



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

**Αριθμητική Επίλυση της Εξίσωσης Helmholtz
σε Μη Φραγμένα Χωρία**

**Numerical Solution of the Helmholtz Equation
in Unbounded Domains**

Κωνσταντίνος Αμουργιανός

A.M.: 18393108

Επιβλέπων: Δημήτριος Μητσούδης

Αιγάλεω, Μάρτιος 2024



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

Τίτλος

Αριθμητική Επίλυση της Εξίσωσης Helmholtz σε Μη Φραγμένα Χωρία

Συγγραφέας

Κωνσταντίνος Αμουργιανός (Α.Μ.: 18393108)

Επιβλέπων

Δημήτριος Μητσούδης, Αναπληρωτής Καθηγητής ΠΑ.Δ.Α.

Ημερομηνία εξέτασης

19/03/2024

Εξεταστική Επιτροπή

Θεόδωρος Γεροστάθης

Αν. Καθηγητής ΠΑ.Δ.Α.

Δημήτριος Μητσούδης

Αν. Καθηγητής ΠΑ.Δ.Α.

Κωνσταντίνος Πολίτης

Καθηγητής ΠΑ.Δ.Α.

*Στους γονείς μου Θεόδωρο και Ιφιγένεια
Στον Δημήτρη, στον Παναγιώτη, στον Κυριάκο,
στον Χρήστο, στον Αριστοτέλη, στον Κωνσταντίνο,
στον Ιάσωνα, στον Αθανάσιο, στη Μαρία και στη Ζωή*

Δήλωση Συγγραφέα Διπλωματικής Εργασίας

Ο κάτωθι υπογεγραμμένος Κωνσταντίνος Αμουργιανός του Θεοδώρου, με αριθμό μητρώου 18393108, φοιτητής του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής της Σχολής Μηχανικών του Τμήματος Ναυπηγών Μηχανικών, δηλώνω υπεύθυνα ότι: «Είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, οι όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε ακριβώς είτε παραφρασμένες, αναφέρονται στο σύνολό τους, με πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία έχει συγγραφεί από μένα αποκλειστικά και αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου, όσο και του Ιδρύματος. Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του διπλώματός μου».

Ο Δηλών



Κωνσταντίνος Αμουργιανός

Ευχαριστίες

Με αυτές τις γραμμές θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλους εκείνους, που με τον τρόπο του ο καθένας, βοήθησαν στην ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής. Για αρχή θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επιβλέποντα Καθηγητή Δημήτρη Μητσούδη για τη συμβολή του στην διπλωματική αυτή, αλλά και γιατί υπήρξε για εμένα ένας δάσκαλος με την γενικότερη και ουσιαστικότερη έννοια. Ευχαριστώ επίσης θερμά όλους τους καθηγητές και συναδέλφους μου στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής (ΠΑ.Δ.Α.) που προχωρήσαμε μαζί αυτά τα χρόνια. Δεν θα μπορούσα να παραλείψω τις ευχαριστίες μου στην οικογένειά μου και στους πολύ στενούς μου φίλους. Τέλος, ευχαριστώ το ίδιο το Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής (ΠΑ.Δ.Α.) για τα χρόνια και τις στιγμές που πέρασαν.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία ασχολούμαστε με την αριθμητική επίλυση της μονοδιάστατης εξίσωσης Helmholtz, $-u'' - k^2u = f$, σε ένα ημιάπειρο διάστημα της μορφής $[0, +\infty)$ με μια μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Για τον κυματαριθμό k υποθέτουμε ότι μεταβάλλεται με το x σ' ένα φραγμένο διάστημα $[0, R]$, ενώ για $x > R$ παίρνει μια σταθερή τιμή. Η εξίσωση Helmholtz σε μη φραγμένα ή μεγάλα χωρία, χρησιμοποιείται συχνά ως ένα μαθηματικό μοντέλο κυματικής διάδοσης με σημαντικές εφαρμογές σε πεδία όπως η υποβρύχια ακουστική, η σεισμολογία, ο ηλεκτρομαγνητισμός, κ.ά.

Εδώ, για να υπολογίσουμε προσεγγίσεις της λύσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, αρχικά εισάγουμε ένα τεχνητό σύνορο στο σημείο $x = L$, με $L > R$, για να περάσουμε από το πρόβλημα στο ημιάπειρο διάστημα $[0, +\infty)$ σε ένα άλλο που τίθεται στο πεπερασμένο διάστημα $[0, L]$, ώστε στη συνέχεια να μπορέσουμε να το διακριτοποιήσουμε. Στο τεχνητό σύνορο $x = L$ επιβάλλουμε μια απορροφητική συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet-Neumann, η οποία είναι σχεδιασμένη με τέτοιο τρόπο ώστε να μην εισάγει «τεχνητές ανακλάσεις» στην αριθμητική μας λύση εξαιτίας της ύπαρξης του τεχνητού συνόρου.

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιούμε είναι η συνήθης μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων Galerkin με συνεχείς συναρτήσεις βάσης που είναι κατά τμήματα γραμμικά πολώνυμα σε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[0, L]$ με παράμετρο διακριτοποίησης h . Υλοποιούμε τη μέθοδο αυτή σε έναν κώδικα MATLAB, τον οποίο χρησιμοποιούμε για να εκτελέσουμε μια σειρά αριθμητικών πειραμάτων, που έχουν ως στόχο να ελέγξουν α) την ακρίβεια της μεθόδου, β) τη σχέση εξάρτησης του σφάλματος από τον κυματαριθμό k και την παράμετρο διακριτοποίησης h , γ) την επιρροή της θέσης του τεχνητού συνόρου στους υπολογισμούς μας, και δ) την αποτελεσματικότητα της μεθόδου σε προβλήματα με μεταβλητό κυματαριθμό.

Abstract

In this Diploma Thesis we employ a finite element numerical method to solve the one-dimensional Helmholtz equation $-u'' - k^2u = f$, in the semi-infinite interval $[0, +\infty)$. We assume that the wavenumber k varies with x in the bounded interval $[0, R]$, while it remains constant for $x > R$. The Helmholtz equation in unbounded or large domains is often used as a mathematical model to describe wave propagation phenomena and it has applications in various fields such as underwater acoustics, seismology, electromagnetism, etc.

Here, in order to obtain approximations of the exact solution with the finite element method, we first introduce an artificial boundary at the point $x = L$, for $x > L$, in order to truncate the originally semi-infinite interval $[0, +\infty)$ and formulate a problem in the finite length interval $[0, L]$, that, in turn, is discretized with finite elements. At the artificial boundary $x = L$ we impose an artificial absorbing boundary condition of the Dirichlet-to-Neumann type. This condition is properly designed to be completely ‘transparent’, in the sense that it does not introduce spurious reflections to the numerical solution due to the presence of the artificial boundary.

We use the standard Galerkin/finite element method with continuous in $[0, L]$ piecewise linear basis functions on a uniform discretization of $[0, L]$ where h denotes the discretization parameter. This method is implemented in a MATLAB finite element code. We use this code to run numerical experiments with the aim to assess a) the rate of convergence of our method, b) the way that the wavenumber k and the discretization parameter h are related in order to maintain a certain level of accuracy, c) the influence (if any) of the position of the artificial boundary, and d) the efficiency of the proposed method in problems with variable wavenumber.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
2	Η εξίσωση Helmholtz	6
2.1	Ακουστικά κύματα	7
2.2	Διατύπωση του προβλήματος σε ημιάπειρο διάστημα	9
2.3	Αναλυτική λύση του προβλήματος για σταθερό k . Η έννοια της συνάρτησης Green	12
2.4	Διατύπωση ισοδύναμου προβλήματος σε φραγμένο διάστημα. Η συνθήκη Dirichlet-to-Neumann	16
3	Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων	20
3.1	Στοιχεία συναρτησιακής ανάλυσης και συμβολισμός	21
3.1.1	Νόρμα και εσωτερικό γινόμενο	21
3.1.2	Συμβολισμός	22
3.1.3	Χώροι Hilbert	23
3.1.4	Γραμμικά συναρτησοειδή και διγραμμικές μορφές	24
3.1.5	Μερικά σχόλια για τους χώρους Sobolev	25
3.2	Ασθενής διατύπωση του προβλήματος	26
3.3	Η προσέγγιση πεπερασμένων στοιχείων/Galerkin με κατά τμήματα γραμμικές, συνεχείς συναρτήσεις	27
4	Αριθμητικά Πειράματα	30
4.1	Περιγραφή του προγράμματος των πεπερασμένων στοιχείων	30
4.2	Συγκρίσεις με ακριβή λύση	32
4.2.1	Αριθμητικός υπολογισμός της τάξης ακρίβειας της μεθόδου	33
4.2.2	Αριθμητική διερεύνηση της εξάρτησης του σφάλματος από τον κυματαριθμό (k) και την παράμετρο διακριτοποίησης (h)	36
4.2.3	Αριθμητική διερεύνηση της επιρροής της θέσης του τεχνητού συνόρου στην προσεγγιστική λύση	40
4.3	Αριθμητικά πειράματα με μεταβλητό κυματαριθμό	43

5	Συμπεράσματα και Προτάσεις	53
5.1	Συμπεράσματα	53
5.2	Προτάσεις για μελλοντική έρευνα	54

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Το θέμα της παρούσας διπλωματικής εργασίας αφορά τη μελέτη και την αριθμητική επίλυση προβλημάτων κυματικής διάδοσης που τίθενται σε μη φραγμένα χωρία. Τέτοια χωρία εμφανίζονται συχνά σε μαθηματικά μοντέλα που περιγράφουν φαινόμενα που προέρχονται από διάφορες περιοχές των επιστημών μηχανικού. Με τον όρο μη φραγμένα χωρία εννοούμε υποσύνολα του \mathbb{R} ή \mathbb{R}^2 ή \mathbb{R}^3 , τα οποία έχουν άπειρο μήκος ή εμβαδόν ή όγκο, αντίστοιχα. Μια από τις περιπτώσεις που εμφανίζεται η ανάγκη θεώρησης ενός μη φραγμένου χωρίου είναι όταν το φυσικό μέσο περικλείει ένα χωρίο φυσικού ενδιαφέροντος αλλά εκτείνεται και πολύ μακριά από αυτό. Ως παραδείγματα τέτοιων περιπτώσεων μπορούν να θεωρηθούν: α) προβλήματα από τη σεισμολογία, όπου το «άπειρο» χωρίο είναι η γη και η περιοχή ενδιαφέροντος είναι το χωρίο γύρω από μια κατασκευή ή/και γύρω από μια σεισμική πηγή, β) προβλήματα υποβρύχιας ακουστικής, [14], όπου η θάλασσα θεωρείται ως το άπειρο χωρίο ενώ η περιοχή ενδιαφέροντος είναι το χωρίο γύρω από ένα βυθισμένο σώμα (π.χ. ένα κοπάδι ψαριών ή ένα υποβρύχιο), γ) προβλήματα που σχετίζονται με τη μελέτη της ροής γύρω από πτέρυγες αεροσκαφών, όπου το άπειρο χωρίο είναι ο ατμοσφαιρικός αέρας, κ.ά., βλ. [10].

Σε καθένα από τα παραπάνω παραδείγματα το αρχικό χωρίο είναι (ή μπορεί να θεωρηθεί) ως μη φραγμένο. Σε κάποιες περιπτώσεις τέτοιου τύπου προβλήματα επιλύονται ευκολότερα με χρήση αναλυτικών μεθόδων. Παρόλα αυτά, εμείς εδώ θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε προβλήματα που αν και διατυπώνονται σε μη φραγμένα χωρία δεν μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά. Δύο αριθμητικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται συχνά για την επίλυση προβλημάτων σε άπειρα ή πολύ μεγάλα χωρία είναι:

- α) Η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων (boundary element method), όπου το αρχικό πρόβλημα γράφεται σε μια ειδική μορφή που εμπλέκει ολοκληρώματα πάνω στο σύνορο του χωρίου, [10, Κεφ. 2]. Για την υλοποίηση της μεθόδου απαιτείται η γνώση της λεγόμενης θεμελιώδους λύσης (fundamental solution). Το «υπολογιστικό» χωρίο στην περίπτωση αυτή είναι το σύνορο του αρχικού χωρίου. Η μέθοδος αυτή καταλήγει στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος που είναι πυκνό αλλά αφορά μόνον τους βαθμούς ελευθερίας που σχετίζονται με το σύνορο. Η μέθοδος αυτή είναι πολύ χρήσιμη κυρίως σε τριδιάστατα προβλήματα μιας και η αναγωγή στις δύο διαστάσεις

διευκολύνει ιδιαίτερα την κατασκευή υπολογιστικών πλεγμάτων. Η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων εφαρμόζεται, εν γένει, σε «ομαλά» προβλήματα που περιγράφονται από γραμμικές εξισώσεις και το μέσον είναι ομοιογενές και ιστροπικό.

β) Η μέθοδος των άπειρων στοιχείων (infinite element method) που είναι μια παραλλαγή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, [10, Κεφ. 6.7]. Ένα άπειρο στοιχείο είναι, π.χ., ένα ημίαπειρο διάστημα στη μία διάσταση, ή μια ημίαπειρη λωρίδα στις δύο διαστάσεις. Στο στοιχείο αυτό ορίζονται κατάλληλες συναρτήσεις βάσης οι οποίες επιχειρούν να αναπαραστήσουν τη συμπεριφορά μακρινού πεδίου της λύσης (far-field behavior). Η διαδικασία αυτή απαιτεί τον αριθμητικό υπολογισμό ολοκληρωμάτων σε άπειρα χωρία.

Εκτός από τις παραπάνω μεθόδους μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει και μεθόδους πεπερασμένων διαφορών ή πεπερασμένων στοιχείων, στις οποίες όμως θα πρέπει να ενσωματώσει κατάλληλες τεχνικές μιας και, για παράδειγμα, η απευθείας διακριτοποίηση ενός μη φραγμένου χωρίου δεν είναι εφικτή. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να περικόψουμε το αρχικώς μη φραγμένο χωρίο έτσι ώστε το υπολογιστικό χωρίο Ω που θα προκύψει να είναι φραγμένο. Βεβαίως το κρίσιμο ερώτημα είναι πώς θα γίνει αυτό χωρίς να εισαχθούν σημαντικά πλασματικά σφάλματα στα αποτελέσματά μας. Σε κάποια προβλήματα αυτό μπορεί να επιτευχθεί χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία. Π.χ., σε περιοδικά προβλήματα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε περιοδικές συνοριακές συνθήκες. Σε κάποια άλλα προβλήματα προσπαθούμε να προσεγγίσουμε λύσεις που παρουσιάζουν ταχύτατη απόσβεση στον χώρο, επομένως αρκεί να θεωρήσουμε ένα κατάλληλα μεγάλο υπολογιστικό χωρίο. Αν όμως μελετούμε φαινόμενα κυματικής διάδοσης στα οποία οι λύσεις είναι ταλαντωτικές και (τυπικά) σε χωρική διάσταση $d = 1, 2$ ή 3 , φθίνουν αργά με την απόσταση r , ως $1/r^{(d-1)/2}$, τότε το πώς θα περικόψουμε το αρχικό χωρίο αποτελεί ένα δύσκολο πρόβλημα. Ο λόγος είναι ότι αν εισαγάγουμε ένα τεχνητό σύνορο \mathcal{B} , έτσι ώστε το υπολογιστικό χωρίο Ω που θα προκύψει να είναι φραγμένο, και θέσουμε συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet ή Neumann, ή περιοδικές συνοριακές συνθήκες, τότε η αριθμητική μας λύση θα «μολυνθεί» από τις (πλασματικές) ανακλάσεις εξαιτίας της ύπαρξης του τεχνητού συνόρου \mathcal{B} .

Ένας τρόπος για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό είναι να κατασκευάσουμε κατάλληλες συνοριακές συνθήκες τις οποίες θα θέσουμε πάνω στο τεχνητό σύνορο \mathcal{B} , και οι οποίες θα πρέπει ουσιαστικά να αντισταθμίζουν το γεγονός ότι περικόψαμε το αρχικό μας χωρίο. Αν η τεχνητή συνοριακή συνθήκη έχει σχεδιαστεί σωστά, τότε η λύση του αρχικού μας προβλήματος θα προσεγγίζεται καλά από την αριθμητική λύση στο πεπερασμένο χωρίο.

Οι τεχνητές συνοριακές συνθήκες χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: α) στις τοπικές και β)

στις μη τοπικές. Οι τοπικές συνθήκες είναι όλες προσεγγιστικές (πλην μερικών πολύ απλών περιπτώσεων) και έτσι λαμβάνουν υπ' όψιν την επίδραση του χωρίου που αγνοούμε μόνο κατά προσέγγιση. Οι περισσότερες τοπικές τεχνητές συνοριακές συνθήκες έχουν καλή απόδοση όταν το υπολογιστικό μας χωρίο Ω είναι αρκούτως μεγάλο. Από την άλλη μεριά, οι μη τοπικές συνθήκες είναι πιο πολύπλοκες και υλοποιούνται δυσκολότερα σε έναν κώδικα αλλά είναι ακριβέστερες και δίνουν καλύτερα αποτελέσματα σε μικρότερα υπολογιστικά χωρία. Κάποιες από αυτές είναι ακριβείς (exact). Η λεγόμενη συνθήκη Dirichlet-to-Neumann, [16, 10], είναι μια ακριβής, μη τοπική, τεχνητή συνοριακή συνθήκη που έχει αποδειχθεί πολύ αποτελεσματική σε διάφορα προβλήματα και ουσιαστικά βασίζεται στη συναρμογή (matching) μιας αναλυτικής λύσης με την αριθμητική λύση. Μια τέτοιου τύπου συνθήκη εφαρμόστηκε για πρώτη φορά, τουλάχιστον στο πλαίσιο των προβλημάτων υδροακουστικής, από τους Fix και Marin, [8].

Τέλος, ένας άλλος τρόπος για να αντιμετωπίσει κανείς αριθμητικά προβλήματα σε μη φραγμένα χωρία είναι η χρήση των λεγόμενων στρωμάτων τελείας προσαρμογής (Perfectly Matched Layers - PML). Παραπέμπουμε στην εργασία [15] για μια ενδιαφέρουσα εισαγωγή.

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος κυματικής διάδοσης σε ένα μη φραγμένο χωρίο. Τα κύματα (θαλάσσιοι κυματισμοί, ακουστικά κύματα, σεισμικά κύματα, ηλεκτρομαγνητικά κύματα) αποτελούν ενδιαφέροντα φυσικά φαινόμενα με πολύ σημαντικές πρακτικές εφαρμογές. Οι μηχανικοί και οι φυσικοί ενδιαφέρονται ιδιαίτερα για την αξιόπιστη προσομοίωση φαινομένων κυματικής διάδοσης και σκέδασης (διαδικασιών κατά τις οποίες τα κύματα αλληλεπιδρούν και σκεδάζονται από διάφορα αντικείμενα). Τα κύρια γραμμικά μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή τέτοιων φαινομένων βασίζονται στην κυματική εξίσωση που είναι μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. Αν υποθέσουμε ότι η χρονική εξάρτηση είναι αρμονική, δηλαδή αν έχουμε ένα βαθμωτό πεδίο της μορφής $U(x, t)$, η χρονική μεταβλητή διαχωρίζεται ως $U(x, t) = u(x)e^{-i\omega t}$, όπου u είναι μια στάσιμη συνάρτηση, τότε καταλήγουμε στην εξίσωση Helmholtz, ή ανηγμένη κυματική εξίσωση, $\Delta u + k^2 u = 0$, όπου k είναι μια φυσική παράμετρος που λέγεται κυματαριθμός. Για τα βασικά ερωτήματα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων για προβλήματα με την εξίσωση Helmholtz παραπέμπουμε στο βιβλίο των Colton και Kress, [5]. Όσον αφορά στην προσέγγιση λύσεων της εξίσωσης Helmholtz με αριθμητικές μεθόδους μια θεμελιώδης δυσκολία σχετίζεται με τον ρόλο του κυματαριθμού k . Ο κυματαριθμός χαρακτηρίζει την ταλαντωτική συμπεριφορά της ακριβούς λύσης. Όσο μεγαλώνει η τιμή της παραμέτρου k τόσο πιο έντονες γίνονται οι ταλαντώσεις. Φυσικά, η συμπεριφορά αυτή πρέπει να «ληφθεί υπ' όψιν» και από την αριθμητική μέθοδο. Ένας εμπει-

ρικός κανόνας είναι να χρησιμοποιεί κανείς έναν συγκεκριμένο αριθμό κόμβων ανά μήκος κύματος. Παρόλα αυτά, είναι γνωστό ότι ο κανόνας αυτός δεν είναι αρκετός για να μας εξασφαλίσει αξιόπιστα αποτελέσματα για μεγάλες τιμές του κυματαριθμού k .

Συγκεκριμένα, στην παρούσα διπλωματική θα ασχοληθούμε με την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Helmholtz σε μια χωρική διάσταση, $-u'' - k^2 u = f$, με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων σε ένα ημιάπειρο διάστημα της μορφής $[0, +\infty)$. Η δομή της εργασίας είναι η ακόλουθη:

Στο Κεφάλαιο 2 δείχνουμε πώς προκύπτει η κυματική εξίσωση από βασικές αρχές. Στη συνέχεια, κάτω από την υπόθεση ότι η χρονική εξάρτηση είναι αρμονική, καταλήγουμε στην διατύπωση της εξίσωσης Helmholtz. Μελετάμε την εξίσωση στο ημιάπειρο διάστημα $(0, +\infty)$ όπου στο φραγμένο άκρο ($x = 0$) επιβάλλουμε ομογενή συνθήκη Dirichlet, και συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld στο άπειρο. Στη διατύπωση του προβλήματός μας επιτρέπουμε ο κυματαριθμός k να μεταβάλλεται με το x σ' ένα φραγμένο διάστημα $[0, R]$, ενώ για $x > R$ υποθέτουμε ότι παίρνει μια σταθερή τιμή. Στην περίπτωση που ο κυματαριθμός είναι σταθερός για κάθε $x > 0$, περιγράφουμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά τη λύση του προβλήματος με τη βοήθεια της συνάρτησης Green. Στη γενικότερη περίπτωση όπου $k = k(x)$, για $x \in [0, R]$, εισάγουμε ένα τεχνητό σύνορο στο $x = L$, με $L > R$, και διατυπώνουμε ένα πρόβλημα για την εξίσωση Helmholtz στο φραγμένο πλέον διάστημα $[0, L]$, θέτοντας στο άκρο $x = L$ μια συνθήκη Dirichlet-to-Neumann. Το πρόβλημα αυτό θα διακριτοποιήσουμε στη συνέχεια με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε κάποιες απαραίτητες έννοιες από τη συναρτησιακή ανάλυση και εισάγουμε τους χώρους συναρτήσεων που θα χρησιμοποιήσουμε και τον απαραίτητο συμβολισμό. Περιγράφουμε την ασθενή διατύπωση του προβλήματος και, τέλος, διατυπώνουμε τη συνήθη μέθοδο Galerkin/πεπερασμένων στοιχείων για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος που μελετάμε.

Στο Κεφάλαιο 4 ξεκινάμε με την περιγραφή της υλοποίησης της μεθόδου σε έναν κώδικα πεπερασμένων στοιχείων, που είναι γραμμένος στο MATLAB, και συνοψίζουμε τα βασικά του σημεία. Με τον κώδικα αυτόν εκτελούμε αριθμητικά πειράματα που διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: α) συγκρίσεις με ακριβείς λύσεις και β) πειράματα με μεταβλητό κυματαριθμό k . Για να επιτύχουμε τη σύγκριση με ακριβείς λύσεις θεωρούμε ότι το χωρίο μας είναι ομοιογενές με σταθερό κυματαριθμό k . Το πρώτο μας πείραμα ελέγχει την ακρίβεια της μεθόδου μετρώντας το σφάλμα μεταξύ της ακριβούς και της προσεγγιστικής λύσης ως προς την L^2 και την H^1 νόρμα για τρεις διαφορετικές συχνότητες. Τα πειράματά μας επιβεβαιώνουν τα γνωστά από τη θεωρία αποτελέσματα, [12, 13], δηλαδή ότι η τάξη ακρίβειας για το H^1

σφάλμα είναι ίση με 1, και για το L^2 σφάλμα είναι ίση με 2.

Ένα κρίσιμο ερώτημα σε υπολογισμούς πεπερασμένων στοιχείων είναι το ακόλουθο. Δεδομένου ενός διαστήματος $[0, L]$, ποια είναι η σχέση εξάρτησης του σφάλματος από τον κυματαριθμό k και την παράμετρο διακριτοποίησης h ; Ο εμπειρικός κανόνας που αναφέραμε νωρίτερα, δηλαδή να διατηρούμε έναν συγκεκριμένο αριθμό κόμβων ανά μήκος κύματος, οδηγεί στο να επιλέγουμε το h έτσι ώστε το γινόμενο kh να παραμένει σταθερό και μικρό. Τα αριθμητικά μας πειράματα υποδεικνύουν ότι αυτό δεν αρκεί και ότι για να διατηρηθεί κανείς σταθερό το σχετικό σφάλμα πρέπει να παραμένει σταθερό και μικρό το γινόμενο k^3h^2 . Δηλαδή για να διατηρήσουμε σταθερό το επίπεδο του σχετικού σφάλματος καθώς ο κυματαριθμός k αυξάνει θα πρέπει να επιλέγουμε το h ως ανάλογο του $k^{-\frac{3}{2}}$. Η σχέση αυτή έχει αποδειχθεί αναλυτικά στην περίπτωση της μίας διάστασης [12], και επιβεβαιωθεί αριθμητικά στην περίπτωση των δύο διαστάσεων, βλέπε, π.χ., [3, 18]. Αντιθέτως, αν επιλέγουμε το h έτσι ώστε το γινόμενο k^2h να παραμένει σταθερό και μικρό, τότε διαπιστώνουμε ότι το σχετικό σφάλμα μειώνεται. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι ακόμη και αν ακολουθήσουμε τον εμπειρικό κανόνα και επιλέγουμε το h ως ανάλογο του $1/k$, το αποτέλεσμα είναι ότι σε ρεαλιστικά προβλήματα, για μεγάλες τιμές του k , καταλήγουμε σε πολύ μεγάλα γραμμικά συστήματα. Το γεγονός αυτό περιορίζει σημαντικά την εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων σε προβλήματα για χαμηλές ή μεσαίες συχνότητες και σχετικά μικρές αποστάσεις.

Στο τελευταίο μας πείραμα συγκρίσεων με ακριβείς λύσεις εξετάζουμε κατά πόσον η θέση του τεχνητού συνόρου L επηρεάζει την αριθμητική μας λύση. Το κεφάλαιο αυτό κλείνει με πειράματα για μεταβλητό κυματαριθμό k για διάφορες συχνότητες. Τέλος, στο Κεφάλαιο 5 συνοψίζουμε τα συμπεράσματά μας και παρουσιάζουμε κάποιες προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

Κεφάλαιο 2

Η εξίσωση Helmholtz

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά θα δείξουμε πώς προκύπτει η κυματική εξίσωση από βασικές αρχές, όπως η εξίσωση κίνησης, η εξίσωση συνέχειας και οι φυσικές υποθέσεις που διατυπώνονται μέσω της καταστατικής εξίσωσης. Στη συνέχεια, κάτω από την υπόθεση ότι η χρονική εξάρτηση είναι αρμονική (της μορφής $\exp(-i\omega t)$), καταλήγουμε στην διατύπωση της εξίσωσης Helmholtz, που ονομάζεται και ανηγμένη κυματική εξίσωση. Συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε την εξίσωση Helmholtz σε μία χωρική διάσταση, στο ημιάπειρο διάστημα $(0, +\infty)$. Στο φραγμένο άκρο ($x = 0$) υποθέτουμε μια ομογενή συνθήκη Dirichlet, ενώ για να είναι το πρόβλημα καλώς τεθειμένο, το συμπληρώνουμε με μία κατάλληλη συνθήκη ακτινοβολίας στο άπειρο. Η συνθήκη αυτή λέγεται συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld. Στην διατύπωση του προβλήματός μας επιτρέπουμε ο κυματαριθμός k να μεταβάλλεται με το x σε ένα φραγμένο διάστημα $[0, R]$, ενώ για $x > R$ υποθέτουμε ότι παίρνει μια σταθερή τιμή k_R . Στην περίπτωση που ο κυματαριθμός είναι σταθερός για κάθε $x > 0$, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά τη λύση του προβλήματος με τη βοήθεια της συνάρτησης Green. Στην Παραγράφο 2.3 παρουσιάζουμε τις βασικές ιδέες και ιδιότητες της συνάρτησης Green και δείχνουμε πώς αυτή χρησιμοποιείται ώστε να επιλύσουμε το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει.

Ο στόχος μας είναι να επιλύσουμε το πρόβλημα στην περίπτωση που ο κυματαριθμός k εξαρτάται από το x στο διάστημα $[0, R]$ με μια μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Για τον σκοπό αυτό, όπως και για οποιαδήποτε άλλη άμεση αριθμητική μέθοδο (π.χ. μέθοδος πεπερασμένων διαφορών) το ημιάπειρο διάστημα $(0, +\infty)$ θα πρέπει να «περικοπεί» και το πρόβλημά μας, να αντικατασταθεί από ένα ισοδύναμο πρόβλημα διατυπωμένο σε ένα φραγμένο διάστημα. Ένας τρόπος να επιτευχθεί αυτό είναι αρχικά να θεωρήσουμε ένα κατάλληλο διάστημα $(0, L)$, με $L > R$, δηλαδή ένα διάστημα το οποίο θεωρούμε ότι περιέχει όλες τις ανομοιογένειες του μέσου. Με τον τρόπο αυτό εισάγουμε ένα τεχνητό σύνορο στο άκρο $x = L$, οπότε θα πρέπει να διατυπώσουμε μια κατάλληλη συνοριακή συνθήκη έτσι ώστε το πρόβλημα που διατυπώνεται στο φραγμένο πλέον διάστημα $[0, L]$ να είναι ισοδύναμο με το αρχικό που είναι διατυπωμένο στο ημιάπειρο διάστημα $[0, +\infty)$, υπό την έννοια ότι η λύση του πρώτου θα είναι ο περιορισμός της λύσης του δεύτερου στο φραγμένο διάστημα $[0, L]$.

Μια τέτοια κατάλληλη συνοριακή συνθήκη είναι η λεγόμενη συνθήκη Dirichlet-to-Neumann (DtN), της οποίας την γενική ιδέα και την κατασκευή παρουσιάζουμε στην Παράγραφο [2.4](#).

2.1 Ακουστικά κύματα

Θεωρούμε τη διάδοση ακουστικών κυμάτων μικρού πλάτους σε ένα ομογενές, ιστροπικό μέσο στον \mathbb{R}^3 που παριστάνει ένα ρευστό χωρίς ιξώδες. Τα ακουστικά κύματα (ο ήχος) είναι μικρές ταλαντώσεις της πίεσης $p = p(\mathbf{x}, t)$ σε ένα συμπιεστό, ιδεατό ρευστό. Οι ταλαντώσεις αυτές αλληλεπιδρούν με τρόπο τέτοιο ώστε η ενέργεια να διαδίδεται στο μέσο. Οι εξισώσεις που διέπουν το φαινόμενο αυτό προκύπτουν από τους θεμελιώδεις νόμους για συμπιεστά ρευστά. Συγκεκριμένα, έστω $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ είναι το πεδίο ταχυτήτων, ενώ με $p = p(\mathbf{x}, t)$, $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$, $S = S(\mathbf{x}, t)$, συμβολίζουμε την πίεση, την πυκνότητα και την ειδική εντροπία του ρευστού, αντίστοιχα. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες εξισώσεις, βλ., π.χ., [\[5\]](#).

Η εξίσωση κίνησης είναι η εξίσωση του Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \mathbf{0},$$

η εξίσωση συνέχειας είναι

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

η καταστατική εξίσωση

$$p = f(\rho, S),$$

και η αδιαβατική υπόθεση

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } S = 0,$$

όπου η f που εμφανίζεται στην καταστατική εξίσωση είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται από το ρευστό. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι οι \mathbf{v} , p , ρ και S είναι μικρές διαταραχές της στάσιμης κατάστασης $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, $p_0 = \text{σταθερά}$, $\rho_0 = \text{σταθερά}$ και $S_0 = \text{σταθερά}$, οπότε γραμμικοποιούμε και καταλήγουμε στη γραμμικοποιημένη εξίσωση του Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p = \mathbf{0},$$

στη γραμμικοποιημένη εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v} = 0,$$

και στη γραμμικοποιημένη καταστατική εξίσωση

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, S_0) \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Από τις τρεις παραπάνω εξισώσεις καταλήγουμε στην *κυματική εξίσωση*

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p,$$

όπου η ταχύτητα του κύματος c ορίζεται μέσω της σχέσης

$$c^2 = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, S_0).$$

Από τη γραμμικοποιημένη εξίσωση του Euler παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα δυναμικό ταχύτητας $U = U(\mathbf{x}, t)$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho_0} \text{grad } U$$

και

$$p = -\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι και το δυναμικό ταχύτητας ικανοποιεί την κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \Delta U. \quad (2.1)$$

Αν θεωρήσουμε ότι έχουμε χρονικά-αρμονικά ακουστικά κύματα της μορφής

$$U(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}) e^{-i\omega t},$$

με κυκλική συχνότητα $\omega > 0$, και αντικαταστήσουμε την έκφραση αυτή στην κυματική εξίσωση (2.1), έχουμε:

$$U_{tt}(\mathbf{x}, t) = c^2 \Delta U(\mathbf{x}, t) \Rightarrow -\omega^2 e^{-i\omega t} u(\mathbf{x}) = c^2 e^{-i\omega t} \Delta u(\mathbf{x}),$$

οπότε απαλείφοντας τον όρο με τη χρονική εξάρτηση, $e^{-i\omega t}$, συμπεραίνουμε ότι το μιγαδικό χωρικό μέρος u ικανοποιεί τη λεγόμενη *ανηγμένη κυματική εξίσωση* ή *εξίσωση Helmholtz*

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (2.2)$$

όπου το k είναι μια θετική σταθερά που λέγεται *κυματαριθμός* και ορίζεται ως $k = \omega/c$. Η εξίσωση (2.2) φέρει το όνομα του γερμανού φυσικού Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821–1894) για τις συνεισφορές του στη μαθηματική θεωρία της ακουστικής και του ηλεκτρομαγνητισμού.

Εμείς, στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με την περίπτωση της μιας χωρικής διάστασης $x \in \mathbb{R}$, οπότε η εξίσωση (2.2) παίρνει την ακόλουθη απλούστερη μορφή

$$u''(x) + k^2 u(x) = 0, \quad (2.3)$$

όπου, όπως αναφέραμε και παραπάνω, το k είναι μια θετική σταθερά που λέγεται κυματαριθμός και έχει διάσταση m^{-1} .

Εύκολα βλέπουμε ότι η γενική λύση της εξίσωσης (2.3) είναι

$$u(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx}. \quad (2.4)$$

Η λύση αυτή είναι περιοδική, δηλαδή για κάθε x ισχύει $u(x + \lambda) = u(x)$ με

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (2.5)$$

Η παράμετρος λ λέγεται *μήκος κύματος*. Επομένως, ο κυματαριθμός k εκφράζει τον αριθμό των κυμάτων ανά «μοναδιαίο» (2π) μήκος κύματος, βλ. [13].

Παρατήρηση 2.1. Αν θεωρήσουμε την αντίστοιχη χρονοεξαρτώμενη λύση της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

που είναι

$$U(x, t) = c_1 e^{i(kx - \omega t)} + c_2 e^{-i(kx + \omega t)},$$

παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος παριστάνει ένα κύμα που ταξιδεύει προς τα δεξιά (outgoing wave), ενώ ο δεύτερος όρος παριστάνει ένα κύμα που ταξιδεύει προς τα αριστερά (incoming wave).

2.2 Διατύπωση του προβλήματος σε ημιάπειρο διάστημα

Το πρόβλημα που θα μελετήσουμε στη διπλωματική αυτή εργασία αφορά τη διάδοση χρονικά-αρμονικών κυμάτων κατά μήκος του ημιάξονα $(0, +\infty)$. Συγκεκριμένα, αναζητούμε μια συνάρτηση u η οποία ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz

$$-u''(x) - k^2 u(x) = f(x), \quad x \in (0, +\infty),$$

όπου f είναι μια δεδομένη συνάρτηση που μηδενίζεται έξω από ένα διάστημα της μορφής $[0, R]$, και υποθέτουμε ότι ο κυματαριθμός k είναι σταθερός για $x > R$, ενώ του επιτρέπουμε να μεταβάλλεται με το x στο διάστημα $[0, R]$. Ουσιαστικά, επιτρέπουμε στο μέσον να είναι ανομοιογενές στο διάστημα $[0, R]$ και υποθέτουμε ότι είναι ομοιογενές για $x > R$.

Επιπλέον, θεωρούμε ότι η συνάρτηση u ικανοποιεί ομογενή συνθήκη Dirichlet στο άκρο $x = 0$, ενώ θα πρέπει να επιβάλλουμε και μια συνθήκη «στο άπειρο» η οποία να εξασφαλίζει ότι τα κύματα καθώς το $x \rightarrow \infty$ κινούνται προς τα δεξιά, δηλαδή είναι εξερχόμενα

(outgoing). Μια κατάλληλη, πολύ γνωστή, τέτοια συνθήκη είναι η λεγόμενη *συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld*, βλ. π.χ. [10],

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{(d-1)/2} (u_r - iku) = 0, \quad (2.6)$$

όπου r είναι η ακτινική συντεταγμένη, δηλαδή $r = |\mathbf{x}|$, όπου με $|\mathbf{x}|$ συμβολίζουμε την Ευκλείδεια απόσταση του \mathbf{x} από την αρχή των αξόνων, $u_r = \partial u / \partial r$, και d είναι η χωρική διάσταση ($d = 1, 2$ ή 3).

Μια απόδειξη ότι η συνθήκη Sommerfeld (2.6) είναι πράγματι μια κατάλληλη συνθήκη ακτινοβολίας δίνεται στο βιβλίο των Courant και Hilbert, [6]. Για το αντίστοιχο αποτέλεσμα για τρεις ειδικές περιπτώσεις συμμετρικών κυμάτων που εξαρτώνται μόνον από την ακτινική συντεταγμένη r παραπέμπουμε στο βιβλίο του Givoli, [10], σελ. 41–42]. Συγκεκριμένα, εκεί μπορεί κανείς να ανατρέξει για την απόδειξη ότι η συνθήκη Sommerfeld είναι μια κατάλληλη συνθήκη ακτινοβολίας, στις ακόλουθες περιπτώσεις

- για επίπεδα κύματα ($d = 1$):

$$u = c_1 e^{ikr} + c_2 e^{-ikr},$$

- για αξονοσυμμετρικά κυλινδρικά κύματα ($d = 2$):

$$u = c_1 H_0^{(1)}(kr) + c_2 H_0^{(2)}(kr),$$

όπου εδώ $H_0^{(1)}$ και $H_0^{(2)}$ είναι οι συναρτήσεις Hankel πρώτου και δευτέρου είδους, αντίστοιχα, βλ., π.χ., [2, Ch. 9],

- και για σφαιρικά συμμετρικά κύματα ($d = 3$),

$$u = \frac{1}{r} (c_1 e^{ikr} + c_2 e^{-ikr}).$$

Ειδικότερα, για την περίπτωση της μιας χωρικής διάστασης ($d = 1$) η συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld παίρνει τη μορφή

$$u'(x) - iku(x) = 0, \quad \text{καθώς } x \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Τώρα, αν αντικαταστήσουμε τη γενική λύση (2.4) της ομογενούς εξίσωσης Helmholtz (με k σταθερό) στην παραπάνω σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} u'(x) - iku(x) &= ikc_1 e^{ikx} - ikc_2 e^{-ikx} - ik(c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx}) \\ &= -2ik c_2 e^{-ikx}. \end{aligned}$$

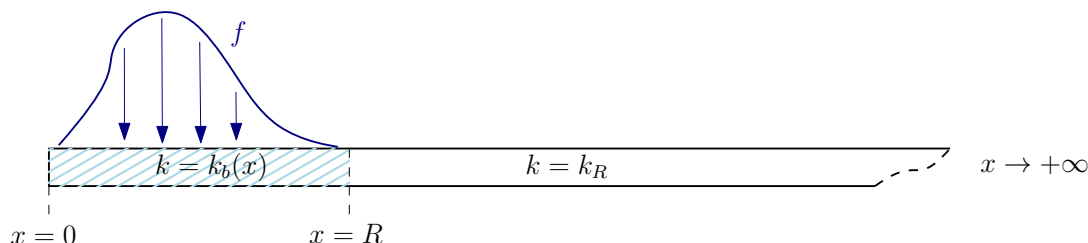
Άρα η συνθήκη Sommerfeld μας εξασφαλίζει ότι $c_2 = 0$. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό, που ισχύει όμως μόνο για την περίπτωση της μιας διάστασης ($d = 1$), είναι ότι ο όρος με τη σταθερά c_1 απαλείφθηκε πριν ακόμη πάρουμε το όριο για $x \rightarrow +\infty$. Επομένως, προκύπτει ότι η (2.7) ισχύει όχι μόνον καθώς το $x \rightarrow +\infty$, αλλά και σε κάθε πεπερασμένο x . Ακριβέστερα, αν υπάρχει ένας αριθμός R , τέτοιος ώστε ο κυματαριθμός k να είναι σταθερός στο ημίπειρο διάστημα $x \geq R$, τότε τα εξερχόμενα κύματα e^{ikx} ικανοποιούν τη σχέση $u'(x) - iku(x)$ σε κάθε $x \geq R$.

Συνοψίζοντας, το πρόβλημα που θα μελετήσουμε είναι το ακόλουθο: Αναζητούμε μια u που ικανοποιεί

$$\begin{cases} -u''(x) - k^2u(x) = f(x), & x \in (0, +\infty), \\ u(0) = 0, \\ u \text{ εξερχόμενη καθώς } x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (2.8)$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής (ή, γενικότερα, τετραγωνικά ολοκληρώσιμη) και ότι υπάρχει ένας αριθμός $R > 0$, τέτοιος ώστε η f να μηδενίζεται για $x > R$, και ο κυματαριθμός k να είναι σταθερός για $x > R$, ενώ του επιτρέπουμε να μεταβάλλεται στο διάστημα $[0, R]$, βλ. Σχήμα 2.1. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι ο κυματαριθμός k περιγράφεται από την ακόλουθη συνεχή συνάρτηση:

$$k(x) = \begin{cases} k_b(x), & \text{για } x \in [0, R], \\ k_R = \text{σταθ.}, & \text{για } x > R. \end{cases} \quad (2.9)$$



Σχήμα 2.1: Σχηματική αναπαράσταση του ημίπειρου χωρίου.

Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε την αναλυτική λύση του προβλήματος αυτού στην περίπτωση που ο κυματαριθμός k είναι σταθερός για κάθε $x > 0$.

2.3 Αναλυτική λύση του προβλήματος για σταθερό k . Η έννοια της συνάρτησης Green

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} -u''(x) - k^2u(x) = f(x), & x > 0, \\ u(0) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u'(x) - ik u(x) = 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

όπου τώρα θεωρούμε ότι ο κυματαριθμός k είναι σταθερός, ενώ για την f υποθέτουμε ότι είναι συνεχής και ότι υπάρχει ένας αριθμός $R > 0$, τέτοιος ώστε η f να μηδενίζεται για $x > R$. Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό για οποιοδήποτε δεύτερο μέλος f , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη λεγόμενη συνάρτηση Green. Στη συνέχεια, θα δώσουμε μια διαισθητική, και χωρίς ιδιαίτερη μαθηματική αυστηρότητα, παρουσίαση των βασικών εννοιών της συνάρτησης Green, ακολουθώντας το βιβλίο του Roach, [19].

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι υπάρχει μια συνάρτηση $G(x, y)$, που θα την αποκαλούμε συνάρτηση του Green, με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Η G ικανοποιεί την αντίστοιχη ομογενή διαφορική εξίσωση, δηλαδή $G''' + k^2G = 0$ σε καθένα από τα διαστήματα $0 \leq x < y$ και $x > y$.
2. Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο $x = y$, δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow y^-} G(x, y) = \lim_{x \rightarrow y^+} G(x, y).$$

3. Η παράγωγος της G ως προς x παρουσιάζει ένα άλμα ασυνέχειας στο $x = y$. Συγκεκριμένα,

$$\lim_{x \rightarrow y^+} G'(x, y) - \lim_{x \rightarrow y^-} G'(x, y) = -1.$$

4. Η συνάρτηση $G(x, y)$ ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη στο $x = 0$ και τη συνθήκη ακτινοβολίας στο $+\infty$.

5. Η συνάρτηση G είναι συμμετρική, δηλαδή $G(x, y) = G(y, x)$.

Αν υποθέσουμε λοιπόν ότι υπάρχει μια συνάρτηση Green που ικανοποιεί τις πέντε αυτές ιδιότητες, θα προσπαθήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα (2.10). Για τον σκοπό αυτό, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με $G(x, y)$ και ολοκληρώνουμε ως προς x από 0 έως $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} (-u''(x) - k^2u(x))G(x, y) dx = \int_0^{+\infty} f(x)G(x, y) dx \quad (2.11)$$

Το μόνο πράγμα που θα υποθέσουμε για τη συμπεριφορά της G είναι ότι μπορεί να παρουσιάζει προβλήματα καθώς το x τείνει στο y . Επομένως, μιας και τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στην (2.11) μπορεί να είναι γενικευμένα (improper) εξαιρούμε το $x = y$ από το διάστημα ολοκλήρωσης και γράφουμε:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} (-u''(x) - k^2u(x))G(x, y) dx \\ &= \lim_{\xi \rightarrow y^-} \int_0^{\xi} (-u''(x) - k^2u(x))G(x, y) dx \\ &+ \lim_{\eta \rightarrow y^+} \int_{\eta}^{+\infty} (-u''(x) - k^2u(x))G(x, y) dx. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Εξετάζουμε καθένα από τα δύο ολοκληρώματα στο δεξί μέλος της (2.12) ξεχωριστά και ολοκληρώνουμε δύο φορές κατά μέρη, επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} & \int_0^{\xi} (-u'' - k^2u)G(x, y) dx \\ &= -[u'G]_0^{\xi} + \int_0^{\xi} u'G'(x, y) dx - \int_0^{\xi} k^2uG(x, y) dx \\ &= -[u'G]_0^{\xi} + [uG']_0^{\xi} - \int_0^{\xi} uG''(x, y) dx - \int_0^{\xi} k^2uG(x, y) dx \\ &= [-u'G + uG']_0^{\xi} + \int_0^{\xi} u \underbrace{(-G''(x, y) - k^2G(x, y))}_{=0} dx. \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στο δεξί μέλος μηδενίζεται μιας και έχουμε υποθέσει ότι η $G(x, y)$ ικανοποιεί ως συνάρτηση του x την ομογενή εξίσωση Helmholtz στο διάστημα $0 \leq x \leq \xi$. Άρα

$$\int_0^{\xi} (-u'' - k^2u)G(x, y) dx = [-u'G + uG']_0^{\xi}.$$

Εντελώς ανάλογα μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^{+\infty} (-u'' - k^2u)G(x, y) dx &= [-u'G + uG']_{\eta}^{+\infty} \\ &= \lim_{\ell \rightarrow +\infty} [-u'G + uG']_{\eta}^{\ell}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε τους όρους αυτούς στην (2.11) και έχουμε

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} f(x) G(x, y) dx &= \left[-u'G + uG' \right]_0^\xi + \left[-u'G + uG' \right]_\eta^{+\infty} \\
 &= -u'(y^-) G(y^-, y) + u(y^-) G'(y^-, y) + u'(0) \underbrace{G(0, y)}_{=0} - \underbrace{u(0)}_{=0} G'(0, y) \\
 &\quad - \lim_{\ell \rightarrow +\infty} (u'(\ell) G(\ell, y)) + \lim_{\ell \rightarrow +\infty} (u(\ell) G'(\ell, y)) \\
 &\quad + u'(y^+) G(y^+, y) + u(y^+) G'(y^+, y)
 \end{aligned}$$

Οι όροι που σημειώσαμε να μηδενίζονται στην παραπάνω σχέση, μηδενίζονται λόγω της συνοριακής συνθήκης στο $x = 0$, την οποία ικανοποιεί τόσο η u όσο και η G . Επίσης, δεδομένου ότι η u είναι κλασσική λύση του προβλήματος (2.10) θα πρέπει να είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, άρα

$$u(y^-) = u(y^+) = u(y) \quad \text{και} \quad u'(y^-) = u'(y^+) = u'(y).$$

Επιπλέον, τόσο η u όσο και η G ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας στο $+\infty$, οπότε η προηγούμενη σχέση απλοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} f(x) G(x, y) dx &= u'(y) \underbrace{[G(y^+, y) - G(y^-, y)]}_{=0} \\
 &\quad - u(y) \underbrace{[G'(y^+, y) - G'(y^-, y)]}_{=-1} \\
 &\quad - \underbrace{\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \{ [u'(\ell) - iku(\ell)] G(\ell, y) \}}_{=0} \\
 &= u(y).
 \end{aligned}$$

Επομένως, με βάση τουλάχιστον τους παραπάνω τυπικούς (formal) υπολογισμούς, καταλήγουμε ότι αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση Green, τότε η λύση του προβλήματος (2.10) δίνεται από τον τύπο:

$$u(y) = \int_0^{+\infty} f(x) G(x, y) dx. \quad (2.13)$$

Οι τυπικοί υπολογισμοί που κάναμε παραπάνω εμπεριέχουν ένα λεπτό σημείο. Είδαμε ότι συνάρτηση Green ικανοποιεί $G'' + k^2G = 0$ για $0 \leq x < y$ καθώς και για $x > y$. Επίσης είδαμε ότι

$$u(y) = \int_0^{+\infty} f(x) G(x, y) dx = - \int_0^{+\infty} (u''(x) + k^2u(x)) G(x, y) dx.$$

Αν ολοκληρώσουμε το δεξί μέλος τυπικά δύο φορές κατά μέρη και χρησιμοποιήσουμε τη συνοριακή συνθήκη στο $x = 0$ και τη συνθήκη ακτινοβολίας στο $+\infty$ θα καταλήξουμε ότι

$$u(y) = - \int_0^{+\infty} (G''(x, y) + k^2 G(x, y)) u(x) dx. \quad (2.14)$$

Από τη μια μεριά έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι η $G'' + k^2 G$ είναι μηδέν παντού εκτός ίσως από το $x = y$, ενώ από την άλλη η (2.14) είναι μια τυπική αναπαράσταση της u στο σημείο $x = y$. Είναι λοιπόν προφανές ότι η $G'' + k^2 G$ δεν μπορεί να είναι μια συνάρτηση με τη συνήθη έννοια.

Για να αποκτήσουν αυστηρή μαθηματική υπόσταση τα παραπάνω χρειάζεται να καταφύγουμε στη θεωρία των κατανομών (theory of distributions). Για τις κατανομές μπορούμε να πούμε ότι είναι συνεχή, γραμμικά συναρτησοειδή που δρουν πάνω στις λεγόμενες δοκιμαστικές συναρτήσεις (test functions). Σε σχέση με την προηγούμενη παρατήρηση, στην πραγματικότητα, ισχύει ότι $-G''(x, y) - k^2 G(x, y) = \delta(x - y)$ με την έννοια των κατανομών, όπου η $\delta(\cdot)$ είναι μια κατανομή που ονομάζεται «συνάρτηση» δ του Dirac. Η «συνάρτηση» Dirac έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0, \quad \text{για } t \neq 0, \\ \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(s) ds &= 1, \quad \text{για κάθε } \epsilon > 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s) \delta(s) ds &= \phi(0), \end{aligned}$$

για κάθε αρκούντως ομαλή δοκιμαστική συνάρτηση ϕ , δηλαδή για κάθε συνάρτηση ϕ που είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη με συμπαγή φορέα (δηλαδή που μηδενίζεται έξω από ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα). Για μια σύντομη εισαγωγή στη θεωρία των κατανομών παραπέμπουμε στο βιβλίο του Logan, [17], και για περισσότερες πληροφορίες στο βιβλίο του Stakgold, [21].

Στη συνέχεια, θα εφαρμόσουμε κάποιες από τις βασικές ιδέες που είδαμε για τη συνάρτηση Green για να βρούμε την αναλυτική λύση του προβλήματος (2.10). Δεν είναι δύσκολο να επιβεβαιώσουμε ότι η συνάρτηση

$$G_{\infty}(x, y) = \frac{i}{2k} e^{ik|x-y|},$$

είναι η συνάρτηση Green για την εξίσωση Helmholtz σε ολόκληρη την ευθεία $(-\infty, +\infty)$ με συνθήκες εξερχόμενης ακτινοβολίας. Βεβαίως, άμεσα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η G_{∞} δεν ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη στο $x = 0$. Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε ένα τέχνασμα, που εκμεταλλεύεται τη συμμετρία, για να βρούμε τη συνάρτηση Green στο

ημιάπειρο διάστημα $(0, +\infty)$. (Η μέθοδος αυτή λέγεται μέθοδος των εικόνων - method of images.) Η ιδέα είναι η εξής: Αν αφαιρέσουμε από την $G_\infty(x, y)$ την «ανάκλαση» της γύρω από το μηδέν, αναμένουμε ότι η συνάρτηση Green που θα προκύψει με αυτό τον τρόπο θα ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη $G(0, y) = 0$. Πράγματι, ορίζουμε

$$G(x, y) = G_\infty(x, y) - G_\infty(-x, y) = \frac{i}{2k} (e^{ik|x-y|} - e^{ik|x+y|}).$$

Άμεσα βλέπουμε ότι πράγματι $G(0, y) = 0$, και δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι η G ικανοποιεί τις ιδιότητες (1)–(5) που αναφέραμε νωρίτερα. Φυσικά, η συνάρτηση Green μπορεί να γραφεί και στην ακόλουθη μορφή:

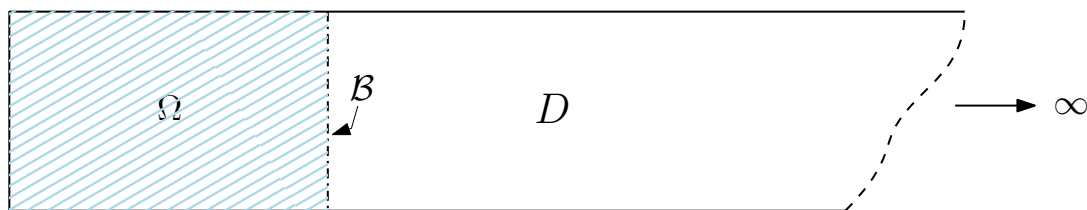
$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{i}{2k} (e^{ik|x-y|} - e^{ik|x+y|}) \\ &= \frac{i}{2k} \begin{cases} e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x+y)}, & 0 \leq x < y \\ e^{ik(x-y)} - e^{ik(x+y)}, & x > y \end{cases} \\ &= \frac{1}{k} \begin{cases} \sin(kx)e^{iky}, & 0 \leq x < y \\ \sin(ky)e^{ikx}, & x > y \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Άρα η αναλυτική λύση του προβλήματος (2.10) δίνεται από τον τύπο:

$$u(x) = -\frac{i}{2k} \int_0^{+\infty} f(y) (e^{ik|x-y|} - e^{ik|x+y|}) dy. \quad (2.16)$$

2.4 Διατύπωση ισοδύναμου προβλήματος σε φραγμένο διάστημα. Η συνθήκη Dirichlet-to-Neumann

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι στην περίπτωση που το k είναι σταθερό η λύση του προβλήματος (2.10) δίνεται από την αναπαράσταση (2.16). Στην περίπτωση που το k μεταβάλλεται σε κάποιο διάστημα, βλ. (2.9), μπορούμε να καταφύγουμε σε μια απευθείας αριθμητική μέθοδο, όπως είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων ή η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών, για να επιλύσουμε το πρόβλημα. Ασφαλώς όμως θα πρέπει σε αυτή την περίπτωση να αντικαταστήσει κανείς το ημιάπειρο χωρίο (στην περίπτωση μας το διάστημα $(0, +\infty)$) από ένα πεπερασμένο χωρίο (φραγμένο διάστημα). Μια συνηθισμένη τεχνική προς αυτή την κατεύθυνση είναι να εισαγάγουμε ένα τεχνητό σύνορο \mathcal{B} έτσι ώστε να δημιουργήσουμε ένα πεπερασμένο υπολογιστικό χωρίο. Ας συμβολίσουμε με \mathcal{R} το αρχικό μη φραγμένο χωρίο, με Ω το φραγμένο χωρίο και με D το υπόλοιπο χωρίο, δηλαδή $D = \mathcal{R} \setminus \bar{\Omega}$. Για παράδειγμα στο Σχήμα 2.2, απεικονίζουμε έναν ημιάπειρο κυματοδηγό που με την εισαγωγή του τεχνητού συνόρου \mathcal{B} χωρίζεται στο φραγμένο χωρίο Ω και σε ένα μη φραγμένο χωρίο D .



Σχήμα 2.2: Σχηματική αναπαράσταση ενός ημιάπειρου κυματοδηγού και του τεχνητού συνόρου \mathcal{B} .

Ως επόμενο βήμα, θα πρέπει να διατυπώσουμε μια κατάλληλη συνοριακή συνθήκη πάνω στο τεχνητό σύνορο \mathcal{B} με την οποία θα πρέπει ουσιαστικά να «αντισταθμίσουμε» το γεγονός ότι «κόψαμε» το αρχικό μη φραγμένο χωρίο \mathcal{R} . Με τον τρόπο αυτόν, το αρχικό πρόβλημα στο \mathcal{R} , αντικαθίσταται από ένα πρόβλημα σε ένα φραγμένο χωρίο Ω με μια κατάλληλη συνοριακή συνθήκη πάνω στο τεχνητό σύνορο \mathcal{B} . Αν η συνοριακή συνθήκη αυτή έχει σχεδιαστεί σωστά, τότε η λύση του προβλήματος στο φραγμένο χωρίο Ω θα προσεγγίζει αποτελεσματικά τη λύση του αρχικού προβλήματος. Εμείς στη συνέχεια θα δούμε μια συγκεκριμένη «τεχνητή» συνοριακή συνθήκη που έχει αποδειχθεί αποτελεσματική σε πολλές εφαρμογές και είναι γνωστή ως συνθήκη *Dirichlet-to-Neumann* (DtN).

Γενικά, δεδομένου ενός προβλήματος συνοριακών τιμών \mathcal{P} στο μη φραγμένο χωρίο \mathcal{R} , η μέθοδος DtN περιγράφεται από τα ακόλουθα τέσσερα βασικά βήματα, βλ. [10, Κεφ. 7],

- (α) Εισάγουμε ένα τεχνητό σύνορο \mathcal{B} , που χωρίζει το αρχικό χωρίο \mathcal{R} στο φραγμένο (υπολογιστικό) χωρίο Ω και στο υπόλοιπο μη φραγμένο χωρίο D .
- (β) Λύνουμε το πρόβλημα αναλυτικά στο D και διατυπώνουμε μια ακριβή σχέση μεταξύ της άγνωστης συνάρτησης και των παραγώγων της πάνω στο τεχνητό σύνορο \mathcal{B} .
- (γ) Χρησιμοποιούμε την ακριβή αυτή σχέση ως συνοριακή συνθήκη στο τεχνητό σύνορο \mathcal{B} . Με τον τρόπο αυτόν έχουμε διατυπώσει ένα καινούργιο πρόβλημα \mathcal{P}^* στο φραγμένο χωρίο Ω . Η λύση του προβλήματος \mathcal{P}^* είναι ακριβώς ο περιορισμός στο Ω του αρχικού προβλήματος \mathcal{P} στο \mathcal{R} .
- (δ) Επιλύουμε αριθμητικά το πρόβλημα \mathcal{P}^* στο φραγμένο χωρίο Ω . Μια αριθμητική μέθοδος που συνεργάζεται καλά με τέτοιου τύπου «τεχνητές» συνοριακές συνθήκες είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων.

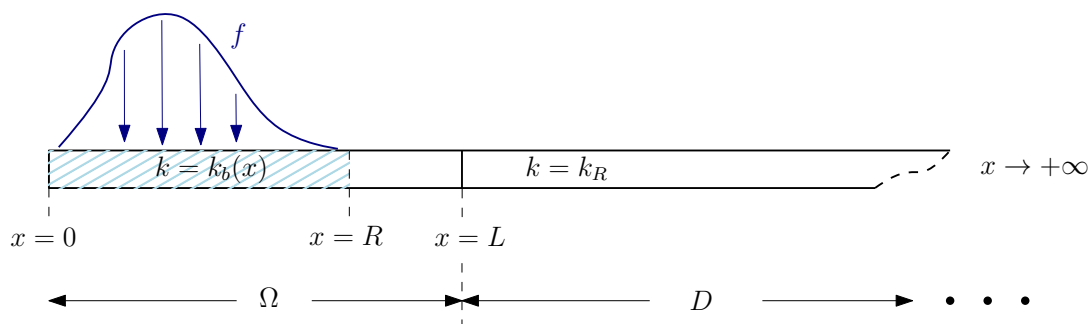
Στην απλούστερη περίπτωση η ακριβής συνοριακή συνθήκη στο \mathcal{B} έχει τη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) = Mu(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B}. \quad (2.17)$$

Στην (2.17), η u είναι η άγνωστη συνάρτηση, $\frac{\partial u}{\partial n}$ είναι η κάθετη παράγωγος της u στο \mathcal{B} , και M είναι ένας τελεστής που λέγεται *τελεστής DtN*, μιας και απεικονίζει τα δεδομένα Dirichlet u , στα δεδομένα Neumann $\frac{\partial u}{\partial n}$. Ανάλογα, η (2.17) λέγεται *συνοριακή συνθήκη DtN*, ενώ η διαδικασία (α)–(δ) που περιγράψαμε προηγουμένως λέγεται *μέθοδος DtN*.

Παρατήρηση 2.2. Πολλές φορές το να βρει κανείς τον τελεστή DtN αποτελεί ένα δύσκολο εγχείρημα. Σαφώς το πρόβλημα που τίθεται στο χωρίο D πρέπει να είναι αρκετά απλό ώστε να επιτρέπει τον αναλυτικό υπολογισμό της συνοριακής συνθήκης DtN (βήμα (β)). Αυτό, καταρχάς, σημαίνει ότι το τεχνητό σύνορο πρέπει να είναι απλής γεωμετρίας και, κατά δεύτερον, η διαφορική εξίσωση στο D , καθώς και οι συνθήκες ακτινοβολίας στο άπειρο, πρέπει να είναι αρκετά απλές. Για παράδειγμα, πολύ συχνά υποθέτουμε ότι στο D το πρόβλημα είναι γραμμικό και το μέσον είναι ομοιογενές και ιστροπικό. Από την άλλη μεριά στο υπολογιστικό χωρίο Ω το πρόβλημα μπορεί να είναι μη γραμμικό, το μέσον ανομοιογενές και ανισότροπο, δεδομένου ότι όλες αυτές οι «δυσκολίες» θα αντιμετωπιστούν αριθμητικά υπό την προϋπόθεση, φυσικά, ότι το αριθμητικό μας σχήμα είναι σε θέση να τις χειριστεί αποτελεσματικά.

Θα κλείσουμε αυτή την παράγραφο, εφαρμόζοντας την μέθοδο DtN στο μονοδιάστατο πρόβλημα (2.8). Το πρώτο βήμα είναι να εισάγουμε το τεχνητό σύνορο, που στην περίπτωση μας αποτελεί ένα σημείο. Επιλέγουμε λοιπόν ένα σημείο L τέτοιο ώστε στο «υπολογιστικό» μας χωρίο $\Omega = (0, L)$ να περιέχονται όλες οι πιθανές ανομοιογένειες του μέσου. Άρα σύμφωνα με τις υποθέσεις μας θα πρέπει $L > R$, βλ. Σχήμα 2.3. Επομένως στην περίπτωση μας, $D = (L, +\infty)$.



Σχήμα 2.3: Σχηματική αναπαράσταση του ημίπειρου χωρίου και της εισαγωγής του τεχνητού συνόρου στο $x = L$.

Βάσει των υποθέσεών μας, στο D , δηλαδή για $x > L$, η u ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση

$$-u''(x) - k_R^2 u(x) = 0,$$

της οποίας η γενική λύση είναι

$$u(x) = c_1 e^{ik_R x} + c_2 e^{-ik_R x}.$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.1, για να επιτρέψουμε μόνο κύματα που κινούνται προς τα δεξιά (εξερχόμενα) θα πρέπει $c_2 = 0$. Άρα

$$u(x) = c_1 e^{ik_R x} \Rightarrow u'(x) = ik_R \underbrace{c_1 e^{ik_R x}}_{=u(x)} \Rightarrow u'(x) = ik_R u(x).$$

Επομένως, η συνοριακή συνθήκη DtN στο τεχνητό σύνορο $x = L$, είναι απλώς η μεικτή συνθήκη:

$$u'(L) = ik_R u(L). \quad (2.18)$$

Άρα ο DtN τελεστής M , που εμφανίζεται στη γενική σχέση (2.17), στην περίπτωση μας είναι απλώς ο πολλαπλασιασμός επί ik_R . Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η συνθήκη DtN στο σχετικά απλό αυτό μονοδιάστατο πρόβλημα συμπίπτει με την συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld, που σύμφωνα με όσα συζητήσαμε στην Παράγραφο 2.2 ισχύει όχι μόνον καθώς το $x \rightarrow +\infty$, αλλά και σε κάθε πεπερασμένο $x > R$, επομένως και στο $x = L$.

Έτσι από το πρόβλημα (2.8) που είναι διατυπωμένο στο ημίαπειρο διάστημα $(0, +\infty)$, καταλήγουμε στο ακόλουθο πρόβλημα στο φραγμένο χωρίο $\Omega = (0, L)$:

$$\begin{cases} -u''(x) - k^2 u(x) = f(x), & x \in (0, L), \\ u(0) = 0, \\ u'(L) = ik_R u(L), \end{cases} \quad (2.19)$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής (ή, γενικότερα, τετραγωνικά ολοκληρώσιμη) και ότι υπάρχει ένας αριθμός $R > 0$, τέτοιος ώστε η f να μηδενίζεται για $x > R$, και ο κυματαριθμός k να είναι σταθερός για $x > R$, ενώ του επιτρέπουμε να μεταβάλλεται στο διάστημα $[0, R]$, βλ. (2.9).

Κεφάλαιο 3

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά θα παρουσιάσουμε κάποιες έννοιες από τη συναρτησιακή ανάλυση, που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, και θα εισαγάγουμε τον απαραίτητο συμβολισμό. Το βασικό θέμα αυτού του κεφαλαίου είναι η διατύπωση μιας μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος (2.19).

Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (Μ.Π.Σ.) (finite element method) είναι μια αριθμητική μέθοδος για την εύρεση προσεγγίσεων των λύσεων σε προβλήματα συνήθων ή μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η Μ.Π.Σ. είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική σε προβλήματα με μεταβλητούς συντελεστές καθώς και σε προβλήματα που τίθενται σε χωρία πολλών διαστάσεων με πολύπλοκη γεωμετρία.

Τα βασικά «συστατικά» της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων μπορούν να συνοψισθούν ως εξής:

- Το πρώτο βήμα είναι η αναδιατύπωση του προβλήματος στη λεγόμενη *ασθενή* ή *μεταβολική* μορφή. Σε αυτήν τη φάση μπορούμε να δούμε το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα «άπειρων εξισώσεων», οι δε συνοριακές συνθήκες υπεισέρχονται στην διατύπωση του προβλήματος μέσω του υποκείμενου διανυσματικού χώρου συναρτήσεων.
- Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τη λεγόμενη μέθοδο Galerkin ώστε να «λύσουμε το πρόβλημα σ' έναν κατάλληλο υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης». Η διαδικασία αυτή καταλήγει στην ανάγκη επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος.
- Τέλος, επιλέγουμε μια κατάλληλη βάση για τον υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης έτσι ώστε ο πίνακας του γραμμικού συστήματος στο οποίο θα καταλήξουμε να είναι «αραιός» (δηλαδή τα περισσότερα στοιχεία του να είναι μηδέν).

Στην Παράγραφο 3.2 θα περιγράψουμε την αναδιατύπωση του προβλήματος (2.19) σε ασθενή μορφή, ενώ στην Παράγραφο 3.3 θα διατυπώσουμε τη συνήθη μέθοδο Galerkin/πεπερασμένων στοιχείων για το πρόβλημα αυτό.

3.1 Στοιχεία συναρτησιακής ανάλυσης και συμβολισμός

Στην εισαγωγική αυτή παράγραφο θα δώσουμε ορισμούς βασικών εννοιών, θα παρουσιάσουμε τον συμβολισμό, και θα εισαγάγουμε τους βασικούς χώρους συναρτήσεων, που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

3.1.1 Νόρμα και εσωτερικό γινόμενο

Έστω V ένας μιγαδικός γραμμικός χώρος.

Ορισμός 3.1. Ορίζουμε ως *νόρμα* μια απεικόνιση $\|\cdot\|$ από τον χώρο V στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, η οποία σε κάθε στοιχείο $u \in V$ αντιστοιχεί έναν μοναδικό πραγματικό αριθμό $\|u\| \geq 0$, και είναι τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0, \quad (3.1)$$

$$\|au\| = |a|\|u\|, \quad \text{για κάθε } u \in V \text{ και } a \in \mathbb{C}, \quad (3.2)$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \text{για κάθε } u, v \in V. \quad (3.3)$$

Μια απεικόνιση $|\cdot| : V \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις (3.2) και (3.3), αλλά όχι, εν γένει, την (3.1) λέγεται ημινόρμα (seminorm).

Ορισμός 3.2. Ο V θα λέγεται *γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο* αν για κάθε ζεύγος $u, v \in V$ ορίζουμε έναν μιγαδικό αριθμό, που θα τον συμβολίζουμε ως (u, v) και θα τον αποκαλούμε εσωτερικό γινόμενο των u και v , και θα έχει τις εξής ιδιότητες:

$$\text{Για κάθε } u \in V : (u, u) \geq 0. \text{ Επιπλέον, αν } (u, u) = 0 \Rightarrow u = 0, \quad (3.4)$$

$$\text{για κάθε } u, v \in V : (u, v) = \overline{(v, u)}, \quad (3.5)$$

(όπου με \bar{z} συμβολίζουμε τον συζυγή του μιγαδικού z),

$$\text{για κάθε } u, v \in V \text{ και } a, b \in \mathbb{C} : (au + bv, w) = a(u, w) + b(v, w). \quad (3.6)$$

Πρόταση 3.1 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz). *Αν V είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $u, v \in V$, τότε*

$$|(u, v)| \leq \sqrt{(u, u)}\sqrt{(v, v)}. \quad (3.7)$$

Σε κάθε χώρο V με εσωτερικό γινόμενο μπορούμε να ορίσουμε μια νόρμα μέσω του εσωτερικού γινομένου, που θα την αποκαλούμε *επαγόμενη νόρμα*, ως εξής:

$$\|u\| := \sqrt{(u, u)}. \quad (3.8)$$

Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι η νόρμα που ορίζεται μέσω της (3.8), ικανοποιεί τις ιδιότητες (3.1)–(3.3) και άρα είναι πράγματι μια νόρμα. Συγκεκριμένα, για την απόδειξη της (3.3) χρειαζόμαστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz, (3.7).

Αν $(V, (\cdot, \cdot))$ είναι γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\|\cdot\|$ είναι η επαγόμενη νόρμα, τότε η ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνει τη μορφή:

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|. \quad (3.9)$$

Έστω $(V, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα και (u_n) μια ακολουθία στοιχείων του V . Θα λέμε ότι η (u_n) συγκλίνει στον V , αν υπάρχει κάποιο $u \in V$ έτσι ώστε $\|u_n - u\| \rightarrow 0$, καθώς $n \rightarrow \infty$.

Μια ακολουθία (u_n) στοιχείων του V θα λέγεται *ακολουθία Cauchy* ή *βασική ακολουθία* αν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 = n_0(\epsilon)$ τέτοιος ώστε

$$\|u_n - u_m\| < \epsilon, \quad \text{για κάθε } m, n \geq n_0. \quad (3.10)$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι μια συγκλίνουσα ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει πάντα. Θα λέμε ότι ο χώρος V είναι *πλήρης (complete)* αν κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει.

3.1.2 Συμβολισμός

Στη συνέχεια, έστω I ένα ανοικτό διάστημα στο \mathbb{R} . Θα χρησιμοποιήσουμε τους ακόλουθους συμβολισμούς:

- $C(I)$ είναι το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το I ,
- $C^k(I)$ είναι το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων με συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι k -τάξης,
- $C^\infty(I)$ είναι το σύνολο των απείρως συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Αν $f \in C(I)$, θα ονομάζουμε *φορέα (support)* της f , και θα συμβολίζουμε $\text{supp}(f)$ το σύνολο: $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in I : f(x) \neq 0\}}$. Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f \in C(I)$ έχει *συμπαγή φορέα* αν ο φορέας της είναι ένα συμπαγές σύνολο που περιέχεται στο I . Το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα συμβολίζεται με $C_c(I)$. Αναλόγως, θα συμβολίζουμε με $C_c^\infty(I)$ τον χώρο των απείρως συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα. Με άλλα λόγια, οι συναρτήσεις του $C_c(I)$ μηδενίζονται έξω από ένα συμπαγές σύνολο (δηλαδή έξω από ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα στην περίπτωση της μίας διάστασης).

3.1.3 Χώροι Hilbert

Ορισμός 3.3. Ένας πλήρης χώρος με εσωτερικό γινόμενο λέγεται χώρος Hilbert.

Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοικτό διάστημα. Ορίζουμε τον ακόλουθο χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων:

$$L^2(I) = \{u : I \rightarrow \mathbb{C}, \int_I |f(x)|^2 dx < \infty\}. \quad (3.11)$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x$ ανήκει στον $L^2(0, 1)$, ενώ η συνάρτηση $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = 1/x$ δεν ανήκει στον $L^2(0, 1)$.

Για κάθε $u, v \in L^2(I)$ το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(I)$ ορίζεται ως:

$$(u, v) = \int_I u(x)\overline{v(x)} dx. \quad (3.12)$$

Η επαγόμενη από το εσωτερικό γινόμενο νόρμα στον $L^2(I)$ είναι

$$\|u\| = \left(\int_I |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (3.13)$$

Ο L^2 είναι χώρος Hilbert.

Ένας άλλος χώρος που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια είναι ο χώρος Sobolev

$$H^1(I) = \{u \in L^2(I) : u' \in L^2(I)\}, \quad (3.14)$$

που αποτελείται από τις συναρτήσεις του $L^2(I)$ που έχουν ασθενή (ή γενικευμένη) παράγωγο που ανήκει και αυτή στον $L^2(I)$.

Ορισμός 3.4. Έστω $u \in L^2(I)$. Αν υπάρχει $w \in L^2(I)$ τέτοια ώστε

$$\int_I u\phi' = - \int_I w\phi, \quad \text{για κάθε } \phi \in C_c^1(I),$$

τότε λέμε ότι η w είναι η ασθενής ή γενικευμένη παράγωγος της u (με την έννοια του L^2) και συμβολίζουμε $w = u'$.

Εύκολα βλέπουμε ότι ο $H^1(I)$ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $L^2(I)$. Έστω ότι με (\cdot, \cdot) και $\|\cdot\|$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο και τη νόρμα του $L^2(I)$, όπως ορίστηκαν στις (3.12) και (3.13), αντίστοιχα. Τότε ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο και νόρμα στον $H^1(I)$ ως εξής:

Ορισμός 3.5. Έστω $u, v \in H^1(I)$. Τότε το εσωτερικό γινόμενο στον $H^1(I)$ ορίζεται ως

$$(u, v)_1 := (u, v) + (u', v') = \int_I (u(x)\overline{v(x)} + u'(x)\overline{v'(x)}) dx,$$

και η αντίστοιχη επαγόμενη νόρμα ως

$$\|u\|_1 := (\|u\|^2 + \|u'\|^2)^{1/2} = \left(\int_I (|u(x)|^2 + |u'(x)|^2) dx \right)^{1/2}.$$

Σε κάποιες περιπτώσεις θα χρησιμοποιήσουμε και την ημινόρμα

$$|u|_1 = \left(\int_I |u'(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (3.15)$$

Όπως αναφέραμε και στον Ορισμό 3.1, ημινόρμα είναι μια απεικόνιση που ικανοποιεί τις (3.2) και (3.3), αλλά όχι, εν γένει, την (3.1). Για παράδειγμα, θεωρούμε τη σταθερή συνάρτηση $u(x) = 1$, η οποία προφανώς ανήκει στον $H^1(0, 1)$. Τότε $|u|_1 = 0$, αλλά $u \neq 0$.

Εντελώς ανάλογα αν $m > 0$ ακέραιος, ορίζουμε τον χώρο Sobolev $H^m(I)$ που περιέχει τις συναρτήσεις του $L^2(I)$ που έχουν ασθενείς παραγώγους μέχρι και m -τάξης που και εκείνες ανήκουν στον $L^2(I)$, δηλαδή

$$H^m(I) = \{u \in L^2(I) : u^{(i)} \in L^2(I), i = 1, 2, \dots, m\}. \quad (3.16)$$

Οι χώροι $H^m(I)$ είναι και αυτοί χώροι Hilbert.

Τέλος, για το πρόβλημα που θα μελετήσουμε στη συνέχεια, θα χρειαστούμε και συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, L)$, που θα πρέπει να ικανοποιούν τη συνοριακή συνθήκη Dirichlet στο άκρο $x = 0$. Για τον σκοπό αυτό θα χρειαστεί να εισαγάγουμε και τον ακόλουθο χώρο συναρτήσεων

$$H_{(0)}^1(0, L) = \{u \in H^1(0, L) : u(0) = 0\}. \quad (3.17)$$

3.1.4 Γραμμικά συναρτησοειδή και διγραμμικές μορφές

Ορισμός 3.6. Έστω V ένας χώρος Hilbert. Θα λέμε ότι F είναι ένα *συναρτησοειδές (functional)* στον V αν F είναι μια απεικόνιση από τον V στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών \mathbb{C} , η οποία απεικονίζει κάθε στοιχείο $v \in V$ σε έναν μοναδικό μιγαδικό αριθμό $F(v)$.

Ένα συναρτησοειδές θα λέγεται *γραμμικό* αν για κάθε $u, v \in V$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$: $F(\lambda u + \mu v) = \lambda F(u) + \mu F(v)$.

Ένα συναρτησοειδές λέγεται *φραγμένο* αν υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $|F(v)| \leq M \|v\|$ για κάθε $v \in V$.

Ένα παράδειγμα ενός γραμμικού φραγμένου συναρτησοειδούς σε έναν χώρο Hilbert V δίνεται μέσω του εσωτερικού γινομένου των στοιχείων του V με ένα συγκεκριμένο στοιχείο $w \in V$. Συγκεκριμένα, δεδομένου ενός $w \in V$, για κάθε $u \in V$ ορίζουμε

$$F(u) = (u, w).$$

Προφανώς το F είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές. Για να δούμε ότι είναι φραγμένο παρατηρούμε ότι

$$|F(u)| = |(u, w)| \stackrel{(3.9)}{\leq} \|u\| \|w\|.$$

Ορισμός 3.7. Έστω V ένας (μιγαδικός) χώρος Hilbert. Η απεικόνιση $B : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ λέμε ότι είναι διγραμμική μορφή αν για κάθε $u, v \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ισχύουν οι ιδιότητες :

$$B(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 B(u_1, v) + \lambda_2 B(u_2, v) \quad (3.18)$$

και

$$B(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \overline{\lambda_1} B(u, v_1) + \overline{\lambda_2} B(u, v_2). \quad (3.19)$$

3.1.5 Μερικά σχόλια για τους χώρους Sobolev

Σημειώνουμε ότι στην Παράγραφο [3.1.3](#) δεν ορίσαμε με αυστηρό τρόπο τους χώρους συναρτήσεων L^2, H^1 , κ.λπ. Εδώ, ακολουθώντας το βιβλίο του Gockenbach, [\[11\]](#), θα δώσουμε κάποιες πληροφορίες για τις έννοιες που απαιτούνται ώστε να προχωρήσει κανείς στην αυστηρή μαθηματική θεμελίωση των χώρων αυτών.

Καταρχάς, για να ορίσουμε αυστηρά τον χώρο L^2 , θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον κατάλληλο ορισμό του ολοκληρώματος. Το ολοκλήρωμα με το οποίο είμαστε περισσότερο εξοικειωμένοι είναι το ολοκλήρωμα Riemann. Δυστυχώς το ολοκλήρωμα Riemann εμφανίζει κάποια τεχνικά μειονεκτήματα. Ένα κύριο μειονέκτημα είναι ότι μπορεί κανείς να κατασκευάσει μια ακολουθία από ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις η οποία να συγκλίνει (κατά μια φυσιολογική έννοια) σε μια συνάρτηση που δεν είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Για να αποφευχθούν οι τεχνικές αυτές δυσκολίες θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την έννοια του ολοκληρώματος Lebesgue, το οποίο με τη σειρά του βασίζεται στην έννοια του μέτρου Lebesgue για σύνολα. Πολύ γενικά, αναφέρουμε ότι το μέτρο Lebesgue στην περίπτωση χωρίων του \mathbb{R}^2 αντιστοιχεί στην έννοια του εμβαδού, υπό την προϋπόθεση ότι τα χωρία αυτά είναι αρκετά ομαλά ώστε να μπορεί να οριστεί εμβαδόν. Ανάλογα, στην περίπτωση της μίας διάστασης συνδέεται με την έννοια του μήκους. Από την άλλη μεριά κάθε συνάρτηση που είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann είναι ολοκληρώσιμη και κατά Lebesgue και τα δύο αυτά ολοκληρώματα συμπίπτουν. Το ολοκλήρωμα Lebesgue όμως μας επιτρέπει να ολοκληρώσουμε και μη ομαλές συναρτήσεις οι οποίες για θεωρητικούς λόγους πρέπει να συμπεριληφθούν στους χώρους που ορίσαμε.

Μια βασική ιδιότητα του χώρου $L^2(I)$ που πρέπει να αναφέρουμε είναι η ακόλουθη: Δύο συναρτήσεις u, v για τις οποίες ισχύει ότι $\int_I |u - v| = 0$, θα πρέπει να θεωρούνται ως ίσες. Οι συναρτήσεις u και v θα έχουν αυτή την ιδιότητα αν $u(x) = v(x)$ εκτός από ένα σύνολο που έχει μέτρο Lebesgue μηδέν. Βεβαιώς, στην περίπτωση που Ω είναι ένα διάστημα στη μία διάσταση ή ένα φραγμένο χωρίο στις δύο διαστάσεις και u είναι μια καλώς ορισμένη συνάρτηση στον $L^2(\Omega)$, το προηγούμενο γεγονός έχει ως αποτέλεσμα να μην μπορούμε να

ορίσουμε με σαφήνεια τον περιορισμό της u στο σύνορο $\partial\Omega$ του χωρίου Ω , μιας και αυτό είναι ένα υποσύνολο μέτρου μηδέν. Για τον λόγο αυτό, για να αναπτύξουμε μια αυστηρή θεωρία για την επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε πόση ομαλότητα (δηλαδή πόσες ασθενείς παραγωγούς) πρέπει να έχει μια συνάρτηση ώστε να ορίζονται καλώς οι συνοριακές της τιμές. Μια απάντηση στο ερώτημα αυτό μας δίνει το θεώρημα του ίχνους (trace) το οποίο, στην περίπτωση που $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, μας εξασφαλίζει ότι αν θεωρήσουμε μια συνάρτηση που ανήκει στον $H^1(\Omega)$ και την περιορίσουμε στο σύνορο $\partial\Omega$, τότε παράγει μια συνάρτηση που ανήκει στον χώρο $L^2(\partial\Omega)$. Τέτοιου τύπου αποτελέσματα είναι απαραίτητα ώστε να μπορούμε να επιλύσουμε προβλήματα συνοριακών τιμών σε δύο ή περισσότερες διαστάσεις.

3.2 Ασθενής διατύπωση του προβλήματος

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τη λεγόμενη ασθενή διατύπωση του προβλήματος που θα μελετήσουμε, η οποία, όπως είπαμε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου αυτού, είναι ένα από τα βασικά συστατικά της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

Θεωρούμε λοιπόν το πρόβλημα (2.19), στο οποίο υπενθυμίζουμε ότι αναζητούμε μια συνάρτηση u η οποία ικανοποιεί την εξίσωση

$$-u''(x) - k^2u(x) = f(x), \quad x \in (0, L),$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$u(0) = 0 \quad \text{και} \quad u'(L) = ik_R u(L).$$

Για τη συνάρτηση f θα υποθέσουμε ότι ανήκει στον $L^2(0, L)$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας αριθμός R με $0 < R < L$, τέτοιος ώστε ο κυματαριθμός k να είναι σταθερός για $R < x < L$, ενώ του επιτρέπουμε να μεταβάλλεται στο διάστημα $[0, R]$, βλ. (2.9) και Σχήμα 2.3.

Θεωρούμε τον χώρο συναρτήσεων

$$V = H_{(0)}^1(0, L) := \{u \in H^1(0, L) : u(0) = 0\}, \quad (3.20)$$

βλ. (3.17). Δεδομένου ότι η $f \in L^2(0, L)$, θα υποθέσουμε το πρόβλημα (2.19) έχει μοναδική λύση που ανήκει στον χώρο $H^2 \cap V$.

Για να διατυπώσουμε το πρόβλημα στην ασθενή του μορφή, θεωρούμε μια δοκιμαστική συνάρτηση $v \in V$, πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση Helmholtz στην (2.19) με τη συζυγή της

v , και ολοκληρώνουμε από 0 έως L , οπότε έχουμε:

$$-\int_0^L u''(x)\overline{v(x)} dx - \int_0^L k^2(x)u(x)\overline{v(x)} dx = \int_0^L f(x)\overline{v(x)} dx.$$

Στη συνέχεια, κάνουμε ολοκλήρωση κατά μέρη στον πρώτο όρο και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} & -u'(L)\overline{v(L)} + u'(L)\overline{v(0)} + \int_0^L u'(x)\overline{v'(x)} dx - \int_0^L k^2(x)u(x)\overline{v(x)} dx \\ & = \int_0^L f(x)\overline{v(x)} dx. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε την DtN συνοριακή συνθήκη στην (2.19) και το γεγονός ότι $v \in V$, άρα $v(0) = 0$, και έχουμε:

$$\begin{aligned} & -ik_R u(L)\overline{v(L)} + \int_0^L u'(x)\overline{v'(x)} dx - \int_0^L k^2(x)u(x)\overline{v(x)} dx \\ & = \int_0^L f(x)\overline{v(x)} dx. \end{aligned}$$

Αν θέσουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u, v) & := \int_0^L u'(x)\overline{v'(x)} dx - \int_0^L k^2(x)u(x)\overline{v(x)} dx - ik_R u(L)\overline{v(L)} \\ & = (u', v') + (k^2 u, v) - ik_R u(L)\overline{v(L)}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

και ορίσουμε το συναρτησοειδές

$$\mathcal{F}(v) := \int_0^L f(x)\overline{v(x)} dx = (f, v), \quad (3.22)$$

τότε η ασθενής μορφή του προβλήματος είναι:

Αναζητούμε $u \in V$, τέτοια ώστε

$$\mathcal{B}(u, v) = \mathcal{F}(v), \quad \text{για κάθε } v \in V, \quad (3.23)$$

όπου $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ είναι η διγραμμική μορφή που ορίσαμε στην (3.21), και $\mathcal{F}(\cdot)$ είναι το γραμμικό φραγμένο συναρτησοειδές που ορίσαμε στην (3.22).

3.3 Η προσέγγιση πεπερασμένων στοιχείων/Galerkin με κατά τμήματα γραμμικές, συνεχείς συναρτήσεις

Αρχικά, θεωρούμε μια διαμέριση του διαστήματος $[0, L]$ σε N υποδιαστήματα, $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = L$. Ειδικότερα, θα θεωρήσουμε ότι ο διαμερισμός είναι ομοιόμορφος,

δηλαδή $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N$, όπου $h = L/N$ είναι η παράμετρος διακριτοποίησης και είναι ίση με το μήκος του κάθε υποδιαστήματος. Στα σημεία x_i θα αναφερόμαστε ως *κόμβους*, ενώ στα υποδιαστήματα $[x_i, x_{i+1}]$ ως *στοιχεία*.

Στη συνέχεια, επιλέγουμε έναν υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης του δ.χ. V , έστω V_h , και απαιτούμε να ισχύει η (3.23) στον V_h . Δηλαδή, αναζητούμε $u_h \in V_h$ τέτοια ώστε

$$\mathcal{B}(u_h, \chi) = \mathcal{F}(\chi), \quad \text{για κάθε } \chi \in V_h. \quad (3.24)$$

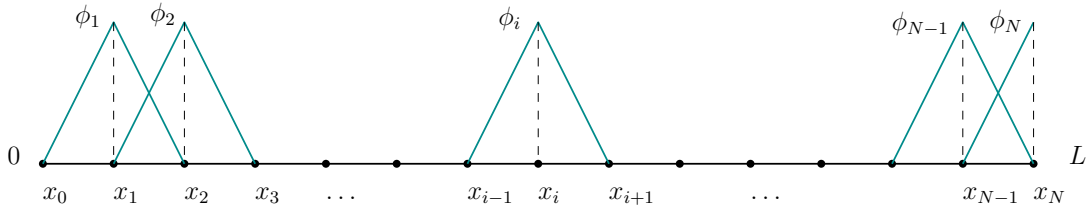
Συγκεκριμένα, θα επιλέξουμε ως υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης το σύνολο όλων των συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο $[0, L]$, μηδενίζονται στο άκρο $x = 0$, και ο περιορισμός τους σε κάθε υποδιάστημα $[x_j, x_{j+1}]$ είναι ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Συμβολικά,

$$V_h = \{\phi \in C[0, L] : \phi(0) = 0 \text{ και } \phi|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1\}. \quad (3.25)$$

Δεν είναι δύσκολο να αποδείξει κανείς ότι πράγματι ο V_h είναι ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του V , βλ., π.χ., [7], και ότι $\dim V_h = N$. Μια βάση του V_h αποτελεί το σύνολο $\mathcal{B} = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$, όπου

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases}$$

για $i = 1, \dots, N$, δηλαδή ϕ_i είναι οι γνωστές συναρτήσεις «στέγης» (hat functions), βλ. Σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1: Συναρτήσεις βάσης του V_h .

Προφανώς $\phi_i \in V_h$, για $i = 1, \dots, N$, και $\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, για $i, j = 1, \dots, N$.

Δεδομένου ότι $\phi_i \in V_h$, και η (3.24) ισχύει για κάθε $\chi \in V_h$, έχουμε ότι

$$(u'_h, \phi'_i) - (k^2 u_h, \phi_i) - ik_R u_h(L) \overline{\phi_i(L)} = (f, \phi_i), \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (3.26)$$

Γράφουμε την άγνωστη συνάρτηση u_h (που είναι στοιχείο του V_h) ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης \mathcal{B} , δηλαδή

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x). \quad (3.27)$$

Επομένως για να προσδιορίσουμε μια προσέγγιση της λύσης u , πρέπει να υπολογίσουμε τους συντελεστές a_j , $j = 1, \dots, N$.

Αντικαθιστούμε την (3.27) στην (3.26) και έχουμε :

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^N a_j \phi'_j, \phi'_i \right) - \left(k^2 \sum_{j=1}^N a_j \phi_j, \phi_i \right) - ik_R \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(L) \phi_i(L) \\ &= (f, \phi_i), \quad i = 1, \dots, N \\ \Rightarrow & \sum_{j=1}^N (\phi'_j, \phi'_i) a_j - \sum_{j=1}^N (k^2 \phi_j, \phi_i) a_j - ik_R \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x_N) \phi_i(x_N) \\ &= (f, \phi_i), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Όμως $\phi_j(x_N) = 0$ για $j \neq N$, $\phi_i(x_N) = 0$ για $i \neq N$, ενώ $\phi_N(x_N) = 1$. Άρα

$$\sum_{j=1}^N [(\phi'_j, \phi'_i) - (k^2 \phi_j, \phi_i)] a_j - ik_R a_N = (f, \phi_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.28)$$

Δηλαδή, καταλήξαμε σε ένα $N \times N$ γραμμικό σύστημα της μορφής

$$A\mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (3.29)$$

όπου

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix}, \quad \text{με } F_i = (f, \phi_i),$$

και A είναι ο $N \times N$ πίνακας του οποίου το ij -στοιχείο, για $i, j = 1, \dots, N$, είναι ίσο με

$$A_{ij} = (\phi'_j, \phi'_i) - (k^2 \phi_j, \phi_i),$$

εκτός από το στοιχείο A_{NN} που είναι ίσο με

$$A_{NN} = (\phi'_N, \phi'_N) - (k^2 \phi_N, \phi_N) - ik_R.$$

Δεδομένου ότι ο φορέας της ϕ_i , $\text{supp}(\phi_i) = [x_{i-1}, x_{i+1}]$, έχουμε ότι $A_{ii} \neq 0$ για $1 \leq i \leq N$, $A_{i,i+1} \neq 0$ και $A_{i+1,i} \neq 0$ για $1 \leq i \leq N-1$, ενώ όλα τα άλλα στοιχεία του πίνακα $A_{ij} = 0$. Συνεπώς ο πίνακας A είναι αραιός και, συγκεκριμένα, τριδιαγώνιος.

Κεφάλαιο 4

Αριθμητικά Πειράματα

4.1 Περιγραφή του προγράμματος των πεπερασμένων στοιχείων

Για την υλοποίηση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων που περιγράψαμε στην Παράγραφο 3.3, θα χρησιμοποιήσουμε έναν κώδικα πεπερασμένων στοιχείων που έχει γραφεί από τον John Burkardt, [4], σε MATLAB. Ο κώδικας αυτός, στην αρχική του μορφή, σχεδιάστηκε ώστε να λύνει προβλήματα συνοριακών τιμών για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad \text{για } x \in [a, b],$$

όπου p, q, f γνωστές συναρτήσεις, ενώ στα άκρα $x = a$ και $x = b$ δίνονται συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet ή Neumann. Τον κώδικα αυτόν τον τροποποιήσαμε ώστε να επιλύει το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.19). Στη συνέχεια, θα δώσουμε μια σύντομη περιγραφή των βασικών συνιστωσών του προγράμματος αυτού, καθώς και των αλλαγών που κάναμε ώστε να επιλύσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Το κυρίως πρόγραμμα ονομάζεται **fem1d.m**. Σε αυτό καθορίζουμε το πλήθος (N) των υποδιαστημάτων (στοιχείων) στα οποία χωρίζουμε το διάστημα $[0, L]$. Στη συνέχεια, το κυρίως πρόγραμμα καλεί με τη σειρά τις ακόλουθες συναρτήσεις.

init.m : Η συνάρτηση αυτή αρχικοποιεί τις διάφορες μεταβλητές του προβλήματος και το διάστημα $[0, L]$ στο οποίο αναζητούμε τη λύση. Επιπλέον, εδώ καθορίζεται το είδος των συνοριακών συνθηκών στα άκρα $x = 0$ και $x = L$. Συγκεκριμένα, στο άκρο $x = 0$ επιβάλλουμε συνθήκη Dirichlet, ενώ στο άκρο $x = L$ επιλέγουμε αρχικά μια συνθήκη τύπου Neumann ώστε να καθοριστεί σωστά το πλήθος των συναρτήσεων βάσης του V_h , βλ. Σχήμα 3.1. Τέλος, καθορίζουμε ότι για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων σε κάθε υποδιάστημα θα χρησιμοποιηθεί ο κανόνας του μέσου σύμφωνα με τον οποίον

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \approx (\beta - \alpha) g\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

geometry.m : Η συνάρτηση αυτή δέχεται ως είσοδο τα δεδομένα εξόδου της **init.m** και επιστρέφει ένα διάνυσμα με τα μήκη των υποδιαστημάτων του διαμερισμού μας, ένα διά-

νυσμα με τις συντεταγμένες των κόμβων του διαμερισμού μας, ένα διάνυσμα με τις συντεταγμένες των κόμβων ολοκλήρωσης (μέσα των υποδιαστημάτων), καθώς και έναν πίνακα και ένα διάνυσμα δεικτών που περιέχουν την λεγόμενη ολική-σε-τοπική αρίθμηση (global-to-local numbering), βλ. [7, σελ. 77–81], που είναι απαραίτητα για το λεγόμενο assembly του πίνακα A .

assemble.m : Η συνάρτηση αυτή δέχεται ως είσοδο τα προηγούμενα δεδομένα και υλοποιεί το λεγόμενο assembly («συναρμολόγηση») του πίνακα A του συστήματος (3.29) και του διανύσματος των σταθερών όρων F . Συγκεκριμένα, επιστρέφει τέσσερα διανύσματα, τα τρία πρώτα περιέχουν τα στοιχεία της διαγωνίου, της υποδιαγωνίου, και της υπερδιαγωνίου του τριδιαγώνιου πίνακα A , αντίστοιχα, ενώ το τέταρτο τα στοιχεία του διανύσματος F . Για να το πετύχει αυτό «μπαίνει» σε κάθε στοιχείο (υποδιάστημα) και «μαζεύει» τη συνεισφορά για τον υπολογισμό των στοιχείων του πίνακα και του διανύσματος των σταθερών όρων υπολογίζοντας, όπως ήδη αναφέραμε, με τον κανόνα του μέσου τα αντίστοιχα ολοκληρώματα.

solve.m : Η συνάρτηση αυτή επιλύει το γραμμικό σύστημα (3.29), όπου A είναι ο μιγαδικός τριδιαγώνιος πίνακας που τα στοιχεία του τα ορίσαμε στο τέλος της Παραγράφου 3.3. Η μέθοδος επίλυσης που ακολουθείται είναι η ανάλυση LU για τριδιαγώνια συστήματα, βλ. [1, Παρ. 3.4].

L2H1norms.m : Αυτή είναι μια συνάρτηση που κατασκευάσαμε εμείς ώστε να υπολογίσουμε το σφάλμα της προσεγγιστικής λύσης u_h , που μας δίνει η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων, σε σχέση με την ακριβή λύση u , όταν βεβαίως αυτή μπορεί να βρεθεί αναλυτικά, όπως συμβαίνει π.χ. στην περίπτωση που ο κυματαριθμός k είναι σταθερός. Συγκεκριμένα, υπολογίζουμε τις ποσότητες $\|u - u_h\|$ και $\|u - u_h\|_1$, που εκφράζουν το απόλυτο σφάλμα ως προς την L^2 και την H^1 νόρμα, αντίστοιχα, ή τα αντίστοιχα σχετικά σφάλματα $\frac{\|u - u_h\|}{\|u\|}$ και $\frac{\|u - u_h\|_1}{\|u\|_1}$.

Για την προσέγγιση των ολοκληρωμάτων σε κάθε υποδιάστημα του διαμερισμού μας, που απαιτούνται για τον υπολογισμό του L^2 και του H^1 σφάλματος, χρησιμοποιούμε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss-Legendre με δύο σημεία:

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx w_0 g(t_0) + w_1 g(t_1), \quad (4.1)$$

όπου τα βάρη είναι $w_0 = w_1 = 1$ και οι κόμβοι είναι $t_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Για να προσεγγίσουμε την τιμή του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης g σε ένα άλλο

διάστημα $[a, b]$, $\int_a^b g(x) dx$, κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} \Leftrightarrow t = \frac{2x - (b+a)}{b-a},$$

οπότε

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) dx &= \int_{-1}^1 g\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) \frac{b-a}{2} dt \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) dt \\ &\stackrel{(4.1)}{\approx} \frac{b-a}{2} \left[g\left(\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Σε όλες τις περιπτώσεις που θα δούμε στη συνέχεια θα θεωρήσουμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[0, L]$ με N υποδιαστήματα, οπότε η παράμετρος διακριτοποίησης $h = L/N$.

4.2 Συγκρίσεις με ακριβή λύση

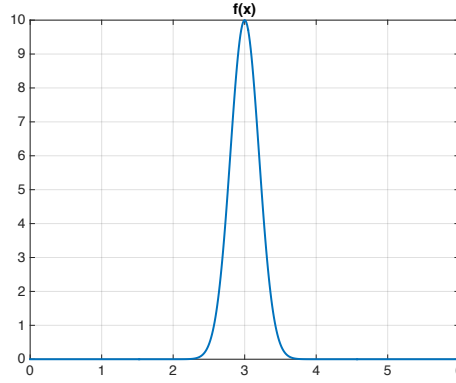
Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα διαφόρων αριθμητικών πειραμάτων όταν ο κυματαριθμός k είναι σταθερός. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε την ακριβή λύση του προβλήματος μέσω της συνάρτησης Green, όπως δίνεται από τον τύπο (2.16). Αυτό θα μας επιτρέψει να σχεδιάσουμε πειράματα στα οποία:

- α) θα εκτιμήσουμε αριθμητικά την τάξη ακρίβειας της μεθόδου ως προς την L^2 και την H^1 νόρμα,
- β) θα διερευνήσουμε τον τρόπο εξάρτησης του σχετικού σφάλματος ως προς την L^2 και την H^1 νόρμα από τον κυματαριθμό k και την παράμετρο διακριτοποίησης $h = L/N$, και
- γ) θα διερευνήσουμε αν η θέση του τεχνητού συνόρου L επηρεάζει την αριθμητική μας λύση.

Σε όλα τα αριθμητικά πειράματα επιλέξαμε τη συνάρτηση f , που εμφανίζεται στο δεξί μέλος της (2.19), να είναι μια Γκαουσιανή της μορφής

$$f(x) = Ae^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.2)$$

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 4.1 απεικονίζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x \in [0, 6]$, $A = 10$, $\mu = 3$, και $\sigma = 1/5$.



Σχήμα 4.1: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , βλ. (4.2), για $A = 10$, $\mu = 3$, και $\sigma = 1/5$.

4.2.1 Αριθμητικός υπολογισμός της τάξης ακρίβειας της μεθόδου

Ο στόχος του πρώτου αριθμητικού μας πειράματος είναι να ελέγξουμε αριθμητικά την τάξη ακρίβειας της μεθόδου. Είναι γνωστό, βλ. π.χ. [20, 13], ότι αν u είναι η ακριβής λύση του προβλήματος (3.23) και u_h είναι η προσέγγιση πεπερασμένων στοιχείων του προβλήματος (3.24), τότε υπάρχει ένα $h_0(k)$ τέτοιο ώστε αν $h \in (0, h_0(k)]$, να ισχύουν οι ακόλουθες εκτιμήσεις για το σφάλμα $u - u_h$ ως προς την L^2 ($\|\cdot\|$) και την H^1 ($\|\cdot\|_1$) νόρμα:

$$\|u - u_h\|_1 \leq c(k)h\|f\|, \quad (4.3)$$

$$\|u - u_h\| \leq c(k)h^2\|f\|, \quad (4.4)$$

δηλαδή το σφάλμα είναι πρώτης τάξης ως προς την H^1 νόρμα και δεύτερης τάξης ως προς την L^2 νόρμα.

Για να επιβεβαιώσουμε αριθμητικά τα αποτελέσματα αυτά, θεωρούμε σταθερή ταχύτητα κύματος $c_0 = 5100$ m/s, συχνότητα f_r , οπότε ο κυματαριθμός k και το μήκος κύματος λ είναι ίσα με

$$k = \frac{2\pi f_r}{c_0}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c_0}{f_r},$$

αντίστοιχα. Για τη συνάρτηση f επιλέγουμε τις παραμέτρους $A = 200$, $\mu = 3$, $\sigma = \lambda/20$, ώστε να προσομοιώνει μια σημειακή πηγή τοποθετημένη στο $x = 3$, ενώ τοποθετούμε το τεχνητό σύνορο στο σημείο $L = 6$, όπου όλες οι αποστάσεις είναι σε μέτρα (m).

Περίπτωση (α): $f_r = 1000$ Hz.

Αρχικά θεωρούμε μια συχνότητα ίση με $f_r = 1000$ Hz, οπότε το μήκος κύματος είναι ίσο με $\lambda = 5.1$ m, και το υπολογιστικό μας χωρίο $[0, L]$ περίπου ίσο με 1.2λ . Τρέχουμε τον κώδικά μας με ομοιόμορφους διαμερισμούς αποτελούμενους από $N = 100, 200, 400, 800$

και 1600 υποδιαστήματα του $[0, 6]$. Τα αποτελέσματά μας για το L^2 και το H^1 σφάλμα συνοψίζονται στην δεύτερη και στην τέταρτη στήλη του Πίνακα 4.1, αντίστοιχα. Στις στήλες 3 και 5, παρουσιάζουμε την τάξη ακρίβειας της μεθόδου ως προς την L^2 και την H^1 νόρμα, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι το σφάλμα είναι της μορφής $e \approx c(k)h^p$, όπου ο εκθέτης p παριστάνει την τάξη ακρίβειας της μεθόδου. Για να ελέγξουμε αριθμητικά την τιμή του p έχοντας σταθερή συχνότητα, δηλαδή σταθερή τιμή του κυματαριθμού k , υπολογίζουμε τα σφάλματα $e^{(1)}$ και $e^{(2)}$ για δύο διαφορετικούς διαμερισμούς του $[0, L]$ με N_1 και N_2 υποδιαστήματα μήκους $h_1 = L/N_1$ και $h_2 = L/N_2$, αντίστοιχα, και υπολογίζουμε την τάξη p ως

$$p = \frac{\log \frac{e^{(1)}}{e^{(2)}}}{\log \frac{h_1}{h_2}} = \frac{\log \frac{e^{(1)}}{e^{(2)}}}{\log \frac{N_2}{N_1}}.$$

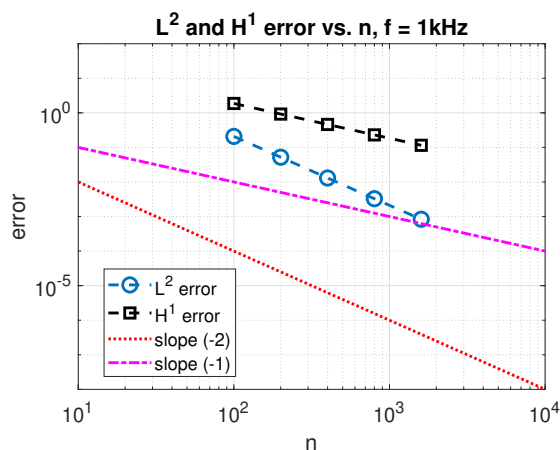
Πίνακας 4.1: Σφάλματα ως προς την L^2 και την H^1 νόρμα και η αντίστοιχη τάξη ακρίβειας για συχνότητα $f_r = 1000$ Hz.

N	L^2 -σφάλμα	Τάξη (p)	H^1 -σφάλμα	Τάξη (p)
100	$2.080094076e - 01$	1.997892	$1.867119620e + 00$	1.016824
200	$5.207838701e - 02$	1.997803	$9.227363652e - 01$	0.999645
400	$1.303943648e - 02$	1.993344	$4.614818042e - 01$	1.003034
800	$3.274933913e - 03$	1.972670	$2.302561169e - 01$	1.000385
1600	$8.343913376e - 04$		$1.150973630e - 01$	

Η τρίτη στήλη του Πίνακα 4.1 υποδεικνύει ότι η τάξη ακρίβειας ως προς την L^2 νόρμα είναι $p \approx 2$, ενώ από την πέμπτη στήλη βλέπουμε ότι η τάξη ακρίβειας ως προς την H^1 νόρμα είναι $p \approx 1$, όπως άλλωστε αναμένουμε από τη θεωρία.

Τα σφάλματα του Πίνακα 4.1, απεικονίζονται γραφικά στο Σχήμα 4.2, όπου οι άξονες είναι σε λογαριθμική κλίμακα.

Παρατηρούμε στο $\log \log$ διάγραμμα του Σχήματος 4.2 ότι τα σφάλματα στην H^1 νόρμα (σημειώνονται με μαύρα τετράγωνα στο σχήμα) μειώνονται, καθώς το N αυξάνεται, σε μια ευθεία που έχει κλίση -1 (αυτό υποδηλώνει ότι η τάξη ακρίβειας είναι ίση με 1). Ανάλογα, βλέπουμε ότι τα σφάλματα στην L^2 νόρμα (σημειώνονται με μπλε κύκλους στο σχήμα)



Σχήμα 4.2: Σχηματική αναπαράσταση της τάξης ακρίβειας της L^2 και της H^1 νόρμας για συχνότητα 1000 Hz.

μειώνονται, καθώς το N αυξάνεται, σε μια ευθεία που έχει κλίση -2 , πράγμα που υποδηλώνει ότι η τάξη ακρίβειας είναι ίση με 2.

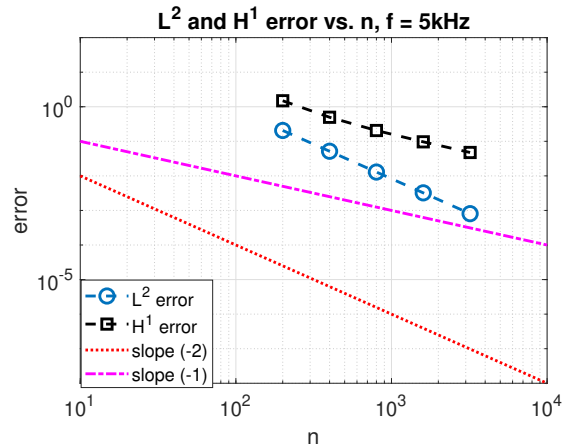
Περίπτωση (β): $f_r = 5000$ Hz.

Τώρα αυξάνουμε τη συχνότητα $f_r = 5000$ Hz, οπότε το μήκος κύματος είναι ίσο με $\lambda = 1.02$ m, και το υπολογιστικό μας χωρίο $[0, L]$ τώρα είναι περίπου ίσο με 5.9λ. Τρέχουμε τον κώδικά μας με ομοίμορφους διαμερισμούς από $N = 200, 400, 800, 1600$ και 3200 υποδιαστήματα του $[0, 6]$.

Πίνακας 4.2: Σφάλματα ως προς την L^2 και την H^1 νόρμα και η αντίστοιχη τάξη ακρίβειας για συχνότητα 5000 Hz.

N	L^2 -σφάλμα	Τάξη (p)	H^1 σφάλμα	Τάξη (p)
200	$2.060262273e - 01$		$1.489785819e + 00$	
		1.996489		1.585037
400	$5.163207180e - 02$		$4.965696721e - 01$	
		1.999272		1.273414
800	$1.291453627e - 02$		$2.054208377e - 01$	
		1.999961		1.088163
1600	$3.228720274e - 03$		$9.662172107e - 02$	
		2.000526		1.023112
3200	$8.068859741e - 04$		$4.754309246e - 02$	

Τόσο τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.2 όσο και αυτά του Σχήματος 4.3 επιβεβαιώνουν ότι αριθμητικά η τάξη ακρίβειας ως προς την L^2 νόρμα είναι $p \approx 2$, ενώ η τάξη ακρίβειας ως προς την H^1 νόρμα είναι $p \approx 1$.



Σχήμα 4.3: Σχηματική αναπαράσταση της τάξης ακρίβειας της L^2 και της H^1 νόρμας για συχνότητα 5000 Hz.

Περίπτωση (γ): $f_r = 8000$ Hz.

Αυξάνουμε ακόμη περισσότερο τη συχνότητα $f_r = 8000$ Hz, οπότε το μήκος κύματος είναι ίσο με $\lambda = 0.6375$ m, και το υπολογιστικό μας χωρίο $[0, L]$ τώρα είναι περίπου ίσο με 9.4λ . Τώρα τρέχουμε τον κώδικά μας με ομοίμορφους διαμερισμούς από $N = 400, 800, 1600, 3200$ και 6400 υποδιαστήματα του $[0, 6]$.

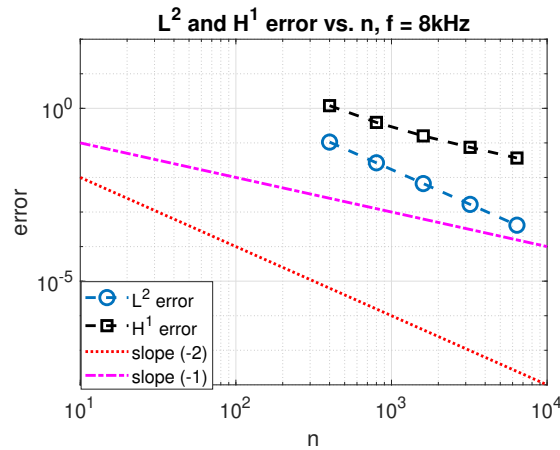
Τα αποτελέσματά μας συνοψίζονται στον Πίνακα 4.3 και στο Σχήμα 4.4 και επιβεβαιώνουν και πάλι ότι η τάξη ακρίβειας ως προς την L^2 και την H^1 νόρμα είναι 2 και 1, αντίστοιχα.

4.2.2 Αριθμητική διερεύνηση της εξάρτησης του σφάλματος από τον κυματαριθμό (k) και την παράμετρο διακριτοποίησης (h).

Ένα βασικό ερώτημα σε αριθμητικούς υπολογισμούς είναι το εξής: Δεδομένου ενός διαστήματος $[0, L]$, ποια είναι η εξάρτηση του σφάλματος από τον κυματαριθμό k και την παράμετρο διακριτοποίησης h . Για παράδειγμα, ένας κοινά αποδεκτός εμπειρικός κανόνας (rule of thumb) είναι ότι για να πάρει κανείς αξιόπιστα αποτελέσματα δοθείσης μιας συχνότητας f_r , αρκεί να επιλέξει το h έτσι ώστε το πηλίκo $\xi := \lambda/h$ να είναι περίπου ίσο με 10. Επομένως,

Πίνακας 4.3: Σφάλματα ως προς την L^2 και την H^1 νόρμα και η αντίστοιχη τάξη ακρίβειας για συχνότητα 8000 Hz.

N	L^2 -σφάλμα	Τάξη (p)	H^1 σφάλμα	Τάξη (p)
400	$1.055931753e - 01$		$1.195398768e + 00$	
		1.990513		1.609441
800	$2.657246630e - 02$		$3.917623402e - 01$	
		1.997785		1.297567
1600	$6.653323513e - 03$		$1.593735229e - 01$	
		1.999353		1.098666
3200	$1.664076667e - 03$		$7.441913577e - 02$	
		1.999410		1.027168
6400	$4.161894536e - 04$		$3.651540874e - 02$	



Σχήμα 4.4: Σχηματική αναπαράσταση της τάξης ακρίβειας της L^2 και της H^1 νόρμας για συχνότητα 8000 Hz.

αν για παράδειγμα, ακολουθήσουμε αυτόν τον κανόνα τότε παρατηρούμε ότι το γινόμενο

$$kh = \frac{2\pi}{\lambda} h = \frac{2\pi}{\frac{\lambda}{h}} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}.$$

Θα περίμενε κανείς ότι καθώς η συχνότητα f_r και, συνεπώς, και ο κυματαριθμός k αυξάνεται, αν μειώνουμε το h έτσι ώστε το γινόμενο kh να παραμένει σταθερό, τότε θα μπορούσαμε να διατηρήσουμε ένα σταθερό επίπεδο σφάλματος. Στην πραγματικότητα, θεωρητικά αποτελέσματα στην περίπτωση της μίας διάστασης, βλ. π.χ. [12], [13, Παρ. 4.5, 46], δείχνουν ότι για να διατηρήσουμε ένα σταθερό επίπεδο σφάλματος καθώς αυξάνουμε τη συχνότητα θα πρέπει να επιλέγουμε το h έτσι ώστε να διατηρείται σταθερό το γινόμενο $k^3 h^2$.

Για να διερευνήσουμε λοιπόν την εξάρτηση του σφάλματος από το k και το h , θα προχωρήσουμε στο ακόλουθο αριθμητικό πείραμα. Θεωρούμε όπως και πριν, τη συνάρτηση f στο δεξί μέλος της (2.19), να είναι η Γκαουσιανή (4.2) με $A = 200$, $\mu = 3$, αλλά τώρα επιλέγουμε $\sigma = \lambda/40$. Τοποθετούμε το τεχνητό σύνορο στο $L = 6$.

Περίπτωση (α): $kh = \text{σταθερό}$.

Αρχικά ξεκινάμε με μια συχνότητα $f_r = 3$ kHz και την αυξάνουμε ανά 1 kHz μέχρι τα 13 kHz. Για κάθε συχνότητα επιλέγουμε το πλήθος των υποδιαστημάτων (στοιχείων) του διαμερισμού μας να είναι τέτοιο ώστε το γινόμενο $kh = 0.1$. Για να πάρουμε μια ιδέα για το πόσο λεπτός είναι ο διαμερισμός μας, η επιλογή αυτή δίνει $\xi = \frac{\lambda}{h} \approx 63$, δηλαδή παίρνουμε περίπου 63 υποδιαστήματα (στοιχεία) ανά μήκος κύματος.

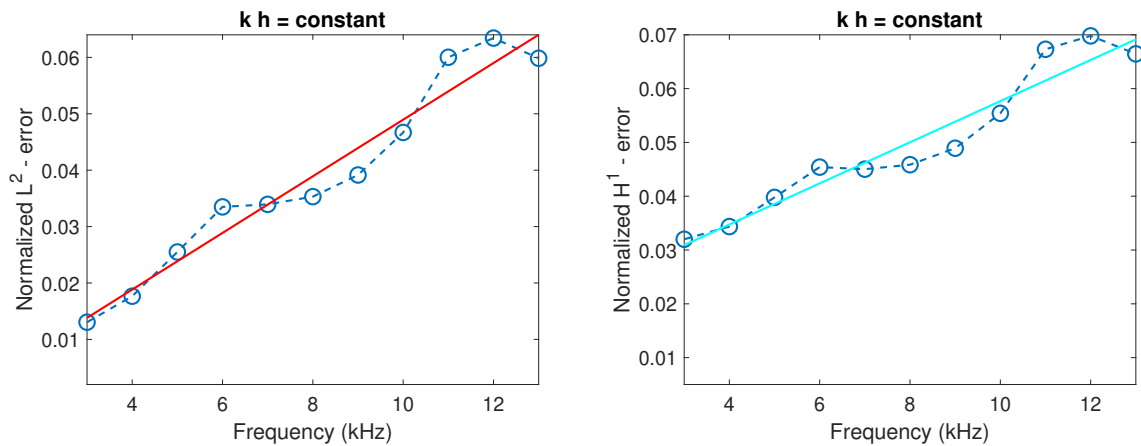
Στην τρίτη και στην τέταρτη στήλη του Πίνακα 4.4 δίνουμε το σχετικό L^2 και το σχετικό H^1 -σφάλμα, αντίστοιχα, για κάθε συχνότητα, ενώ στη δεύτερη στήλη αναφέρεται το πλήθος των υποδιαστημάτων του διαμερισμού που χρησιμοποιήσαμε. Παρατηρούμε ότι τόσο το σχετικό L^2 όσο και το σχετικό H^1 -σφάλμα αυξάνονται παρόλο που έχουμε διατηρήσει το γινόμενο kh σταθερό.

Πίνακας 4.4: Σχετικό σφάλμα ως προς την L^2 και την H^1 νόρμα για $kh = \text{σταθ}$.

f_r (kHz)	N	Σχ. L^2 -σφάλμα	Σχ. H^1 -σφάλμα
3	222	$1.304880021e - 02$	$3.200136500e - 02$
4	296	$1.765714597e - 02$	$3.435858859e - 02$
5	370	$2.549800992e - 02$	$3.978252158e - 02$
6	444	$3.349551167e - 02$	$4.541080505e - 02$
7	518	$3.394326952e - 02$	$4.502446105e - 02$
8	592	$3.531055561e - 02$	$4.585681770e - 02$
9	666	$3.914902633e - 02$	$4.892071511e - 02$
10	740	$4.668757856e - 02$	$5.540446179e - 02$
11	814	$6.002007991e - 02$	$6.731500251e - 02$
12	888	$6.341866074e - 02$	$6.980251749e - 02$
13	961	$5.984469456e - 02$	$6.645696706e - 02$

Τα αποτελέσματα αυτά απεικονίζονται στο Σχήμα 4.5 για το σχετικό L^2 -σφάλμα (αριστερά) και για το σχετικό H^1 -σφάλμα (δεξιά). Και στις δύο περιπτώσεις για να εκτιμήσουμε την τάση των δεδομένων μας, έχουμε σχεδιάσει και την αντίστοιχη ευθεία ελαχίστων τετρα-

γώνων που παρεμβάλλεται στα δεδομένα μας και η οποία υποδεικνύει μια καθαρή αυξητική τάση του σφάλματος με τη συχνότητα.



Σχήμα 4.5: Σχηματική αναπαράσταση των σχετικών σφαλμάτων L^2 (αριστερά) και H^1 (δεξιά) για $kh = \text{σταθ.}$

Περίπτωση (β): $k^3 h^2 = \text{σταθερό.}$

Επαναλαμβάνουμε το ίδιο πείραμα επιλέγοντας για κάθε συχνότητα το πλήθος των υποδιαστημάτων του διαμερισμού μας έτσι ώστε το γινόμενο $k^3 h^2 = 1/25$.

Στην τρίτη και στην τέταρτη στήλη του Πίνακα 4.5 δίνουμε το σχετικό L^2 και το σχετικό H^1 -σφάλμα, αντίστοιχα, για κάθε συχνότητα, στη δεύτερη στήλη δίνεται το πλήθος των υποδιαστημάτων του διαμερισμού, ενώ στην πέμπτη στήλη αναφέρεται ο αριθμός ξ που εκφράζει το πλήθος των υποδιαστημάτων ανά μήκος κύματος για κάθε συχνότητα. Παρατηρούμε ότι το σχετικό L^2 -σφάλμα διατηρείται περίπου σταθερό μεταξύ 1.4% και 1.8%, ενώ το σχετικό H^1 -σφάλμα μειώνεται ελαφρά από 3.3% σε 2.1%.

Τα αποτελέσματα αυτά απεικονίζονται και στο Σχήμα 4.6 για το σχετικό L^2 -σφάλμα (αριστερά) και για το σχετικό H^1 -σφάλμα (δεξιά).

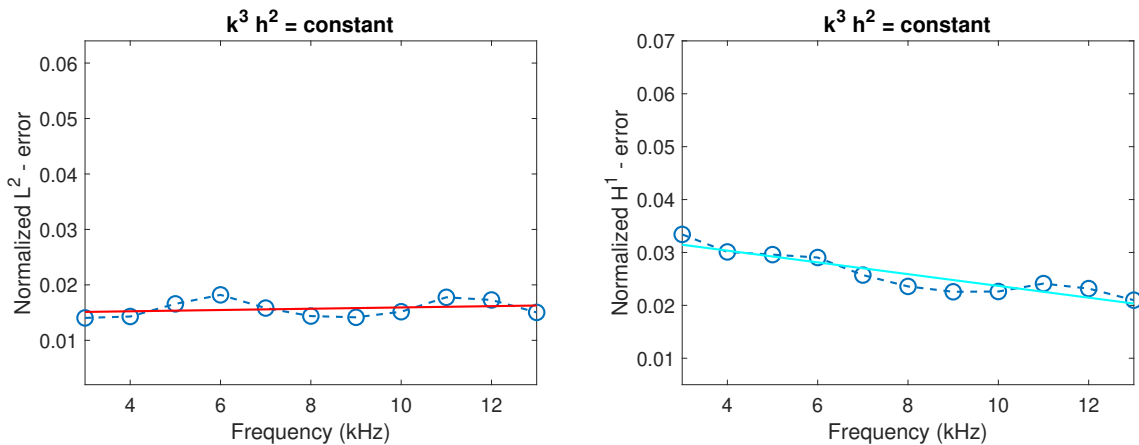
Περίπτωση (γ): $k^2 h = \text{σταθερό.}$

Τέλος, επιλέγουμε για κάθε συχνότητα το πλήθος των υποδιαστημάτων του διαμερισμού μας έτσι ώστε το γινόμενο $k^2 h = 2/5$.

Στον Πίνακα 4.6 δίνουμε και πάλι το σχετικό L^2 και το σχετικό H^1 -σφάλμα, αντίστοιχα, για κάθε συχνότητα, το πλήθος των υποδιαστημάτων του διαμερισμού και τον αριθμό ξ . Παρατηρούμε μια καθαρή μείωση στο σχετικό L^2 -σφάλμα από 1.5% σε περίπου 0.4%, ενώ το ίδιο συμβαίνει και για το σχετικό H^1 -σφάλμα από 3.5% σε περίπου 0.8%.

Πίνακας 4.5: Σχετικό σφάλμα ως προς την L^2 και την H^1 νόρμα για $k^3 h^2 = \text{σταθ.}$

f_r (kHz)	N	Σχ. L^2 -σφάλμα	Σχ. H^1 -σφάλμα	ξ
3	214	$1.404046773e - 02$	$3.340770896e - 02$	61
4	329	$1.429485328e - 02$	$3.010106372e - 02$	70
5	459	$1.657473621e - 02$	$2.959014683e - 02$	78
6	603	$1.819674671e - 02$	$2.904149848e - 02$	85
7	760	$1.581667412e - 02$	$2.572397163e - 02$	92
8	929	$1.437217473e - 02$	$2.357555619e - 02$	99
9	1108	$1.415178020e - 02$	$2.256207964e - 02$	105
10	1298	$1.515661101e - 02$	$2.261784480e - 02$	110
11	1497	$1.775740679e - 02$	$2.411368848e - 02$	116
12	1706	$1.727835211e - 02$	$2.316909574e - 02$	121
13	1923	$1.503443366e - 02$	$2.097870838e - 02$	126



Σχήμα 4.6: Σχηματική αναπαράσταση των σφαλμάτων L^2 (αριστερά) και H^1 (δεξιά) για $k^3 h^2 = \text{σταθ.}$

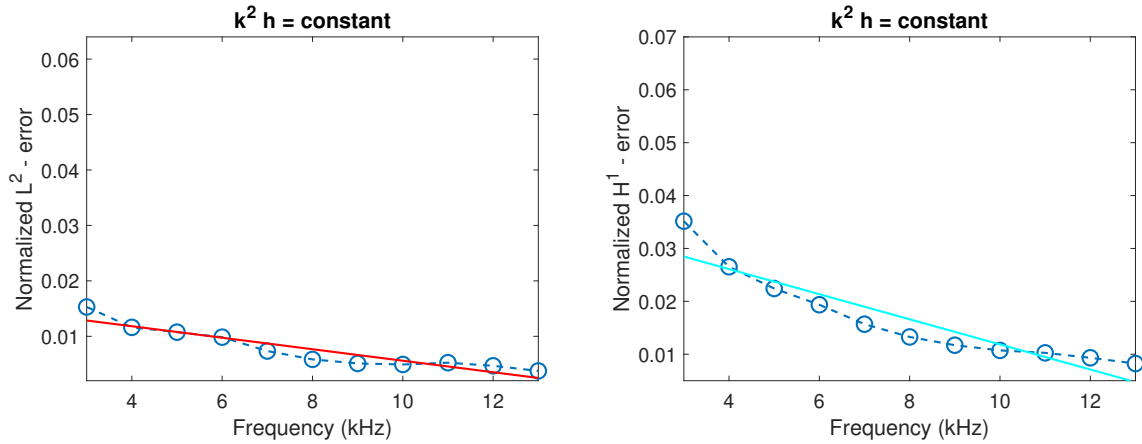
Η συμπεριφορά αυτή είναι εμφανής και στο σχετικό Σχήμα [4.7](#).

4.2.3 Αριθμητική διερεύνηση της επιρροής της θέσης του τεχνητού συνόρου στην προσεγγιστική λύση.

Στη συνέχεια θα διερευνήσουμε αν η θέση του τεχνητού συνόρου επηρεάζει την ποιότητα της προσέγγισής μας. Για τον σκοπό αυτό πειραματιστήκαμε με διαφορετικές συχνότητες και διάφορες θέσεις του τεχνητού συνόρου L . Εδώ θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματά μας για μια συχνότητα $f_r = 5000$ Hz, που για σταθερή ταχύτητα $c_0 = 5100$ m/s οδηγεί σε ένα

Πίνακας 4.6: Σχετικό σφάλμα ως προς την L^2 και την H^1 νόρμα για $k^2 * h = \text{σταθ.}$

f_r (kHz)	N	Σχ. L^2 -σφάλμα	Σχ. H^1 -σφάλμα	ξ
3	205	$1.529733493e - 02$	$3.515018100e - 02$	58
4	365	$1.161552773e - 02$	$2.653476233e - 02$	78
5	570	$1.075045316e - 02$	$2.242797582e - 02$	97
6	820	$9.850812175e - 03$	$1.935903633e - 02$	116
7	1116	$7.345474516e - 03$	$1.568060087e - 02$	136
8	1458	$5.840249084e - 03$	$1.327167283e - 02$	155
9	1845	$5.104602073e - 03$	$1.170904677e - 02$	174
10	2277	$4.923184115e - 03$	$1.072413272e - 02$	194
11	2755	$5.243869077e - 03$	$1.026144091e - 02$	213
12	3279	$4.683873476e - 03$	$9.325983919e - 03$	232
13	3848	$3.759919125e - 03$	$8.241053836e - 03$	252

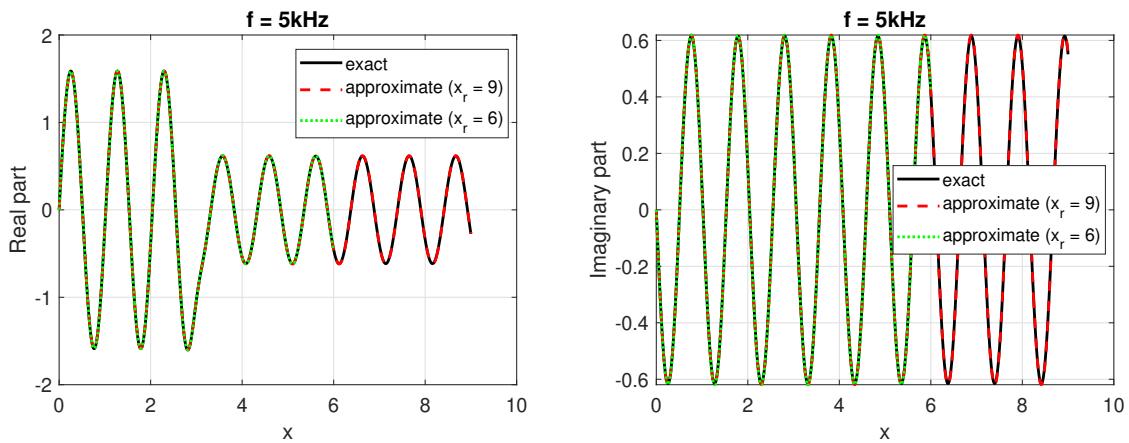


Σχήμα 4.7: Σχηματική αναπαράσταση των σφαλμάτων L^2 (αριστερά) και H^1 (δεξιά) για $k^2 h = \text{σταθ.}$

μήκος κύματος $\lambda = 1.02$ m. Η συνάρτηση f στο δεξί μέλος της (2.19), είναι η Γκαουσιανή (4.2) με $A = 200$, $\mu = 3$, και $\sigma = \lambda/20$.

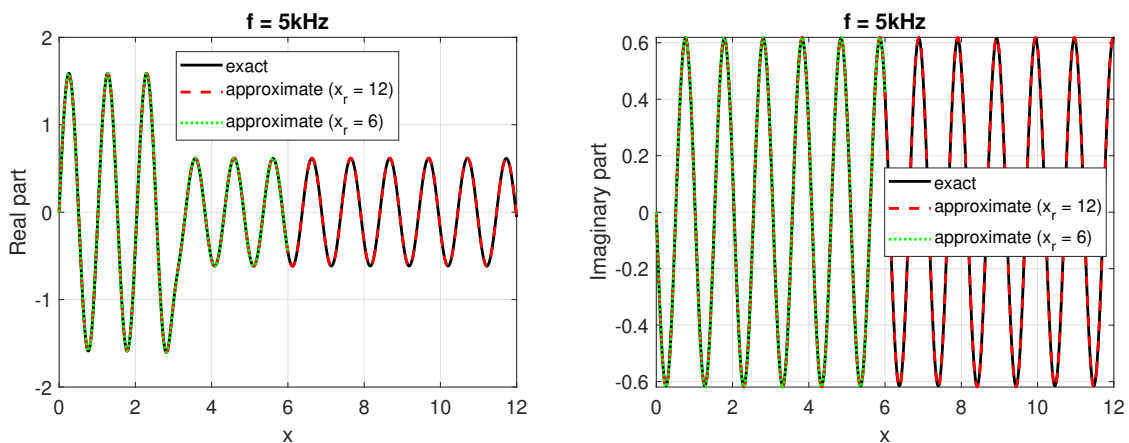
Πειραματιζόμαστε με τρεις θέσεις του τεχνητού συνόρου $L = 6, 9$ και 12 m (οπότε το υπολογιστικό μας χωρίο σε κάθε περίπτωση περιέχει περίπου 6, 9 και 12 μήκη κύματος λ). Και στις τρεις περιπτώσεις θεωρήσαμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[0, L]$ με $N = 1600$ υποδιαστήματα.

Στο Σχήμα 4.8 σχεδιάζουμε το πραγματικό μέρος (αριστερά) και το φανταστικό μέρος (δεξιά) της αναλυτικής λύσης (μαύρη συνεχής γραμμή), και της προσεγγιστικής λύσης πεπερασμένων στοιχείων για $L = 6$ (πράσινη διακεκομμένη γραμμή) και για $L = 9$ (κόκκινη



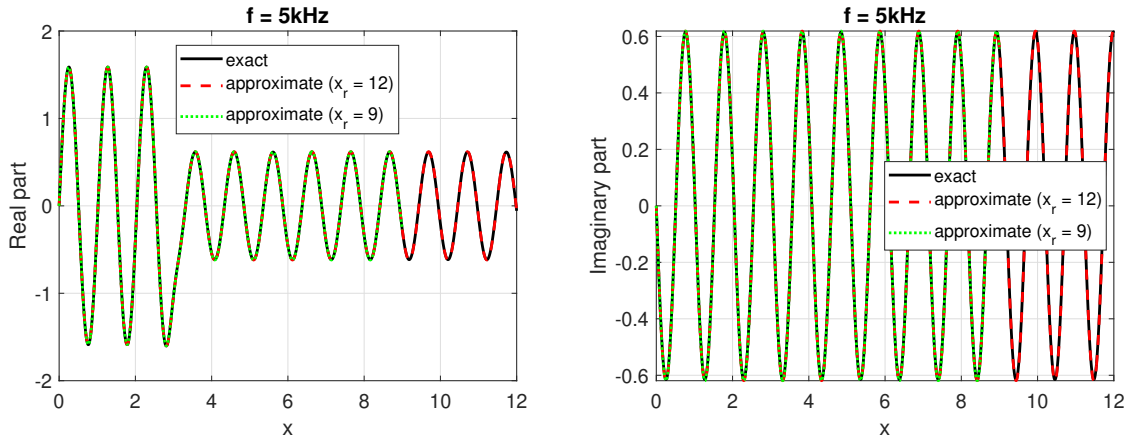
Σχήμα 4.8: Σύγκριση της ακριβούς λύσης u με την προσεγγιστική λύση u_h για $L = 6$ και 9 m. Αριστερά σχεδιάζουμε το πραγματικό μέρος και δεξιά το φανταστικό μέρος.

διακεκομμένη γραμμή). Παρατηρούμε ότι η θέση του τεχνητού συνόρου δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα και η παρουσία του δεν δημιουργεί τεχνητές ανακλάσεις, επομένως συμπεραίνουμε ότι η συνοριακή συνθήκη DtN που επιβάλλαμε στο τεχνητό σύνορο λειτουργεί αποτελεσματικά.



Σχήμα 4.9: Σύγκριση της ακριβούς λύσης u με την προσεγγιστική λύση u_h για $L = 6$ και 12 m. Αριστερά σχεδιάζουμε το πραγματικό μέρος και δεξιά το φανταστικό μέρος.

Τα συμπεράσματα αυτά επιβεβαιώνονται και όταν συγκρίνουμε την ακριβή λύση u με την προσέγγιση πεπερασμένων στοιχείων u_h , για $L = 6$ και 12 m, βλ. Σχήμα 4.9, ή για $L = 9$ και 12 m, βλ. Σχήμα 4.10.



Σχήμα 4.10: Σύγκριση της ακριβούς λύσης u με την προσεγγιστική λύση u_h για $L = 9$ και 12 m. Αριστερά σχεδιάζουμε το πραγματικό μέρος και δεξιά το φανταστικό μέρος.

4.3 Αριθμητικά πειράματα με μεταβλητό κυματαριθμό.

Στην τελευταία παράγραφο του κεφαλαίου αυτού θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα διαφόρων αριθμητικών πειραμάτων όταν ο κυματαριθμός k μεταβάλλεται με το x σε ένα φραγμένο διάστημα. Σε όλες τις περιπτώσεις θα θεωρήσουμε ως συχνότητα αναφοράς $f_0 = 7000$ Hz και ως ταχύτητα κύματος αναφοράς $c_0 = 5100$ m/s. Οι τιμές αυτές αντιστοιχούν σε ένα μήκος κύματος αναφοράς $\lambda_0 \approx 0.729$ m. Όπως και στα προηγούμενα πειράματά μας, επιλέγουμε τη συνάρτηση f , που εμφανίζεται στο δεξί μέλος της (2.19), να είναι η Γκαουσιανή (4.2), με $A = 50$, $\mu = 3$, και $\sigma = \lambda_0/20$.

Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι η ταχύτητα (c) μεταβάλλεται σε ένα διάστημα της μορφής

$$[x_l, x_r] = [\mu - 2\lambda_0, \mu + 2\lambda_0],$$

ενώ στο διάστημα $[0, x_l) \cup (x_r, +\infty)$ παίρνει τη σταθερή τιμή c_0 .

Συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις για την ταχύτητα $c(x)$ στο διάστημα $[x_l, x_r]$:

$$(\alpha) \quad c(x) = c_0 - 1000 \sin \frac{10\pi(x - x_l)}{x_r - x_l},$$

$$(\beta) \quad c(x) = c_0 + 2000 e^{\frac{(x-\mu)^2}{2(0.4)^2}}, \text{ και}$$

$$(\gamma) \quad c(x) = c_0 + 2000 \operatorname{sinc}(5.5(x - \mu)),$$

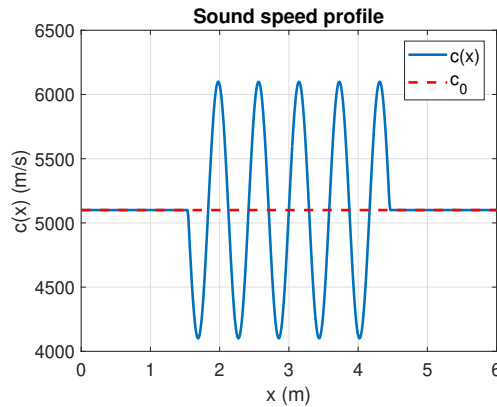
όπου η συνάρτηση sinc που εμφανίζεται στην τρίτη περίπτωση ορίζεται ως:

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}.$$

Για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις θα θεωρήσουμε τρεις τιμές της συχνότητας $f_r = 4000, 7000$ και 10000 Hz και θα διερευνήσουμε τη συμπεριφορά της λύσης μας με μεταβλητό κυματαριθμό $k(x) = (2\pi f_r)/c(x)$, καθώς και το αν η θέση του τεχνητού συνόρου L επηρεάζει την λύση μας.

Περίπτωση (α): $c(x) = c_0 - 1000 \sin \frac{10\pi(x - x_l)}{x_r - x_l}$

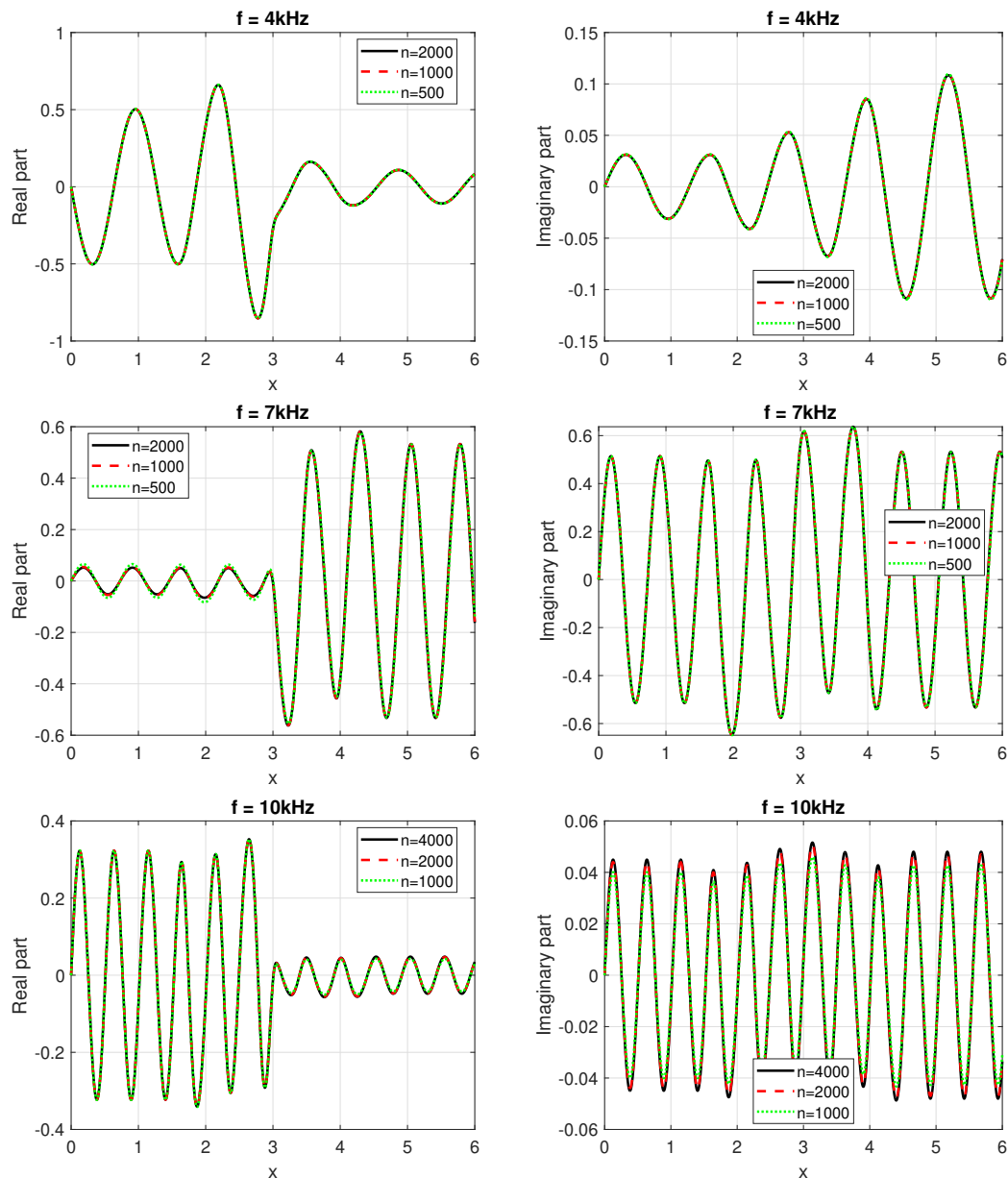
Στο Σχήμα 4.11 σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας $c(x)$ στο διάστημα $[0, 6]$. Σε αυτή την περίπτωση, στο διάστημα $[x_l, x_r]$, είναι μια ημιτονοειδής καμπύλη (πέντε περιόδων) που παίρνει ως ελάχιστη τιμή 4100 m/s και ως μέγιστη 6100 m/s.



Σχήμα 4.11: Το γράφημα της συνάρτησης $c(x)$ της περίπτωσης (α), στο $[0, 6]$ (μπλε συνεχής γραμμή). Με την κόκκινη διακεκομμένη ευθεία σημειώνεται η ταχύτητα αναφοράς $c_0 = 5100$ m/s.

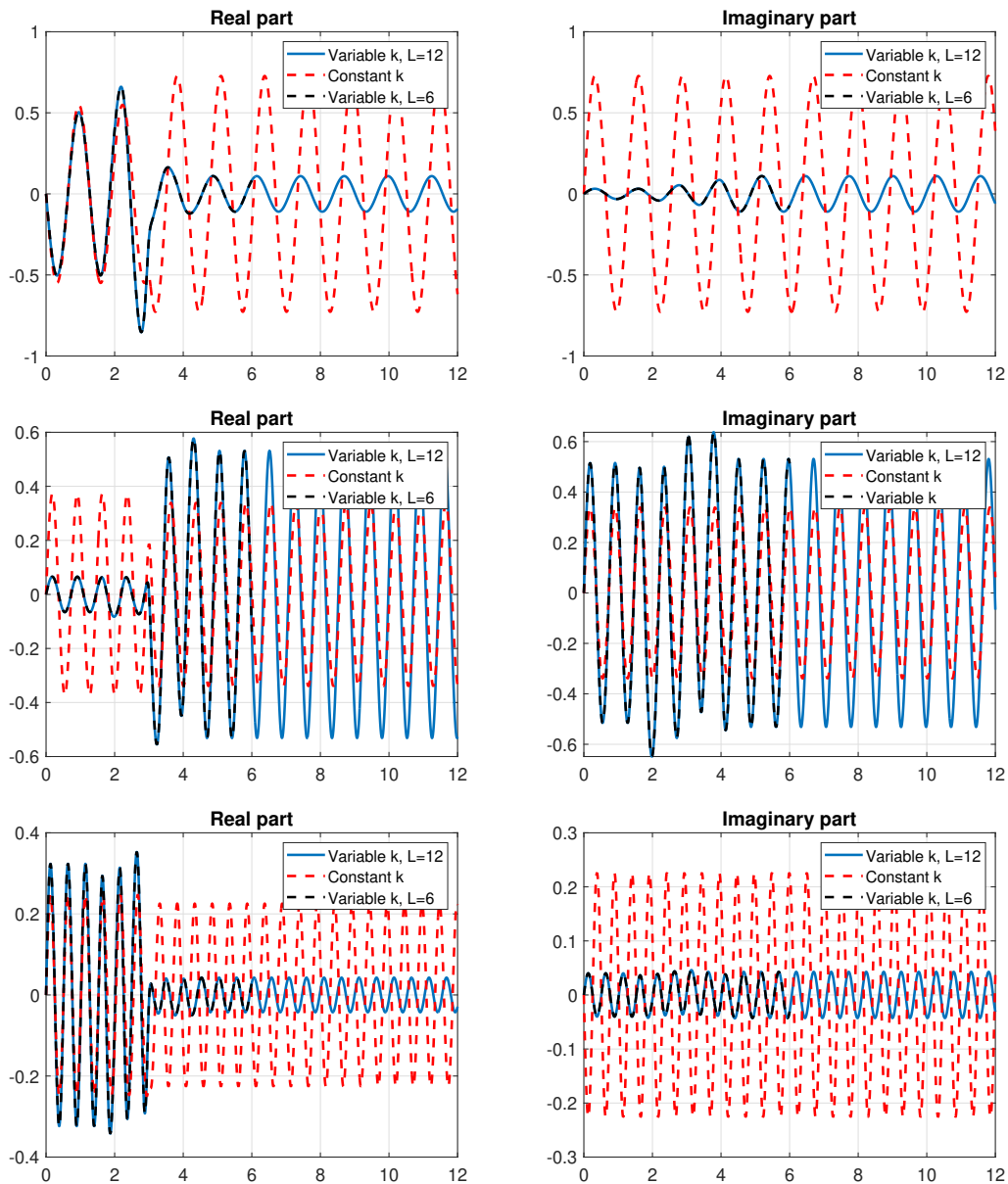
Ξεκινάμε με μια συχνότητα $f_r = 4000$ Hz και τρέχουμε τον κώδικά μας με ομοιόμορφους διαμερισμούς με $N = 500, 1000$ και 2000 στοιχεία. Στη συνέχεια αυξάνουμε τη συχνότητα σε $f_r = 7000$ Hz και παίρνουμε πάλι $N = 500, 1000$ και 2000 στοιχεία. Τέλος, θεωρούμε συχνότητα $f_r = 10000$ Hz και τρέχουμε τον κώδικα με $N = 1000, 2000$ και 4000 στοιχεία. Στο Σχήμα 4.12 απεικονίζουμε στην αριστερή στήλη το πραγματικό μέρος της προσεγγιστικής λύσης u_h για τις τρεις συχνότητες και στη δεξιά στήλη τα αντίστοιχα αποτελέσματα για το φανταστικό μέρος της u_h . Στην πάνω γραμμή απεικονίζονται τα αποτελέσματα για $f_r = 4000$ Hz, στην μέση για $f_r = 7000$ Hz, ενώ στην κάτω γραμμή για $f_r = 10000$ Hz. Παρατηρούμε κάποιες μικρές διαφορές στις καμπύλες που αντιστοιχούν στη μικρότερη τιμή του N σε σχέση με αυτές που αντιστοιχούν στους δύο λεπτότερους διαμερισμούς. Βεβαίως

παρατηρούμε ότι καθώς η συχνότητα μεγαλώνει η λύση μας γίνεται ολοένα και περισσότερο ταλαντωτική, ενώ τα αποτελέσματα αυτά υποδεικνύουν ότι και για τις τρεις συχνότητες η προσεγγιστική μας λύση έχει συγκλίνει.



Σχήμα 4.12: Σχηματική αναπαράσταση του πραγματικού μέρους της λύσης u_h (αριστερά) και του φανταστικού μέρους (δεξιά). Πάνω: $f_r = 4$ kHz και $N = 500, 1000, 2000$. Μέση: $f_r = 7$ kHz και $N = 500, 1000, 2000$. Κάτω: $f_r = 10$ kHz και $N = 1000, 2000, 4000$.

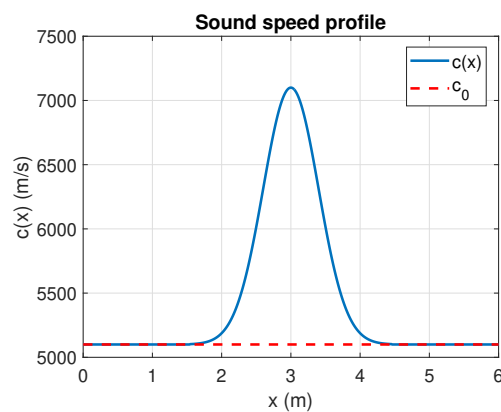
Στη συνέχεια θα διερευνήσουμε αν η θέση του τεχνητού συνόρου L επηρεάζει την προσεγγιστική λύση u_h .



Σχήμα 4.13: Σχηματική αναπαράσταση του πραγματικού μέρους της λύσης u_h (αριστερά) και του φανταστικού μέρους (δεξιά) για $L = 6$ (μαύρη διακεκομμένη γραμμή) και $L = 12$ m (μπλε συνεχής γραμμή). Με κόκκινη διακεκομμένη γραμμή εμφανίζεται η λύση για σταθερή ταχύτητα $c_0 = 5100$ m/s. Πάνω: $f_r = 4$ kHz. Μέση: $f_r = 7$ kHz. Κάτω: $f_r = 10$ kHz.

Στο Σχήμα 4.13 σχεδιάζουμε στην αριστερή στήλη το πραγματικό μέρος και στη δεξιά το φανταστικό μέρος της προσεγγιστικής λύσης u_h για δύο διαφορετικές θέσεις του τεχνητού συνόρου $L = 6$ (μαύρη διακεκομμένη γραμμή) και $L = 12$ m (μπλε συνεχής γραμμή). Στην πάνω γραμμή τα αποτελέσματα είναι για τη συχνότητα $f_r = 4$ kHz, όπου ο διαμερισμός του

διαστήματος $[0, 6]$ έχει γίνει με $N = 500$ στοιχεία, ενώ ο διαμερισμός του διαστήματος $[0, 12]$ έχει γίνει με $N = 1000$ στοιχεία. Στη μεσαία γραμμή η συχνότητα είναι ίση με $f_r = 7$ kHz, ο διαμερισμός του διαστήματος $[0, 6]$ είναι με $N = 500$ στοιχεία και του διαστήματος $[0, 12]$ με $N = 1000$ στοιχεία. Στην κάτω γραμμή η συχνότητα είναι ίση με $f_r = 10$ kHz, ο διαμερισμός του διαστήματος $[0, 6]$ είναι με $N = 1000$ στοιχεία και του διαστήματος $[0, 12]$ με $N = 2000$ στοιχεία. Σε όλες τις περιπτώσεις σχεδιάζουμε και την αντίστοιχη λύση για σταθερή ταχύτητα $c_0 = 5100$ m/s, ώστε να είναι εμφανείς οι διαφορές μεταξύ της λύσης με σταθερό κυματαριθμό k_0 και μεταβλητό κυματαριθμό k . Σε όλα τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι η μεταβολή της θέσης του τεχνητού συνόρου δεν επηρεάζει ούτε το φανταστικό ούτε το πραγματικό μέρος της προσέγγισής μας, υπό την έννοια ότι η προσεγγιστική λύση για $L = 12$ και η αντίστοιχη για $L = 6$, παρουσιάζουν εξαιρετική συμφωνία στο μικρότερο διάστημα $[0, 6]$.



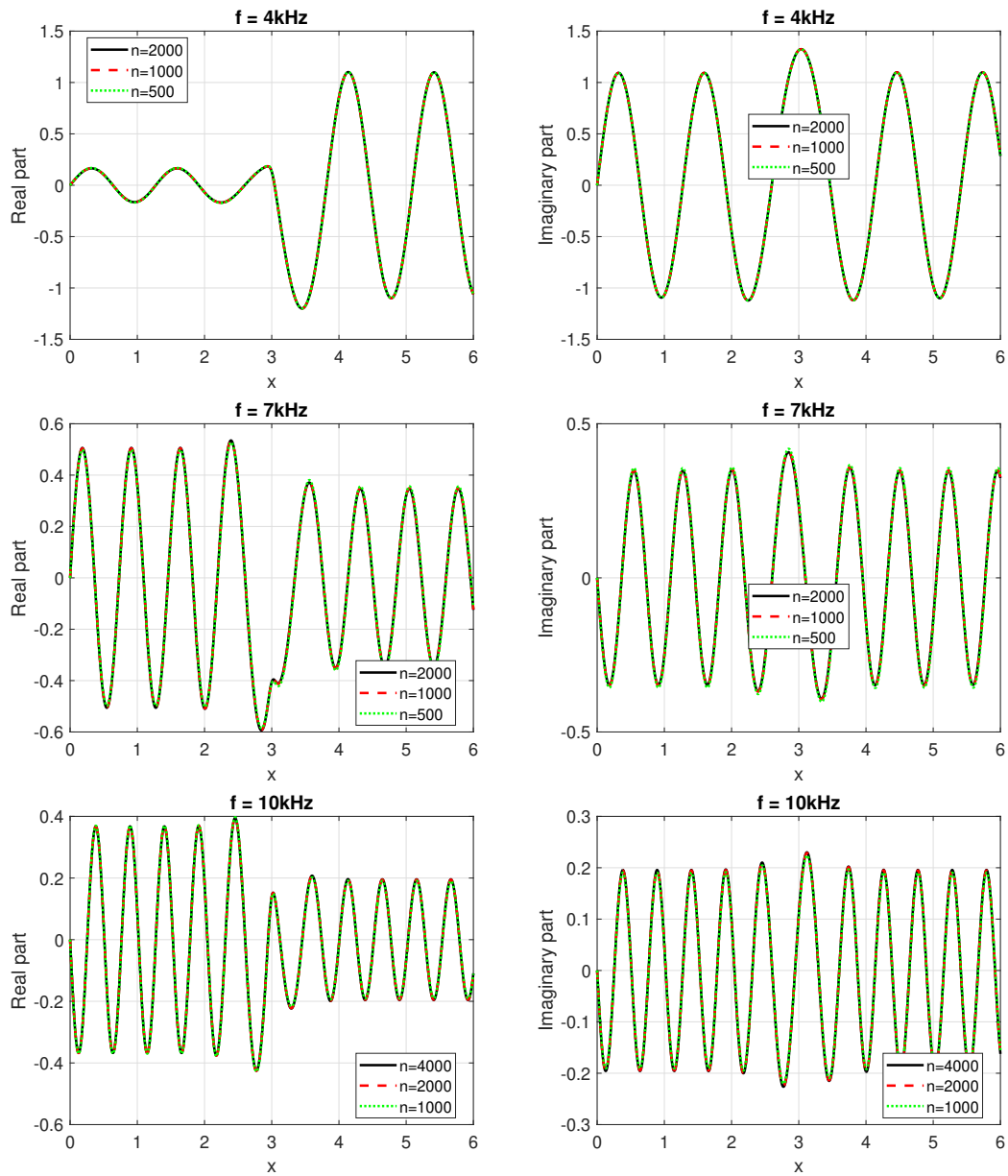
Σχήμα 4.14: Το γράφημα της συνάρτησης $c(x)$ της περίπτωσης (β), στο $[0, 6]$ (μπλε συνεχής γραμμή). Με την κόκκινη διακεκομμένη ευθεία σημειώνεται η ταχύτητα αναφοράς $c_0 = 5100$ m/s.

Περίπτωση (β): $c(x) = c_0 + 2000 e^{\frac{(x-\mu)^2}{2(0.4)^2}}$

Για το δεύτερο πείραμα με μεταβλητό k θεωρούμε ταχύτητα c που περιγράφεται από μια Γκαουσιανή της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο Σχήμα 4.14. Τώρα η ταχύτητα μεταβάλλεται μεταξύ 5100 και 7100 m/s.

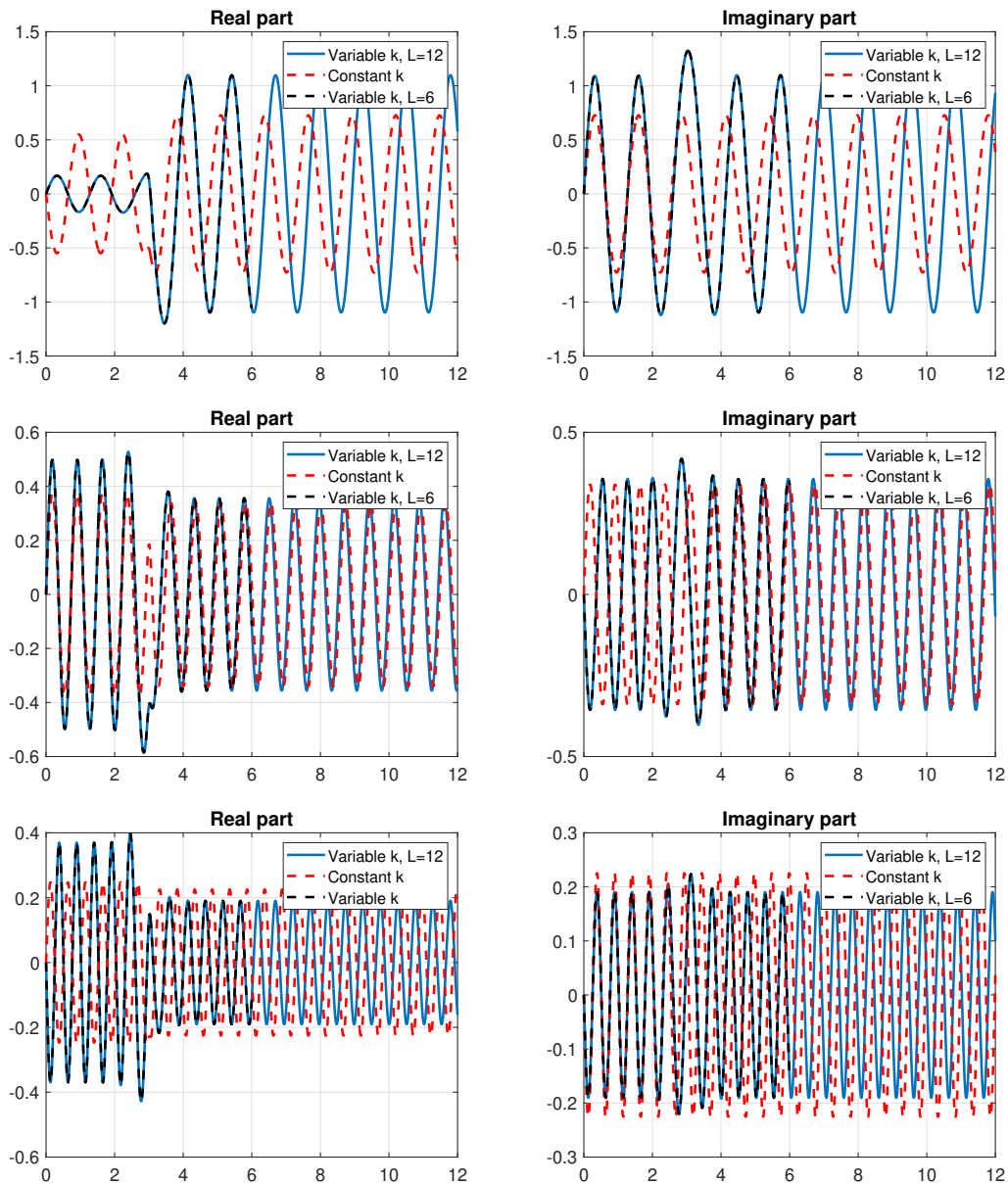
Το Σχήμα 4.15 είναι το αντίστοιχο του Σχήματος 4.12 της περίπτωσης (α), και συνοψίζει τα αποτελέσματά μας για τις τρεις συχνότητες $f_r = 4, 7$ και 10 kHz και τρεις διαφορετικούς διαμερισμούς για κάθε συχνότητα. (Το πλήθος των στοιχείων κάθε διαμερισμού δίνεται στο υπόμνημα κάθε σχήματος.) Βλέπουμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις η προσεγγιστική λύση έχει συγκλίνει.

Το Σχήμα 4.16 είναι το αντίστοιχο του Σχήματος 4.13 της περίπτωσης (α). Διαπιστώνουμε



Σχήμα 4.15: Σχηματική αναπαράσταση του πραγματικού μέρους της λύσης u_h (αριστερά) και του φανταστικού μέρους (δεξιά). Πάνω: $f_r = 4$ kHz και $N = 500, 1000, 2000$. Μέση: $f_r = 7$ kHz και $N = 500, 1000, 2000$. Κάτω: $f_r = 10$ kHz και $N = 1000, 2000, 4000$.

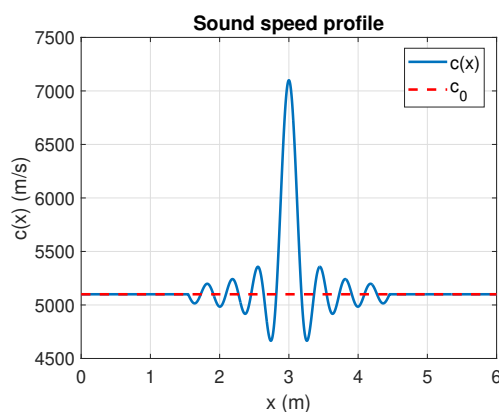
ότι και με αυτό το προφίλ της ταχύτητας $c(x)$, η θέση του τεχνητού συνόρου δεν επηρεάζει τη λύση πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 4.16: Σχηματική αναπαράσταση του πραγματικού μέρους της λύσης u_h (αριστερά) και του φανταστικού μέρους (δεξιά) για $L = 6$ (μαύρη διακεκομμένη γραμμή) και $L = 12$ m (μπλε συνεχής γραμμή). Με κόκκινη διακεκομμένη γραμμή εμφανίζεται η λύση για σταθερή ταχύτητα $c_0 = 5100$ m/s. Πάνω: $f_r = 4$ kHz. Μέση: $f_r = 7$ kHz. Κάτω: $f_r = 10$ kHz.

Περίπτωση (γ): $c(x) = c_0 + 2000 \operatorname{sinc}(5.5(x - \mu))$

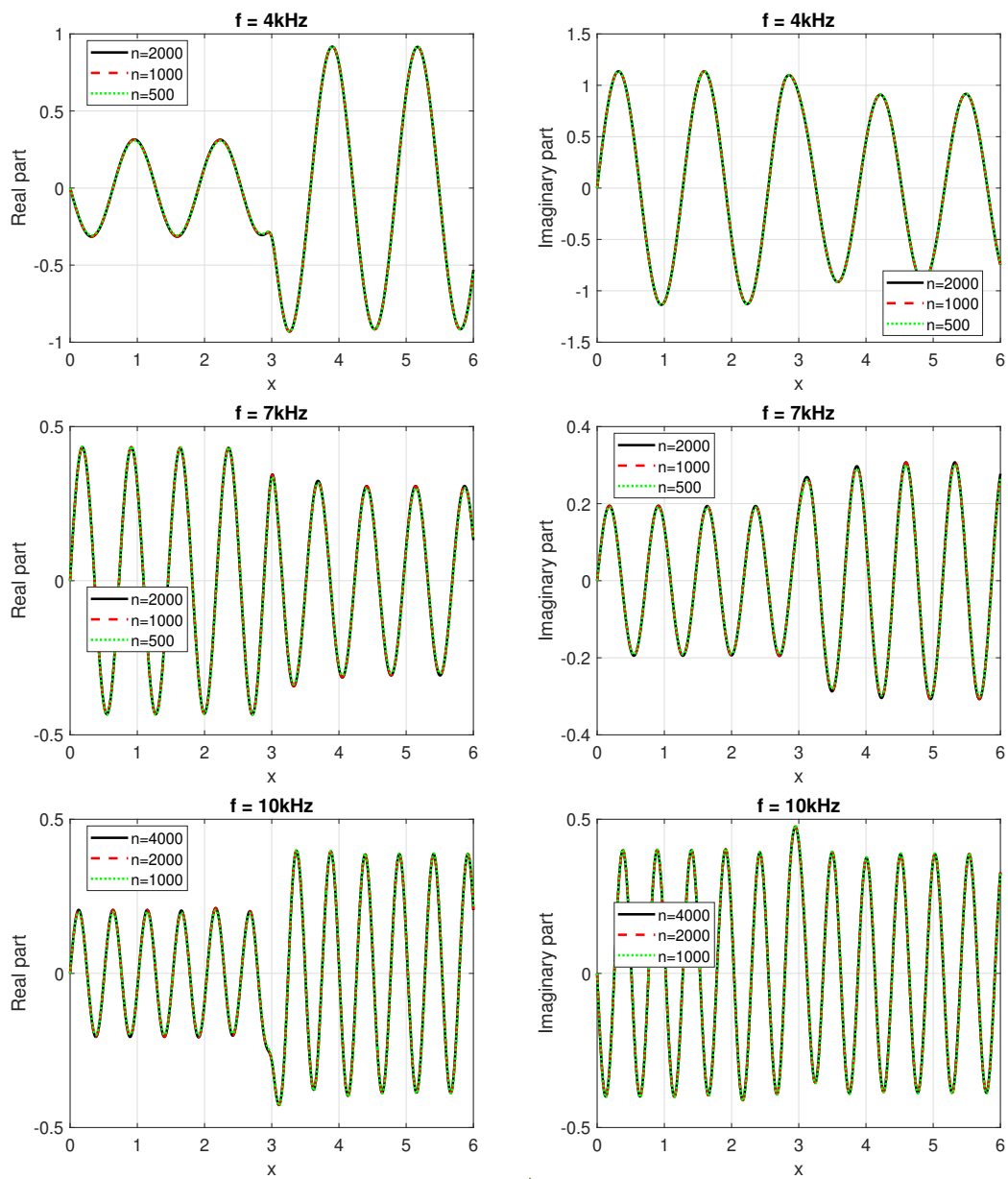
Για το τελευταίο μας πείραμα με μεταβλητό k θεωρούμε ταχύτητα c που περιγράφεται από μια συνάρτηση sinc βλ. Σχήμα 4.17. Τώρα η ταχύτητα μεταβάλλεται μεταξύ 4667 και 7100 m/s.



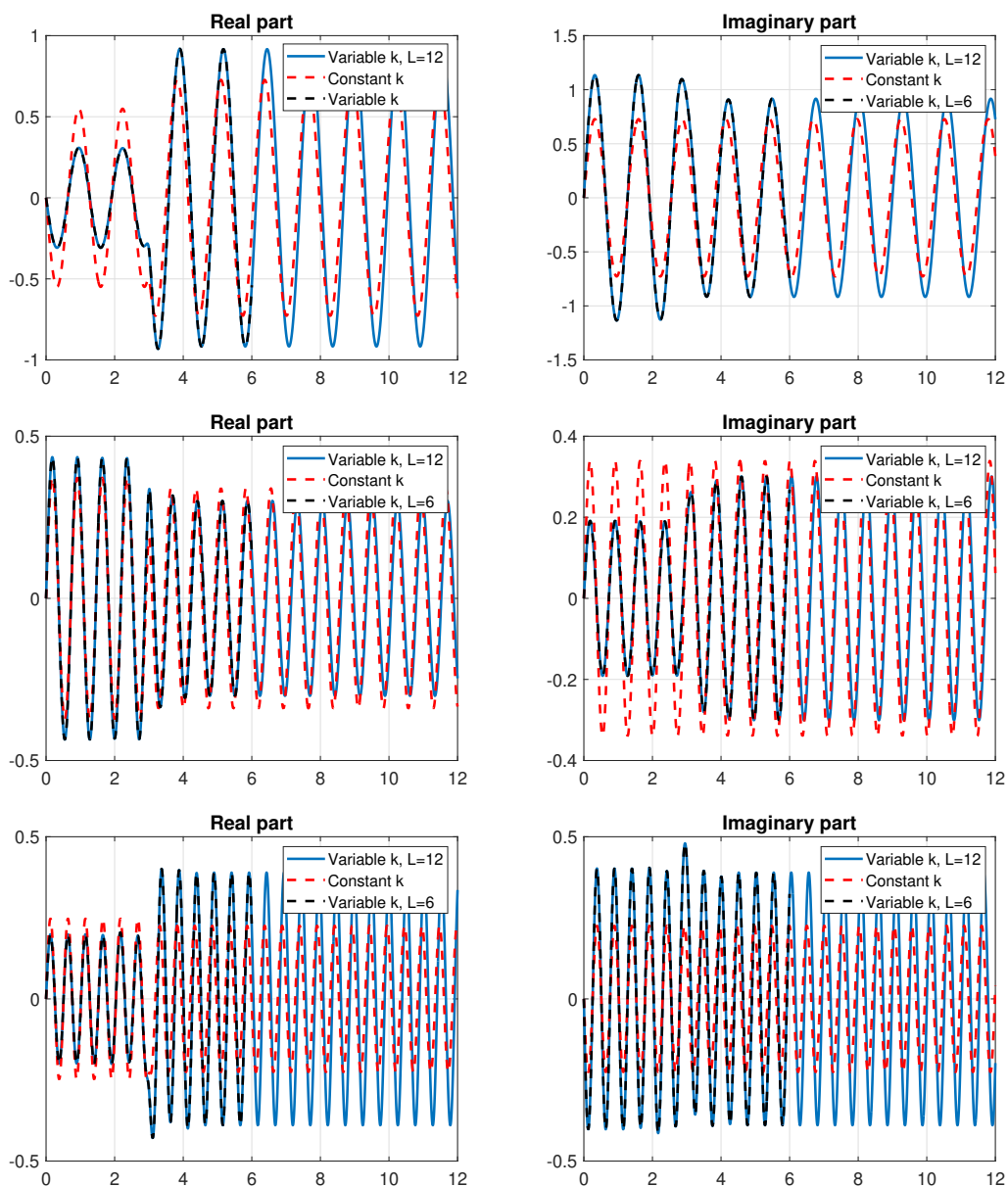
Σχήμα 4.17: Το γράφημα της συνάρτησης $c(x)$ της περίπτωσης (γ), στο $[0, 6]$ (μπλε συνεχής γραμμή). Με την κόκκινη διακεκομμένη ευθεία σημειώνεται η ταχύτητα αναφοράς $c_0 = 5100$ m/s.

Στο Σχήμα 4.18 δίνονται τα αποτελέσματα της μελέτης αριθμητικής σύγκλισης της λύσης πεπερασμένων στοιχείων u_h , για τρεις συχνότητες $f_r = 4, 7$ και 10 kHz και τρεις διαφορετικούς διαμερισμούς για κάθε συχνότητα. (Το πλήθος N των στοιχείων κάθε διαμερισμού δίνεται στο υπόμνημα κάθε σχήματος.)

Τέλος, στο Σχήμα 4.19, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα του ελέγχου της επιρροής της θέσης του τεχνητού συνόρου στην προσεγγιστική λύση u_h για το συγκεκριμένο προφίλ της ταχύτητας c και για τις τρεις παραπάνω συχνότητες. Βλέπουμε ότι και σε αυτή την περίπτωση η θέση του τεχνητού συνόρου δεν επηρεάζει την προσεγγιστική λύση.



Σχήμα 4.18: Σχηματική αναπαράσταση του πραγματικού μέρους της λύσης u_h (αριστερά) και του φανταστικού μέρους (δεξιά). Πάνω: $f_r = 4$ kHz και $N = 500, 1000, 2000$. Μέση: $f_r = 7$ kHz και $N = 500, 1000, 2000$. Κάτω: $f_r = 10$ kHz και $N = 1000, 2000, 4000$.



Σχήμα 4.19: Σχηματική αναπαράσταση του πραγματικού μέρους της λύσης u_h (αριστερά) και του φανταστικού μέρους (δεξιά) για $L = 6$ (μαύρη διακεκομμένη γραμμή) και $L = 12$ m (μπλε συνεχής γραμμή). Με κόκκινη διακεκομμένη γραμμή εμφανίζεται η λύση για σταθερή ταχύτητα $c_0 = 5100$ m/s. Πάνω: $f_r = 4$ kHz. Μέση: $f_r = 7$ kHz. Κάτω: $f_r = 10$ kHz.

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα και Προτάσεις

5.1 Συμπεράσματα

Στην διπλωματική αυτή εργασία ασχοληθήκαμε με την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Helmholtz σε μια χωρική διάσταση, $-u'' - k^2u = f$, σε ένα ημιάπειρο διάστημα της μορφής $[0, +\infty)$. Για τον κυματαριθμό k υποθέσαμε ότι μεταβάλλεται με το x σ' ένα φραγμένο διάστημα $[0, R]$, ενώ για $x > R$ παίρνει μια σταθερή τιμή. Για τον υπολογισμό μιας προσέγγισης της λύσης εφαρμόσαμε τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, όπου για να μετατρέψουμε το ημιάπειρο χωρίο (διάστημα) σε πεπερασμένο ώστε στη συνέχεια να μπορέσουμε να το διακριτοποιήσουμε, εισηγάγαμε ένα τεχνητό σύνορο στο $x = L$, με $L > R$. Στο τεχνητό σύνορο $x = L$ επιβάλλαμε μια απορροφητική συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet-to-Neumann, η οποία είναι σχεδιασμένη με τέτοιο τρόπο ώστε να μην εισάγει «τεχνητές ανακλάσεις» στην αριθμητική μας λύση εξαιτίας της ύπαρξης του τεχνητού συνόρου.

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιήσαμε είναι η συνήθης μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων με συνεχείς συναρτήσεις βάσης κατά τμήματα γραμμικά πολυώνυμα σε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[0, L]$ με παράμετρο διακριτοποίησης h . Τη μέθοδο αυτή την υλοποιήσαμε σε έναν κώδικα MATLAB, τον οποίο χρησιμοποιήσαμε για να εκτελέσουμε μια σειρά αριθμητικών πειραμάτων. Συγκεκριμένα,

- για την περίπτωση ενός ομοιογενούς μέσου όπου ο κυματαριθμός είναι σταθερός συγκρίνουμε τα αριθμητικά μας αποτελέσματα με την ακριβή λύση του προβλήματος όπως αυτή δίνεται με τη βοήθεια της συνάρτησης Green. Οι συγκρίσεις αυτές έχουν ως στόχο:
 - Να ελέγξουν την ακρίβεια της μεθόδου. Τα πειράματά μας επιβεβαιώνουν τα αναμενόμενα από τη θεωρία αποτελέσματα ότι η μέθοδος αυτή είναι πρώτης τάξης ως προς την H^1 νόρμα και δεύτερης τάξης ως προς την L^2 νόρμα.
 - Να διερευνήσουν το εξής κρίσιμο ερώτημα σε υπολογισμούς πεπερασμένων στοιχείων. Δεδομένου ενός διαστήματος $[0, L]$, και καθώς η συχνότητα, και επομένως και ο κυματαριθμός k αυξάνει, πώς πρέπει να επιλέγουμε την παράμετρο διακριτο-

ποίησης h έτσι ώστε να διατηρούμε ένα σταθερό επίπεδο για το σχετικό σφάλμα; Τα αριθμητικά μας πειράματα υποδεικνύουν ότι καθώς το k αυξάνει όταν επιλέγουμε το h έτσι ώστε να διατηρούμε σταθερό (και μικρό) το γινόμενο kh τότε το επίπεδο του σχετικού σφάλματος αυξάνει με το k τόσο στην L^2 όσο και στην H^1 νόρμα. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι ο γνωστός εμπειρικός κανόνας, να διατηρούμε έναν συγκεκριμένο αριθμό κόμβων ανά μήκος κύματος, δεν είναι αρκετός ώστε να μας εξασφαλίσει ένα σταθερό επίπεδο σφάλματος καθώς η συχνότητα αυξάνει. Στην περίπτωση που επιλέγουμε το h έτσι ώστε να παραμένει σταθερό και μικρό το γινόμενο k^3h^2 , τότε παρατηρούμε το επίπεδο του σχετικού σφάλματος παραμένει σταθερό καθώς το k αυξάνει. Αντιθέτως, αν επιλέγουμε το h έτσι ώστε το γινόμενο k^2h να παραμένει σταθερό και μικρό, τότε διαπιστώνουμε ότι το σχετικό σφάλμα μειώνεται με το k . Τα αποτελέσματα αυτά είναι σε απόλυτη συμφωνία με τα γνωστά θεωρητικά αποτελέσματα.

- Να διερευνήσουν αν και κατά πόσον η θέση του τεχνητού συνόρου L επηρεάζει την αριθμητική μας λύση. Για τον σκοπό αυτό πειραματιζόμαστε με διαφορετικές θέσεις του τεχνητού συνόρου και διαπιστώνουμε ότι η συνοριακή συνθήκη Dirichlet-to-Neumann που επιβάλλουμε στο τεχνητό σύνορο είναι πλήρως «διαφανής» υπό την έννοια ότι δεν επιστρέφει μη φυσικές ανακλάσεις από την παρουσία του τεχνητού συνόρου.
- στην περίπτωση που το μέσον είναι ανομοιογενές σε κάποια περιοχή του διαστήματος $[0, R]$, δηλαδή ο κυματαριθμός είναι συνάρτηση του x στο $[0, R]$ πειραματιζόμαστε με τρία διαφορετικά προφίλ της ταχύτητας α) μια ημιτονοειδή καμπύλη, β) μια γκαουσιανή, και γ) μια συνάρτηση sinc. Εξετάζουμε την αριθμητική σύγκλιση της μεθόδου και, επίσης, διαπιστώνουμε και πάλι την εξαιρετική απόδοση της συνοριακής συνθήκης DtN.

5.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Helmholtz για μεγάλες συχνότητες παραμένει εδώ και πολλές δεκαετίες ως μια μεγάλη υπολογιστική πρόκληση. Αυτό οφείλεται στον ρόλο του κυματαριθμού k , ο οποίος χαρακτηρίζει την ταλαντωτική συμπεριφορά της ακριβούς λύσης. Όσο μεγαλώνει η συχνότητα (αντίστοιχα μειώνεται το μήκος κύματος) αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου k , και τόσο πιο έντονες γίνονται οι ταλαντώσεις. Επομένως, σε απευθείας αριθμητικές μεθόδους, όπως είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, θα πρέπει να επιλέγει

κανείς μια κατάλληλη παράμετρο διακριτοποίησης. Ακόμη και αν ακολουθήσουμε τον (μη επαρκή όπως είδαμε στο απλό μονοδιάστατο μοντέλο που εξετάσαμε) εμπειρικό κανόνα και επιλέξουμε την παράμετρο διακριτοποίησης έτσι ώστε να διατηρούμε έναν σταθερό αριθμό κόμβων ανά μήκος κύματος, δηλαδή επιλέγουμε το h να είναι ανάλογο του $1/k$, το αποτέλεσμα είναι ότι σε ρεαλιστικά προβλήματα, για μεγάλες τιμές του k , καταλήγουμε στην ανάγκη επίλυσης τεράστιων γραμμικών συστημάτων. Το φαινόμενο αυτό φυσικά γίνεται πολύ πιο έντονο σε προβλήματα δύο ή τριών διαστάσεων. Είναι γνωστό, [9], ότι οι βαθμοί ελευθερίας που απαιτεί μια μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων για να διατηρήσει ένα δεδομένο επίπεδο ακρίβειας αυξάνεται περισσότερο από k^d , όπου $d = 1, 2$ ή 3 , είναι η διάσταση του φυσικού χώρου στο οποίο διατυπώνουμε το πρόβλημά μας. Επομένως η μελέτη του προβλήματος αυτού σε ανώτερη διάσταση παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Προς αυτή την κατεύθυνση ένα πολύ ενδιαφέρον ερώτημα θα ήταν να προσπαθήσει κανείς να διερευνήσει την πιθανή εφαρμογή και αποτελεσματικότητα αλγορίθμων μηχανικής μάθησης σε τέτοιου τύπου προβλήματα.

Βιβλιογραφία

- [1] Γ.Δ. Ακρίβης, Β.Α. Δουγαλής, *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, δ' έκδοση, 2010, δ' ανατύπωση, 2015.
- [2] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, 1972.
- [3] A. Bayliss, C.I. Goldstein, E. Turkel, On accuracy conditions for the numerical computation of waves, *J. Comput. Phys.* 59 (1985), 396–404.
- [4] J. Burkardt, Department of Mathematics, University of Pittsburgh.
https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/m_src/fem1d/fem1d.html
- [5] D. Colton, R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, 3rd ed., Springer, 2013.
- [6] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, Wiley, 1962.
- [7] V.A. Dougalis, *Finite Element Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Lecture Notes, Department of Mathematics, University of Athens, Greece & Institute of Applied and Computational Mathematics, FORTH, Greece. Revised edition 2019.
(http://scholar.uoa.gr/sites/default/files/doug/files/fe_notes_revision_2019.pdf)
- [8] G.J. Fix, S.P. Marin, Variational methods for underwater acoustic problems, *J. Comput. Phys.* 82 (1978), 253–270.
- [9] J. Galkowski, E. A. Spence, *Does the Helmholtz Boundary Element Method Suffer from the Pollution Effect?*, *SIAM Rev.* 65 (2023), 806–828.
- [10] D. Givoli, *Numerical Methods for Problems in Infinite Domains*, Studies in Applied Mechanics, 33, Elsevier, 1992.
- [11] M.S. Gockenbach, *Understanding and Implementing the Finite Element Method*, SIAM, 2006.
- [12] F. Ihlenburg, I. Babuska, Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number. Part I: The h-version of the FEM, *Computers Math. Applic.* 30 (1995), 9–37.

- [13] F. Ihlenburg, *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*, Springer, 1998.
- [14] F.B. Jensen, W.A. Kuperman, M.B. Porter, H. Schmidt, *Computational Ocean Acoustics*, 2nd. ed., Springer, 2011.
- [15] S. G. Johnson, Notes on Perfectly Matched Layers (PMLs), *arXiv*: 2108.05348v1, 2021.
- [16] J.B. Keller, D. Givoli, Exact nonreflecting boundary conditions, *J. Comput. Phys.* 82 (1989), 172–192.
- [17] J.D. Logan, *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2002.
- [18] D.A. Mitsoudis, N.A. Kampanis, V.A. Dougalis, Finite element discretization of the Helmholtz equation in an underwater acoustic waveguide, in *Effective Computational Methods in Wave Propagation*, N.A. Kampanis, V.A. Dougalis and J.A. Ekaterinaris (eds.), Chapman & Hall/CRC, 2008, 113–134.
- [19] G.F. Roach, *Green's Functions*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1982.
- [20] A.H. Schatz, An observation concerning Ritz-Galerkin methods with indefinite bilinear forms, *Math. Comp.* 28 (1974), 959–962.
- [21] I. Stakgold, *Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Vol. I, Macmillan, 1967.