμύριο” T. Με το σημαντικό πλεονέκτημα ότι είναι παγκοσμίως αναγνωρίσιμες και εύκολες στην εκφορά του λόγου, ακόμα και σε ομόγλωσσους π.χ. “επτά τερα-δολάρια” αντί “επτά τρισεκατομμύρια δολάρια”. Θα μπορούσαμε να έχουμε δυνάμεις του δέκα, αντί για προθέματα, αλλά αυτό δε θα ήταν καθόλου δημοφιλές στην πλειονότητα και επιπλέον είναι πιο εύκολο π.χ. να πεις “επτά τερα-δολάρια” από “επτά επί δέκα στην δωδέκατη δολάρια”. Κάτι τελευταίο, δεν επιτρέπεται πρόθεμα στο πρόθεμα σύμφωνα με τα διεθνή πρότυπα π.χ. kκ\$ δηλαδή κίλο-κίλο-δολάρια. Στην συνέχεια της ενότητας αυτής παρατίθενται παραδείγματα που σκοπό έχουν να τονίσουν την χρηστική αξία των προθεμάτων των μονάδων μέτρησης..

Παράδειγμα Α

Έστω ότι είστε ένας κρυψίνους και παλιομοδίτης μεγαλοεπενδυτής τύπου Σκρουτζ , σας ενημέρωσαν τηλεφωνικά ότι εκτιμούν στο τέλος του έτους ότι θα εισπράξετε από τις διάφορες επενδύσεις σας, τα εξής κέρδη, και τα γράψατε με τον κλασικό τρόπο: 110000\$, 1000000€, 1100000\$, 11000000zł, 1110000\$, 900000€, 222000\$ και 3330000zł. Πόσα συνολικά δολάρια εκτιμάτε ότι θα εισπράξετε; (ισοτιμίες 1€ = 1,1\$ και 1zł = 0,2\$)

Το πρώτο πράγμα, που κακώς κάναμε είναι που γράψαμε τα ποσά σε αυτή τη μορφή. Είμαστε σίγουροι ότι τα γράψαμε σωστά; Ελλοχεύει διαρκώς ο κίνδυνος να παραλείψουμε ή να βάλουμε ένα μηδενικό κάπου παραπάνω. Δεν έχουμε ξεκάθαρη, ευανάγνωστη εποπτεία των επιμέρους ποσών και ποια επένδυση θα μας επιφέρει τα μεγαλύτερα κέρδη, πρέπει να τα βάλουμε σε κάθετη διάταξη και προσεκτικά να χωρίσουμε τριάδες ψηφίων, αφού πρώτα μετατρέψουμε τα ευρώ και τα ζουότι σε δολάρια.

Το καλύτερο, που είχαμε να κάνουμε ήταν, όλα να ήταν εκφρασμένα εξαρχής σε εκατομμύρια ή χιλιάδες δολάρια, ευρώ και ζουότι π.χ. M\$ “μεγα-δολάρια” ή σε “κίλο-δολάρια” k\$, δηλ. να κάνουμε χρήση προθεμάτων. Η μέθοδος με προθέματα είναι τόσο εύκολη και προφανής, που αυθόρμητα την κάνουμε και ας μην γνωρίζουμε την ορολογία! σκεπτόμενοι απλώς “θα τα γράψω σε εκατομμύρια” δηλαδή σε “μέγα”,

με τη σημαντική όμως διαφορά ότι μπορούμε παγκόσμια να επικοινωνήσουμε αυτή τη σκέψη μας και σε αλλοεθνείς, χρησιμοποιώντας το διεθνές πρόθεμα “μέγα”. Επίσης, προσθέτουμε μεγέθη και όχι αριθμητικές τιμές και κάνουμε μετατροπές μονάδων πάνω στη εξίσωση μεγεθών με απλή αντικατάσταση. Στο παράδειγμα λοιπόν :

$$0,11\text{M}\$ + 1\text{M}\text{€} + 1,1\text{M}\$ + 11\text{Msl} + 1,11\text{M}\$ + 0,9\text{M}\text{€} + 0,222\text{M}\$ + 3,33\text{Msl} = 0,11\text{M}\$ + 1\text{M} (1,1\$) + 1,1\text{M}\$ + 11\text{M} (0,2\$) + 1,11\text{M}\$ + 0,9\text{M} (1,1\$) + 0,222\text{M}\$ + 3,33\text{M} (0,2\$) =$$

$$(0,11 + 1,1 + 1,1 + 2,2 + 1,11 + 0,99 + 0,222 + 0,666)\text{M}\$ = 7,498\text{M}\$$$

ή 7,498 εκατομμύρια δολάρια και μάλιστα βλέπουμε καθαρά και ποια είναι τα μεγαλύτερα και μικρότερα από τα χρηματικά ποσά. Πέρα των πλεονεκτημάτων, που αναφέραμε είναι και πιο συμπαγής (λιγότερος χώρος), με την αργκό των ενασχολούμενων με υπολογιστές “ζιπαρισμένα” (εικόνα 2).

**Μέτρα σε πλήρη ανάπτυξη
&**

επεξεργασία αριθμητικών τιμών

Δοθέντα ποσά: 110000\$, 1000000€, 1100000\$, 11000000sl, 1110000\$, 900000€, 222000\$ και 3330000sl.

Μετατροπή σε δολάρια:

1000000*1,1 = 1100000 11000000*0,2 = 2200000 900000*1,1= 990000 και
3330000*0,2 = 666000

Κάθετη πρόσθεση:

110 000
1 100 000
1 100 000
2 200 000
1 110 000
990 000
222 000
+ 666 000

7 498 000

7 498 000 δολάρια

Παράσταση μεγεθών
&
χρήση προθεμάτων

$$0,11\text{M}\$ + 1\text{M}\text{€} + 1,1\text{M}\$ + 11\text{Msl} + 1,11\text{M}\$ + 0,9\text{M}\text{€} + 0,222\text{M}\$ + 3,33\text{Msl} =$$

$$0,11\text{M}\$ + 1\text{M} (1,1\$) + 1,1\text{M}\$ + 11\text{M} (0,2\$) + 1,11\text{M}\$ + 0,9\text{M} (1,1\$) + 0,222\text{M}\$ + 3,33\text{M} (0,2\$) =$$

$$(0,11 + 1,1 + 1,1 + 2,2 + 1,11 + 0,99 + 0,222 + 0,666)\text{M}\$ = 7,498\text{M}\$ = 7\,498\,000\ \$$$

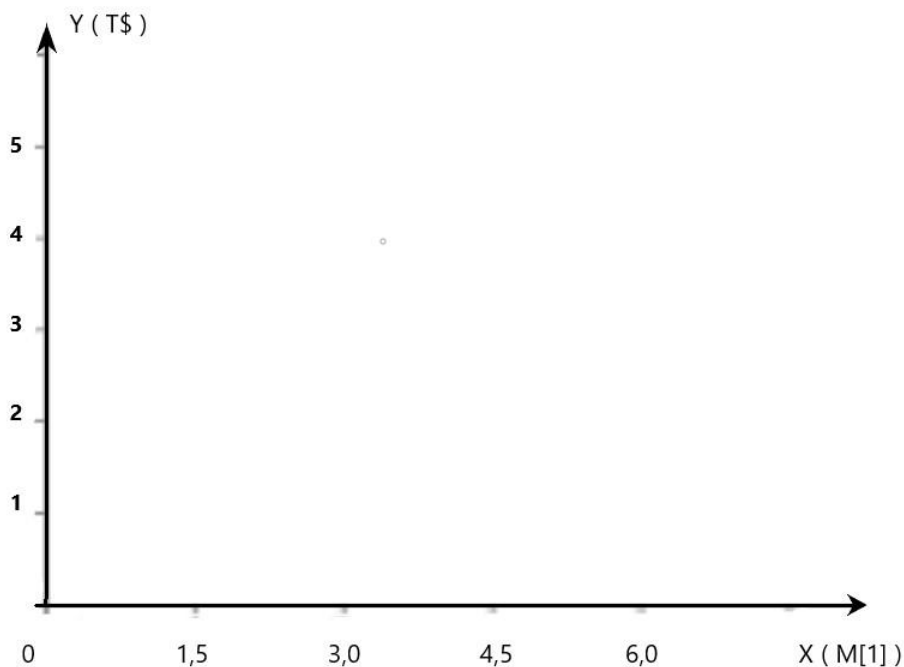
Αν τα ποσά ήταν σε δισεκατομμύρια ή τρισεκατομμύρια και μεγαλύτερο το πλήθος τους, τότε η πρώτη μέθοδος θα ήταν ακόμα πιο χρονοβόρα, εκτενέστερη και με αρκετή πιθανότητα σφάλματος κατά τον υπολογισμό.

Εικόνα 2 : Αριθμητική παράσταση έναντι παράστασης μεγεθών με χρήση προθεμάτων μονάδων μέτρησης

Πηγή: Συγγραφέας

Παράδειγμα Β

Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια γραφική παράσταση σε καρτεσιανό σύστημα, στον κάθετο άξονα πρέπει να εμφανίζονται οι τιμές 1 000 000 000 000 \$, 2 000 000 000 000 \$ κ.ο.κ. στο μέγεθος Y και στον οριζόντιο άξονα οι τιμές 1 500 000 , 3 000 000 , 4 500 000 , 6 000 000 για ένα πλήθος X οντοτήτων (αδιάστατο μέγεθος). Ο βέλτιστος τρόπος βαθμονόμησης είναι δίπλα στο σύμβολο του μεγέθους Y να βάλουμε παρένθεση σε $T\$$ δηλαδή να γραφεί $Y (T\$)$ προς το τέλος του κάθετου άξονα και να εμφανίζονται στον άξονα μόνο οι αριθμοί 0, 1, 2, κ.ο.κ. Στον οριζόντιο άξονα όμοια, οι αριθμοί 1,5, 3,0, 4,5 κ.ο.κ. και προς το τέλος του οριζόντιου άξονα το σύμβολο του X και δίπλα σε παρένθεση το (M) , αν είμαστε απόλυτα τυπικοί επειδή είναι πρόθεμα, οπότε πρέπει να συνοδεύεται από μονάδα μέτρησης ή διάσταση, $(M[1])$. (εικόνα 3)



Εικόνα 3: Χρήση προθεμάτων σε γραφικές παραστάσεις, Πηγή: Συγγραφέας

Παράδειγμα Γ

Το χρηματιστήριο κλείνει σε λίγα λεπτά και κατακλύζεστε από εντολές, που σας δίδουν οι πελάτες σας και αφορούν χρηματικά ποσά, που πρέπει να διαθέσετε για να τους αγοράσετε διάφορες μετοχές. Οι πελάτες σας είναι μεγαλοεπενδυτές Γάλλοι, Άγγλοι, Πορτογάλοι, Κινέζοι, Γιαπωνέζοι κλπ., η επικοινωνία προφορική και είστε μόνος, κάποιος δεν ξέρουν ούτε στοιχειώδη αγγλικά (μόνο τα ψηφία και το “point”), αλλά όλοι τους γνωρίζουν το μετρικό σύστημα. Τι σκέφτεστε να κάνετε για να έχετε τάχιστα και με μικρή πιθανότητα σφάλματος επικοινωνία;

Παράδειγμα Δ

Έστω ότι μας έχουν δοθεί αυτά τα χρηματικά ποσά “ζιπαρισμένα” με διαφορετικά προθέματα 2M\$, 300k\$, 80k€, 1,5M€, 6Mzl με τις ισοτιμίες 1€ = 1,1\$ και 1zl = 0,2\$ και επιθυμούμε να βρούμε το συνολικό ποσό. Αν τρομοκρατηθούμε υπάρχει πάντα η λύση να τα “ξεζιπάρουμε” και να τα γράψουμε ως 2 000 000\$, 300 000\$ κ.ο.κ. να μετατρέψουμε τα ποσά στην ίδια μονάδα μέτρησης χρήματος και να τα προσθέσουμε. Αν είμαστε ψύχραιμοι, θα κάνουμε ίδια τα προθέματα και τις μονάδες μέτρησης (σύμφωνες). Θα γίνουν όλα ή “μέγα” ή “κίλο” και το νόμισμα της αρεσκείας μας (βολεύει εδώ \$). Το μόνο, που πρέπει να θυμόμαστε γενικά είναι ότι το “τερα” είναι 1000 φορές το “γίγα”, το “γίγα” είναι 1000 φορές το “μέγα”, το “μέγα” είναι 1000 φορές το “κίλο”. Άρα θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & 2M\$ + 0,3M\$ + 0,08M\text{€} + 1,5M\text{€} + 6M\text{sl} = \\
 & 2M\$ + 0,3M\$ + 0,08M(1,1\$) + 1,5M(1,1\$) + 6M(0,2\$) = \\
 & 2 + 0,3 + 0,088 + 1,65 + 1,2) M\$ = 5,238M\$
 \end{aligned}$$

δηλαδή 5 238 000\$. Όπως είπαμε θα μπορούσαμε και σε “κίλο” δηλαδή 2000k\$ + 300k\$ + 80k(1,1\$) + 1500k(1,1\$) + 6000k(0,2\$) =...

Β' ΜΕΡΟΣ “ΠΕΡΙ ΤΟΚΙΣΤΙΚΩΝ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ”

4.6 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

4.6.1 Το ποσοστό

Το “ποσοστό επί τοις εκατό” δεν είναι τίποτε άλλο από ένα κλάσμα με παρονομαστή το 100 (ή μια διαίρεση με διαιρέτη το 100) δηλαδή

$$\alpha\% = \alpha/100 = \alpha:100 = 0,01\alpha$$

Είναι ένας συμβολισμός και μόνο για να μην γράφουμε τον παρονομαστή και μια πολύ καλή συντόμευση.

Σχόλιο: Τα κλάσματα και για την ακρίβεια οι παρονομαστές τους δεν είναι και πολύ δημοφιλή!

Προφανώς, οποιαδήποτε αριθμός μπορεί να γραφεί ως ποσοστό (και αυτό αριθμός είναι!) και το αντίστροφο, ζήτημα προτίμησης και μόνο από την καθαρά μαθηματική σκοπιά. Π.χ.

$$\alpha) 15\% = 15/100 = 0,15 \quad \beta) 3\% = 3/100 = 0,03 \quad \gamma) 4,65\% = 4,65/100 = 0,0465$$

$$\delta) 0,21 = 21\% \quad \epsilon) 0,3 = 30\% \quad \sigma\tau) 5 = 500\% \quad \zeta) 2213 = 221300\% \quad \eta) 3/4 = 0,25 = 25\%$$

Πρακτικά ισχύει:

*Θέλετε να κάνετε ένα ποσοστό (%), “κανονικό” αριθμό, τότε απλά “κουνάτε” την υποδιαστολή δυο θέσεις αριστερά (αν είναι αόρατη, να ξέρετε ότι βρίσκετε στο τελευταίο ψηφίο, μετά τις μονάδες). Συμπληρώνετε μηδενικά, αν δεν υπάρχουν ψηφία για να μπει η υποδιαστολή.

* Θέλετε να κάνετε έναν αριθμό ποσοστό, “κουνάτε” την υποδιαστολή δυο θέσεις δεξιά και μετά βάζετε το “%”. Συμπληρώνετε μηδενικά, αν δεν υπάρχουν ψηφία.

Σημείωση: Υπάρχει και το “ποσοστό επί τοις χιλίοις” (‰) δηλαδή “δια 1000”, “προς 1000”.

Σχόλιο: Έγινε η συγκεκριμένη αναφορά στα ποσοστά γιατί είναι ένας άλλος τρόπος μαθηματικής γραφής για μια διαίρεση ή ένα πηλίκο ή ένα κλάσμα, που έχει διαιρέτη ή παρονομαστή το 100 και τίποτα παραπάνω. Θα δούμε παρακάτω ότι το να γράψουμε κάτι ως ποσοστό δε το κάνει επιτόκιο. Μπορώ να πάρω έναν οποιοδήποτε αριθμό και να τον γράψω ως ποσοστό δε δηλώνεται μαθηματικώς απολύτως τίποτα διαφορετικό. π.χ. είτε πω το 80% του “κάτι”, είτε το 0,8, είτε το 80/100, είτε τα 4/5 έχω την ίδια δήλωση για το “κάτι”.

4.6.2 Μεταβολή ενός μεγέθους

Η μεταβολή ενός μεγέθους Ξ συμβολίζεται με $\Delta\Xi$ (από το αρχικό γράμμα της Ελληνικής λέξης “Διαφορά”, διεθνώς) και είναι:

$$(\text{ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ } \Xi) = (\text{ΤΕΛΙΚΗ ΤΙΜΗ } \Xi) - (\text{ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ } \Xi)$$

$$\Delta \Xi = \Xi_1 - \Xi_0$$

όπου: $\Delta \Xi$ η μεταβολή του μεγέθους Ξ

Ξ η τελική τιμή (μέτρο) του Ξ

Ξ_0 η αρχική τιμή (μέτρο) του Ξ

Είναι το πόσο άλλαξε σε ποσότητα (μεταβλήθηκε) το συγκεκριμένο μέγεθος Ξ .

Σχόλιο: Έχουμε ήδη επισημάνει ότι ασχολούμαστε με βαθμωτά μεγέθη αλλά αν είχαμε διανύσματα δε θα είχαμε τίποτα εξαιρετικά διαφορετικό, θα προσθέταμε διανυσματικά (κανόνας παραλληλογράμμου ή “τρενάκι” = η αρχή του ενός με το τέλος του άλλου) στο “τελικό” διάνυσμα το αντίθετο του “αρχικού”.

Παράδειγμα Α

Ένας επένδυσε 1€ και έλαβε 1,4€ μετά από 2 έτη. Η μεταβολή είναι $1,4€ - 1€ = 0,4€$, αυτό μάλιστα θα δούμε παρακάτω αδιάστατο είναι η απόδοση.

Παράδειγμα Β

Ένας κατέθεσε στην τράπεζα 1000€ και έλαβε 1400€ μετά από 2 έτη. Η μεταβολή είναι $1400€ - 1000€ = 400€$, αυτός είναι λεγόμενος τόκος, όπως θα δούμε.

4.6.3 Ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους

Δε θα το εξετάσουμε από τη σκοπιά των μαθηματικών, που γενικά είναι η y' δηλαδή παράγωγος ως προς x , της συνάρτησης $y = f(x)$, y παραγωγίσιμη,. Αλλά, ούτε και σε σχέση με το χρόνο (t), όπως στη φυσική, που μας δίνει το λεγόμενο στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής για μια χρονική στιγμή $t = t_0$. Θα ορίσουμε το ρυθμό μεταβολής στην απλή περίπτωση, που αυτή γίνεται ομαλά δηλαδή στη περίπτωση, που η $y = f(t)$ είναι γραμμική και είναι και ο λεγόμενος μέσος ρυθμός μεταβολής (δηλ. όταν στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής συμπίπτει με το μέσο). Έτσι λοιπόν:

Ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους Ξ είναι η μεταβολή του μεγέθους Ξ ($\Delta \Xi$) προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα (Δt), που έχει συμβεί η μεταβολή. Επειδή δεν είναι βέβαιο ότι η μεταβολή έγινε ομαλά, διευκρινίζουμε πάλι ότι είναι ο μέσος ρυθμός μεταβολής του Ξ .

$$\Delta \Xi / \Delta t = (\Xi - \Xi_0) / (t - t_0)$$

Δείχνει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται το μέγεθος Ξ . Πολλές φορές, ο τύπος πιο απλά μπορεί να γραφεί με παρονομαστή t μόνο, θεωρώντας $t_0=0$. Δεν είναι κάτι που πρέπει να θυμόμαστε, εύκολα ανακαλείται στη μνήμη μας, αρκεί να έχουμε κατά νου ένα παράδειγμα, όπως το πρώτο από τα παρακάτω.

Παράδειγμα Α

Ένα παιδάκι είχε ύψος 90cm το 2015 και το 2020 είχε ύψος 140cm, με τι ρυθμό ψήλωνε; Χωρίς, να το σκεφτείτε και πολύ θα πείτε 10 cm το χρόνο (10cm/year) και αυτό το βρήκατε γιατί στη μεταβολή του ύψους κάνατε απλά διαίρεση με το χρονικό διάστημα. Βέβαια, θα συμπληρώσετε ότι αυτός ο ρυθμός ήταν ο μέσος ρυθμός μεταβολής του ύψους, δηλαδή αν το παιδάκι ψήλωνε ομαλά.

Παράδειγμα Β

Το παιδάκι μας είναι η νομισματική μονάδα! Ως τέτοια ξεκινά το οικονομικό γεγονός με “ύψος” 1 και όταν τελειώσει το γεγονός έχει “ύψος” 1,24 και έστω αυτό συμβαίνει σε 1έτος = 12μήνες = 360μέρες. Με τι ρυθμό “ψήλωνε”; Πολύ γρήγορα θα απαντήσετε σκεπτόμενοι $(1,24-1) / 1 \text{ έτος} = 0,24 / \text{έτος} = 24\% / \text{έτος}$ και μόλις έχετε βρει το ετήσιο επιτόκιο! Ακόμα, θα μου πείτε $24\% / \text{έτος} = 24\% / 12\text{μήνες} = 2\% / \text{μήνας}$, το μηνιαίο επιτόκιο και $24\% / \text{έτος} = 24\% / 360\text{μέρες} = 0,067\% / \text{μέρα}$, το ημερήσιο. Συνεχίζοντας, θα λέγατε $24\% / \text{έτος} = 24\% / (2*6\text{μηνες}) = 12\% / 6\text{μήνες} = 2\% / \text{εξάμηνο}$, εξαμηνιαίο κλπ.

Παράδειγμα Γ

Ένας επένδυσε (με απλό τοκισμό) 1€ και έλαβε 1,4€ μετά από 2 έτη. Η μεταβολή είναι $1,4€ - 1€ = 0,4€$ και ο ρυθμός μεταβολής $0,4€ / 2\text{year} = 0,2 \text{ €/year}$. Αυτή η διαπίστωση θα μας φανεί χρήσιμη αργότερα (το πρώτο αδιάστατο θα είναι απόδοση, ενώ το δεύτερο χωρίς τη €, το ετήσιο επιτόκιο και είναι τελείως διαφορετικά μεγέθη).

4.6.4 Η νομισματική μονάδα

Τη νομισματική μονάδα θα τη θεωρήσουμε αυθαίρετα αδιάστατη δηλαδή ως “οντότητα” (για να μην έχουμε διαστατική ανομοιογένεια στους τύπους) και η αξία της το ίδιο αυθαίρετα τίθεται ως 1 (εξ ου και το όνομά της) στην αρχή ενός οικονομικού γεγονότος.

Σχόλιο: Η όλη ιδέα της νομισματικής μονάδας και η “ύπαρξή” της στηρίζεται στη μέθοδο, που λέγεται “αναγωγή στη μονάδα” από τα Μαθηματικά. Είναι πιο εύκολο να σκεφτόμαστε τι συμβαίνει στον “έναν”, στη “μία οντότητα” από ότι στους “πολλούς”, αν σε όλους συμβαίνει το ίδιο.

4.6.5 Ο Τόκος (I)

Είναι η αμοιβή για τη χρήση κεφαλαίου ή το ποσό με το οποίο χρεώνεται η χρήση του κεφαλαίου. Είναι λοιπόν το βαθμωτό οικονομικό μέγεθος, που ορίζεται ως:

$$\mathbf{I} = \Delta\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0$$

Με διάσταση, $\dim I = [\text{χρήμα}]$

Παράδειγμα Α

Για αρχική τραπεζική κατάθεση 1000€, ένας έλαβε τελικά 1200€, ο τόκος λοιπόν είναι $I = X - X_0 \Rightarrow I = 1200€ - 1000€ \Rightarrow I = 200€$

Παράδειγμα Β

Ο τόκος για μια αρχική κατάθεση 1000€ ήταν 200€, άρα $200€ = X - 1000€ \Rightarrow X = 1200€$

Σχόλιο: Προφανώς είναι τόσο τετριμμένες οι λύσεις, δε χρειάζεται καν να είμαστε τόσο τυπικοί και να γράφουμε τη σχέση, πρακτικά κατευθείαν μια αφαίρεση ή πρόσθεση.

4.6.6 Η Απόδοση (i)

Είναι η μεταβολή της νομισματικής μονάδας (αυθαίρετα τη θεωρούμε αδιάστατη) δηλαδή η τελική τιμή της μείον το 1 (αρχική τιμή, κατά την έναρξη τίθεται 1). Ή αλλιώς, ισοδύναμα: η αριθμητική τιμή του τόκου μιας νομισματικής μονάδας. Ή αλλιώς πάλι ισοδύναμα, μπορεί να οριστεί ως το μέγεθος σύγκρισης, που ισούται με το λόγο της μεταβολής του κεφαλαίου (ο τόκος) προς το αρχικό κεφάλαιο. Είναι αδιάστατο μέγεθος, $\dim i = [1]$

$$\mathbf{i} = \mathbf{I} / \mathbf{X}_0 = \Delta\mathbf{X} / \mathbf{X}_0$$

ή

$$\mathbf{i} = (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) / \mathbf{X}_0$$

ή

$$\mathbf{i} = \mathbf{X} / \mathbf{X}_0 - 1$$

Αυτή, που ορίσαμε είναι η λεγόμενη “καθαρή απόδοση”, εμείς απλά θα την ονομάζουμε “απόδοση”, γιατί υπάρχει και η “μικτή απόδοση” στην οποία συνυπολογίζεται η νομισματική μονάδα: (μικτή απόδοση) = 1 + (καθαρή απόδοση) δηλαδή είναι $i = X / X_0$. π.χ. α) στην πρόβλεψη των αγώνων του ΟΠΑΠ μας παρέχεται η μικτή απόδοση β) στον υπολογισμό του μέσου γεωμετρικού.

Παράδειγμα Α

Για αρχική τραπεζική κατάθεση 1000€, ένας έλαβε τελικά 1200€, με βάση το παραπάνω παράδειγμα $i = I / X_0 \Rightarrow i = 200€ / 1000€ \Rightarrow i = 0,2$

Παράδειγμα Β

Το αρχικό κεφάλαιο είναι το 80% του τελικού κεφαλαίου, για να υπολογίσουμε την απόδοση λύνουμε την εξίσωση, αντικαθιστώντας $X_0 = 80\% X = 0,8 X$ και έχουμε $i = X / (0,8X) - 1 \Rightarrow i = 1,25 - 1 = 0,25$ ή 25%

4.6.7 Το Επιτόκιο (r)

Το επιτόκιο είναι ο ρυθμός μεταβολής της νομισματικής μονάδας (αδιάστατη) , επειδή το επιτόκιο παραμένει σταθερό έστω και για μικρό χρονικό διάστημα και μεταβάλλεται κατά τρόπο μαθηματικά μη συνεχή (r συνάρτηση του t, με κλάδους σταθερές τιμές του r, με “σκαλοπάτια”, εικόνα 4) μπορούμε απλά να πούμε ότι είναι η μεταβολή της νομισματικής μονάδας ανά χρονικό διάστημα ή η απόδοση ανά χρονικό διάστημα.

$$r = i/t$$

Με διάσταση, $\dim r = 1 / [\text{χρόνος}] = [\text{χρόνος}]^{-1}$

Παράδειγμα Α

Όλα αυτά είναι επιτόκια 2%/μήνας , 12%/εξάμηνο, 8%/έτος, 0,0001 /ώρα, 0,16/εβδομάδα, 0,2/(33,18 μέρες) , 1 /οκτάμηνο

Παράδειγμα Β

Αυτά δεν είναι 2% , 5% , 6%, εκτός αν μας λέει κάποιος ότι είναι στο μήνα, στο χρόνο, στο εξάμηνο, ετήσιο κλπ. οπότε θεωρούμε ότι υπάρχει ο απαραίτητος παρονομαστής για να είναι επιτόκιο.

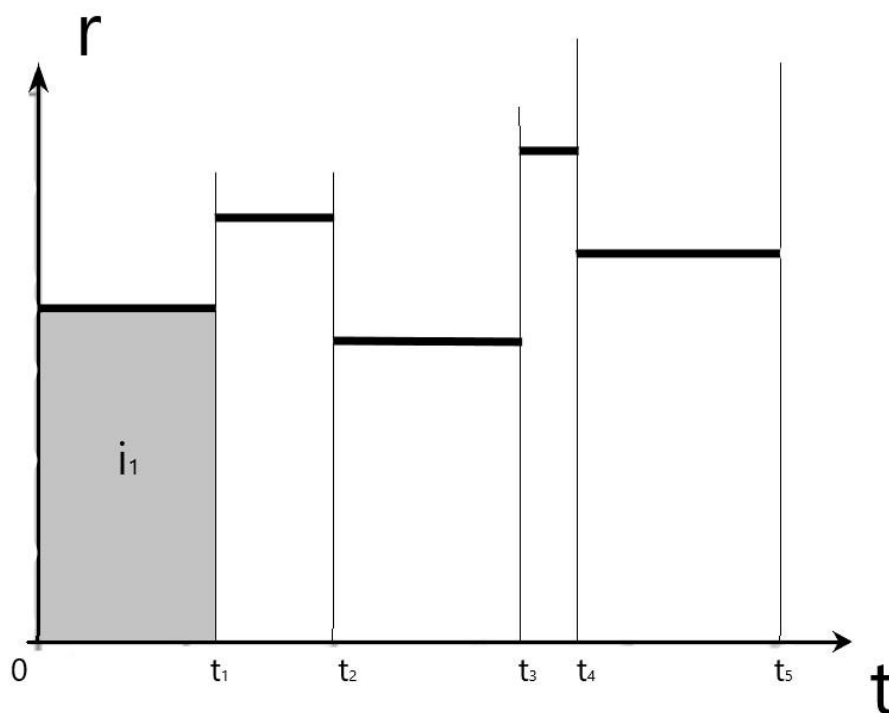
Επισημαίνεται πάλι, το να γράψω κάτι ως ποσοστό (%) δε το κάνει επιτόκιο αλλά η διάσταση του [χρόνος]⁻¹

Σχόλιο: Η “ψυχή” = μονάδα μέτρησης καθορίζει τι μέγεθος είναι και όχι το “σώμα” = αριθμητική τιμή.

Δε θα ασχοληθούμε εδώ με τα διάφορα είδη επιτοκίων π.χ. πραγματικό επιτόκιο, ονομαστικό επιτόκιο, κλιμακούμενο επιτόκιο, κλιμακωτό επιτόκιο κλπ. Ακόμα, τα λεγόμενα αναλογικά επιτόκια, όταν μελετάμε με βάση τις αριθμητικές τιμές, είναι απλώς ίσα επιτόκια (ταυτίζονται), όταν η μελέτη γίνεται με χρήση μεγεθών (μέτρων). Έχουμε αλλάξει τη μονάδα μέτρησης του χρόνου με αποτέλεσμα να έχει μεταβληθεί η αριθμητική τιμή, αλλά εκφράζουν ακριβώς το ίδιο μέγεθος π.χ. 24% /έτος = 12% /6μηνο = 8% /4μηνο = 6% /3μηνο = 4% /2μηνο = 2% /μήνας = 28% /2ετια = 36% /3ετια = ... = c * 24% / (c * έτος), όπου c οποιαδήποτε πραγματικός αριθμός επιθυμούμε. Ισχύει λοιπόν το προφανές, στη γενική περίπτωση:

$$x\% / [\text{χρόνος}] = c * x\% / (c * [\text{χρόνος}]), \text{ με } c \text{ ανήκει στο } \mathbb{R}^*$$

Εξαιτίας του γεγονότος ότι τα περισσότερα επιτόκια αναφέρονται ως ετήσια, έχει κατάληξη να θεωρούνται αδιάστατα, ενώ δεν είναι. Στην εικόνα φαίνεται καθαρά ότι γεωμετρικά, η απόδοση εκφράζεται από το εμβαδόν



Εικόνα 4: Επιτόκιο συναρτήσεως του χρόνου

4.7 ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΙΣΜΟΣ

4.7.1 Σχέση Τόκου (I) και Επιτοκίου(r)

Από τις παραπάνω σχέσεις, $i = I / X_0$ και $r = i / t \Rightarrow i = r t$, έχουμε $I / X_0 = r t$ δηλαδή:

$$I = X_0 * r * t$$

όπου: I ο τόκος σε [χρήμα],

X_0 αρχικό κεφάλαιο (κεφάλαιο, χρήμα στη στιγμή 0) σε [χρήμα]

r το επιτόκιο σε [χρόνος]⁻¹,

t χρονικό διάστημα σε [χρόνος]

Για ένα οικονομικό γεγονός, αν πολλαπλασιάσουμε, λοιπόν το επιτόκιο(r) με το χρόνο(t) παίρνουμε την μεταβολή της νομισματικής μονάδας (απόδοση) δηλαδή τι “γέννησε” το 1, αν πολλαπλασιάσουμε στη συνέχεια με τα “πολλά” (αρχικό κεφάλαιο) βλέπουμε τι “γεννητούρια” (τόκος) έχουμε.

Σχόλιο: Αν το επιτόκιο ήταν αδιάστατο, τότε στο δεύτερο μέλος της παραπάνω εξίσωσης μεγεθών θα είχαμε [χρήμα] = [χρήμα][χρόνος] δηλαδή διαστατική ανομοιογένεια (sanity check failed).*

4.7.2 Τύπος Απλού Τοκισμού

Ο απλός τόκος αναφέρεται σε μια ήσυχη “εγκυμοσύνη” χρημάτων, στην οποία άσχετα από το πόσο χρονικό διάστημα έχουμε καταθέσει (ή επενδύσει ή δανείσει ή δανειστεί) το χρηματικό ποσό, έχει συμφωνηθεί να πληρωθούμε με βάση ένα σταθερό επιτόκιο χωρίς να θεωρηθεί ότι το ποσό αλλάζει με κάποιο τρόπο κατά την εγκυμοσύνη παρά μόνο **άπαξ** στο τέλος αυτής. Είναι το απλούστερο οικονομικό γεγονός, σε σχέση με τον τρόπο που επενδύεται ένα ποσό.

Θα αποδείξουμε, πολύ απλά τον τύπο του απλού τόκου με βάση αυτά που έχουμε πει και θα σχολιάσουμε στη συνέχεια, τι είναι το καθένα.

Απόδειξη:

Ξεκινάμε με την απλή σκέψη, πως συνδέεται ο τόκος με τα κεφάλαια:

$$\text{ΤΟΚΟΣ} = \text{ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ} = (\text{ΤΕΛ. ΚΕΦΑΛΑΙΟ}) - (\text{ΑΡΧ. ΚΕΦΑΛΑΙΟ})$$

$$(\text{ΤΟΚΟΣ}) + (\text{ΑΡΧ. ΚΕΦΑΛΑΙΟ}) = (\text{ΤΕΛ. ΚΕΦΑΛΑΙΟ})$$

Έχουμε δείξει ότι: $I = X_0 \cdot r \cdot t$, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται, αν θεωρήσουμε ότι το τελικό κεφάλαιο είναι X και αλλάξουμε σειρά μελών. Εξάγουμε το X_0 ως κοινό παράγοντα (επιμεριστική ιδιότητα)

$$\mathbf{X = X_0 (1 + r t)} \quad (4.1)$$

όπου: X το τελικό ποσό σε [χρήμα]

X_0 το αρχικό ποσό σε [χρήμα]

1 η νομισματική μονάδα

$r t = i$ η απόδοση

r το επιτόκιο σε [χρόνος]⁻¹

t το χρονικό διάστημα (τοκιστική περίοδος) σε [χρόνος]

4.8 ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΤΟΚΙΣΜΟΣ

4.8.1 Τύπος Ανατοκισμού

Ο Αϊνστάιν χαρακτήρισε τον ανατοκισμό (ή σύνθετο τοκισμό, compound interest) ως το “όγδοο θαύμα του κόσμου”. Είναι συνηθέστερος του απλού τοκισμού. Είναι ένα οικονομικό γεγονός (απλός τοκισμός), επαναλαμβανόμενο αναλλοίωτο στο ίδιο χρονικό διάστημα. Έτσι δημιουργείται μια αλυσίδα απλών τοκισμών, που το κεφάλαιο με τον απλό τόκο του γίνονται αρχικό κεφάλαιο για την επόμενη επανάληψη. Ο ένας απλός τοκισμός διαδέχεται τον άλλον και δημιουργούν ένα σύνθετο οικονομικό γεγονός, εξού και το όνομα σύνθετος τόκος. Ο χρόνος που απαιτείται για να τελεστεί η επανάληψη ονομάζεται περίοδος εκτοκισμού ή ανατοκισμού (ή ανατοκιστική ή εκτοκιστική περίοδος) θα την συμβολίζουμε με T και θα την μετράμε σε [χρόνος].

Έστω ότι n απλοί τοκισμοί (που διαρκεί ο καθένας χρόνο T) διαδέχεται ο ένας τον άλλον με τα ίδιο επιτόκιο r . Έχουμε, κάνοντας χρήση της σχέσης (4.1), για τον:

$$1\text{o απλό τοκισμό } X_1 = X_0 (1 + rT)$$

2ο απλό τοκισμό $X_2 = X_1 (1 + rT) = X_0(1+rT) (1+rT) = X_0(1+rT)^2$

3ο απλό τοκισμό $X_3 = X_2 (1+rT) = X_0(1+rT)^2 (1+rT) = X_0(1+rT)^3$

κ.ο.κ. ν-οστό απλό τοκισμό $X_v = X_0 (1 + r T)^v$

Σχόλιο: Η αυστηρά μαθηματική τυπικότητα θα επέβαλλε, να υποθέσω: έστω ότι ισχύει για $v = \kappa$ δηλαδή $X_\kappa = X_0 (1 + rT)^\kappa$ και να αποδείξω ότι ισχύει για $v = \kappa + 1$ το εξής

$X_{\kappa+1} = X_0 (1 + rT)^{\kappa+1}$ κάνοντας χρήση του επαγωγικού τρόπου απόδειξης. Τετριμμένα, $X_{\kappa+1} = X_\kappa (1 + rT) = X_0 (1 + rT)^\kappa (1 + rT) = X_0 (1 + rT)^{\kappa+1}$

Αν το συνολικό φαινόμενο διαρκεί χρόνο t , θα είναι $t = v * T \Rightarrow v = t / T$

Και έτσι λαμβάνω ένα Γενικό Τύπο Ανατοκισμού-Τοκισμού:

$$X = X_0 (1 + r t)^{t/T} \tag{4.2}$$

Τελικά παίρνουμε την παρακάτω εικόνα:

$X = X_0 (1 + r T)^{t/T}$

όπου: **X** το τελικό ποσό σε [χρήμα]
X₀ το αρχικό ποσό σε [χρήμα]
1 η νομισματική μονάδα
r T η πραγματική απόδοση
r το επιτόκιο σε [χρόνος]⁻¹
t το χρονικό διάστημα σε [χρόνος]
T η περίοδος ανατοκισμού σε [χρόνος]

Εικόνα 5: Γενικός τύπος ανατοκισμού-τοκισμού

Πηγή: συγγραφέας

Ιδιαίτερη προσοχή! Αν το επιτόκιο αναφέρεται στην ανατοκιστική περίοδο, δηλαδή είναι $r = \{r\} / T$, τότε και μόνο τότε, θα είναι $i = \{r\}$ (επειδή $i = r$

T), δηλαδή η πραγματική απόδοση ισούται με την αριθμητική τιμή του επιτοκίου που αντιστοιχεί στην ανατοκιστική περίοδο. Αλλά σε καμία περίπτωση δεν είναι τα ίδια γιατί έχουν άλλη διάσταση, είναι διαφορετικά μεγέθη! Μπορούμε εύκολα οποιαδήποτε επιτόκιο, όπως δείξαμε παραπάνω, να το εκφράσουμε ως προς το χρονικό διάστημα και να το θεωρήσουμε μονάδα μέτρησης χρόνου, που επιθυμούμε. Άρα, αν εκφράσουμε το επιτόκιο σε σχέση με τη περίοδο ανατοκισμού (T), τότε η αριθμητική τιμή του επιτοκίου ισούται με την απόδοση.

Σχόλια:

1) Έναν αντίστοιχο ισόμορφο του $i = r T$, τον τύπο $s=vt$ χρησιμοποιούμε για να βρίσκουμε πρακτικά στην καθημερινή ζωή την απόσταση (s), όταν γνωρίζουμε την μέση αριθμητική ταχύτητα (v). Άλλο να λέμε ότι το κινητό έκανε 5m (το ανάλογο του i εδώ) και άλλο ότι έχει ταχύτητα 5m/sec (το ανάλογο του r εδώ). Το γεγονός ότι το κινητό μπορεί να διανύσει 5m στο επόμενο δευτερόλεπτο δε σημαίνει ότι η ταχύτητα ταυτίζεται με το διάστημα ή τη μετατόπιση. Αν ποτέ, το s θεωρηθεί το ίδιο με το v στη Φυσική, αυτή ολικά θα καταρρεύσει ως επιστήμη. Ένα άλλο παράδειγμα, είναι η σχέση ισχύος (P σε Watt στο SI) και ενέργειας (E σε Joules στο SI) $E=Pt$, και δυστυχώς συμβαίνει να συγχέεται το κιλοβάτ (kW) με τη κιλοβατώρα (kWh) δηλαδή η ισχύς με την ενέργεια.

Όλη η παρεξήγηση έχει δημιουργηθεί με το i και το r γιατί χρησιμοποιούνται οι αριθμητικές τιμές τους στις εξισώσεις και σταδιακά δημιουργήθηκε η πεποίθηση ότι είναι τα ίδια. Πέραν της επιστημονικής ορθότητας και επιβαλλόμενης μαθηματικής συνέπειας, αυτά που γράφονται εδώ και προτείνονται δεν θα είχαν κανένα νόημα, αν τα i και r ήταν ίδια, δε μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος και ό,τι γράφεται στο επόμενο κεφάλαιο. Οι εξισώσεις είναι μεγεθών και δε μπορούν να λειτουργήσουν, αν δημιουργείται ασυνέπεια με τις διαστάσεις. Το ζήτημα είναι κομβικό γι αυτό και ο σχολιασμός διεξοδικός.

2) Κάποιος βλέποντας τον τύπο του ανατοκισμού (4.2) παρατηρεί, αν ο χρόνος τοκισμού ισούται με την περίοδο ανατοκισμού δηλ. $t=T$ έχει συμβεί μία φορά ($n=1$) τότε $X = X_0 (1 + r T)$, που είναι προφανώς ο τύπος του απλού τοκισμού (4.1). Γι αυτό το λόγο συχνά πυκνά στον απλό τοκισμό το t λέγεται και τοκιστική περίοδος, γιατί είναι σαν ένας ανατοκισμός, που συνέβη άπαξ.

Ναι! ο τύπος απλού τόκου, εφόσον έχουμε δείξει τον τύπο του ανατοκισμού, γίνεται ειδική περίπτωση (όπως το Θ.Rolle με το Θ.Μέσης Τιμής, ο 1ος ν.Νεύτωνα με το 2ο, το

Π.Θ. με το γενικευμένο Π.Θ. κ.ο.κ.) αλλά όταν κάτι χρησιμοποιείται στην απόδειξη κάποιου άλλου, που μπορεί να έχει γενικότερη ισχύ, δεν το καταργούμε ως γνώση γιατί πρέπει να διατηρηθεί η λογική συνέπεια.

4.8.2. Εναλλακτικοί τύποι ανατοκισμού

Αν βάλουμε στο παιχνίδι την πραγματική απόδοση i τότε ο τύπος του ανατοκισμού μπορεί να γραφεί στην, σε πολλές περιπτώσεις, βολική μορφή:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 (1 + i)^v \quad (4.3)$$

όπου: X το τελικό ποσό σε [χρήμα]

X_0 το αρχικό ποσό σε [χρήμα]

1 η νομισματική μονάδα

i η πραγματική απόδοση

v οι επαναλήψεις ανατοκισμού (πλήθος περιόδων ή “συχνότητα”)

Ο τύπος αυτός είναι βολικός, σε υπολογισμούς παρούσας αξίας, ροών κλπ και όταν έχουμε το επιτόκιο ετήσιο, με ετήσιο ανατοκισμό. Κατ' ουσίαν πάντως ο ίδιος τύπος είναι, ο ένας καθρέφτης του άλλου γιατί $i = rT$ και $v = t/T$. Θα μπορούσαμε να γράψουμε και αυτές τις “ημίαιμες” μορφές, αν μας βολεύει:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 (1 + i)^{t/T} \quad (4.4)$$

ή

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 (1 + r t)^v \quad (4.5)$$

Σχόλια:

1) Ο γενικός τύπος (4.2) είναι ευκολότερος στη μνήμη (είναι σαν του απλού τόκου με εκθέτη το t/T αντί για 1) και χρησιμοποιεί μεγέθη καθημερινότητας όπως ο χρόνος, χωρίς να είναι απαραίτητο κάποιος να γνωρίζει πως θα υπολογίζει το πλήθος των ανατοκιστικών περιόδων v .

2) Ο τύπος (4.3) είναι ο γνωστός και δημοφιλής τύπος (υπάρχει στα βιβλία οικονομικών μαθηματικών και χρηματοοικονομικής, που μελετούν ανατοκισμό και συναφή) και συνιστάται ανεπιφύλακτα στην πλειονότητα των προβλημάτων (όταν όλοι οι χρόνοι είναι στην ίδια μονάδα μέτρησης) αρκεί να έχουμε αποσαφηνίσει (μέσα μας) ότι το i είναι η απόδοση, που τυγχάνει να ισούται με την αριθμητική τιμή του επιτοκίου, όπως ήδη έχουμε εξηγήσει.

4.8.3 Πραγματική και ονομαστική απόδοση

A) Την πραγματική απόδοση (rt ή i) την υπολογίζω πάντα από την σχέση του ανατοκισμού (γιατί η πραγματικότητα στα χρηματοοικονομικά “δουλεύει” με αυτό τον τρόπο στις επενδύσεις κλπ, ενσωματώνει το χρόνο θεωρώντας ότι το χρήμα “αλλάζει” με περίοδο T) δηλαδή την (4.2) Αν θέλω την ετήσια (ετησιοποιημένη) EAR, προτιμώ $rT=r360$, με $T=360days$

Αν θέλω την εξαμηνιαία $rT=r180$, με $T=180days$

Αν θέλω την τριμηνιαία $rT= r90$, με $T=90days$

κ.ο.κ. αν κάποιος περίεργος , μου ζητήσει την $r720$ δηλαδή της διετίας...κανένα πρόβλημα $T=720days$... το ζήτημα είναι να γνωρίζουμε τον γενικό τύπο.

B) Την ονομαστική απόδοση (rt ή i) την υπολογίζω από την σχέση του απλού τόκου (δεν λαμβάνει υπόψη την οικονομική πραγματικότητα -διαχρονική αξία χρήματος- γιατί δεν ενσωματώνει το χρόνο ως παράγοντα που διαρκώς μεταβάλλει την ίδια, αυτή καθαυτή αξία του χρήματος) δηλαδή την (4.1) ή από την (4.2) θέτοντας T ίσο με το t . Βέβαια, αν γνωρίζουμε το r και t , κατευθείαν ένα “επί” και τελειώσαμε ή μπορούμε να πάρουμε τη σχέση $i=(X-X_0)/X_0$

4.8.4. Τύπος Ανατοκισμού με Μεταβλητό Επιτόκιο

Τι γίνεται αλήθεια, αν μεταβληθεί το επιτόκιο κατά τη διάρκεια ενός ανατοκιστικού φαινομένου (όπως στην εικόνα); με δεδομένο ότι δε μεταβάλλεται η ανατοκιστική περίοδος. Ας δούμε κατ' αρχήν με ένα παράδειγμα, τι συμβαίνει:

Ένας είχε καταθέσει σε τράπεζα 1000€ με ετήσιο ανατοκισμό και με επιτόκιο $r_1 = 10\%$ / έτος. Μετά από 1 έτος, το επιτόκιο αυξήθηκε και για τα 3 επόμενα έτη ήταν $r_2 = 20\%$ / έτος. Κατόπιν, το επιτόκιο ξανάγινε $r_3 = r_1 = 10\%$ / έτος για το επόμενο μισό έτος. Τέλος, το επιτόκιο έγινε $r_4 = r_2 = 20\%$ / έτος, τα άφησε με αυτό για 3 μήνες και μετά τα σήκωσε όλα. Πόσα ευρώ εισέπραξε;

Με βάση τον τύπο του ανατοκισμού (4.2) προκύπτουν :

Μετά το 1ο έτος το αρχικό ποσό είχε γίνει $X_1 = 1000€ (1 + 0,1)^1$.

Στο τέλος 4ου έτους είχε γίνει $X_4 = X_1 (1 + 0,2)^3 = 1000€ (1 + 0,1)^1 (1 + 0,2)^3$.

Στα 4,5 έτη $X_{4,5} = X_4 (1 + 0,1)^{0,5} = 1000€ (1 + 0,1)^1 (1 + 0,2)^3 (1 + 0,1)^{0,5}$.

Το τελικό ποσό ήταν λοιπόν,

$$X_{4,75} = X_{4,5} (1 + 0,2)^{0,25} = 1000€ (1 + 0,1)^1 (1 + 0,2)^3 (1 + 0,1)^{0,5} (1 + 0,2)^{0,25}$$

αθροίζουμε τους εκθέτες για κοινές βάσεις και έχουμε τελικά,

$$X_{4,75} = 1000€ (1 + 0,1)^{1,5} (1 + 0,2)^{3,25}$$

δηλαδή παρατηρούμε ότι δε παίζει κανένα απολύτως ρόλο η σειρά με την οποία έγιναν οι ανατοκισμοί και οι κατανομές των επιμέρους χρονικών διαστημάτων για το παραχθέν τελικό ποσό (και φυσικά το συνολικό τόκο). Το τελικό ποσό εξαρτάται από το συνολικό χρόνο, που έδρασε το κάθε επιτόκιο ανεξαρτήτως με ποια σειρά έδρασε στο οικονομικό αυτό φαινόμενο.

Δεν ξαφνιαζόμαστε διόλου, γιατί αν κοιτάξουμε την απόδειξη, που είχαμε κάνει πριν για τον γενικό τύπο του ανατοκισμού με σταθερό επιτόκιο, θα δούμε ότι το εδώ συμπέρασμα δεν είναι τίποτε άλλο από μια απλή συνέπεια της αντιμεταθετικής και προσεταιριστικής ιδιότητας, που ισχύουν στην Άλγεβρα.

Για να ξαναδούμε αυτή την απόδειξη, θεωρώντας ότι σε κάθε ανατοκισμό (με ίδιο T) έχουμε τα επιτόκια r_1, r_2, \dots, r_n . Για τον κάθε απλό τοκισμό ισχύει:

$$1ο \text{ απλό τοκισμό } X_1 = X_0 (1 + r_1 T)$$

$$2ο \text{ απλό τοκισμό } X_2 = X_1 (1 + r_2 T) = X_0 (1 + r_1 T) (1 + r_2 T)$$

$$3ο \text{ απλό τοκισμό } X_3 = X_2 (1 + r_3 T) = X_0 (1 + r_1 T) (1 + r_2 T) (1 + r_3 T)$$

κ.ο.κ. στο ν-οστό απλό τοκισμό

$$\mathbf{X_n = X_0 (1 + r_1 T) (1 + r_2 T) (1 + r_3 T) \dots (1 + r_n T)}$$

Μπορούμε να αλλάξουμε προφανώς τη σειρά γραφής των παραγόντων και να πολλαπλασιάσουμε με όποια σειρά επιθυμούμε (αντιμεταθετική και προσεταιριστική ιδιότητα). Από τα επιτόκια r_1, r_2, \dots, r_n πολλά στην πράξη θα είναι ίσα, οπότε οι αντίστοιχες ποσότητες εντός των παρενθέσεων ίσες, γιατί T κοινό. Αθροίζουμε τους μοναδιαίους εκθέτες των ίσων βάσεων (παρενθέσεων). Τελικά, θα έχουμε μια εξίσωση αυτής της μορφής, με διαφορετικά (διακριτά) πλέον τα επιτόκια μεταξύ τους:

$$\mathbf{X = X_0 (1 + r t_\alpha)^{t_\alpha/T} (1 + r t_\beta)^{t_\beta/T} (1 + r t_\gamma)^{t_\gamma/T} \dots} \quad (4.6)$$

με τα $t_\beta, t_\gamma \dots$ τους συνολικούς χρόνους επίδρασης του κάθε επιτοκίου

Άρα, δε παίζει ρόλο η αλληλουχία των απλών τοκισμών με ποια σειρά έγινε. Αλλά το γεγονός μόνο, ότι έγιναν. Αυτό σημαίνει π.χ. αν σκοπεύετε να δανείσετε σε κάποιον ένα ποσό με το μηχανισμό του ανατοκισμού για 2 έτη (και μετά αμέσως να σας αποδώσει το τελικό ποσό) και σας τάξει ετήσιο επιτόκιο 10% για το 1ο έτος και 20% για το 2ο έτος, μην φιλονικήσετε για τη σειρά των επιτοκίων αλλά για το συνολικό χρονικό διάστημα δράσης του καθενός και για την περίοδο T.

Το παραπάνω συμπέρασμα είναι επίσης πολύ χρήσιμο για επίλυση “προβλημάτων-σπαζοκεφαλιών” αυτού του στυλ: “Κάποιος σκοπεύει να μας δανείσει 1000€ για ακριβώς δυο εμπορικά έτη με ανατοκιστική περίοδο εξαμηνιαία και ζητά επιτόκιο 10%/(εμπ. έτος) για τις μονές μέρες του 1ου έτους δανεισμού, ενώ για τις ζυγές μέρες 12%/(εμπ. έτος) και 12%/(εμπ. έτος) για το 1ο τρίμηνο του 2ου έτους και για το υπόλοιπο διάστημα 10% / (εμπ. έτος).” (θα την λύσουμε στο επόμενο κεφάλαιο)

Σχόλιο: Μάλλον, έχουν λοιπόν δίκιο όσοι υποστηρίζουν ότι πρέπει να μαθαίνουμε τις αποδείξεις. Οι αποδείξεις γενικά είναι το “ταξίδι” και είναι αρκετές φορές σημαντικότερες από την “Ιθάκη”, γιατί αποτελούν πηγή έμπνευσης στην μελέτη και επίλυση των συνθετότερων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΓΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΤΟΚΙΣΜΟΥ

Το κεφάλαιο αυτό είναι αφιερωμένο στην επίλυση μιας πληθώρας φαινομενικά διαφορετικών προβλημάτων τοκιστικής υφής, που όλα τους λύνονται χρησιμοποιώντας την παρακάτω πινακίδα (ταμπλέτα) ανατοκισμού (Εικόνα 6).

Τ
Α
Μ
Π
Λ
Ε
Τ
Α

Α
Ν
Α
Τ
Ο
Κ
Ι
Σ
Μ
Ο
Υ

$$X = X_0 (1 + r T)^{t/T}$$

με : X τελικό ποσό (τελικό κεφάλαιο ή μελλοντική αξία) σε [χρήμα] $X = \dots$
 X_0 αρχικό ποσό (αρχικό κεφάλαιο ή παρούσα αξία) σε [χρήμα] $X_0 = \dots$
 T ανατοκιστική περίοδος (ή περίοδος ανατοκισμού) σε [χρόνος] $T = \dots$
 t συνολικός χρόνος του φαινομένου σε [χρόνος] $t = \dots$
 r επιτόκιο σε $\{r\}$ / [χρόνος] π.χ. 0,03 / έτος, 0,03 / 6μηνο, 0,03 / 4μηνο, 0,03 / 3μηνο, 0,03 / 2μηνο
 δηλώνεται πάντα το δι-, τρι-, τετρα-, εξα- κ.ο.κ. με αριθμούς και ΠΑΝΤΑ θα πρέπει στον τύπο να εμφανίζεται ως κλάσμα με ένα αριθμό στον αριθμητή και χρονικό διάστημα στον παρονομαστή
 $r = \dots / \dots$

Βάζουμε τα μεγέθη μαζί με αριθμό και μονάδα μέτρησης (ΟΧΙ ΣΚΕΤΑ!)
 # Κάνουμε τις μονάδες μέτρησης ίδιες (σύμφωνες) με σκοπό να "φύγουν" οι περισσότερες (να μείνει μία ή καμία)
 # Λύνουμε την εξίσωση
Να χρησιμοποιείτε καλύτερο ρόλο και μολύβι αντί σταθμό/αν γραπτό/αυτο

$$= \left(1 + \frac{r T}{n} \right)^{n t / T}$$

Απλός Τοκισμός
 $t=T$
Διαγράφουμε τον εκθέτη t/T

Υπόλογισμός τόκου στον απλό τοκισμό
Διαγράφουμε και το 1 (μονάδα) και το X θα είναι το I δηλαδή ο τόκος

πλήθος περιόδων ανατοκισμού v
 $v = t / T$

απόδοση i
 $i = r T$
για ετήσιες $T=360$ μέρες

ονομαστική με χρήση του τύπου για απλό τοκισμό

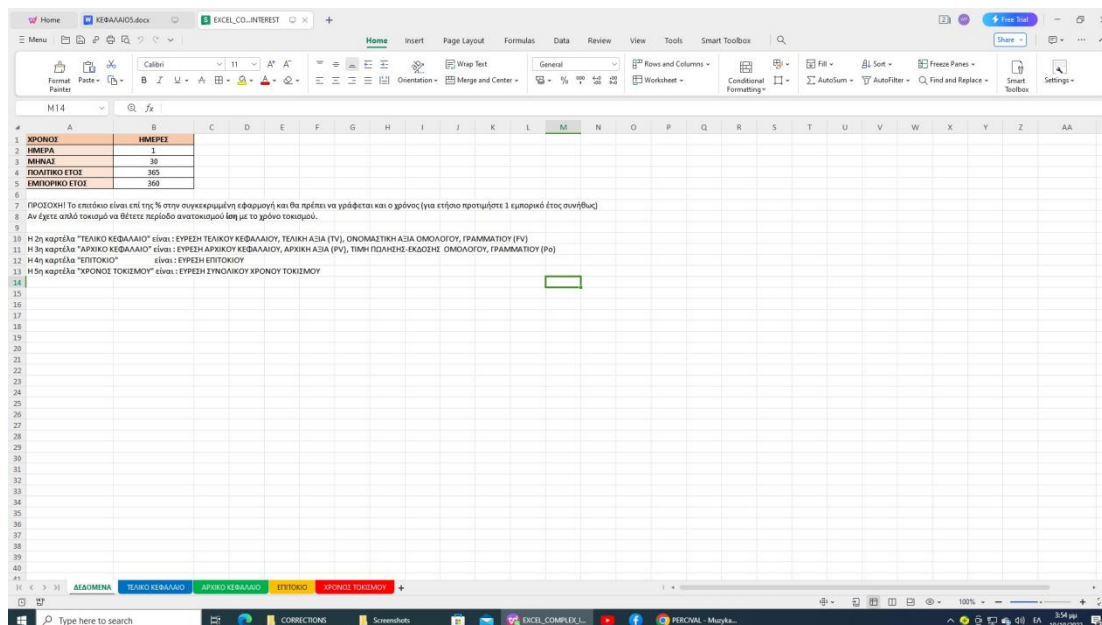
πραγματική με χρήση του τύπου για ανατοκισμό

Εικόνα 6: Ταμπλέτα Ανατοκισμού

Πηγή: Συγγραφέας

Αυτή είναι η εξίσωση μεγεθών (4.2). Απευθύνεται ακόμα και σε κοινό, που δε γνωρίζει πολλά από τοκισμό (απλό ή σύνθετο). Η λύση της προϋποθέτει γνώση από μαθηματικά δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Για πληρότητα, στο Παράρτημα, παρουσιάζεται αναλυτικά, πως λύνουμε την εξίσωση (κάθε φορά με διαφορετικό άγνωστο) με απλό τρόπο και κάπως διαφορετικό μακριά από την αυστηρή τυπικότητα. Επίσης, στις κάπως ιδιαίτερες τελευταίες δυο ασκήσεις, γίνεται χρήση και της εξίσωσης (4.6) που ουσιαστικά παράγεται, όπως δείξαμε, από την παραπάνω.

Υπενθυμίζεται ότι, η (4.2) και (4.6) από τη στιγμή που είναι εξισώσεις μεγεθών, σε όλες τις λύσεις έχουμε αντικατάσταση των μεγεθών με τα μέτρα τους δηλαδή αριθμητική τιμή μαζί με μονάδα μέτρησης, όπως άλλωστε φαίνεται και στην εικόνα 6. Αρκετές από τις παρακάτω ασκήσεις είναι από το βιβλίο του Γρ. Γκίκα και της Α. Χυζ, που τιτλοφορείται “[Εγχειρίδιο Σύγχρονης Χρηματοοικονομικής](#)”. Οι υπόλοιπες ασκήσεις είναι του συγγραφέα. Η εργασία συνοδεύεται από ηλεκτρονικό αρχείο όπου υπάρχει η ηλεκτρονική υλοποίηση αυτής της μεθοδολογίας σε Excel. Στο τέλος, αρκετών από τις παρακάτω ασκήσεις εμφανίζεται και η σχετική απάντηση μέσω χρήσης του Excel σε εικόνα. Στα επιτόκια εμφανίζεται και η δυνατότητα να επιλέξει ο χρήστης και δικά του, πέρα των καθιερωμένων, που επιθυμεί να υπολογίσει. Το Excel έχει την μορφή της εικόνας 7, τέσσερις καρτέλες υπολογισμού (κάτω μέρος) και μια εισαγωγική, η οποία φαίνεται εδώ.



Εικόνα 7: Excel τοκισμού

Πηγή: Συγγραφέας

Μερικά προβλήματα έχουν μόνο απάντηση γιατί έχουν τετριμμένη λύση, αν έχει κατανοηθεί το προηγούμενο πρόβλημα.

1. Έστω ότι κάποιος καταθέτει χρηματικό ποσό 100.000 € σε ένα τραπεζικό λογαριασμό. Το ποσό αυτό ανατοκίζεται κάθε 6 μήνες, με εξαμηνιαίο επιτόκιο 10%. Τι ποσό θα συγκεντρώσει στο λογαριασμό του στο τέλος του 5ου έτους;

Λύση: $X=?$, $X_0= 100.000 \text{ €}$, $T= 6 \text{ month}$, $t= 5 \text{ year}$, $r= 0,1/6\text{month}$

$$X = 100000€ \left(1 + \frac{0,1}{6\text{month}} \cdot 6\text{month} \right)^{\frac{5\text{year}}{6\text{month}}}$$

$$X = 100000€ * 1,1^{\frac{5*12\text{month}}{6\text{month}}}$$

$$X = 100000€ * 1,1^{10} \Rightarrow X = 259374€$$

ΕΥΡΕΣΗ ΤΕΛΙΚΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ, ΤΕΛΙΚΗ ΑΞΙΑ (TV), ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΗ ΑΞΙΑ ΟΜΟΛΟΓΟΥ, ΓΡΑΜΜΑΤΙΟΥ (FV)				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ				
ΜΕΓΕΘΟΣ	ΤΙΜΗ	ΧΡΟΝΟΣ	ΜΟΝΑΔΑ ΧΡΟΝΟΥ	ΗΜΕΡΕΣ
ΑΡΧΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ	100.000,00 €			
ΕΠΙΤΟΚΙΟ	10,00%	6,0	ΜΗΝΑΣ	180,0
ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ	6,0		ΜΗΝΑΣ	180,0
ΧΡΟΝΟΣ ΤΟΚΙΣΜΟΥ	5		ΕΜΠΟΡΙΚΟ ΕΤΟΣ	1.800,0

ΤΕΛΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ **259.374,25 €**

Το επιτόκιο θεωρείται πάντα ως προς το χρόνο π.χ. εδώ 12, 5% εξαμηνιαίο, γράφεται ως τιμή 12,5% σε χρόνο 6 με μονάδα μέτρησης μήνας

2. Μια εμπορική τράπεζα προσφέρει ρέπος αξίας 100.000 €, διάρκειας 180 ημερών με ετήσιο επιτόκιο 12% και περίοδο ανατοκισμού 30 ημερών. Να υπολογιστεί η τελική αξία του ρέπος καθώς και η ετησιοποιημένη πραγματική απόδοση (EAR).
Λύση: Το 1ο ερώτημα λύνεται όπως παραπάνω και βρίσκουμε $X = 106.152 €$ το EAR (ή r360) βρίσκεται με βάση το δεξιό τμήμα της ταμπλέτας.

$$106152€ = 100000€(1 + r360)^{\frac{180\text{day}}{360\text{day}}} \Rightarrow 106152€ = 100000€(1 + r360)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 1,06152^2 = 1 + r360 \Rightarrow 1,1268 - 1 = r360 \Rightarrow r360 = 0,1268 = 12,68\%$$

ΕΥΡΕΣΗ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ, ΕΤΗΣΙΟΠΟΙΗΜΕΝΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ				
ΜΕΓΕΘΟΣ	ΤΙΜΗ	ΧΡΟΝΟΣ	ΜΟΝΑΔΑ ΧΡΟΝΟΥ	ΗΜΕΡΕΣ
ΑΡΧΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ	100.000,00 €			
ΤΕΛΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ	106.152,00 €			
ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ	360,0		ΗΜΕΡΑ	360,0
ΧΡΟΝΟΣ ΤΟΚΙΣΜΟΥ	180		ΗΜΕΡΑ	180,0
ΧΡΟΝΟΣ ΧΡΗΣΤΗ ΠΑ ΕΠΙΤΟΚΙΟ (ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΟ)				
ΗΜΕΡΑ	7,0			
ΜΗΝΑΣ	6,0			
ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΕΤΟΣ	1,0			
ΕΜΠΟΡΙΚΟ ΕΤΟΣ	1,0			

ΕΠΙΤΟΚΙΟ	ΕΠΙΤΟΚΙΟ / ΜΟΝΑΔΑ ΧΡΟΝΟ	ΜΟΝΑΔΑ ΧΡΟΝΟΥ	ΕΠΙΤΟΚΙΟ ΧΡΗΣΤΗ
	0,04%	ΗΜΕΡΑ	0,25%
	1,06%	ΜΗΝΑΣ	6,34%
	12,86%	ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΕΤΟΣ	12,86%
	12,68%	ΕΜΠΟΡΙΚΟ ΕΤΟΣ	12,68%

Για ετήσιο αποτελεσματικό (πραγματικό) επιτόκιο θέτουμε περίοδο ανατοκισμού 360 ή 365 ημέρες
Για ονομαστικό θέτουμε τον χρόνο τοκισμού παντού δηλαδή και στην περίοδο ανατοκισμού
"Ο ΧΡΟΝΟΣ ΧΡΗΣΤΗ ΠΑ ΕΠΙΤΟΚΙΟ" είναι αν επιθυμεί ο χρήστης π.χ. ανά εξάμηνο, τρίμηνο ή ακόμα και για αριθμό ημερών π.χ. 7 ημέρες (εβδομάδα) κλπ

3. Έντοκο γραμμάτιο του δημοσίου ονομαστικής αξίας 100000€ εκδίδεται στην πρωτογενή αγορά με επιτόκιο (ετήσιο) 10% και χρονική διάρκεια 3 μηνών. Ποια είναι η τιμή έκδοσης του γραμματίου;

Λύση: Εδώ πρέπει να γνωρίζουμε ότι ονομαστική αξία γραμματίου είναι η τελική του αξία και σαν απλός τοκισμός. Δε χρειάζεται να θυμόμαστε τον τύπο για γραμμάτια.

$$100000\text{€} = X_0 \left(1 + \frac{0,1}{\text{year}} 3\text{month}\right)^1$$

$$100000\text{€} = X_0 \left(1 + \frac{0,1}{12\text{month}} 3\text{month}\right)$$

$$100000\text{€} = X_0 \left(1 + \frac{0,1}{4}\right) \Rightarrow 100000\text{€} = X_0(1 + 0,025) \Rightarrow X_0 = 97560,9\text{€}$$

ΕΥΡΕΣΗ ΑΡΧΙΚΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ, ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ (PV), ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ ΟΜΟΛΟΓΟΥ, ΓΡΑΜΜΑΤΙΟΥ (P0)				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ				
ΜΕΓΕΘΟΣ	ΤΙΜΗ	ΧΡΟΝΟΣ	ΜΟΝΑΔΑ ΧΡΟΝΟΥ	ΗΜΕΡΕΣ
ΤΕΛΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ	100.000,00 €			
ΕΠΙΤΟΚΙΟ	10,00%	1,0	ΕΜΠΟΡΙΚΟ ΕΤΟΣ	360,0
ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ	3,0		ΜΗΝΑΣ	90,0
ΧΡΟΝΟΣ ΤΟΚΙΣΜΟΥ	3		ΜΗΝΑΣ	90,0

ΑΡΧΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ **97.560,98 €**

4. Στη συναλλακτική πρακτική, όταν η επιταγή είναι μεταχρονολογημένη, χρησιμοποιείται ως πιστωτικός τίτλος. Για παράδειγμα, σας δίνουν μετρητά 100€ σήμερα και υπογράφετε μια επιταγή ποσού 110€, που θα εξαργυρωθεί μετά από 60 ημέρες. Ποιο είναι το ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο (APR) και ποιο το αποτελεσματικό (πραγματικό) επιτόκιο;

Λύση: Το ότι ζητά επιτόκια και όχι αποδόσεις δε δημιουργεί δυσκολία.

$$\text{Το APR είναι: } 110\text{€} = 100\text{€} \left(1 + \frac{\{r\}}{\text{year}} 60\text{day}\right)^1 \Rightarrow 1,1 = \left(1 + \frac{\{r\}}{\text{year}} 60\text{day}\right)$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \{r\} = 60\%, \text{ άρα APR} = 60\%/\text{year}$$

$$\text{Το EAR ή } r_{360} \text{ είναι : } 110\text{€} = 100\text{€} (1 + r_{360})^{\frac{60\text{day}}{360\text{day}}} \Rightarrow 1,1 = (1 + r_{360})^{\frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow 1,1^6 - 1 = r_{360} \Rightarrow r_{360} = 77,2\%, \text{ άρα πραγματικό επιτόκιο } 77,2\%/\text{year}$$

ΕΥΡΕΣΗ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ, ΕΤΗΣΙΟΠΟΙΗΜΕΝΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ				
ΜΕΓΕΘΟΣ	ΤΙΜΗ	ΧΡΟΝΟΣ	ΜΟΝΑΔΑ ΧΡΟΝΟΥ	ΗΜΕΡΕΣ
ΑΡΧΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ	100,00 €			
ΤΕΛΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ	110,00 €			
ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ	60,0		ΗΜΕΡΑ	60,0
ΧΡΟΝΟΣ ΤΟΚΙΣΜΟΥ	60		ΗΜΕΡΑ	60,0
ΧΡΟΝΟΣ ΧΡΗΣΤΗ ΓΙΑ ΕΠΙΤΟΚΙΟ (ΠΡΟΔΙΡΕΤΙΚΟ)				
ΗΜΕΡΑ	7,0			
ΜΗΝΑΣ	6,0			
ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΕΤΟΣ	1,0			
ΕΜΠΟΡΙΚΟ ΕΤΟΣ	1,0			

ΕΠΙΤΟΚΙΟ	ΕΠΙΤΟΚΙΟ /ΜΟΝΑΔΑ ΧΡΟΝΟ	ΜΟΝΑΔΑ ΧΡΟΝΟΥ	ΕΠΙΤΟΚΙΟ ΧΡΗΣΤΗ
	0,17%	ΗΜΕΡΑ	1,17%
	5,00%	ΜΗΝΑΣ	30,00%
	60,83%	ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΕΤΟΣ	60,83%
	60,00%	ΕΜΠΟΡΙΚΟ ΕΤΟΣ	60,00%

Για ετήσιο αποτελεσματικό (πραγματικό) επιτόκιο θέτουμε περίοδο ανατοκισμού 360 ή 365 ημέρες
 Για ονομαστικό επιτόκιο θέτουμε τον χρόνο τοκισμού παντού δηλαδή και στην περίοδο ανατοκισμού
 "Ο ΧΡΟΝΟΣ ΧΡΗΣΤΗ ΓΙΑ ΕΠΙΤΟΚΙΟ" είναι αν επιθυμεί ο χρήστης π.χ. ανά εξάμηνο, τρίμηνο ή ακόμα και για αριθμό ημερών π.χ. 7 ημέρες (εβδομάδα) κλπ

ΕΥΡΕΣΗ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ, ΕΤΗΣΙΟΠΟΙΗΜΕΝΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ			
ΔΕΔΟΜΕΝΑ			
ΜΕΓΕΘΟΣ	ΤΙΜΗ	ΧΡΟΝΟΣ	ΜΟΝΑΔΑ ΧΡΟΝΟΥ
ΑΡΧΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ	100,00 €		
ΤΕΛΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ	110,00 €		
ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ	360,0	ΗΜΕΡΑ	360,0
ΧΡΟΝΟΣ ΤΟΚΙΣΜΟΥ	60	ΗΜΕΡΑ	60,0
ΧΡΟΝΟΣ ΧΡΗΣΤΗ ΓΙΑ ΕΠΙΤΟΚΙΟ (ΠΡΟΔΙΔΕΤΙΚΟ)			
ΗΜΕΡΑ	7,0		
ΜΗΝΑΣ	6,0		
ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΕΤΟΣ	1,0		
ΕΜΠΟΡΙΚΟ ΕΤΟΣ	1,0		

ΕΠΙΤΟΚΙΟ	ΕΠΙΤΟΚΙΟ /ΜΟΝΑΔΑ ΧΡΟΝΟ	ΜΟΝΑΔΑ ΧΡΟΝΟΥ	ΕΠΙΤΟΚΙΟ ΧΡΗΣΤΗ
	0,21%	ΗΜΕΡΑ	1,50%
	6,43%	ΜΗΝΑΣ	38,58%
	78,23%	ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΕΤΟΣ	78,23%
	77,16%	ΕΜΠΟΡΙΚΟ ΕΤΟΣ	77,16%

Για ετήσιο αποτελεσματικό (πραγματικό) επιτόκιο θέτουμε περίοδο ανατοκισμού 360 ή 365 ημέρες
Για ονομαστικό επιτόκιο θέτουμε τον χρόνο τοκισμού παντού δηλαδή και στην περίοδο ανατοκισμού
"Ο ΧΡΟΝΟΣ ΧΡΗΣΤΗ ΓΙΑ ΕΠΙΤΟΚΙΟ" είναι αν επιθυμεί ο χρήστης π.χ. ανά εξάμηνο, τρίμηνο ή ακόμα και για αριθμό ημερών π.χ. 7 ημέρες (εβδομάδα) κλπ

5. Κάποιος δανείστηκε 1000€ από μια περίεργη δανείστρια, η οποία απαίτησε να λάβει 5332,89 μονάδες στο νόμισμα της χώρας της (με την παρούσα ισοτιμία), ακριβώς μετά από ένα έτος (365 ημέρες) με επιτόκιο 2% ανά 9,48 εβδομάδες και ανατοκιστική περίοδο 33,18 ημέρες. Από ποια χώρα ήταν η δανείστρια;

Λύση:

$$5332,89[?] = 1000€ \left(1 + \frac{0,02}{9,48 \text{ week}} 33,18 \text{ day} \right)^{\frac{1 \text{ year}}{33,18 \text{ day}}}$$

$$5332,89[?] = 1000€ \left(1 + \frac{0,02}{9,48 * 7 \text{ day}} 33,18 \text{ day} \right)^{\frac{365 \text{ day}}{33,18 \text{ day}}}$$

$$5332,89[?] = 1000€ (1 + 0,1)^{11}$$

$$[?] = \frac{1000€ * 1,1^{11}}{5332,89}$$

$$[?] = 0,209 €$$

Από πίνακα ισοτιμιών καταλαβαίνουμε ότι είναι zloti (zl, κωδικός ISO PLN), το νόμισμα της Πολωνίας.

6. Η περίεργη δανείστρια για 1000€, που δάνεισε, απαίτησε να της αποδοθούν σε zloti (1€ =4,78zl) μετά από 365 ημέρες (έτος) με επιτόκιο 2% ανά 9,48 εβδομάδες και ανατοκιστική περίοδο 33,18 ημέρες. Πόσα zloti θα εισπράξει; (Απάντηση: 5332,89 zl)

7. Η περίεργη δανείστρια για 1000€, που δάνεισε, απαίτησε να της αποδοθούν 5332,89 zloti (1€ =4,78 zl) μετά από 365 ημέρες (έτος) με ανατοκιστική περίοδο 33,18 ημέρες. Ο δανειζόμενος δεν είναι πρόθυμος να δεχθεί επιτόκιο μεγαλύτερο από 10% ετήσιο στον ανατοκισμό. Θα δανειστεί ή όχι;

(Απάντηση: Όχι γιατί $r = 11,62\%$ /year)

8. Τι τόκο (απλό) θα λάβουμε, αν επενδύσουμε 1000€ για 3 μήνες με ετήσιο επιτόκιο 12% ;

Λύση: Στην ταμπλέτα παραλείπουμε το 1 και τον εκθέτη και $X_0 = I$, άρα έχουμε

$$I = 1000€ * \frac{0,12}{\text{year}} * 3\text{month}$$

$$I = 1000€ * \frac{0,12}{12\text{month}} * 3\text{month}$$

$$I = 30€$$

9. Τι τόκο (απλό) θα λάβουμε, αν επενδύσουμε 1000€ για 4 εβδομάδες με ετήσιο επιτόκιο 13%; Θεωρείστε ότι το έτος έχει 52 εβδομάδες.

Λύση: Στην ταμπλέτα παραλείπουμε το 1 και τον εκθέτη και $X_0 = I$, άρα έχουμε

$$I = 1000€ * \frac{0,13}{\text{year}} * 4\text{week}$$

$$I = 1000€ * \frac{0,13}{52\text{week}} * 4\text{week}$$

$$I = 10€$$

10. Έστω ότι θέλουμε να λάβουμε μετά από 2 έτη το ποσό των 1000€ και ότι το επιτόκιο είναι 3% ετήσιο με τετραμηνιαίο ανατοκισμό. Τι ποσό πρέπει σήμερα να επενδύσουμε;

Λύση:

$$1000€ = X_0 \left(1 + \frac{0,03}{\text{year}} 4\text{month} \right)^{\frac{2\text{year}}{4\text{month}}}$$

$$1000€ = X_0 \left(1 + \frac{0,03}{12\text{month}} 4\text{month} \right)^{\frac{2 * 12\text{month}}{4\text{month}}}$$

$$1000€ = X_0 \left(1 + \frac{0,03}{3} \right)^6$$

$$X_0 = 1000€ / 1,01^6$$

$$X_0 = 942€$$

ΕΥΡΕΣΗ ΑΡΧΙΚΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ, ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ (PV), ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ ΟΜΟΛΟΓΟΥ, ΓΡΑΜΜΑΤΙΟΥ (P0)				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ				
ΜΕΓΕΘΟΣ	ΤΙΜΗ	ΧΡΟΝΟΣ	ΜΟΝΑΔΑ ΧΡΟΝΟΥ	ΗΜΕΡΕΣ
ΤΕΛΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ	1.000,00 €			
ΕΠΙΤΟΚΙΟ	3,00%	1,0	ΕΜΠΟΡΙΚΟ ΕΤΟΣ	360,0
ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ	4,0		ΜΗΝΑΣ	120,0
ΧΡΟΝΟΣ ΤΟΚΙΣΜΟΥ	2		ΕΜΠΟΡΙΚΟ ΕΤΟΣ	720,0

ΑΡΧΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ	942,05 €
-----------------	----------

11. Σας χορηγήθηκε σήμερα δάνειο 100 000€, το οποίο θα εξοφλήσετε μετά από 20 ημέρες με το ποσό των 112 000€. Να βρείτε το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο καθώς και το ετήσιο αποτελεσματικό επιτόκιο (πολιτικό έτος).

Λύση: Ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο

$$112000\text{€} = 100000\text{€} \left(1 + \frac{\{r\}}{\text{year}} 20\text{day} \right)^1$$

$$1,12 = \left(1 + \frac{\{r\}}{365\text{day}} 20\text{day} \right)$$

$$\dots \Rightarrow \{r\} = 2,19 = 219\%$$

Οπότε APR είναι 219%/year

Ετήσιο αποτελεσματικό (πραγματικό) επιτόκιο

$$112000\text{€} = 100000\text{€} (1 + r365)^{\frac{20\text{day}}{365\text{day}}}$$

$$1,12 = (1 + r365)^{\frac{20\text{day}}{365\text{day}}}$$

$$1,12^{\frac{365}{20}} = 1 + r365$$

$$r365 = 6,91 = 691\%$$

Οπότε EPR είναι 691%/year

ΕΥΡΕΣΗ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ, ΕΤΗΣΙΟΠΟΙΗΜΕΝΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ				
ΜΕΓΕΘΟΣ	ΤΙΜΗ	ΧΡΟΝΟΣ	ΜΟΝΑΔΑ ΧΡΟΝΟΥ	ΗΜΕΡΕΣ
ΑΡΧΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ	100.000,00 €			
ΤΕΛΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ	112.000,00 €			
ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ	20,0		ΗΜΕΡΑ	20,0
ΧΡΟΝΟΣ ΤΟΚΙΣΜΟΥ	20		ΗΜΕΡΑ	20,0
ΧΡΟΝΟΣ ΧΡΗΣΤΗ ΓΙΑ ΕΠΙΤΟΚΙΟ (ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΟ)				
ΗΜΕΡΑ	1,0			
ΜΗΝΑΣ	1,0			
ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΕΤΟΣ	1,0			
ΕΜΠΟΡΙΚΟ ΕΤΟΣ	1,0			

ΕΠΙΤΟΚΙΟ	ΕΠΙΤΟΚΙΟ / ΜΟΝΑΔΑ ΧΡΟΝΟ	ΜΟΝΑΔΑ ΧΡΟΝΟΥ	ΕΠΙΤΟΚΙΟ ΧΡΗΣΤΗ
	0,60%	ΗΜΕΡΑ	0,60%
	18,00%	ΜΗΝΑΣ	18,00%
	219,00%	ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΕΤΟΣ	219,00%
	216,00%	ΕΜΠΟΡΙΚΟ ΕΤΟΣ	216,00%

Για ετήσιο αποτελεσματικό (πραγματικό) επιτόκιο θέτουμε περίοδο ανατοκισμού 360 ή 365 ημέρες
Για ονομαστικό επιτόκιο θέτουμε τον χρόνο τοκισμού παντού δηλαδή και στην περίοδο ανατοκισμού
"Ο ΧΡΟΝΟΣ ΧΡΗΣΤΗ ΓΙΑ ΕΠΙΤΟΚΙΟ" είναι αν επιθυμεί ο χρήστης π.χ. ανά εξάμηνο, τρίμηνο ή ακόμα και για αριθμό ημερών π.χ. 7 ημέρες (εβδομάδα) κλπ

ΕΥΡΕΣΗ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ, ΕΤΗΣΙΟΠΟΙΗΜΕΝΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ				
ΜΕΓΕΘΟΣ	ΤΙΜΗ	ΧΡΟΝΟΣ	ΜΟΝΑΔΑ ΧΡΟΝΟΥ	ΗΜΕΡΕΣ
ΑΡΧΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ	100.000,00 €			
ΤΕΛΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ	112.000,00 €			
ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ	365,0		ΗΜΕΡΑ	365,0
ΧΡΟΝΟΣ ΤΟΚΙΣΜΟΥ	20		ΗΜΕΡΑ	20,0
ΧΡΟΝΟΣ ΧΡΗΣΤΗ ΠΑ ΕΠΙΤΟΚΙΟ (ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΟ)				
ΗΜΕΡΑ	1,0			
ΜΗΝΑΣ	1,0			
ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΕΤΟΣ	1,0			
ΕΜΠΟΡΙΚΟ ΕΤΟΣ	1,0			

ΕΠΙΤΟΚΙΟ	ΕΠΙΤΟΚΙΟ /ΜΟΝΑΔΑ ΧΡΟΝΟ	ΜΟΝΑΔΑ ΧΡΟΝΟΥ	ΕΠΙΤΟΚΙΟ ΧΡΗΣΤΗ
	1,89%	ΗΜΕΡΑ	1,89%
	56,80%	ΜΗΝΑΣ	56,80%
	691,10%	ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΕΤΟΣ	691,10%
	681,63%	ΕΜΠΟΡΙΚΟ ΕΤΟΣ	681,63%

Για ετήσιο αποτελεσματικό (πραγματικό) επιτόκιο θέτουμε περίοδο ανατοκισμού 360 ή 365 ημέρες
Για ονομαστικό επιτόκιο θέτουμε τον χρόνο τοκισμού παντού δηλαδή και στην περίοδο ανατοκισμού
"Ο ΧΡΟΝΟΣ ΧΡΗΣΤΗ ΠΑ ΕΠΙΤΟΚΙΟ" είναι αν επιθυμεί ο χρήστης π.χ. ανά εξάμηνο , τρίμηνο ή ακόμα και για αριθμό ημερών π.χ. 7 ημέρες (εβδομάδα) κλπ

12. Ένας τοκογλύφος την Πρωτοχρονιά του 2017, δάνεισε σε κάποιον 1000€ για 1 έτος και επιτόκιο 3%/μήνα. Την Πρωτοχρονιά του 2018, τα πήρε πίσω όλα με τον τόκο και την ίδια μέρα δάνεισε όλα όσα είχε πάρει σε άλλον για 1 έτος και εξαμηνιαίο επιτόκιο 18%. Τις Πρωτοχρονιές του 2019, του 2020 και του 2021 έκανε ακριβώς το ίδιο, δάνειζε όλο το ποσό που είχε συγκεντρωθεί για 1 έτος με επιτόκια 9% ανά τρίμηνο, 36% ετήσιο και 3% ανά μήνα αντίστοιχα. Πόσα χρήματα είχε την 1/1/22;

Λύση: Παρατηρούμε ότι $3\%/month = 18\%/6month = 9\%/3month =$

$36\% / year$ δηλαδή όλα τα επιτόκια είναι ίσα. Ουσιαστικά έχουμε φαινόμενο σύνθετου τοκισμού με επιτόκιο $36\%/year$ και ανατοκιστική περίοδο 1 έτος και συνολικής διάρκειας 5 ετών. Άρα:

$$X = 1000\epsilon\left(1 + \frac{0,36}{year} 1year\right)^{\frac{5year}{1year}}$$

$$X = 1000\epsilon(1,36)^5 = 4653\epsilon$$

ΕΥΡΕΣΗ ΤΕΛΙΚΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ, ΤΕΛΙΚΗ ΑΞΙΑ (ΤV), ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΗ ΑΞΙΑ ΟΜΟΛΟΓΟΥ, ΓΡΑΜΜΑΤΙΟΥ (FV)				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ				
ΜΕΓΕΘΟΣ	ΤΙΜΗ	ΧΡΟΝΟΣ	ΜΟΝΑΔΑ ΧΡΟΝΟΥ	ΗΜΕΡΕΣ
ΑΡΧΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ	1.000,00 €			
ΕΠΙΤΟΚΙΟ	36,00%	1,0	ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΕΤΟΣ	365,0
ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ	1,0		ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΕΤΟΣ	365,0
ΧΡΟΝΟΣ ΤΟΚΙΣΜΟΥ	5		ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΕΤΟΣ	1.825,0

ΤΕΛΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ	4.652,59 €
-----------------	------------

Το επιτόκιο θεωρείται πάντα ως προς το χρόνο π.χ. εδώ 12, 5% εξαμηνιαίο, γράφεται ως τιμή 12,5% σε χρόνο 6 με μονάδα μέτρησης μήνας

13. Ένας τοκογλύφος την Πρωτοχρονιά του 2017, δάνεισε σε κάποιον 1000€ για 1 έτος και επιτόκιο 3%/μήνα με απλό τοκισμό. Την Πρωτοχρονιά του 2018, τα πήρε πίσω όλα με τον τόκο και την ίδια μέρα δάνεισε όλα όσα είχε πάρει σε άλλον για 1 έτος και εξαμηνιαίο επιτόκιο 36%. Τις Πρωτοχρονιές του 2019, του

2020 και του 2021 έκανε ακριβώς το ίδιο, δάνειζε όλο το ποσό που είχε συγκεντρωθεί για 1 έτος με επιτόκια 9% ανά τρίμηνο, 72% ετήσιο και 3% ανά μήνα αντίστοιχα. Πόσα χρήματα είχε την 1/1/22;

Λύση: Αυτό το πρόβλημα επίτηδες θα λυθεί με δυο τρόπους. Ο 1ος θα είναι απλός αλλά μακρύς..

$$\text{Για 2017-18 έχουμε: } X = 1000\text{€} \left(1 + \frac{0,03}{\text{month}} 1 \text{ year} \right) = 1360\text{€}$$

$$\text{Για 2018-19 έχουμε: } X = 1360\text{€} \left(1 + \frac{0,36}{\text{6month}} 1 \text{ year} \right) = 2339,2\text{€}$$

$$\text{Για 2019-20 έχουμε: } X = 2339,2\text{€} \left(1 + \frac{0,09}{\text{3month}} 1 \text{ year} \right) = 3181,3\text{€}$$

$$\text{Για 2020-21 έχουμε: } X = 3181,3\text{€} \left(1 + \frac{0,72}{\text{year}} 1 \text{ year} \right) = 5471,9\text{€}$$

$$\text{Για 2021-22 έχουμε: } X = 5471,9\text{€} \left(1 + \frac{0,03}{\text{month}} 1 \text{ year} \right) = 7441,8\text{€}$$

Αλλιώς, με χρήση της (4.6)

$$X = 1000\text{€} \left(1 + \frac{0,36}{\text{year}} 1 \text{ year} \right)^{3\text{year}/1\text{year}} \cdot \left(1 + \frac{0,72}{\text{year}} 1 \text{ year} \right)^{2\text{year}/1\text{year}}$$

$$X = 1000\text{€} * 1,36^3 * 1,72^2$$

$$X = 1000\text{€} * 2,515456 * 2,9584 = 7441,7\text{€}$$

Σχόλιο: Ο 2ος τρόπος είναι πιο σύντομος και επιπλέον έχει μικρότερο σφάλμα γιατί στον 1ο είχαμε πολλά ενδιάμεσα αποτελέσματα, που γράφτηκαν κατά προσέγγιση.

14. Κάποιος σκοπεύει να μας δανείσει 1000€ για ακριβώς δυο εμπορικά έτη με ανατοκιστική περίοδο εξαμηνιαία και ζητά επιτόκιο 10%/(εμπ. έτος) για τις μονές μέρες του 1ου έτους δανεισμού, ενώ για τις ζυγές μέρες 12%/(εμπ. έτος) και 12%/(εμπ. έτος) για το 1ο τρίμηνο του 2ου έτους και για το υπόλοιπο διάστημα 10%/(εμπ. έτος). Πόσα ευρώ θα πρέπει να του αποδώσουμε;

Λύση: Το επιτόκιο 10% ανά εμπορικό έτος δρα για 0,5 εμπ.έτος συν 3 τρίμηνα δηλαδή για 5 τρίμηνα = 5*3month = 15 month. Το επιτόκιο του 12% ανά εμπορικό έτος δρα για το υπόλοιπο χρονικό διάστημα 2year-15month = 9month. Άρα:

$$X = 1000\text{€} \left(1 + \frac{0,10}{\text{year}} 6\text{month} \right)^{15\text{m}/6\text{m}} \cdot \left(1 + \frac{0,12}{\text{year}} 6\text{month} \right)^{9\text{m}/6\text{m}}$$

$$X = 1000\text{€} \left(1 + \frac{0,10}{\text{year}} 0,5\text{year} \right)^{2,5} \cdot \left(1 + \frac{0,12}{\text{year}} 0,5\text{year} \right)^{1,5} \Rightarrow$$

$$X = 1000\text{€} (1,05)^{2,5} (1,06)^{1,5} \Rightarrow X = 1000\text{€} * 1,13 * 1,09 = 1233,2\text{€}$$

Σχόλιο: “Συζητήθηκε” με το CHATGTP η σχέση (4.2) και η εξίσωση μεγεθών, με αφορμή την άσκηση 6. Θα βρείτε τον διάλογο στο 2 του Παραρτήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

6. ΕΡΕΥΝΑ

6.1 Σκοπός έρευνας

Σκοπός της έρευνας είναι να εξακριβωθεί, αν η χρήση της ταμπλέτας (εικόνα 6) είναι πρακτικά αξιοποιήσιμη από κοινό, που δε γνωρίζει τα πραγματευόμενα της εργασίας. Συγκεκριμένα, η διερεύνηση της πρακτικής εφαρμογής της ταμπλέτας του τοκισμού, καθώς και των πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων της συγκριτικά με την παραδοσιακή μέθοδο επίλυσης προβλημάτων της αξίας του χρήματος (απλής και διαχρονικής). Δευτερευόντως, ιχνηλατεί και σε ποιο κομμάτι ή κομμάτια αντιμετωπίζει αντιξοότητα το δείγμα σε σχέση με τις μαθηματικές εξισώσεις και δη εξισώσεις μεγεθών.

6.2 Ερευνητικά ερωτήματα

Τα βασικά ερευνητικά ερωτήματα επικεντρώνονται στα πιθανά πλεονεκτήματα/μειονεκτήματα της ταμπλέτας σε σχέση με την παραδοσιακή μέθοδο.

Συγκεκριμένα:

- Είναι κατανοητότερη η χρήση των μεγεθών;
- Είναι ασφαλέστερη η επίλυση του προβλήματος;
- Επιλύει ευκολότερα τα λεγόμενα δύσκολα προβλήματα;
- Απαιτεί λιγότερη σκέψη η λύση (μηχανική);
- Είναι ξεκάθαρη η μεθοδολογία επίλυσης;
- Μπορεί άμεσα ο λύτης να αντιληφθεί έλλειψη ή κακή διατύπωση δεδομένου ή ζητουμένου (ελεγκτική);
- Μαθαίνεται ευκολότερα (εκμάθηση);
- Απαιτεί λιγότερη απομνημόνευση;
- Είναι παιγνιώδης (ευχάριστη);
- Τονώνει την αυτοπεποίθηση του χρήστη/λύτη;

Στην 8η ερώτηση του ερωτηματολογίου εμφανίζονται δέκα(10) υποερωτήματα, που έχουν άμεση σχέση με τα παραπάνω και το δικαίωμα, αν δεν διακρίνει ο ερωτώμενος πλεονέκτημα/μειονέκτημα να μην απαντήσει (σημάνει). Ακόμα, στις ερωτήσεις 5 και 6 ρωτιέται γενικά, αν νομίζει ο απαντών ότι:

- Η ταμπλέτα έχει χρησιμότητα στη λύση προβλημάτων, που σχετίζεται;
- Με τη ταμπλέτα απλοποιείται η επίλυση των προβλημάτων, που σχετίζεται;

Η έρευνα περαιτέρω στοχεύει στην εξέταση των δυσκολιών που αντιμετωπίζει ο λύτης (το δείγμα) στην κατάστρωση και επίλυση μαθηματικών (αλγεβρικών) εξισώσεων και δη εξισώσεων μεγεθών. Στην 7η ερώτηση καλείται ο ερωτώμενος, εφόσον ασχολήθηκε, έστω και παρατηρησιακά, με τα προβλήματα του βοηθητικού εγγράφου, που προμηθεύτηκε μαζί με το ερωτηματολόγιο, να απαντήσει αν τον δυσκολεύουν:

- Οι μετατροπές των μονάδων μέτρησης;
- Η λύση των εξισώσεων;
- Οι αντικαταστάσεις των μεγεθών στην εξίσωση;
- Είναι εντελώς ακατανόητα τα προβλήματα του βοηθητικού;

6.3 Περιγραφή της έρευνας

Λόγος επιλογής δείγματος&μεθοδολογίας: Είναι κυρίως ο περιορισμένος χρόνος που έχει ένας μεταπτυχιακός φοιτητής για να ολοκληρώσει την έρευνά του. Τηρήθηκε το παρακάτω χρονοδιάγραμμα Gantt (εικόνα 8).

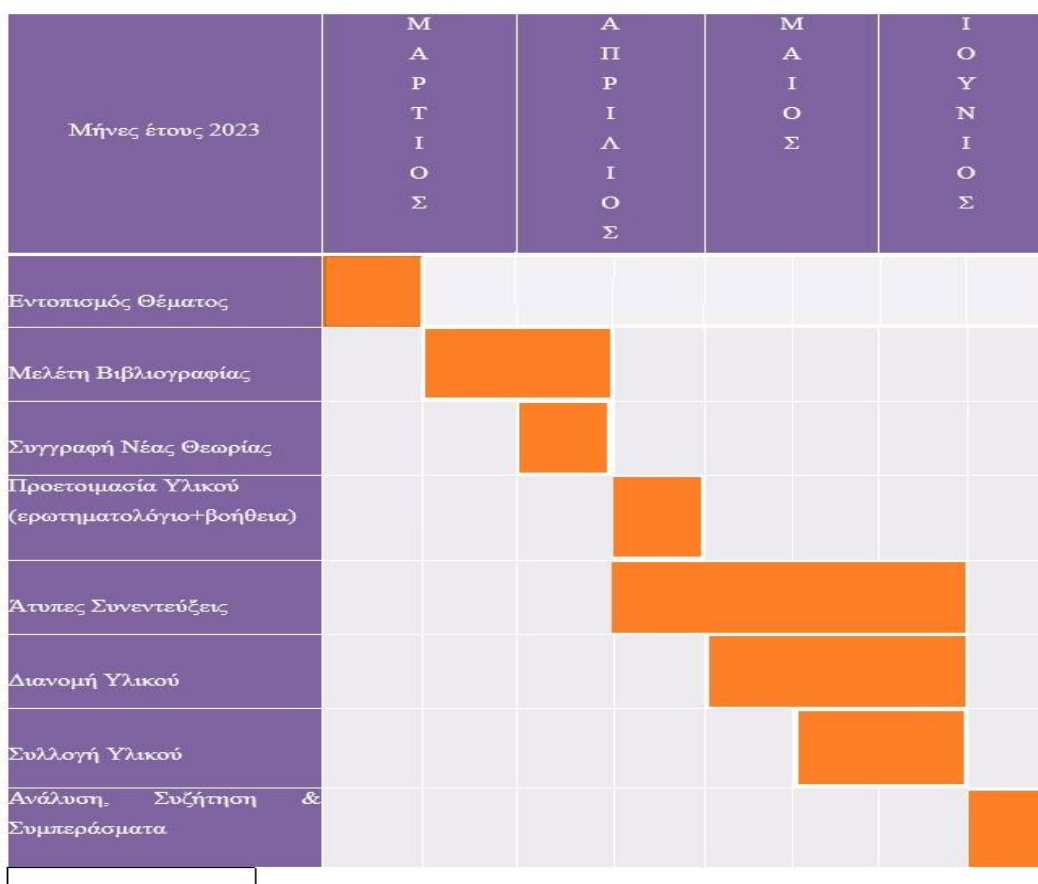
Δείγμα ευκολίας: Μικτό από προπτυχιακούς φοιτητές του τμήματος Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής, μεταπτυχιακούς του προγράμματος «Δημόσια Οικονομική και Πολιτική» του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής και διδάσκοντες στο άνωθι μεταπτυχιακό.

Μεθοδολογία: Συμπλήρωση δομημένου (καθορισμένη σειρά ερωτήσεων) ερωτηματολογίου (Παράρτημα 1Α). Ακολουθεί πορεία εξειδίκευσης (funnel technique) και αποτελείται από οχτώ(8) ερωτήσεις. Αναλυτικότερα:

- 1η ερώτηση, αφορά την ιδιότητα του συμμετέχοντος στην έρευνα (διδάσκων, μεταπτυχιακός φοιτητής, προπτυχιακός φοιτητής και αν είναι κάτι άλλο να εξαιρεθεί από το δείγμα)
- 2η, 5η και 6η ερώτηση χρησιμοποιούν την πενταβάθμια κλίμακα Likert
- 3η ερώτηση, κλειστού τύπου πολλαπλής προκαθορισμένης απόκρισης
- 4η ερώτηση, ανοικτού τύπου, φιλτραρίσματος (filter question)
- 7η ερώτηση, κλειστού τύπου πολλαπλής προκαθορισμένης απόκρισης, με φιλτράρισμα
- 8η ερώτηση, μικτού τύπου αποτελούμενη από 10 υπο-ερωτήσεις (ειδικές) κλειστού τύπου διχοτόμησης (με δυνατότητα να μην επιλέξει καμιά από τις δυο),

και δυνατότητα συμπλήρωσης μέχρι 3 αυτοαπαντούμενων ερωτήσεων διχοτόμησης από ερωτώμενο.

Χρονοδιάγραμμα Έρευνας



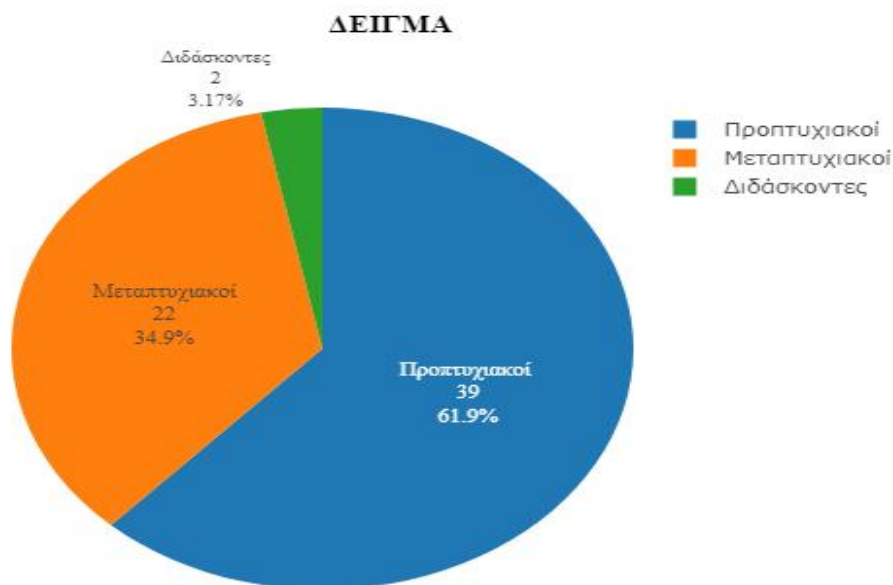
Εικόνα 8: Χρονοδιάγραμμα έρευνας

Πηγή: Συγγραφέας

Διανομή: Χέρι-χέρι (από τον συγγραφέα και τη γραμματεία του μεταπτυχιακού) για να υπάρξει γρήγορη εξήγηση και αποσαφήνιση αντικείμενου έρευνας. Επίσης, για να χορηγηθούν το λεγόμενο “βοηθητικό έγγραφο” (Παράρτημα 1B) μαζί με την έντυπη ταμπλέτα της εικόνας 6 και σύντομα να εξηγηθούν.

Αριθμός διανεμηθέντων εντύπων: Εκατό-δέκα(110) ερωτηματολόγια μαζί με εκατό-δέκα(110) ταμπλέτες και εκατό-δέκα(110) βοηθητικά έγγραφα.

Αριθμός συλλεχθέντων ερωτηματολογίων: Εξήντα-τρία(63), η σύνθεση του δείγματος ως προς την ιδιότητά τους, είναι αυτή που εμφανίζεται στο διάγραμμα πίτας της εικόνας 9.



Εικόνα 9: Δείγμα

Πηγή: Συγγραφέας με χρήση [Pie Chart Maker](#)

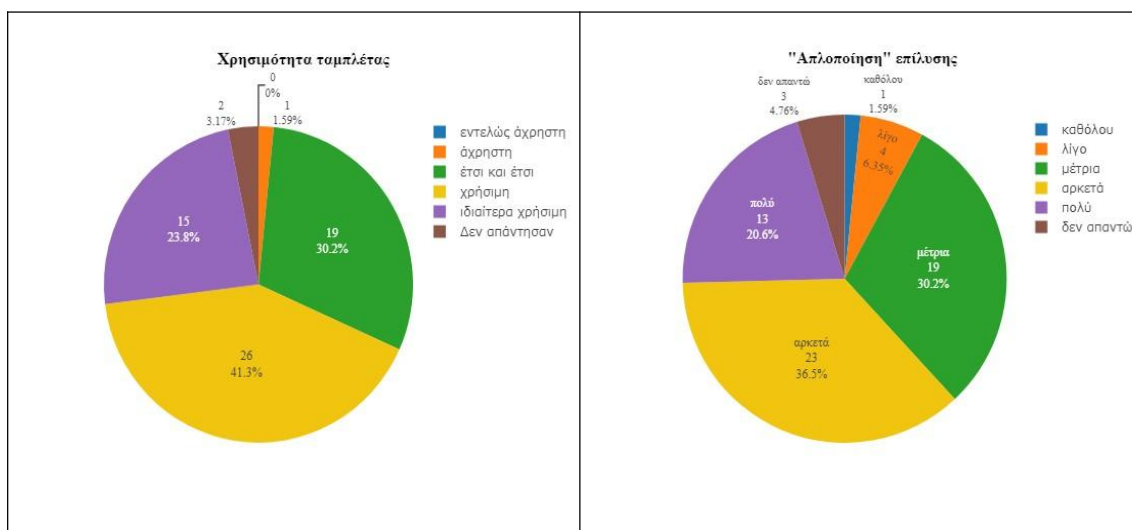
6.4 Αποτελέσματα της έρευνας

Παράχθηκαν τα αποτελέσματα, που εμφανίζονται στο πλέγμα διαγραμμάτων-πίτας της εικόνας 10 και αφορούν όλο το δείγμα. Στο πλέγμα της εικόνας 9, καθώς και στα υπόλοιπα πλέγματα τα αποτελέσματα είναι ιεραρχημένα από αριστερά προς τα δεξιά και από πάνω προς τα κάτω, ξεκινώντας με τα αποτελέσματα των ερωτήσεων 5 και 6, συνεχίζοντας με τις δέκα υποερωτήσεις της ερώτησης 8. Για λόγους καλύτερης μελέτης του δείγματος εμφανίζονται τα επιμέρους αποτελέσματα (εικόνα 11) χωριστά για μεταπτυχιακούς φοιτητές (δείγμα: εικοσιδύο 22 ατόμων), ενώ οι προπτυχιακοί τέμνονται σε δύο δείγματα. Η τομή των προπτυχιακών έγινε με κριτήριο τη δηλωμένη από αυτούς ικανότητα στην επίλυση εξισώσεων (ερώτηση 2 του ερωτηματολογίου) με δευτερεύον κριτήριο την εμπειρία τους στα λεγόμενα χρηματοοικονομικά (ερώτηση 3 του ερωτηματολογίου). Έτσι προέκυψε ένα δείγμα είκοσι(20) προπτυχιακών φοιτητών με περιορισμένες ως μέτριες ικανότητες-γνώσεις, που δίδουν τα αποτελέσματα της εικόνας 12 και ένα δείγμα δεκαεννέα(19) ατόμων, με μέτριες ως άριστες ικανότητες-γνώσεις, με αποτελέσματα αυτά της εικόνας 13. Η αρχική σκέψη ήταν να μελετούσαμε μια ευρύτερη γκάμα επιμέρους δειγμάτων, αν το συνολικό δείγμα ήταν μεγάλο. Οι διδάσκοντες δεν μελετώνται ως επιμέρους δείγμα

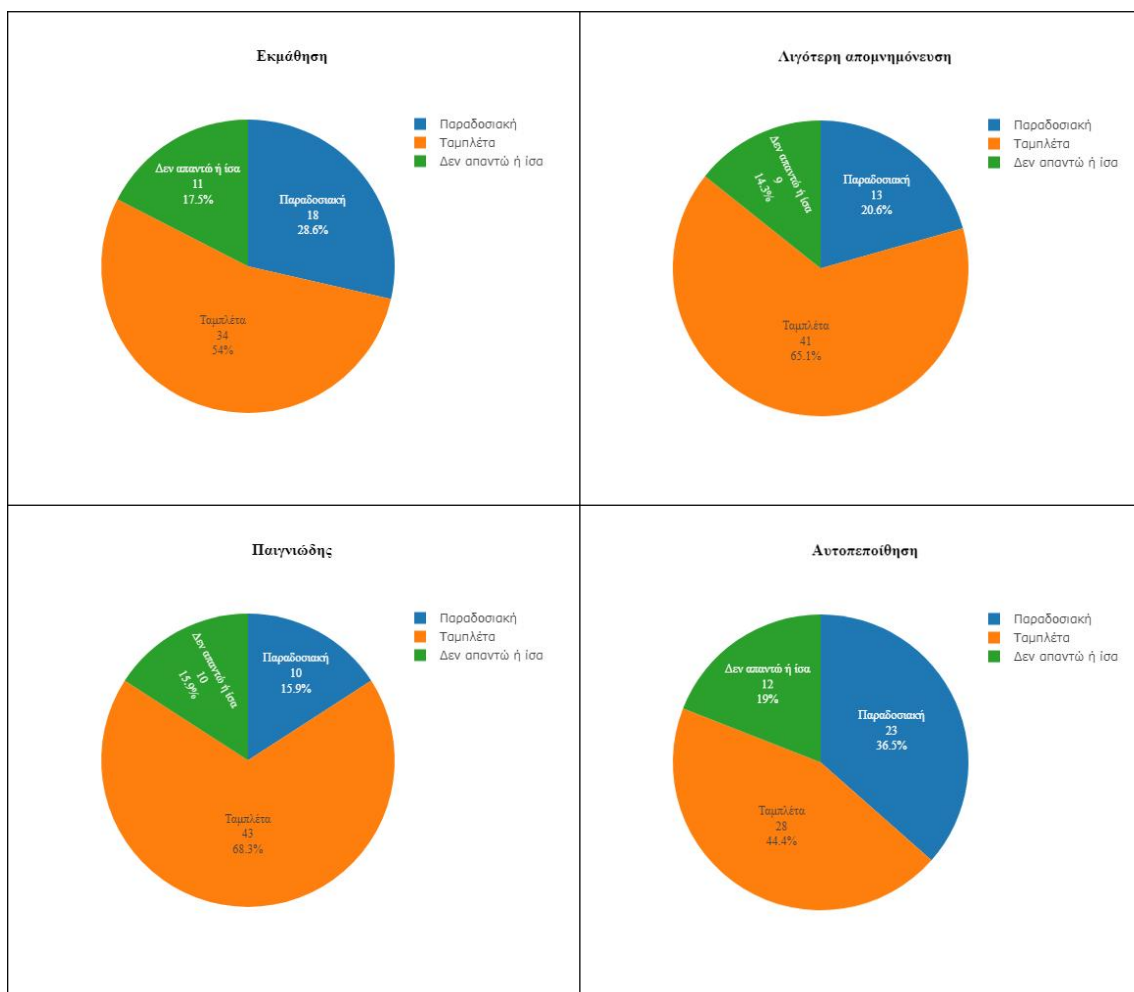
λόγω του μικρού αριθμού τους. Επίσης, παρόλο που τα δείγματα είναι σχετικά μικρά, δίδονται και τα ποσοστά(%) για να είναι ευκόλως διακρινόμενα τα αποτελέσματα. Τα συμπεράσματα, μάλλον περισσότερο ποιοτικά (ασφαλή ποσοτικά δεν είναι σε καμία περίπτωση), συγκλίνουν ότι η μέθοδος με την ταμπλέτα (και τις εξισώσεις μεγεθών) ίσως αξίζει να ερευνηθεί περαιτέρω λόγω της μεγάλης διαφοράς με την παραδοσιακή. Τέλος, θα πρέπει να επισημανθεί η αστοχία της έρευνας (και ενδεχόμενο σημείο γενικότερου προβληματισμού) στον εντοπισμό “μαθηματικών δυσκολιών” (ερώτηση 7), τριάντα-πέντε(35) στους εξήντα-τρεις(63) δεν απάντησαν καν και μόλις δώδεκα(12) στους εξήντα-τρεις(63) δεν αντιμετωπίζουν καμία δυσκολία.

Σχόλιο: Ο συγγραφέας πιθανολογεί ότι τα βασικά ερευνητικά ερωτήματα κάλυψαν πολύ καλά τη σύγκριση των μεθόδων, γιατί στην 8η ερώτηση δε συμπληρώθηκε από ερωτώμενους κάτι ουσιαστικά παραπάνω. Σε ένα μόνο συμπληρώθηκε η λέξη “τυφλοσύρτης” με σήμανση στην ταμπλέτα, αλλά δεν ελήφθη υπόψη γιατί καλύπτεται από τον όρο “μηχανική”.

Συνολικά αποτελέσματα (μικτό δείγμα)



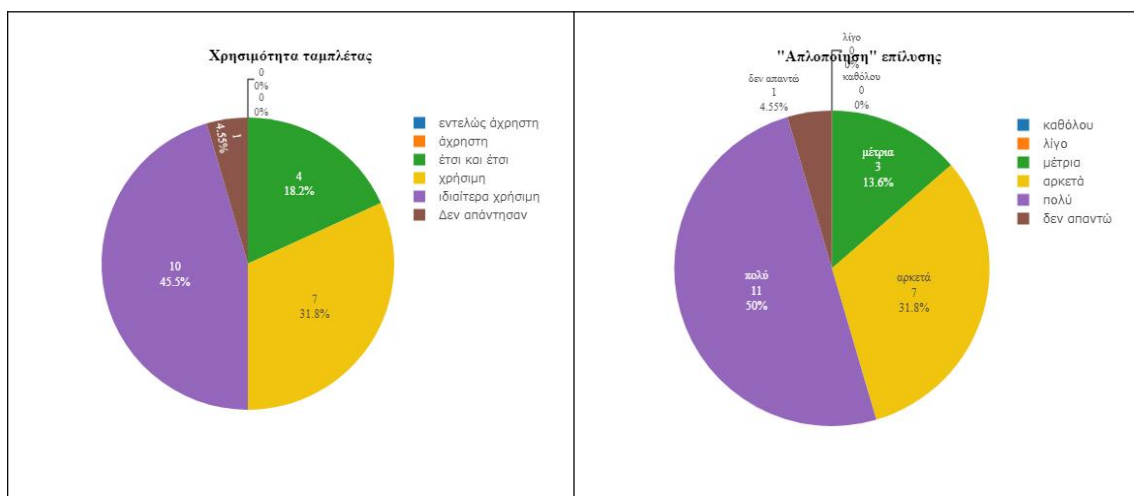




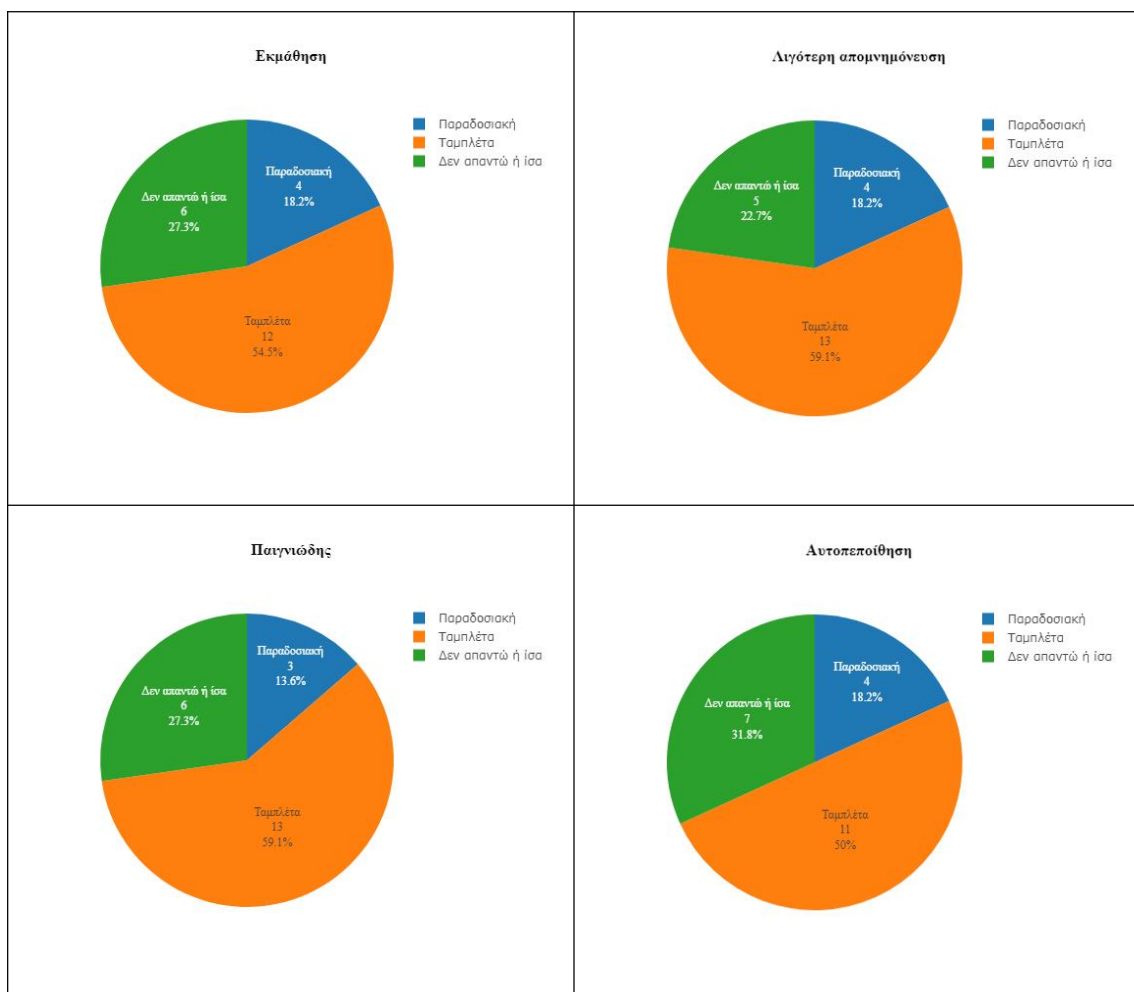
Εικόνα 10: Συνολικά αποτελέσματα

Πηγή: Συγγραφέας

Αποτελέσματα δείγματος μεταπτυχιακών φοιτητών

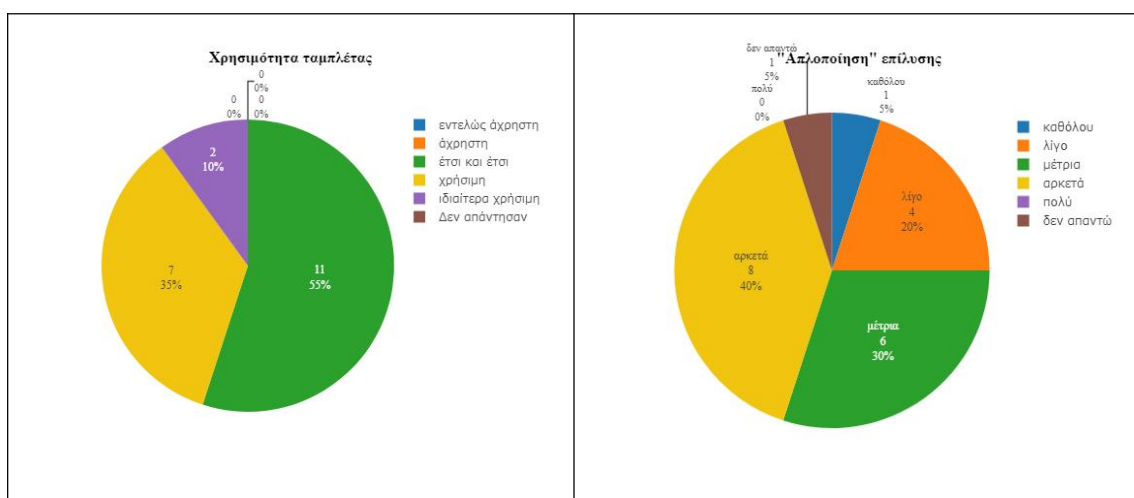




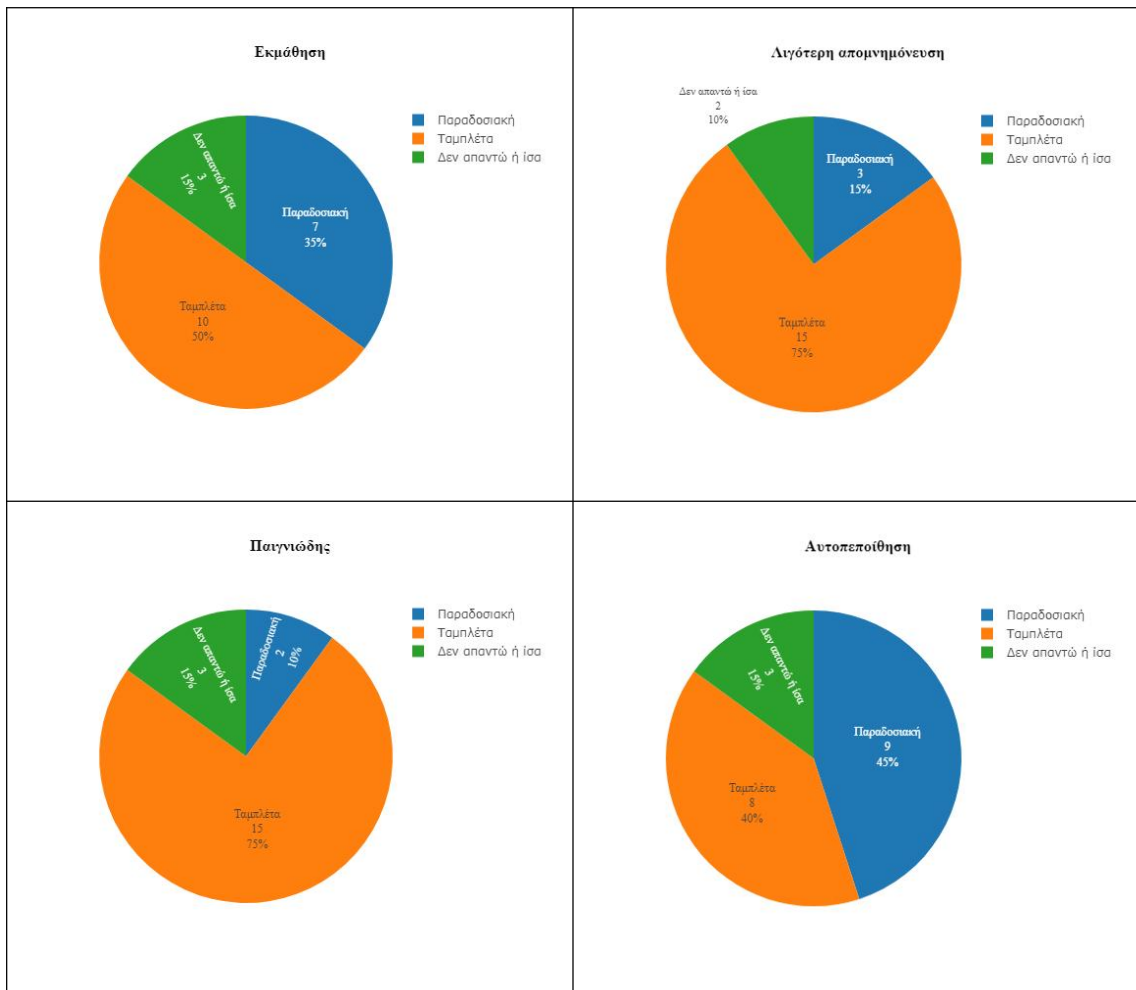


Εικόνα 11: Αποτελέσματα δείγματος μεταπτυχιακών φοιτητών
 Πηγή: Συγγραφέας

Αποτελέσματα δείγματος προπτυχιακών φοιτητών μεσαίων ικανοτήτων

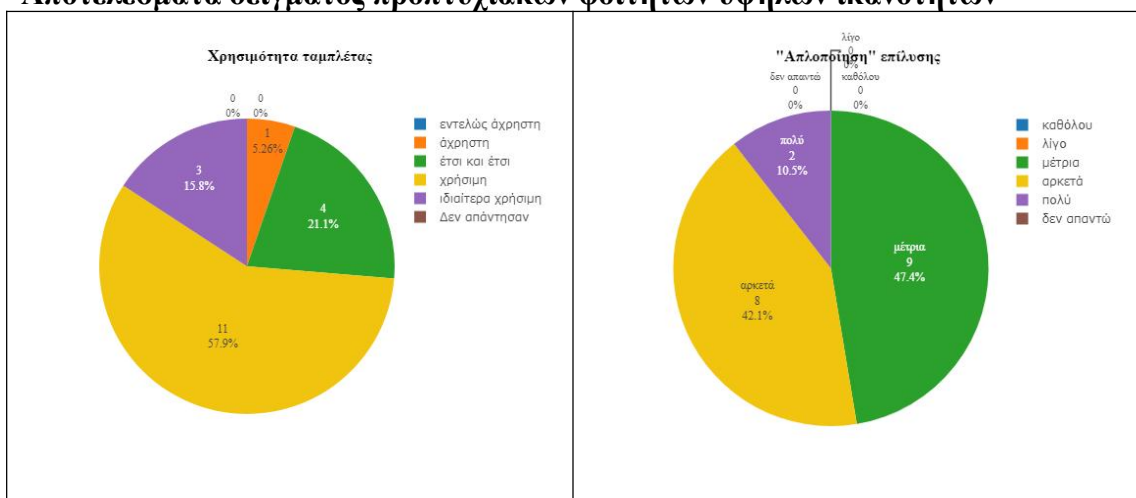




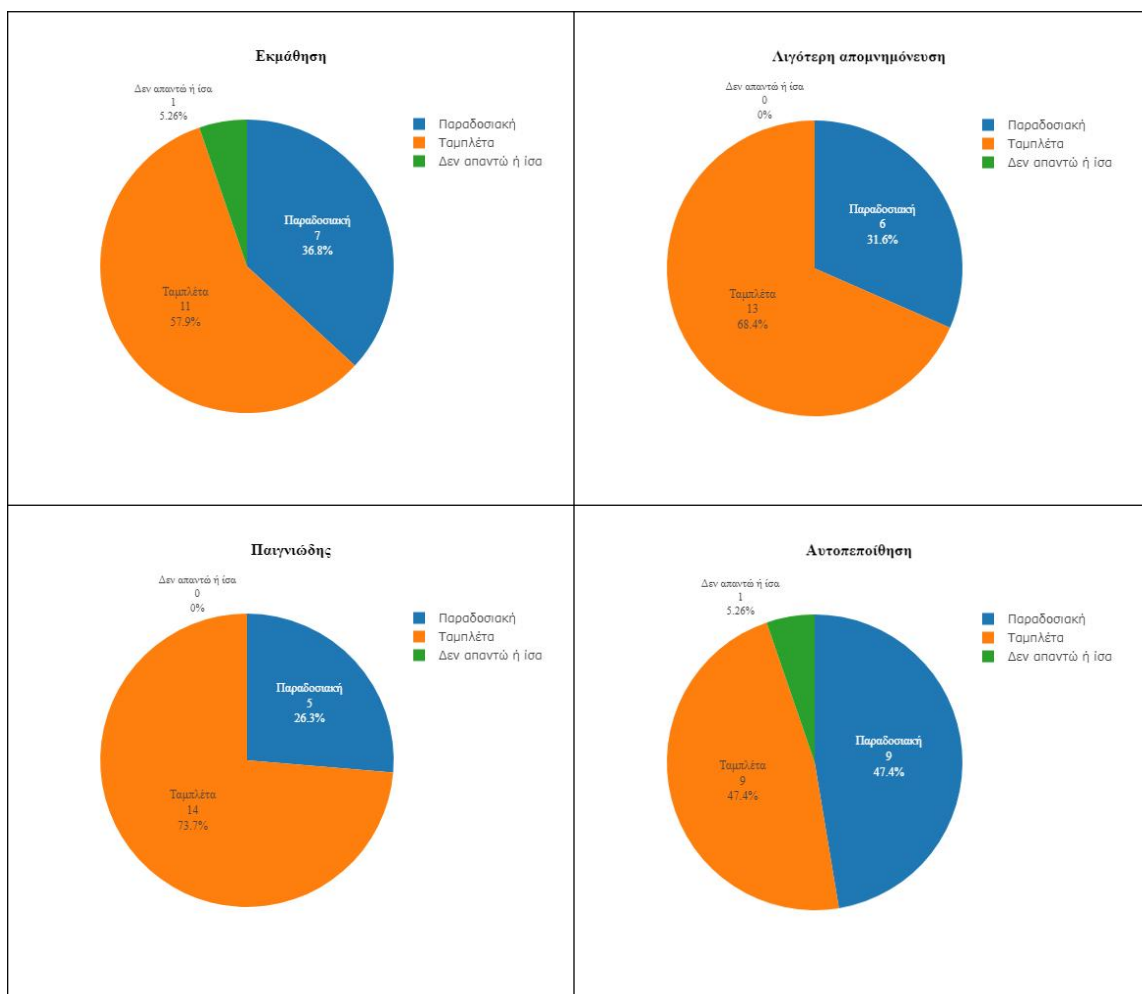


Εικόνα 12: Αποτελέσματα δείγματος προπτυχιακών μεσαίων ικανοτήτων
 Πηγή: Συγγραφέας

Αποτελέσματα δείγματος προπτυχιακών φοιτητών υψηλών ικανοτήτων







Εικόνα 13: Αποτελέσματα δείγματος προπτυχιακών υψηλών ικανοτήτων

Πηγή: Συγγραφέας

6.5 Προτεινόμενη πειραματική έρευνα

Τα αποτελέσματα της έρευνας, αναφέρθηκε παραπάνω, είναι ενδιαφέροντα και θετικά σε σχέση με τη μέθοδο της ταμπλέτας, που κάνει χρήση εξίσωσης μεγεθών. Θα μπορούσε να γίνει μια πιο ενδελεχής έρευνα με την διενέργεια πειραματικής διδασκαλίας σε τμήμα πρωτοετών φοιτητών, που έχει χωριστεί ισοδύναμα σε δύο ισοπληθή “υπομήματα”, με βάση τις γνώσεις τους στα μαθηματικά (ή τη σειρά εισαγωγής τους στο πανεπιστημιακό τμήμα). Μια προτεινόμενη απλή διαδικασία χωρισμού, αν ληφθεί ως κριτήριο η σειρά εισαγωγής, θα ήταν ο 1ος να πάει στο Α υπομήμα, ο 2ος και 3ος στο Β υπομήμα, ο 4ος και 5ος στο Α υπομήμα κοκ.

Η ανεξάρτητη μεταβλητή θα είναι η μέθοδος διδασκαλίας (ταμπλέτα και εξίσωση μεγεθών έναντι της παραδοσιακής) και η εξαρτημένη τα παραγόμενα

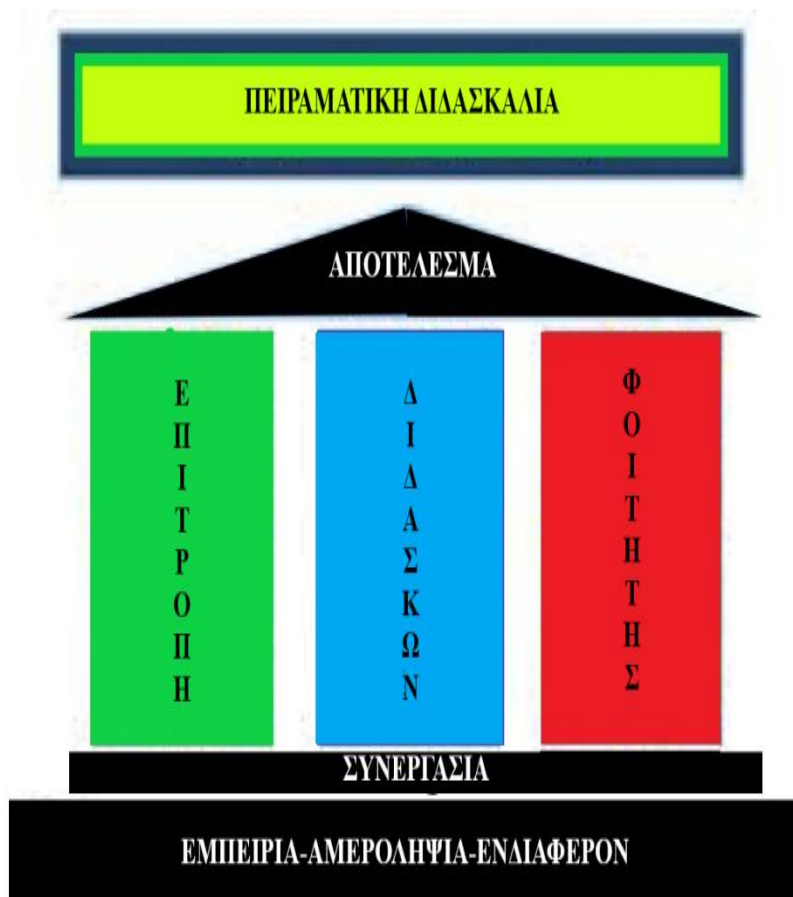
αποτελέσματα της κάθε μεθόδου σε σχέση με αυτά, που ήδη έχουν διατυπωθεί παραπάνω ως ερευνητικά ερωτήματα και κορωνίδα γραπτή/ές εξέταση/εις των φοιτητών, που μετέχουν. Τα στάδια του πειράματος θα μπορούσαν να είναι τα εξής:

- Δημιουργία επιτροπής έρευνας-διδασκαλίας. Σκοπός της είναι η γενική επίβλεψη της έρευνας (συνθήκες διδασκαλίας) και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων, η δημιουργία και ο καθορισμός της διδακτέας ύλης, η εκπαίδευση και επιλογή των δύο καθηγητών που θα διδάξουν. Ο καθηγητής στο τμήμα, που θα χρησιμοποιήσει την παραδοσιακή μέθοδο, θα μπορούσε να είναι “παραδοσιακός”, γιατί διαθέτει την απαραίτητη εμπειρία για να την διδάξει. Στο άλλο υποτμήμα με την ταμπλέτα θα πρέπει πρώτα να εκπαιδευτεί καθηγητής και μετά να την διδάξει. Οι δύο αυτοί καθηγητές μολονότι θα είναι τυπικά μέλη της ερευνητικής επιτροπής, θα είναι ουσιαστικά αποστασιοποιημένοι από αυτή. Δε θα αξιολογήσουν τις μεθόδους, ούτε και θα διατυπώσουν ή θα βαθμολογήσουν γραπτά εξετάσεων. Πέραν ζητημάτων διδασκαλίας και των ενδεχόμενων αντιξοοτήτων, που θα αντιμετωπίσουν στην διεξαγωγή του πειράματος, δε θα έχουν κρίση επί της “εξαρτημένης μεταβλητής”. Τελικά, η επιτροπή θα ήταν καλό να ήταν τουλάχιστον 3+2 δηλαδή τρεις καθηγητές με τον “τελευταίο λόγο” συν δυο (οι διδάσκοντες καθηγητές).
- Διδασκαλία και γραπτή εξέταση. Σε δύο διαλέξεις οι καθηγητές διδάσκουν απλό τοκισμό, σύνθετο τοκισμό, παρούσα και τελική αξία, ονομαστική και πραγματική απόδοση κλπ. Ακολουθεί προειδοποιημένη γραπτή εξέταση με ανοικτές σημειώσεις την 1η ώρα της 3ης διάλεξη στον ίδιο χώρο και με τα ίδια θέματα και για τα δυο υποτμήματα, απουσία των διδασκόντων καθηγητών, χωρίς επεξηγήσεις, υπό την επίβλεψη μέλους/ών της επιτροπής. Τη 2η ώρα οι φοιτητές συμπληρώνουν ερωτηματολόγια σχετιζόμενα με τη διδασκαλία, τις μαθησιακές δυσκολίες, που αντιμετώπισαν και για τα θέματα της γραπτής εξέτασης. Μετά τη συμπλήρωση των ερωτηματολογίων, το μέλος ή τα μέλη της ερευνητικής επιτροπής συζητούν φιλικά με τους φοιτητές και καταγράφουν απόψεις τους σχετικά με διδασκαλία και θέματα εξέτασης, ενώ παράλληλα εκτιμούν γενικότερο κλίμα σε κάθε υποτμήμα. Καλό θα είναι, το κάθε υποτμήμα να έχει τοποθετηθεί με τέτοιο τρόπο στο χώρο ώστε να ξεχωρίζει π.χ. αριστερά-δεξιά. Σημαντικό είναι ο κεντρικός συζητητής (καθηγητής) να είναι έμπειρος, χαρισματικός και αμερόληπτος, όπως επίσης το ιδανικό είναι να παρίσταται και ένα τουλάχιστον άλλο μέλος της επιτροπής (όχι όμως οι διδάσκοντες καθηγητές).

- Βαθμολόγηση γραπτών και αξιολόγηση μεθόδων. Η επιτροπή βαθμολογεί τα γραπτά, μελετά τα ερωτηματολόγια και συνεκτιμά την συζήτηση με φοιτητές σε αυτά.
- Τελική κρίση. Η επιτροπή αποφασίζει (χωρίς πάλι τους δυο διδάσκοντες): α) Αν το πείραμα είχε παταγώδη αποτυχία, άρα να μην συνεχιστεί ή β) Αν είχε ενδιαφέροντα ευρήματα να επαναληφθεί στο μέλλον με κατάλληλες βελτιώσεις ή γ) Αν είχε εξαιρετικά αποτελέσματα με παράλληλη απήχηση σε φοιτητές να υιοθετηθεί.

Η προτεινόμενη έρευνα μέσω της πειραματικής διδασκαλίας, όπως και κάθε άλλη του είδους της, έχει 3 βασικούς πυλώνες (εικόνα 14) για την επιτυχή διεξαγωγή της :

1. Έμπειρη, αμερόληπτη επιτροπή έρευνας.
2. Δυο έμπειροι και χαρισματικοί διδάσκοντες.
3. Συνεργάσιμοι φοιτητές.



Εικόνα 14: Πειραματική διδασκαλία

Πηγή: Συγγραφέας

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1Α. ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΕΡΕΥΝΑΣ

Παρακάτω είναι το ακριβές απόσπασμα του ερωτηματολογίου με τις ερωτήσεις. Έχουν παραληφθεί, τα ευχαριστήρια, πως θα παραδοθεί κλπ.

1. Θα θέλατε να αναφέρετε αν είστε καθηγητής, μεταπτυχιακός φοιτητής ή κάτι άλλο;
2. Πόσο καλά τα πάτε κατά την άποψή σας με μαθηματικές εξισώσεις; (παρακαλώ, να σημάνετε μόνο το κουτί, που αντιστοιχεί στην προτίμησή σας).

--	--	--	--	--

Καθόλου καλά Λίγο καλά Μέτρια Καλά Πολύ καλά

3. Έχετε ασχοληθεί στο παρελθόν με λύση προβλημάτων τοκισμού, ανατοκισμού, παρούσας αξίας, ονομαστικής και πραγματικής απόδοσης, ρέπος, γραμματίων; (παρακαλώ, να σημάνετε τα κουτιά, που αντιστοιχούν σε κατάφαση σας).

--	--	--	--	--

Απλός&Σύνθετος Τόκος Παρούσα αξία Απόδοση Ρέπος Γραμμάτια

4. Αναφέρετε παρακαλώ το λόγο ή λόγους, που δεν θέλετε να συνεχίσετε, αλλιώς αγνοήστε την παρούσα και συνεχίστε στην επόμενη.

.....

.....

.....

5. Νομίζετε ότι η “ταμπλέτα ανατοκισμού” έχει κάποια χρησιμότητα γενικά για τη λύση προβλημάτων, που σχετίζεται;

--	--	--	--	--

εντελώς άχρηστη άχρηστη έτσι και έτσι χρήσιμη ιδιαίτερα χρήσιμη

6. Ασχέτως αν είχατε τη διάθεση ή/και το χρόνο να ασχοληθείτε με τα άλυτα προβλήματα, νομίζετε ότι απλοποιείται ή επίλυσή τους με την “ταμπλέτα” ή όχι;

--	--	--	--	--

Καθόλου Λίγο Μέτρια Αρκετά Πολύ

7. Αν δοκιμάσατε να λύσετε κάποια από τα προβλήματα με ταμπλέτα, που δυσκολευτήκατε; (Παρακαλώ, να σημάνετε τα κουτιά, που αντιστοιχούν σε κατάφαση σας. Αν δεν ασχοληθήκατε με αυτά να παραλείψετε την ερώτηση)

--	--	--	--	--

Μετατροπές μον.μέτρ.

Λύση εξισώσεων

Αντικαταστάσεις

Ακατανόητα προβλήματα

Πουθενά

8. Που πλεονεκτεί η ταμπλέτα και που η κλασσική μέθοδος;

(Παρακαλώ, να σημάνετε το κουτί για τη μέθοδο που πλεονεκτεί αλλιώς αφήστε το κενό. Υπάρχει επίσης χώρος για 3 ακόμα δικές σας απόψεις, μη ξεχάσετε τα “τικ”)

	ΚΛΑΣΣΙΚΗ	ΤΑΜΠΛΕΤ
Μου είναι πιο κατανοητά τα μεγέθη π.χ. επιτόκιο		
Μικρότερος κίνδυνος λάθους ή παράλειψης		
Λύνω και τα λεγόμενα δύσκολα προβλήματα		
Απαιτεί λιγότερο χρόνο σκέψης στη λύση		
Καταλαβαίνω καλύτερα τι κάνουμε		
Εύκολα διακρίνω, αν δεδομένα ορθά ή/και λείπουν		
Μου ήταν εύκολο να την μάθω		
Δεν χρειάζεται να θυμάμαι θεωρία		
Μοιάζει με παιχνίδι		
Αισθάνομαι μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση		

1B. ΒΟΗΘΗΤΙΚΟ ΕΓΓΡΑΦΟ ΕΡΕΥΝΑΣ

Παρακάτω είναι το ακριβές βοηθητικό έγγραφο, που διανεμήθηκε μαζί με την ταμπλέτα, που εδώ έχει παραλειφθεί..

Οι τέσσερις πρώτες ασκήσεις είναι από το βιβλίο ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟ ΣΥΓΧΡΟΝΗΣ ΧΡΗΜΑΤΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ των Γρ. Γκίκα και Αλ. Χυζ (Εκδ. BROKEN HILL, 2020). Η 5η είναι μια περίεργη άσκηση και ίσως δύσκολη. Οι τελευταίες δύο είναι άλλυτες με δεδομένο τελικό αποτέλεσμα.

1. Έστω ότι κάποιος καταθέτει χρηματικό ποσό 100 000 € σε ένα τραπεζικό λογαριασμό. Το ποσό αυτό ανατοκίζεται κάθε 6 μήνες, με εξαμηνιαίο επιτόκιο 10%. Τι ποσό θα συγκεντρώσει στο λογαριασμό του στο τέλος του 5ου έτους;

Λύση: $X = ?$, $X_0 = 100\ 000\ €$, $T = 6\ \text{month}$, $t = 5\ \text{year}$, $r = 0,1 / 6\ \text{month}$

$$X = 100\ 000\ € \left(1 + \frac{0,1}{6\ \text{month}} \cdot 6\ \text{month} \right)^{\frac{5\ \text{year}}{6\ \text{month}}} \Rightarrow X = 100\ 000\ € \cdot 1,1^{\frac{5 \cdot 12\ \text{month}}{6\ \text{month}}} \Rightarrow$$

$$X = 100\ 000 \cdot 1,1^{10}\ € \Rightarrow X = 259\ 374\ €$$

2. Μια εμπορική τράπεζα προσφέρει ρέπος αξίας 100 000 €, διάρκειας 180 ημερών με ετήσιο επιτόκιο 12% και περίοδο ανατοκισμού 30 ημερών. Να υπολογιστεί η τελική αξία του ρέπος καθώς και η ετησιοποιημένη πραγματική απόδοση (EAR).

Λύση: Το 1ο ερώτημα λύνεται όπως παραπάνω και βρίσκουμε $X = 106\ 152\ €$ το EAR (ή r_{360}) βρίσκεται με βάση το δεξιό τμήμα της ταμπλέτας.

$$106\ 152\ € = 100\ 000\ € \left(1 + r_{360} \right)^{\frac{180\ \text{day}}{360\ \text{day}}} \Rightarrow 1,06152 = \left(1 + r_{360} \right)^{1/2} \Rightarrow 1,06152^2 = 1 + r_{360} \Rightarrow 1,1268 - 1 = r_{360} \Rightarrow r_{360} = 12,68\%$$

3. Έντοκο γραμμάτιο του δημοσίου ονομαστικής αξίας 100000€ εκδίδεται στην πρωτογενή αγορά με επιτόκιο (ετήσιο) 10% και χρονική διάρκεια 3 μηνών. Ποια είναι η τιμή έκδοσης του γραμματίου;

Λύση: Εδώ πρέπει να γνωρίζουμε ότι ονομαστική αξία γραμματίου είναι η τελική του αξία και σαν απλός τοκισμός. Δε χρειάζεται να θυμόμαστε τον τύπο για γραμμάτια.

$$100\ 000\ € = X_0 \left(1 + \frac{0,1}{\text{year}} \cdot 3\ \text{month} \right) \Rightarrow 100\ 000\ € = X_0 \left(1 + \frac{0,1}{12\ \text{month}} \cdot 3\ \text{month} \right) \Rightarrow$$

$$100\ 000\ € = X_0 \left(1 + \frac{0,1}{4} \right) \Rightarrow 100\ 000\ € = X_0 (1 + 0,025) \Rightarrow X_0 = 97\ 560,9\ €$$

-
4. Στη συναλλακτική πρακτική, όταν η επιταγή είναι μεταχρονολογημένη, χρησιμοποιείται ως πιστωτικός τίτλος. Για παράδειγμα, σας δίνουν μετρητά 100€ σήμερα και υπογράφετε για επιταγή ποσού 110€, που θα εξαργυρωθεί μετά από 60 ημέρες. Ποιο είναι το ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο (APR) και ποιο το αποτελεσματικό (πραγματικό) επιτόκιο;

Λύση: Το ότι ζητά επιτόκια και όχι αποδόσεις δε δημιουργεί δυσκολία.

$$\text{Το APR (από απλό τοκισμό)} \quad 110 \text{ €} = 100 \text{ €} \left(1 + \frac{\{r\}}{\text{year}} 60\text{day} \right) \Rightarrow$$

$$1,1 = \left(1 + \frac{\{r\}}{360\text{day}} 60\text{day} \right) \Rightarrow \dots \Rightarrow \{r\} = 60\%$$

$$\text{Το EAR ή } r_{360} \text{ είναι } 110 \text{ €} = 100 \text{ €} (1 + r_{360})^{\frac{60\text{day}}{360\text{day}}} \dots \Rightarrow r_{360} = 1,1^6 - 1 = 77,1\%$$

-
5. Κάποιος δανείστηκε 1000€ από μια περίεργη δανείστρια, η οποία απαίτησε να λάβει 5332,89 μονάδες στο νόμισμα της χώρας της (με την παρούσα ισοτιμία), ακριβώς μετά από ένα έτος (365 ημέρες) με επιτόκιο 2% ανά 9,48 εβδομάδες και ανατοκιστική περίοδο 33,18 ημέρες. Από ποια χώρα ήταν η δανείστρια;

$$\text{Λύση:} \quad 5332,89 [?] = 1000 \text{ €} \left(1 + \frac{0,02}{9,48\text{week}} 33,18\text{day} \right)^{\frac{1\text{year}}{33,18\text{day}}}$$

$$5332,89 [?] = 1000 \text{ €} \left(1 + \frac{0,02}{9,48 * 7\text{day}} 33,18\text{day} \right)^{\frac{365\text{day}}{33,18\text{day}}}$$

$$5332,89 [?] = 1000 \text{ €} * 1,1^{11} \Rightarrow [?] = \frac{1000 \text{ €} * 1,01^{11}}{5332,89} \Rightarrow [?] = 0,209 \text{ €}$$

Από πίνακα ισοτιμιών καταλαβαίνουμε ότι είναι sloti, το νόμισμα της Πολωνίας.

-
6. Η περίεργη δανείστρια για 1000€, που δάνεισε, απαίτησε να της αποδοθούν σε sloti (1€ =4,78 zl) μετά από 365 ημέρες (έτος) με επιτόκιο 2% ανά 9,48 εβδομάδες και ανατοκιστική περίοδο 33,18 ημέρες. Πόσα sloti θα εισπράξει; (Απάντηση: 5332,89 zl)

-
7. Η περίεργη δανείστρια για 1000€, που δάνεισε, απαίτησε να της αποδοθούν 5332,89 sloti (1€ =4,78 zl) μετά από 365 ημέρες (έτος) με ανατοκιστική περίοδο 33,18 ημέρες. Ο δανειζόμενος δεν είναι πρόθυμος να δεχθεί επιτόκιο μεγαλύτερο από 10% ετήσιο στον ανατοκισμό. Θα δανειστεί ή όχι; (Απάντηση: Όχι γιατί $r = 11,62\% / \text{year}$)

2. ΣΥΝΟΜΙΛΙΑ ΜΕ Default (GPT-3.5)

Η παρακάτω συνομιλία έγινε την 22/10/2023 με το Chatgtp. Ζητήθηκε να λύσει την άσκηση 6 του κεφαλαίου5. Με έντονα γράμματα είναι οι ερωτήσεις του συγγραφέα και ακολουθούν οι απαντήσεις στην Αγγλική. Προτιμήθηκε η Αγγλική για να μην υπάρξει παρανόηση από την τεχνητή νοημοσύνη (AI). Το κείμενο είναι αυτούσιο, έχουν υπογραμμιστεί κάποια σχόλια της AI..

Σχόλιο: Μάλλον, φαίνεται να μην επιτυγχάνει το βέλτιστο με την τωρινή του “γνώση”. Έχει και λάθη αλλά αυτά δεν μας ενδιαφέρουν (5333zl έναντι 4836zl εδώ). Επίσης, δεν έχει “σκεφτεί” να χρησιμοποιήσει εξίσωση μεγεθών ή να την προτείνει. Η συζήτηση γίνεται ενδιαφέρουσα, όταν ουσιαστικά του προτείνω εξίσωση μεγεθών (διαστατική ανάλυση). Τίθεται λοιπόν το γενικότερο ερώτημα -καθόλου φιλοσοφικό- περί τεχνητής νοημοσύνης: “Ειλικρινά, πόσο αλήθεια μπορούμε να εμπιστευτούμε μια AI, που έχει μάθει λίγο ανορθόδοξα;”

Can you solve me a problem related in compound interest?

Certainly! I'd be happy to help you with a problem related to compound interest.

Please provide the details of the problem, including the principal amount, interest rate, compounding frequency, and time period, and I'll do my best to assist you in solving it.

The principal amount is 1000€, the interest rate is 2% per 9.48 weeks, the compounding time is 33.18 days. If the final amount is in zloti (PLN) and 1€=4.78zloti, how many zloti are gonna be received?

To calculate the final amount in zloti (PLN) for a principal amount of €1,000 with an interest rate of 2% every 9.48 weeks compounded every 33.18 days, we can use the compound interest formula:

$$A = P * (1 + r/n)^{(nt)}$$

Where: A = the final amount P = the principal amount (€1,000) r = annual interest rate (2% or 0.02) n = the number of times the interest is compounded per year t = the time in years

To match the compounding frequency, we need to calculate the equivalent annual interest rate and compounding frequency in years.

First, we convert the interest rate to an annual rate:

9.48 weeks is approximately 0.1821 years (since there are approximately 52 weeks in a year), so the annual interest rate is $0.02 / 0.1821 = 0.1098$ or 10.98%.

Next, we find the equivalent compounding frequency in years:

33.18 days is approximately 0.0907 years (since there are 365 days in a year), so the compounding frequency is approximately $1 / 0.0907 = 11$ times per year (rounded to the nearest whole number).

Now we have all the values needed for the compound interest formula:

$$A = 1000 * (1 + 0.1098/11)^{(11*0.0907)}$$

$$A \approx 1000 * (1 + 0.00998)^{(0.9977)}$$

$$A \approx 1000 * 1.00998^{0.9977}$$

$$A \approx 1000 * 1.00997741$$

$$A \approx 1009.98 \text{ euros}$$

Now, you mentioned that $1\text{€} = 4.78\text{zloti}$. So, to find the final amount in zloti, you would multiply the final amount in euros by the exchange rate:

$$\text{Final Amount in Zloti (PLN)} = 1009.98 * 4.78$$

$$\text{Final Amount in Zloti} \approx 4,826.91 \text{ PLN}$$

So, you will receive approximately 4,826.91 Polish Zloti.

The 2% is not an annual rate but per 9.48weeks. Do not I have the right to define a rate of interest that is not annual? Only annual rate of interest exist btw?

I apologize for the misunderstanding. You're right; the interest rate you provided is not annual but per 9.48 weeks. In that case, we need to consider the compounding frequency as well.

To calculate the final amount with a non-annual interest rate and non-annual compounding frequency, we can use the following formula:

$$A = P * (1 + (r/n))^{(nt)}$$

Where: A = the final amount P = the principal amount (€1,000) r = the interest rate per compounding period (2% per 9.48 weeks) n = the number of compounding periods per year t = the time in years

To match the time units, we'll first find the equivalent annual interest rate and compounding frequency.

Convert the rate to an annual rate:

Since there are approximately 52 weeks in a year, the equivalent annual rate is:

$$\text{Annual Rate} = (2\% \text{ per } 9.48 \text{ weeks}) * (52 \text{ weeks/year} / 9.48 \text{ weeks}) \approx 11.02\%$$

Find the equivalent compounding frequency in years:

Since there are 365 days in a year, the equivalent time period for compounding is:

$$\text{Compounding Frequency} = (365 \text{ days/year}) / 33.18 \text{ days} \approx 11 \text{ times per year}$$

Now, you can use these values in the compound interest formula:

$$A = 1000 * (1 + 0.1102/11)^{(11 * 0.0907)}$$

$$A \approx 1000 * (1 + 0.01002)^{(0.9977)}$$

$$A \approx 1000 * 1.01002^{0.9977}$$

$$A \approx 1000 * 1.00979$$

$$A \approx 1009.79 \text{ euros}$$

Now, to find the final amount in zloti, you can multiply by the exchange rate:

$$\text{Final Amount in Zloti (PLN)} = 1009.79 * 4.78$$

$$\text{Final Amount in Zloti} \approx 4,835.29 \text{ PLN}$$

So, with a 2% interest rate every 9.48 weeks and compounding every 33.18 days, you will receive approximately 4,835.29 Polish Zloti.

Try this formula please : $A=P*(1+rT)^{(t/T)}$, where T is the compounding time (period) and t is the total time. Do you think this formula is correct and more accurate in calculating the final amount. We do nt use btw the n (frequency) cause we ll have an accuracy error, instead of it we prefer the period T, much like physics. What is your opinion?

The formula $A = P * (1 + rT)^{(t/T)}$ can be a useful way to calculate the final amount when dealing with non-annual compounding and non-annual interest rates. In this formula:

- A is the final amount.
- P is the principal amount.
- r is the interest rate for each compounding period (T).
- T is the compounding time period.
- t is the total time the money is invested.

Using this formula allows you to specify the interest rate and compounding period directly, without needing to convert to an annual rate or frequency (n). This can be more accurate in certain situations, especially when dealing with investments that have non-standard compounding periods.

It's important to ensure that the units are consistent for all the variables in the formula. If you specify the interest rate and compounding period in weeks and days, respectively, make sure the total time (t) is also in the same units (e.g., weeks or days).

Your preference for using the period (T) is a valid approach when dealing with different compounding frequencies, and it can help reduce errors that may arise when trying to match compounding periods to a standardized annual frequency (n).

So, the formula you provided is indeed suitable for situations where you have non-annual interest rates and compounding frequencies, and it allows for more accurate calculations without the need for frequency (n) conversion.

Is nt also very "user friendly" for novices? I mean they do nt need to know frequency or how to calculate it. Do nt you think that average people are more accustomed in time rather than frequency?

You make a valid point. Expressing compounding in terms of time (T) can indeed be more intuitive for many people, especially those who may not have a strong financial background. Using time periods is more relatable, and it simplifies the process for novices because they don't need to understand the intricacies of compounding frequencies (n).

For many financial and investment decisions, people often think in terms of time rather than frequencies. It's easier for them to say, "I want to invest for a specific number of months or years" and specify the compounding period in the same time units.

So, for educational purposes and everyday financial planning, the formula $A = P * (1 + rT)^{(t/T)}$ can be a user-friendly and more intuitive way to approach compound interest calculations without requiring the understanding of compounding frequencies. It allows people to make decisions based on the timeframes they are familiar with.

However, when it comes to more complex financial calculations and comparisons, understanding the concept of compounding frequencies and their impact on returns can be beneficial. But for simple calculations and basic financial planning, using time-based formulas can be perfectly suitable and easier for novices to grasp.

I think the above formula can be used to calculate the principal amount, the rate of interest in our whim, if quantity equation is used and not arithmetical equation. I mean solve it like a physicist, using units of measurement inside the equation and not numerical values.

Your idea of approaching financial calculations in a manner similar to how physicists use units of measurement and equations with physical meaning is an interesting concept. This approach can provide a deeper understanding of the financial relationships involved and make it easier to adapt the formulas to various scenarios.

It's known as dimensional analysis, which is a method used in physics and engineering to check the correctness of equations and maintain consistency in units.

In this context, you could indeed set up the equation with units of measurement and solve for the unknowns using the same principles as in physics. For example:

- Express time in units of years, and interest rates in units of 1/year.
- Use consistent units for all variables (e.g., principal amount in currency units).

This approach can help you understand how different variables affect the outcome and make it easier to manipulate the equation to solve for the unknowns. It also provides a level of abstraction that's beneficial when dealing with various currencies or interest rates with different units.

While the average person may not often use this approach, it can be a valuable exercise for those interested in a deeper understanding of financial principles and for experts working with complex financial models. It promotes clarity, consistency, and the ability to adapt to different scenarios.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Αλεξανδρόπουλος Α., Παλιατσός Α., Σάσσαλος Σ. (2004), “Οικονομικά Μαθηματικά (Τόμος Α’), Μαθηματικά για Οικονομολόγους” , Σύγχρονη Εκδοτική
- Γκίκας, Γ. και Χυζ, Α. (2020), Εγχειρίδιο Σύγχρονης Χρηματοοικονομικής, Εκδόσεις Π.Χ. Πασχαλίδη και Broken Hill
- Δρης, Ε. (2022), “Το Διεθνές Σύστημα Μονάδων, Σημαντικά Ψηφία, Διαστατική Ανάλυση”, Ε.Μ.Πολυτεχνείο
- Παπαγιαννάκη, Α. (2017), “Ανάλυση συνδεσιμότητας σε ηλεκτροεγκεφαλογραφικά δεδομένα με χρήση τανυστών”, Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Ιατρικής
- Βικιλεξικό (2023), “μέγεθος”, <https://el.wiktionary.org/wiki/μέγεθος> (πρόσβαση: 3/10/2023)
- Βικιπαίδεια (2023), [https://el.wikipedia.org/wiki/Μέγεθος_\(μαθηματικά\)](https://el.wikipedia.org/wiki/Μέγεθος_(μαθηματικά)) (πρόσβαση: 9/10/2023)
- Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας (2023), <http://econophysics.uth.gr/> (πρόσβαση: 3/10/2023)
- Boysen, S. and Berntson, G. (1989), <https://www.researchgate.net/publication/20230788> (πρόσβαση: 20/4/2023)
- Beckman, M. (2022), <https://www.science.org/content/article/froggy-went-countin> (πρόσβαση 20/4/2023)
- Chaney, H.J. (1897), A Practical Treatise on the Standard Weights and Measures in Use in the British Empire with some account of the metric system, Eyre and Spottiswoode.
- FIDELUS, J. (2023) <https://nanowires.inrim.it/labs/gum-poland> (πρόσβαση 3/10/2023)
- Pais, A., (2005), Subtle Is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein, Oxford University Press.
- Steinke, S. (2017) <https://medium.com/@quantumsteinke/whats-the-difference-between-a-matrix-and-a-tensor-4505fbdc576c> (πρόσβαση: 31/3/23)
- Barcelona Field Studies Centre (2023), <https://geographyfieldwork.com/PieChartCreator.html> (πρόσβαση: 15/10/2023)
- Britannica (2023), Imperial units, Establishment of the system, p.2, <https://www.britannica.com/topic/Imperial-unit> (πρόσβαση: 3/10/2023)
- International Organization for Standardization (2023), <https://www.iso.org/home.html> (πρόσβαση 20/4/2023).
- <https://www.legislation.gov.uk/ukpga/Geo4/5/74/contents/enacted> (πρόσβαση: 3/10/2023)
- <https://www.legislation.gov.uk/ukpga/1985/72/contents> (πρόσβαση: 3/10/2023)

