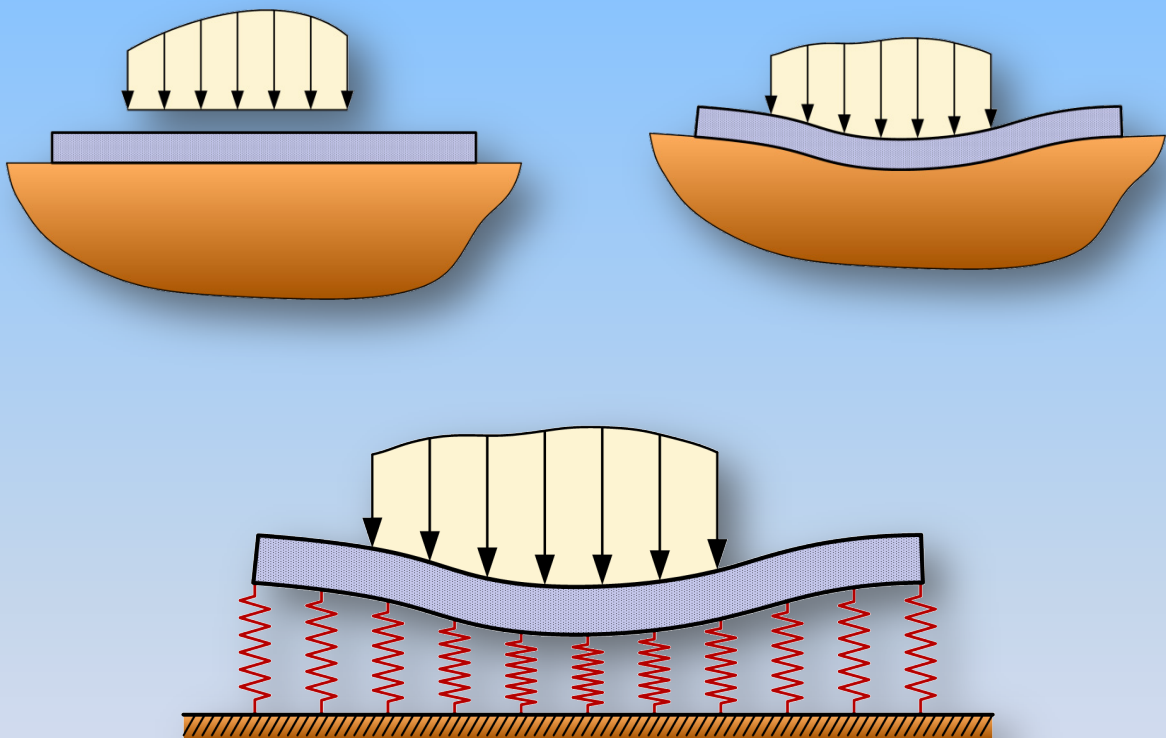




ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

# ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΕΔΡΑΖΟΜΕΝΩΝ ΔΟΚΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ



Διπλωματική Εργασία

Ουάσεφ Αλέξανδρος

Αθήνα, Δεκέμβριος 2020

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΣ-ΦΙΛΗΣ ΚΟΚΚΙΝΟΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Όνοματεπώνυμο φοιτητή: **Αλέξανδρος Ουάσεφ**

Τίτλος  
Διπλωματικής Εργασίας:

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΕΔΡΑΖΟΜΕΝΩΝ ΔΟΚΩΝ  
ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ**

Η διπλωματική εργασία εξετάστηκε επιτυχώς από την κάτωθι  
Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή:

**Τριαντ.-Φίλης Κόκκινος**  
Αναπληρωτής Καθηγητής  
Επιβλέπων

**Αντώνιος Κυριαζόπουλος**  
Καθηγητής  
Μέλος

**Νικόλαος Πνευματικός**  
Αναπληρωτής Καθηγητής  
Μέλος

Ιανουάριος 2021, ΑΙΓΑΛΕΩ

## ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο κάτωθι υπογεγραμμένος **Ουάσεφ Αλέξανδρος** του Μαγκέντ, με αριθμό μητρώου 44367450226 φοιτητής του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής της Σχολής Μηχανικών του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών, δηλώνω υπεύθυνα ότι:

«Είμαι συγγραφέας της παρούσας διπλωματικής εργασίας με τίτλο *ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΕΔΡΑΖΟΜΕΝΩΝ ΔΟΚΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ* και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, οι όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε ακριβώς είτε παραφρασμένες, αναφέρονται στο σύνολό τους, με πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών, που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία έχει συγγραφεί από μένα αποκλειστικά και αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου, όσο και του Ιδρύματος.

Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του διπλώματός μου».

Ο Δηλών



Ουάσεφ Αλέξανδρος



---

---

## Abstract

---

---

Diploma Thesis Title:

# **Analysis of Beams Resting on Elastic Foundation Using the Finite Element Method**

Author: **Ouasef Alexandros**

(December 2020)

This diploma thesis studies the behavior of beams resting on elastic foundation. It provides a brief overview of the foundation models based on Winkler's original foundation model, as well as a detailed analysis of beams resting on Winkler's foundation using the finite element method. The numerical implementation is achieved by the finite element method and developing for this purpose a process in EXCEL.

The analysis of beams resting on elastic medium has attracted a considerable attention for a prolonged period of time. Many engineering mechanics problems have been modeled as beams resting on an elastic medium. Typical examples are the combination of footings and mat foundations, laterally loaded piles, railway tracks, etc.

The solution of beams resting on elastic foundation is a statically indeterminate problem in mechanics. In this case, we have the beam on an elastic base along its entire bottom surface or just a part of it. In some cases, the theoretical approach and its solution may become very complicated or impossible, so alternatively the problems can be solved by numerical methods such as the finite element method (FEM) or the boundary element method (BEM). In the thesis at hand, the analysis of beams on elastic foundation is performed using the finite element method (FEM). The beam system is discretized into elements, allowing a movement and a rotation at each node using the theory of small deformations. Several examples are presented and complex frame structures have been studied in order to demonstrate the effect of the elastic foundation on the behavior of the whole model.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

---

<b>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</b> .....	<b>1</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1</b>	
Εισαγωγή.....	3
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2</b>	
Συμπεριφορά εδάφους.....	4
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3</b>	
Ελαστικές Θεμελιώσεις.....	6
3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΕΔΑΦΟΥΣ-ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ .....	6
3.1.1 Δοκοί σε ελαστική θεμελίωση.....	7
3.1.2 Αντίδραση Εδάφους - Πίεση Επαφής.....	9
3.2 ΣΥΝΤΟΜΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗΣ.....	9
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4</b>	
Μοντέλο Θεμελίωσης κατά Winkler.....	17
4.1 ΣΤΑΘΕΡΑ ΕΛΑΤΗΡΙΩΝ ΣΤΟ ΕΔΑΦΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ WINKLER (ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗΣ ΣΥΜΠΙΕΣΗΣ) .....	18
4.2 ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑ ΤΩΝ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΩΝ ΣΤΟ $K_S$ .....	19
4.3 ΛΟΓΟΣ POISSON ΤΟΥ ΕΔΑΦΙΚΟΥ ΜΕΣΟΥ.....	20
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5</b>	
Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων.....	21

5.1	ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΜΕΘΟΔΟΥ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ .....	21
5.2	ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ .....	23
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6</b>		
<i>Ανάλυση Δοκών επί Ελαστικού Εδάφους</i>		
	<i>με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων .....</i>	<b>25</b>
6.1	ΘΕΩΡΙΑ ΔΟΚΟΥ ΤΥΠΟΥ EULER-BERNOULLI .....	25
6.2	ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΔΟΚΟΥ .....	27
6.3	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ ΤΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΔΟΚΟΥ .....	28
6.4	ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΚΟΜΒΙΚΑ ΦΟΡΤΙΑ ΤΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ .....	34
6.5	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΚΑΙ ΡΟΠΩΝ ΕΝΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ .....	37
6.6	ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ .....	39
6.7	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ .....	42
6.7.1	Παράδειγμα 1 : Ισοστατικός Φορέας .....	42
6.7.2	Παράδειγμα 2 : Υπερστατικός Φορέας .....	47
6.7.3	Παράδειγμα 3 : Ισοστατικός Φορέας .....	55
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....</b>		<b>60</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ .....</b>		<b>61</b>
	ΒΗΜΑΤΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΦΟΡΕΑ ΣΤΟ MICROSOFT EXCEL .....	61
	Βήμα 1 <sup>ο</sup> .....	62
	Βήμα 2 <sup>ο</sup> .....	62
	Βήμα 3 <sup>ο</sup> .....	62
	Βήμα 4 <sup>ο</sup> .....	63
	Βήμα 5 <sup>ο</sup> .....	63
	Βήμα 6 <sup>ο</sup> .....	63
	Βήμα 7 <sup>ο</sup> .....	64
	Βήμα 8 <sup>ο</sup> .....	64
	Αποτελέσματα .....	64

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

---

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανάλυση της συμπεριφοράς δοκών που στηρίζονται πάνω σε ελαστικό μέσο έχει προσελκύσει σημαντική προσοχή για μια παρατεταμένη χρονική περίοδο. Πολλά προβλήματα μηχανικής έχουν διαμορφωθεί ως δοκοί που στηρίζονται σε ελαστικό μέσο. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι ο συνδυασμός υποστρωμάτων και θεμελιώσεων, πλευρικά φορτωμένων πασσάλων, σιδηροδρομικών γραμμών, κ.ά.

Η λύση της δοκού επί ελαστικού εδάφους είναι ένα στατικά αόριστο πρόβλημα της μηχανικής. Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε τη δοκό πάνω σε ελαστική βάση καθ' όλο το μήκος και το πλάτος της ή μόνο σε κάποιο τμήμα του μήκους ή του πλάτους. Δεν είναι δυνατόν όλα τα προβλήματα να επιλυθούν αναλυτικά διότι, μερικές φορές, η θεωρητική λύση είναι αρκετά περίπλοκη. Οι εναλλακτικές προσεγγίσεις για την αριθμητική λύση του προβλήματος είναι η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method, FEM) και η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων (Boundary Element Method, BEM). Στην εργασία αυτή η ανάλυση της δοκού γίνεται με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (FEM) και συγκεκριμένα η δοκός διακριτοποιείται σε στοιχεία με δύο ακραίους κόμβους. Κάθε κόμβος διαθέτει δύο βαθμούς ελευθερίας κίνησης, μια μετακίνηση και μια στροφή σύμφωνα με τη θεωρία μικρών παραμορφώσεων.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται μια σύντομη επισκόπηση των μοντέλων θεμελίωσης, τα οποία βασίστηκαν πάνω στο αρχικό μοντέλο θεμελίωσης του Winkler, καθώς και η λεπτομερής ανάλυση της θεμελίωσης τύπου Winkler, βάση της οποίας θα γίνει και η ανάλυση της δοκού με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

# ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΕΔΑΦΟΥΣ

Η επιτυχής εφαρμογή των αρχών της δομοστατικής μηχανικής συνδέεται άμεσα με την ικανότητα του μηχανικού να μοντελοποιεί την κατασκευή και τις συνθήκες υποστήριξης της προκειμένου να πραγματοποιήσει μια ακριβή ανάλυση και έτσι έναν σωστό σχεδιασμό. Το έδαφος είναι ένα πολύ περίπλοκο υλικό για τη μοντελοποίηση. Είναι πολύ δύσκολο να μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης εδάφους-κατασκευής και επομένως να φτάσουμε σε ένα ρεαλιστικό μοντέλο ανάλυσης θεμελιώσεων.

Όλα τα φορτία της κατασκευής πρέπει να μεταφερθούν στο συνεχές μέσον που είναι το έδαφος και τόσο το έδαφος όσο και η κατασκευή συνεργάζονται για να παραλάβουν από κοινού τα φορτία. Η αναπόσπαστη φύση της αλληλεπίδρασης μεταξύ του εδάφους και των θεμελίων της κατασκευής περιπλέκεται περαιτέρω από την πολυπλοκότητα του ίδιου του εδάφους, επειδή αυτό είναι μη ομογενές και ανισότροπο μέσο, παρουσιάζοντας μη γραμμική συμπεριφορά. Αντιθέτως, οι κατασκευές από σκυρόδεμα μπορούν να μοντελοποιηθούν και να αναλυθούν επαρκώς, θεωρώντας το υλικό ισότροπο και με γραμμική συμπεριφορά. Επιπλέον, η στατική ανάλυση είναι πολύ γνωστή έτσι ώστε η στιβαρότητα της κατασκευής να προσδιορίζεται εύκολα, βάσει των ελαστικών σταθερών και του μήκους του μέλους.

Από την άλλη πλευρά, οι ιδιότητες του εδάφους είναι δύσκολο να προσδιοριστούν, επειδή εκτός από τα προαναφερθέντα χαρακτηριστικά είναι ένα "μαλακό" υλικό και αυτή η ιδιότητα καθιστά δύσκολη τη λήψη δειγμάτων για δοκιμές, που θα δώσουν εργαστηριακά αποτελέσματα, πλησιέστερα προς την πραγματική συμπεριφορά. Μεταξύ των άλλων προβλημάτων, ο τύπος του εδάφους επηρεάζει την ικανότητα λήψης αντιπροσωπευτικών δειγμάτων. Η διαφοροποίηση στις τεχνικές δειγματοληψίας μεταξύ των εργαστηρίων περιπλέκουν περαι-



τέρω το πρόβλημα. Δύο πρόσθετοι παράγοντες, που το περιπλέκουν, είναι ότι οι ιδιότητες του εδαφικού υλικού εξαρτώνται από την πίεση και το συνεχές έδαφος θα αποτελείται στην πράξη από στρώματα υλικών με διαφορετικές καταστατικές σχέσεις και ιδιότητες υλικών. Λόγω αυτών των παραγόντων, η μεταβολή των ιδιοτήτων με το χρόνο και οι καταστατικοί νόμοι για το σύνολο του εδάφους είναι ουσιαστικά άγνωστα και απροσδιόριστα. Επομένως, είναι απαραίτητο να γίνουν ορισμένες απλουστευτικές υποθέσεις για την ανάλυση της αλληλεπίδρασης εδάφους-κατασκευής.

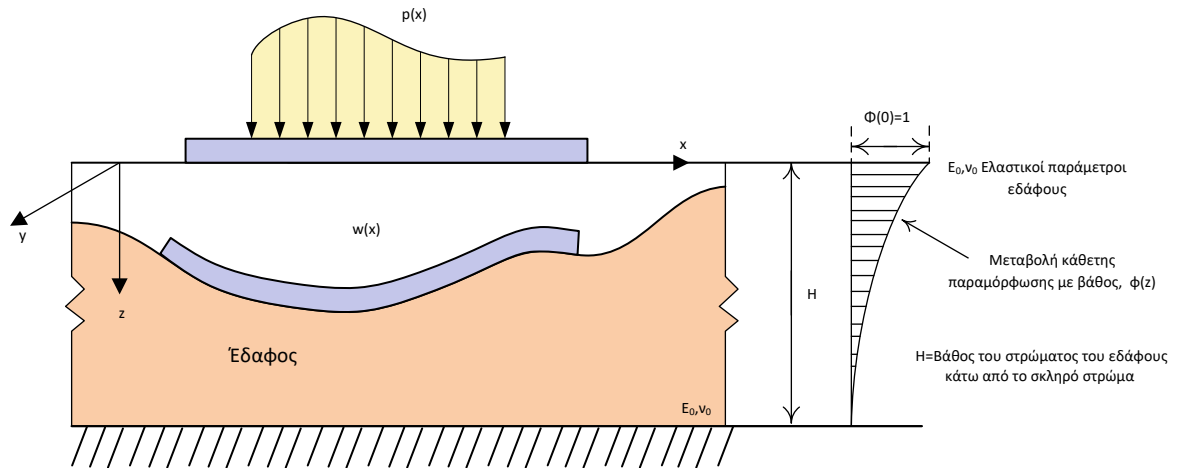
Για το σχεδιασμό τέτοιων συνεχών θεμελίων είναι σημαντικό να γίνουν ρεαλιστικές υποθέσεις όσον αφορά την κατανομή της τάσης έδρασης που ενεργεί πάνω στο θεμέλιο. Η συνηθέστερα υιοθετούμενη μέθοδος είναι αυτή των εδαφικών ελατηρίων. Έτσι, η ανάλυση της κάμψης των δοκών σε μια ελαστική θεμελίωση γίνεται θεωρώντας ότι οι δυνάμεις αντίδρασης της θεμελίωσης είναι ανάλογες σε κάθε σημείο με την εγκάρσια παραμόρφωση της δοκού στο σημείο αυτό. Το έδαφος μοντελοποιείται με τη βοήθεια πανομοιότυπων, ανεξάρτητων, στενά διαχωρισμένων, διακριτών και γραμμικά ελαστικών ελατηρίων. Η σταθερά των ελατηρίων αυτών είναι ίση με τον συντελεστή αντίδρασης υποβάθρου του εδάφους και ονομάζεται μέτρο της αντίδρασης υποβάθρου  $k_s$ . Αυτή η απλή και σχετικά ακατέργαστη μηχανική αναπαράσταση της βάσης του εδάφους εισήχθη αρχικά από τον Winkler, το 1867 και γι' αυτό το είδος της θεμελίωσης αναφέρεται ως *μοντέλο θεμελίωσης Winkler*. Αυτό το μοντέλο συγκρίνεται συχνά με ένα στήριγμα της θεμελίωσης με ένα πυκνό υγρό, του οποίου το μοναδιαίο βάρος είναι ίσο με το συντελεστή αντίδρασης υποβάθρου.

## ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΘΕΜΕΛΙΩΣΕΙΣ

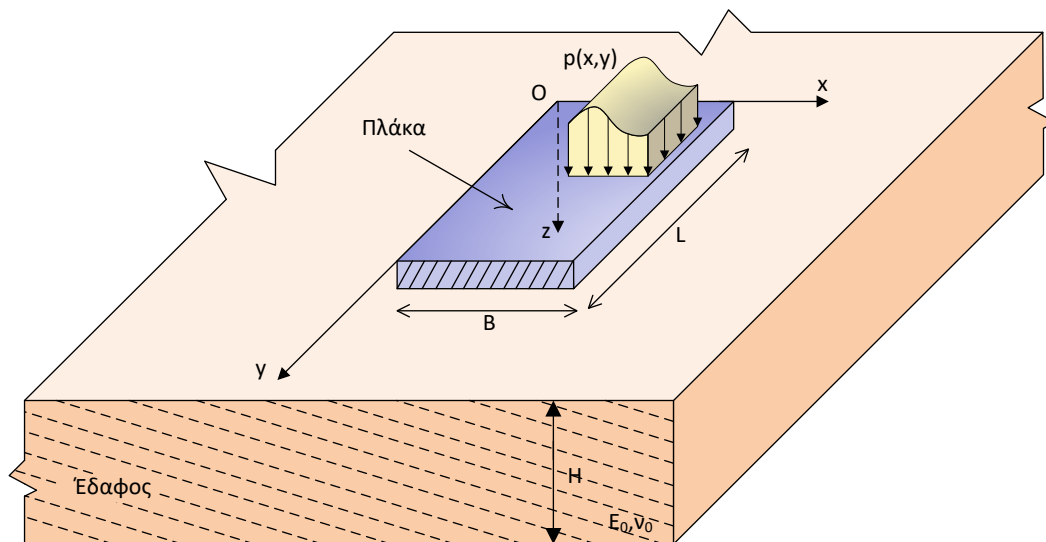
Η θεωρία των ελαστικών θεμελιώσεων έχει προσελκύσει μεγάλη προσοχή λόγω της εφαρμογής της σε διάφορους τεχνικούς κλάδους, εκτός αυτής της μηχανικής των θεμελιώσεων. Τα προβλήματα των ελαστικά εδραζόμενων κατασκευών ενδιαφέρουν τους πυραυλοκινητήρες στερεού καυσίμου, τις αεροδιαστημικές κατασκευές, κατασκευαστικά έργα σε ψυχρές περιοχές και πολλούς άλλους τομείς. Το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης μεταξύ της κατασκευής και του εδάφους της θεμελίωσης γενικά επιλύεται με την ενσωμάτωση της αντίδρασης που προέρχεται από την θεμελίωση, στο μηχανισμό απόκρισης της κατασκευής με την μοντελοποίηση της θεμελίωσης μέσω κατάλληλου μαθηματικού μοντέλου. Ακόμα και αν το μέσο της θεμελίωσης συμβαίνει να είναι περίπλοκο σε ορισμένα προβλήματα, στην πλειονότητα των περιπτώσεων, η θεμελίωση μπορεί να αντιπροσωπευτεί από ένα απλό μαθηματικό προσομοίωμα, χωρίς να ζητείται από αυτό μεγάλη ακρίβεια. Για την επίτευξη αυτού του στόχου, προτάθηκαν πολλά θεμελιώδη μοντέλα και μια συνολική ανασκόπηση σχετική με αυτά δόθηκε από τους Reissner (1937) και Kameswara Rao (1969, 1971) Αυτά τα μοντέλα παρουσιάζονται στην ενότητα 3.2.

### 3.1 Εξισώσεις αλληλεπίδρασης Εδάφους-Κατασκευής

Το σύστημα Εδάφους-Κατασκευής που υποβάλλεται σε εξωτερικά φορτία απεικονίζεται στα Σχ. 1 και 2, ανάλογα με τη γεωμετρία της θεμελίωσης, δηλαδή δοκός ή πλάκας. Τα περισσότερα δάπεδα μπορούν να θεωρηθούν είτε δοκοί (μονοδιάστατες) είτε πλάκες (διδιάστατες: ορθογώνιες, τετράγωνες, κυκλικές ή άλλα σχήματα).



Σχήμα 1. Δοκός σε ελαστική βάση



Σχήμα 2. Πλάκα σε ελαστική βάση

### 3.1.1 Δοκοί σε ελαστική θεμελίωση

Παραμελώντας την τριβή μεταξύ της δοκού και του εδάφους, η εξίσωση που διέπει το έδαφος μπορεί να γραφτεί από τη θεωρία κάμψης ως εξής:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = p(x) - q(x) \quad (3.1.1.1)$$

όπου

$EI$  =αντοχή κάμψης της δοκού

$E$  = Μέτρο ελαστικότητας του υλικού της δοκού

$I$  = Ροπή αδράνειας της δοκού

$$= \frac{h^3}{12(1-\nu_p^2)} \text{ ανά μονάδα λωρίδας στην περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης (πεδילוδοκός)}$$

$\nu_p$  = Ο λόγος poisson της επίπεδης δομής

$p(x)$  = εξωτερικό φορτίο

$q(x)$  = αντίδραση από το έδαφος στήριξης

$w$  = κατακόρυφη παραμόρφωση κατά τον άξονα  $z$

$x, y, z$  = δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων

$E_s$  = μέτρο ελαστικότητας του εδάφους

$\nu_s$  = Ο λόγος poisson του εδάφους

$E_0, \nu_0$  = ελαστικές παράμετροι εδάφους που ορίζονται ως

$$E_0 = \frac{E_s}{1-\nu_s^2} \text{ και } \nu_0 = \frac{\nu_s}{1-\nu_s} \text{ για λωρίδες (επίπεδης δομής) και τρισδιάστατα προβλήματα.}$$

Άλλες παράμετροι, που μπορούν να οριστούν κατά τη χρήση της κλασικής θεωρίας της κάμψης είναι οι εξής:

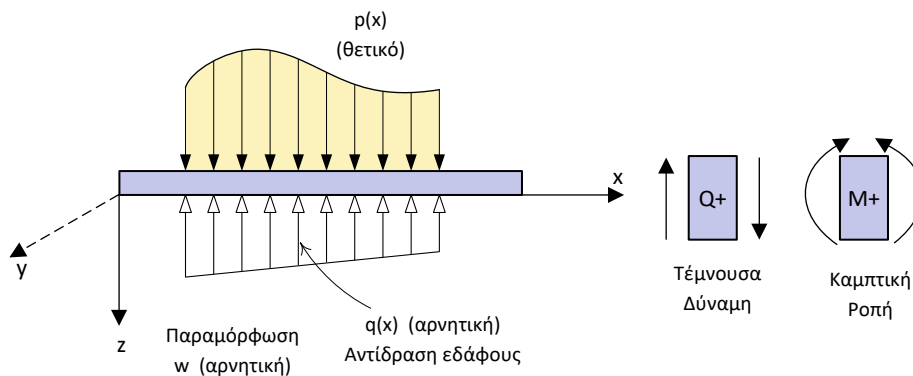
$$w' = \theta = \text{κλίση} = \frac{dw}{dx} \quad (3.1.1.2)$$

$$M = \text{ροπή κάμψης} = -EI \frac{d^2w}{dx^2} \quad (3.1.1.3)$$

$$Q = \text{διατμητική δύναμη} = -EI \frac{d^3w}{dx^3} \quad (3.1.1.4)$$

$$q(x) = \text{Αντίδραση εδάφους ή πίεση επαφής} = EI \frac{d^4w}{dx^4} - p(x) \quad (3.1.1.5)$$

Οι συμβάσεις από τη θεωρία κάμψης για την καμπτική ροπή (bending moment,  $M$ ) και τις τέμνουσες ή διατμητικές δυνάμεις (shear forces,  $Q$ ), φαίνονται παρακάτω στο Σχ. 3.



Σχήμα 3. Σύμβασης θετικών ροπών και τεμνουσών κατά τη θεωρία κάμψης των δοκών.

### 3.1.2 Αντίδραση Εδάφους - Πίεση Επαφής

Η επίλυση των εξισώσεων αλληλεπίδρασης εδάφους και κατασκευής απαιτεί την ενσωμάτωση της εδαφικής αντίδρασης  $q(x)$  στην εξίσωση (3.1.1.1), που εξαρτάται από την δοκό, τα χαρακτηριστικά του εδάφους και τη σύνδεσή τους στη μεταξύ τους διεπιφάνεια. Υποθέτοντας επαφή χωρίς τριβή, και με πλήρη σύνδεση μεταξύ της δοκού και του εδάφους, η  $q(x)$  μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των μετατοπίσεων του εδάφους και συγκεκριμένα η κατακόρυφη μετατόπιση σε σχέση με τα κατακόρυφα φορτία, χρησιμοποιώντας διαφορετικά μοντέλα για τη βάση. Ο Reissner (1937), καθώς και ο Kameswara Rao (1969, 1971) προβαίνουν σε ανασκόπηση των μοντέλων αυτών. Τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά αυτών των μοντέλων παρουσιάζονται στη συνέχεια.

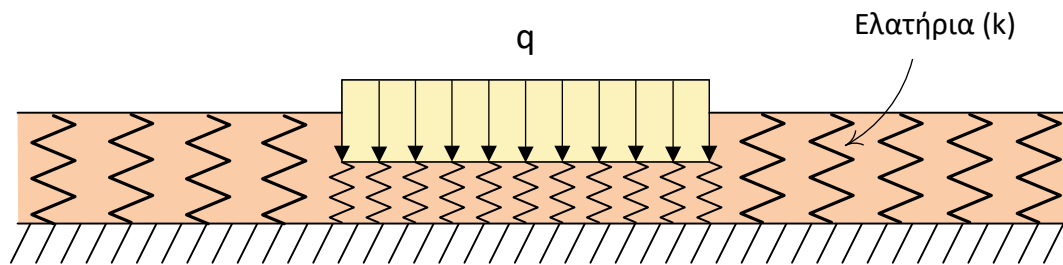
### 3.2 Σύντομη επισκόπηση των μοντέλων θεμελίωσης

Η παλαιότερη διατύπωση του μοντέλου θεμελίωσης οφειλόταν στον Winkler, ο οποίος υποθέτει ότι το μοντέλο θεμελίωσης αποτελείται από ανεξάρτητα γραμμικά ελατήρια ευρισκόμενα σε κοντινή μεταξύ τους απόσταση, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4. Εάν μια τέτοια θεμελίωση υποβληθεί σε μια μερικώς κατανεμημένη επιφανειακή φόρτιση  $q$ , τα ελατήρια δεν θα επηρεαστούν πέρα από την περιοχή του φορτίου (Σχήμα 4). Σε μια τέτοια περίπτωση, όμως, παρατηρείται ότι ένα πραγματικό θεμέλιο θα έχει επιφανειακή παραμόρφωση σαν αυτή του Σχήματος 5. Επομένως, συγκρίνοντας τη συμπεριφορά του θεωρητικού μοντέλου και της πραγματικής θεμελίωσης, γίνεται φανερό ότι το μοντέλο στερείται, ουσιαστικά, από την

πλήρη συνέχεια στη παραμόρφωση του υλικού υποστήριξης. Η εξίσωση μεταξύ του φορτίου και της βύθισης σε αυτήν την περίπτωση γράφεται ως:

$$q = kw \quad (3.2.1)$$

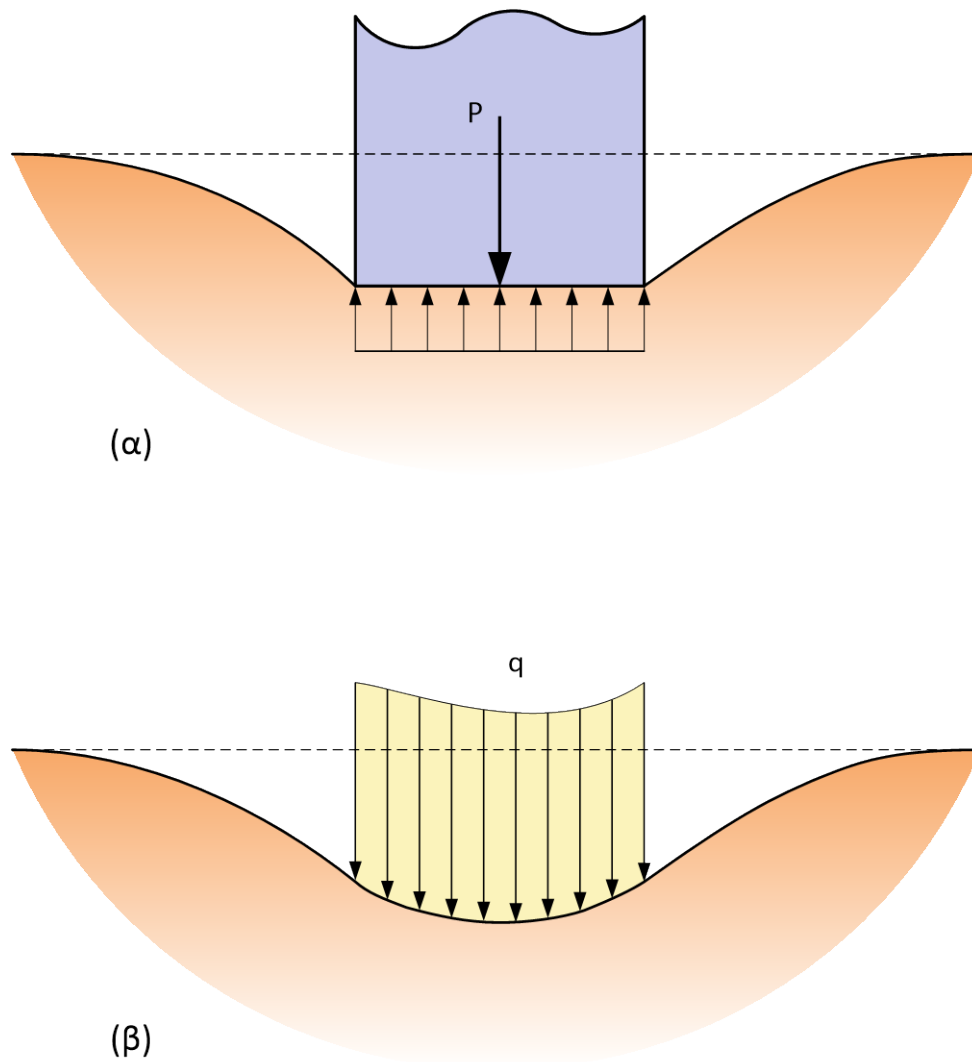
όπου  $k$  είναι η σταθερά ελατηρίου και συχνά αναφέρεται ως *συντελεστής θεμελίωσης* και  $w$  είναι η κατακόρυφη μετατόπιση (βύθιση) της επιφάνειας επαφής.



**Σχήμα 4.** Φόρτιση στο θεμέλιο κατά Winkler.

Παρατηρείται ότι η Εξίσωση (3.2.1) ικανοποιείται ακριβώς από μια ελαστική πλάκα που επιπλέει στην επιφάνεια ενός υγρού και φέρει κάποιο φορτίο το οποίο της προκαλεί παραμόρφωση. Η κατανομή πίεσης κάτω από μια τέτοια πλάκα θα είναι ισοδύναμη με τη δύναμη της άνωσης του υγρού, ενώ  $k$  είναι το ειδικό βάρος του υγρού. Με αυτό το ανάλογο, η πρώτη λύση για την κάμψη πλακών σε μια θεμελίωση τύπου Winkler παρουσιάστηκε από τον Hertz (1884). Επίσης, σε ένα τέτοιο μοντέλο θεμελίωσης οι μετατοπίσεις κάτω από τη φορτιζόμενη περιοχή θα είναι σταθερές, είτε το θεμέλιο υποβάλλεται σε συγκεντρωμένο φορτίο, είτε σε ομοιόμορφο φορτίο, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4. Ωστόσο, η μετατόπιση για αυτές τις περιπτώσεις είναι αρκετά διαφορετική στις πραγματικές θεμελιώσεις, όπως μπορεί να παρατηρηθεί στα Σχήματα 5 (α) και (β). Αν και αυτό το μοντέλο, εμφανίζει κάποιες ασυνέπειες, είναι εξαιρετικά απλό και παρέχει μια εύκολη ανάλυση. Με τα χρόνια έχει παρουσιαστεί μεγάλη ποικιλία λύσεων από τους Winkler (1867), Reissner (1937), Hetenyi (1946, 1950), Timoshenko και Krieger (1959) και Iyengar και Ramu (1979).

Μια άλλη προσέγγιση είναι να υποθέσουμε ότι το μέσο θεμελίωσης είναι ένα συνεχές ελαστικό στερεό. Αν και αυτή η υπόθεση προσομοιώνει στενά τη φυσική συμπεριφορά ενός πραγματικού θεμελίου, κάνει την ανάλυση αδικαιολόγητα πολύπλοκη. Παρά τη μαθηματική πολυπλοκότητα, παρουσιάστηκαν ορισμένες για αυτή την περίπτωση (Gorbunov-Posadov, 1949, Zimmermann, 1888), οι οποίες ωστόσο περιορίστηκαν σε σχετικά απλές περιπτώσεις.



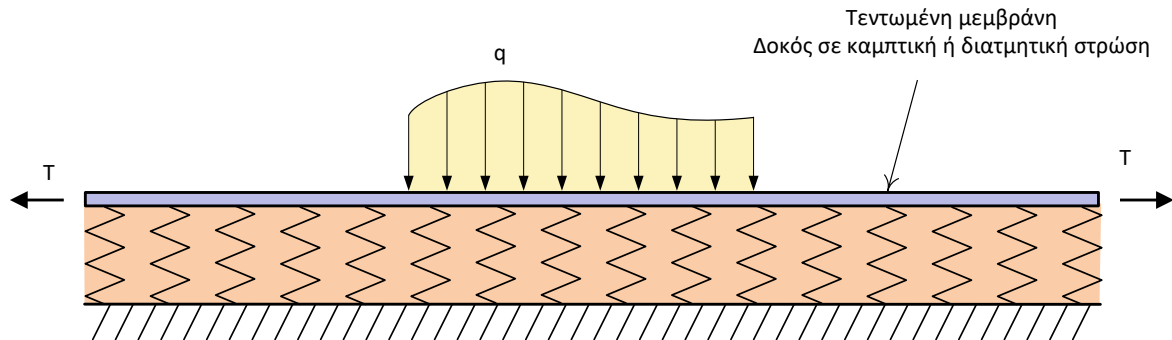
Σχήμα 5. Παραμόρφωση πραγματικών θεμελίων.

Επίσης, παρατηρήθηκε ότι η συμπεριφορά του θεμελίου σύμφωνα με αυτή τη θεωρία διέφερε από την πραγματική συμπεριφορά, πιθανώς λόγω των αμφισβητήσιμων υποθέσεων της ελαστικότητας, της ομοιογένειας και της ισοτροπίας των υλικών, που είναι εγγενείς στις αρχικές παραδοχές. Για παράδειγμα, παρατηρείται ότι οι επιφανειακές μετατοπίσεις εδαφών μακριά από την περιοχή φόρτισης μειώνονται ταχύτερα από ότι προβλέπει αυτή η θεωρία (Kameswara Rao, 1969) και υλικά όπως τα εδαφικά ή το αφρώδες ελαστικό δεν πληρούν τις προαναφερθείσες βασικές παραδοχές.

Η ανάγκη να γεφυρωθεί το χάσμα μεταξύ αυτών των δύο ακραίων και περιοριστικών περιπτώσεων και να φτάσουμε σε ένα φυσικά στενό και μαθηματικά απλό πρότυπο θεμελίωσης έχει γίνει αισθητό εδώ και αρκετό καιρό. Αρκετοί συγγραφείς πρότειναν μοντέλα

θεμελίωσης τα οποία περιλαμβάνουν περισσότερες από μία παραμέτρους για τον χαρακτηρισμό του μέσου υποστήριξης.

Μια τέτοια προσπάθεια παρουσιάστηκε από τον Filonenko-Borodich (Reissner, 1937), ο οποίος τροποποίησε το θεμέλιο τύπου Winkler παρέχοντας κάποια συνέχεια μέσω σύνδεσης των άνω άκρων των ελατηρίων μέσω μιας τεντωμένης ελαστικής μεμβράνης, που υποβάλλεται σε ένα σταθερή τάση  $T$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.



**Σχήμα 6.** Σκίτσο της σύμβασης που παρουσιάζει μοντέλο θεμελίωσης με χρήση ελαστικής μεμβράνης.

Η ισορροπία στην κάθετη κατεύθυνση δίνεται από την εξίσωση

$$q = kw - T\nabla^2 w \quad (3.2.2)$$

όπου

$q$  είναι το κατανομημένο κατακόρυφο φορτίο που εφαρμόζεται στην επιφάνεια του εδάφους

$w$  είναι η κατακόρυφη εκτροπή της επιφάνειας

$\nabla^2$  είναι ο τελεστής Laplace

$k$  και  $T$  είναι οι δύο παράμετροι που χαρακτηρίζουν την θεμελίωση.

Ο Hetenyi (1946, 1950) συμπεριέλαβε τη ζητούμενη συνέχεια στο μοντέλο θεμελίωσης του Winkler με την ενσωμάτωση μιας ελαστικής δοκού στη δισδιάστατη περίπτωση και μια ελαστική πλάκα στην τρισδιάστατη περίπτωση (Σχήμα 6), με την προϋπόθεση, όμως, ότι η υποθετική δοκός ή πλάκα παραμορφώνεται μόνο σε κάμψη. Σε αυτή την περίπτωση η σχέση μεταξύ του φορτίου  $q$  και της παραμόρφωσης  $w$  της επιφάνειας μπορεί να εκφραστεί ως



$$q = kw - D\nabla^4 w \quad (3.2.3)$$

όπου

$D$  η καμπτική ακαμψία της δοκού ή της πλάκας

$\nabla^4$  είναι ο βιομορφικός χειριστής

Παρέχοντας διατμητική αλληλεπίδραση μεταξύ των επιμέρους ελατηρίων του μοντέλου του Winkler, ο Pasternak (Kameswara Rao, 1969) παρουσίασε ένα νέο μοντέλο θεμελίωσης, σαν αυτό του Σχήματος 6. Η διατμητική αλληλεπίδραση των ελατηρίων επιτυγχάνεται συνδέοντας τα άκρα τους με μια δοκό ή πλάκα (ανάλογα με την περίπτωση), που αποτελείται από απαραμόρφωτα στην κατακόρυφη διεύθυνση στοιχεία, που όμως παραμορφώνονται μόνο σε εγκάρσια διάτμηση. Η αντίστοιχη εξίσωση που συσχετίζει το φορτίο  $q$  με την αντίστοιχη παραμόρφωση  $w$ , μπορεί να γραφεί ως:

$$q = kw - \mu\nabla^2 w \quad (3.2.4)$$

όπου

$\mu$  είναι το μέτρο διάτμησης του υλικού θεμελίωσης

$\nabla^2$  είναι ο τελεστής Laplace

Μπορούμε να δούμε ότι αυτό το μοντέλο θεμελίωσης αποτελείται επίσης από δύο παραμέτρους  $k$  και  $\mu$  και είναι ισοδύναμο με τα μοντέλα που προτάθηκαν από τον Filonenko-Borodich και Wieghardt (Kameswara Rao, 1969), όπως δίνεται στην Εξίσωση (3.2.2).

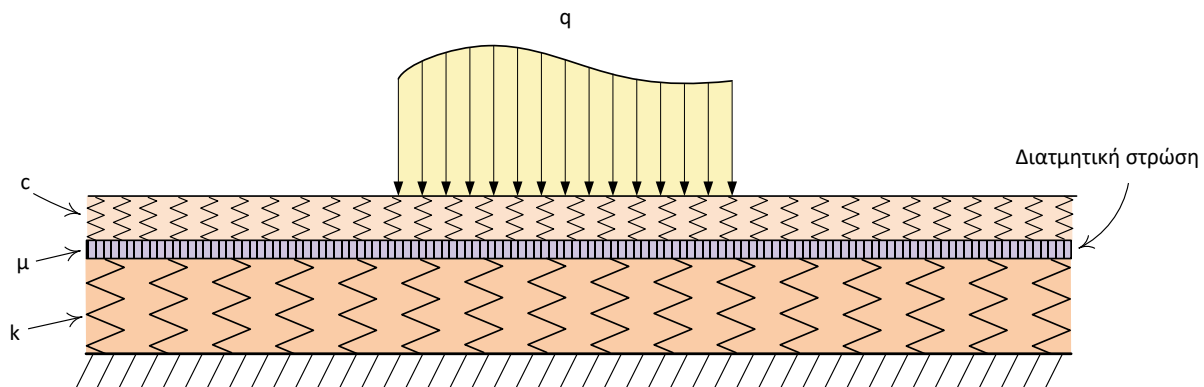
Ο Pasternak πρότεινε, επίσης, ένα άλλο μοντέλο θεμελίωσης (Kameswara Rao, 1969), που αποτελείται από δύο στρώματα ελατηρίων συνδεδεμένα μεταξύ τους με διατμητικό στρώμα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7. Η σχέση μεταξύ του φορτίου  $q$  και της βύθισης  $w$  της επιφάνειας θεμελίωσης μπορεί να εκφραστεί ως

$$\left(1 + \frac{k}{c}\right)q - \frac{\mu}{c}\nabla^2 q = kw - \mu^2\nabla^2 w \quad (3.2.5)$$

όπου

$c$  και  $k$  είναι οι σταθερές των ελατηρίων των άνω και κάτω στρώσεων

$\mu$  είναι το μέτρο διάτμησης του διατμητικού στρώματος.



Σχήμα 7. Τροποποιημένο μοντέλο θεμελίωσης κατά Pasternak.

Στα προαναφερθέντα μοντέλα, έχει τροποποιηθεί το μοντέλο του Winkler ώστε να παρέχει κάποια αλληλεπίδραση μεταξύ των ελατηρίων και κατά συνέπεια να εξασφαλίζεται σε κάποιο βαθμό η συνέχεια της θεμελίωσης. Σε αντίθεση με αυτά, ξεκινώντας από τη θεωρία του ελαστικού συνεχούς μέσου και εισάγοντας απλουστευτικές παραδοχές αναφορικά με τις αναμενόμενες τάσεις ή και μετατοπίσεις, προτάθηκαν κάποια άλλα μοντέλα, όπως αυτό του Reissner (Kameswara Rao, 1969), ο οποίος θεώρησε ότι οι τάσεις στο επίπεδο  $xy$ , δηλαδή οι  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  και  $\tau_{xy}$ , είναι αμελητέες σε όλο το στρώμα της θεμελίωσης. Επίσης, οι οριζόντιες μετατοπίσεις στην άνω και κάτω επιφάνεια της στρώσης της θεμελίωσης θεωρήθηκαν μηδενικές. Συνεχίζοντας με αυτές τις υποθέσεις και επιλύοντας τις εξισώσεις ελαστικού συνεχούς μέσου, η εξίσωση, που συνδέει το επιβεβλημένο κατανεμημένο επιφανειακό φορτίο  $q$  και την προκύπτουσα εγκάρσια μετατόπιση της επιφανείας  $w$ , έχει την εξής μορφή

$$c_1 w - c_2 \nabla^2 w = q \frac{c_2}{4c_1} \nabla^2 q \quad (3.2.6)$$

όπου

$$c_1 = \frac{E}{H} \quad c_2 = \frac{H\nu}{3}$$

$E$  και  $\nu$  είναι οι ελαστικές σταθερές του υλικού θεμελίωσης και το  $H$  είναι το πάχος του στρώματος θεμελίωσης. Μπορούμε να δούμε ότι οι εξισώσεις (3.2.5) και (3.2.6) είναι παρόμοιες. Επίσης, για σταθερά και γραμμικά μεταβαλλόμενα φορτία, αυτή η εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί μαθηματικά ισοδύναμη με τις Εξισώσεις (3.2.2) και (3.2.4), αποκαλύπτοντας έτσι την ομοιότητα των μοντέλων. Σε αυτή την περίπτωση, παραλείποντας τις τάσεις στο επίπεδο, μπορεί να αποδειχθεί ότι για ένα δεδομένο σημείο στην επιφάνεια οι τάσεις διάτμησης  $\tau_{zx}$  και  $\tau_{zy}$  είναι σταθερές σε όλο το βάθος της θεμελίωσης, γεγονός όμως το οποίο είναι μη

συμβατό με την πραγματική συμπεριφορά της θεμελίωσης και ειδικά για παχιά στρώματα θεμελίωσης.

Οι Vlasov και Leontev (1966) έχουν αναπτύξει ένα μοντέλο θεμελίωσης ξεκινώντας από την θεωρία του ελαστικού συνεχούς μέσου και παραβλέποντας τις οριζόντιες μετατοπίσεις του μέσου υποστήριξης. Χρησιμοποιώντας μια μέθοδο μεταβολών σύμφωνα με τον Vlasov, η σχέση μετατόπισης-φορτίου μπορεί να γραφεί ως

$$q = kw - 2t_1 \nabla^2 w \quad (3.2.7)$$

όπου

$q$  είναι το κατανεμημένο φορτίο επιφάνειας

$w$  είναι η κατακόρυφη παραμόρφωση

$k$  και  $t_1$  είναι οι δύο χαρακτηριστικές παράμετροι της θεμελίωσης και μπορούν να εκφραστούν βάσει των ελαστικών σταθερών των υλικών και των γεωμετρικών ιδιοτήτων του στρώματος θεμελίωσης (Vlasov και Leontev, 1966). Στην Εξίσωση (3.2.7), αυτές οι παράμετροι μπορούν να ληφθούν ως

$$k = \frac{E_0 B}{1-\nu_0^2} \int_0^H \psi^2(z) dz \quad (3.2.8)$$

$$t_1 = \frac{E_0 B}{1-\nu_0^2} \int_0^H \psi^2(z) dz \quad (3.2.9)$$

όπου,

$B$  = το πλάτος της θεμελίωσης,

τα  $E_0, \nu_0$  είναι τα  $E_s, \nu_s$  του εδάφους, αντίστοιχα, ώστε να χρησιμοποιηθούν σε προβλήματα ελαστικά εδραζόμενων δοκών. Ωστόσο  $E_0 = \frac{E_s}{1-\nu_s^2}$  και  $\nu_0 = \frac{\nu_s}{1-\nu_s}$  για πλάκες και προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης.

Στην ανωτέρω εξίσωση  $\psi(z)$  είναι η συνάρτηση της κατακόρυφης μετατόπισης ως προς το βάθος και κατά προτίμηση μια συνάρτηση με  $\psi(0) = 1$  και εύκολη στην ολοκλήρωση (Σχήμα 1). Η συνάρτηση  $\psi(z)$  μπορεί να επιλεγεί ως  $e^{-\beta z}$  για άπειρα στρώματα εδάφους ή στρώματα με μεγάλο βάθος, όπου  $\beta$  είναι η παράμετρος του εδάφους. Αυτή μπορεί να πάρει τιμές μεταξύ 0.5 και 2.5, όπου η τιμή 0.5 αφορά αργιλώδη εδάφη και οι τιμές 1.0 έως 2.5

αμμώδη εδάφη. Η  $\psi(z)$  μπορεί να επιλεγεί ως  $\frac{H-z}{H}$ , μειούμενη γραμμικά για εδαφικά στρώματα πεπερασμένου βάθους.

Σύγκριση των Εξισώσεων (3.2.7) με τις Εξισώσεις (3.2.2) και (3.2.4), αποκαλύπτει ότι το μοντέλο αυτό είναι ισοδύναμο με εκείνα που προτείνονται από τους Filonenko-Borodich, Pasternak και Wiegardt. Προσεκτική εξέταση των προαναφερθέντων μοντέλων αποκαλύπτει ότι αυτές οι μέθοδοι δεν επαρκούν για άμεση εφαρμογή σε πρακτικά προβλήματα, είτε επειδή η ανάλυση είναι πολύπλοκη, είτε επειδή οι παραδοχές για τα φυσικά μέσα θεμελίωσης δεν είναι επαρκώς τεκμηριωμένες και συχνά οδηγούν σε ορισμένες ασυνέπειες.

Προκειμένου να ξεπεραστούν οι παραπάνω ασυνέπειες αναφορικά με τη συμπεριφορά του εδάφους, ο Kameswara Rao (1969, 1971) τροποποίησε το μοντέλο Vlasov και Leontev ώστε να υπολογίσει τις οριζόντιες μετατοπίσεις στην ελαστική έδραση και οι βασικές εξισώσεις παρουσιάστηκαν χρησιμοποιώντας τη γενική μέθοδο μεταβολών του Vlasov. Το προκύπτον μοντέλο είναι πολύ κοντά στην υπόθεση του ελαστικού συνεχούς μέσου, αλλά και εύκολο για τη μαθηματική ανάλυση, καθιστώντας το χρήσιμο για την επίλυση πολλών προβλημάτων πρακτικής σημασίας.

# ΜΟΝΤΕΛΟ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗΣ ΚΑΤΑ WINKLER

Ο Winkler μελέτησε αρχικά τη δοκό σε ελαστικά ελατήρια. Το μοντέλο που ανέπτυξε είναι γνωστό ως μοντέλο θεμελίωσης Winkler. Αυτό το μοντέλο είναι το παλαιότερο και απλούστερο ελαστικό μοντέλο θεμελίωσης και σύμφωνα με αυτό η δοκός μελετάται σύμφωνα με τη θεωρία της κάμψης. Σε αυτό το μοντέλο θεωρείται ότι η μετατόπιση σε οποιοδήποτε σημείο στην επιφάνεια της θεμελίωσης είναι άμεση, ανάλογη προς την πίεση της επιφάνειας θεμελίωσης, που ενεργεί στο σημείο αυτό και είναι ανεξάρτητη από την πίεση που ασκείται σε άλλες θέσεις. Το μοντέλο θεμελίωσης Winkler είναι χρήσιμο για τον προσδιορισμό γρήγορων λύσεων σε πιο περίπλοκα προβλήματα αλληλεπίδρασης εδάφους και κατασκευής. Το μοντέλο θεμελίωσης Winkler βρήκε εφαρμογή στην ανάλυση προβλημάτων αλληλεπίδρασης εδάφους και δομικών στοιχείων. Ο Winkler πρότεινε μια πολύ δημοφιλή μέθοδο μοντελοποίησης αυτής της αλληλεπίδρασης εδάφους και ανωδομής, όπου, οι κατακόρυφη μετακίνηση του εδάφους  $w$  σε κάποιο σημείο θεωρείται εξαρτώμενη μόνο από την εφαρμοζόμενη πίεση επαφής  $p$  στο σημείο της προσομοιωμένης ελαστικής βάσης και μιας σταθεράς αναλογικότητας,  $k$ .

Μία από τις σημαντικότερες ελλείψεις του μοντέλου Winkler είναι ότι εμφανίζεται μια ασυνέχεια μετατόπισης μεταξύ του φορτιζόμενου και του αφόρτιστου τμήματος της επιφάνειας θεμελίωσης, αφού στην πραγματικότητα δεν εμφανίζεται κάποια τέτοια ασυνέχεια στην επιφάνεια του εδάφους.

Μετά την ανασκόπηση των διαφόρων μοντέλων θεμελίωσης, που περιγράφονται στην ενότητα 3.2, φαίνεται ότι το μοντέλο Winkler είναι το απλούστερο τόσο ως προς τον τρόπο έκφρασης της αντίδρασης του εδάφους στη διεπιφάνεια με το έδαφος, όσο ως προς την ανάλυση της προκύπτουσας αλληλεπίδρασης εδάφους-κατασκευής (3.1.11), αν και βέβαια έχει εγγενείς ελλείψεις, όπως περιγράφεται στην Ενότητα 3.2. Παρά ταύτα, όμως, διαθέτει ένα πλεονέκτημα, ότι η παράμετρος του εδάφους που χρησιμοποιείται για την έκφραση της αντίδρασης του εδάφους, δηλαδή  $k$  (Εξίσωση 3.2.1) και αναφέρεται ως σταθερά ελατηρίου των εξιδανικευμένων ελατηρίων του μοντέλου Winkler (Σχήμα 4), προσδιορίζεται σχετικά εύκολα με εργαστηριακά πειράματα ή και μετρήσεις στο πεδίο (ενότητα 4.1). Έτσι, το μοντέλο Winkler χρησιμοποιείται εν γένει σε μεγάλο μέρος της ανάλυσης και του σχεδιασμού. Χρησιμοποιώντας το μοντέλο Winkler για την απεικόνιση του εδάφους και την Εξίσωση (3.2.1) για την αντίδραση του εδάφους  $q$ , η εξίσωση αλληλεπίδρασης εδάφους-κατασκευής για δοκό με ελαστική θεμελίωση (Εξίσωση 3.1.1.1) μπορεί να εκφραστεί ως:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + kw(x) = p(x) \quad (4.1)$$

στην οποία  $k$  είναι η σταθερά του ελατηρίου ή σταθερά του εδάφους, η οποία αξιολογείται με κατάλληλες εργαστηριακές και επιτόπιες δοκιμές.

#### **4.1 Σταθερά ελατηρίων στο εδαφικό μοντέλο του Winkler (Συντελεστής ελαστικής ομοιόμορφης συμπίεσης)**

Η ιδέα της μοντελοποίησης του εδάφους ως ελαστικού μέσου εισήχθη για πρώτη φορά από τον Winkler και για αυτό η θεώρηση αυτή αναφέρεται πλέον ως μοντέλο εδάφους Winkler. Η αντίδραση του υποβάθρου σε οποιοδήποτε σημείο κατά μήκος της δοκού θεωρείται ευθέως ανάλογη της κατακόρυφης παραμόρφωσης της δοκού σε εκείνο το σημείο. Με άλλα λόγια, το έδαφος υποτίθεται ότι είναι ελαστικό και υπακούει στο νόμο του Hooke, οπότε το μέτρο της αντίδρασης του υποβάθρου  $k_s$  για το έδαφος θα δίνεται ως

$$k_s = \frac{q}{w} = c_u \quad (4.1.1)$$

όπου

$q$  είναι η πίεση έδρασης σε ένα σημείο κατά μήκος της δοκού

$w$  είναι η κατακόρυφη μετατόπιση της δοκού στο σημείο αυτό.

$k_s$  αναφέρεται επίσης ως ο συντελεστής της ελαστικής ομοιόμορφης συμπίεσης,  $c_u$ .

Η κύρια δυσκολία στην εφαρμογή του μοντέλου εδάφους κατά Winkler είναι η ποσοτικοποίηση του συντελεστή αντίδρασης υποβάθρου  $k_s$ , που θα χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση, καθώς το έδαφος είναι ένα υλικό ευμετάβλητο. Στην πράξη, το σκεύασμα μπορεί να βρεθεί μόνο με τη διεξαγωγή επιτόπιων δοκιμών φορτίου πλάκας ή με τη σύνδεση με κάποιο τρόπο με τα ελαστικά χαρακτηριστικά του εδάφους.

Με βάση τις θεωρητικές και πειραματικές έρευνες διαφόρων τύπων εδάφους, οι συνιστώμενες αριθμητικές τιμές του συντελεστή αντίδρασης υποβάθρου  $k_s$  κυμαίνονται εν γένει μεταξύ 1000 (kN / m<sup>3</sup>) και 100.000 (kN / m<sup>3</sup>), ανάλογα με τον τύπο και τη συμπίεση του εδάφους.

**Πίνακας 1** Ενδεικτικό εύρος τιμών του συντελεστή αντίδρασης υποβάθρου  $k_s$

Εύρος του συντελεστή αντίδρασης υποβάθρου $k_s$	
Έδαφος	kN/m <sup>3</sup>
Χαλαρή Άμμος	4800-16000
Μεσαίας Συμπύκνωσης Άμμος	9600-80000
Πυκνή Άμμος	64000-128000
Αργιλώδης Μεσαίας Συμπύκνωσης Άμμος	32000-80000
Λασπώδης Μεσαίας Συμπύκνωσης Άμμος	24000-48000

## 4.2 Ευαισθησία των αντιδράσεων στο $k_s$

Στην περίπτωση, που χρησιμοποιείται η δοκός σε ελαστική θεμελίωση, για να αναλυθούν γεωτεχνικά προβλήματα, είναι επιτακτική ανάγκη να δοκιμασθεί ένα εύρος τιμών για το μέτρο της αντίδρασης υποβάθρου  $k_s$  και να διαπιστωθεί η ευαισθησία της παραμέτρου του εδάφους στα πλαίσια της ανάλυσης. Συνήθως, οι προκύπτουσες ροπές κάμψης και οι διατμητικές δυνάμεις δεν είναι ευαίσθητες σε μεταβολές της τιμής του  $k_s$ .

### 4.3 Λόγος Poisson του εδαφικού μέσου

Ο λόγος του Poisson μπορεί να εκτιμηθεί μέσω απλών δοκιμών του εδάφους, που όμως μπορεί να οδηγήσουν σε μεγάλα σφάλματα. Έχει παρατηρηθεί ότι γενικά ο λόγος Poisson κυμαίνεται μεταξύ 0.25 και 0.35 για μη συνεκτικά εδάφη, ενώ για συνεκτικά εδάφη παίρνει τιμές 0.35 έως 0.45. Ως εκ τούτου, ελλείψει οποιωνδήποτε δεδομένων από δοκιμές, ο λόγος Poisson μπορεί να ληφθεί 0.3 για μη συνεκτικά εδάφη και 0.4 για συνεκτικά, χωρίς να προκαλείται σημαντικό σφάλμα στην ανάλυση και το σχεδιασμό θεμελιώσεων (Kameswara Rao, 2000). Αυτό εξηγείται από μελέτες που έδειξαν ότι η απόκριση του συστήματος εδάφους και θεμελίωσης δεν παρουσιάζει ιδιαίτερη ευαισθησία σε μεταβολές της τιμής του λόγου Poisson.



## ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

### 5.1 Ιστορική αναδρομή μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων

Το τέλος του 19<sup>ου</sup> αιώνα βρήκε τη μαθηματική θεωρία της ελαστικότητας πλήρως θεμελιωμένη. Όμως, τα προβλήματα στα οποία αυτή μπορούσε να δώσει αναλυτική λύση ήταν ελάχιστα. Έτσι στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα το βάρος έπεσε στις προσεγγιστικές μεθόδους. Όμως και αυτές δεν μπορούσαν να δώσουν απάντηση στα σύνθετα προβλήματα λόγω της έλλειψης υπολογιστικών δυνατοτήτων. Την ίδια εποχή οι ερευνητές έστρεψαν την προσοχή τους σε κατασκευές, που η μορφή τους διευκόλυνε την απλοποίηση του γενικού προβλήματος της ελαστικότητας. Μια τέτοια κατασκευή, που έχει και πολύ μεγάλο ενδιαφέρον για τον κατασκευαστή μηχανικό είναι οι ραβδωτές κατασκευές. Οι ερευνητές στον τομέα αυτόν κατόρθωσαν να βρουν τις σχέσεις εκείνες που συνδέουν τις γενικευμένες μετατοπίσεις στα άκρα των ράβδων με τις αντίστοιχες δυνάμεις στα σημεία αυτά. Η ισορροπία των δυνάμεων που επενεργούν στους κόμβους και το συμβιβαστό των μετατοπίσεων δίνουν ένα σύστημα εξισώσεων, που η επίλυσή του παρέχει τη λύση στο πρόβλημα των ραβδωτών κατασκευών.

Το 1941 ο Hrenikoff είχε παρουσιάσει μια πρόδρομη διατύπωση της μεθόδου με την αντικατάσταση ενός επίπεδου ελαστικού μέσου με ένα σύνολο ράβδων και δοκών. Η ιδέα της αντικατάστασης μιας συνεχούς συνάρτησης με συναρτήσεις κατά διαστήματα συνεχείς μπορεί να αναζητηθεί στην εργασία του Courant το 1943, όπου χρησιμοποιήθηκε ένα σύνολο στοιχείων και η αρχή της ελάχιστης τιμής της συνολικής δυναμικής ενέργειας για να μελετηθεί ένα πρόβλημα στρέψεως κατά St. Venant. Όμως η διατύπωση της μεθόδου των πεπερα-

σμένων στοιχείων έμελλε να γίνει λίγο καιρό αργότερα. Το 1944 ο Ιωάννης Αργύρης, ο οποίος εργαζόταν ως ερευνητής στο Royal Aeronautical Society της Βρετανίας, καταπιάστηκε με το πρόβλημα αυτό καθώς όλες οι γνωστές μέθοδοι αναλύσεως αδυνατούσαν να προσομοιώσουν με αξιοπιστία την κεκλιμένη γεωμετρία των πτερύγων. Μετά από εξαντλητική διανοητική προσπάθεια, επινόησε τη χρήση των τριγωνικών στοιχείων και πραγματοποίησε την πρώτη εφαρμογή στους ηλεκτρομηχανικούς υπολογιστές της εποχής με μέγιστη ικανότητα χειρισμού αλγεβρικών συστημάτων μέχρι 64 αγνώστους. Αυτή ήταν η στιγμή της γέννησης της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Δώδεκα χρόνια αργότερα θα ακολουθήσει η συμβολή από την άλλη πλευρά του Ατλαντικού με την εργασία των Turner, Clough, Martin και Topp.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων στην τυπική της διατύπωση παρουσιάζεται το 1960 σε μία μονογραφία των Αργύρη και Kelsey και στην εργασία του Clough. Από την εποχή εκείνη και μετά, η ανάπτυξη της μεθόδου και η χρησιμοποίησή της για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων του μηχανικού, συμβαδίζει με την τεχνολογία των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Κι αυτό γιατί με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων καταλήγουμε σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων που το πλήθος του ταυτίζεται με το πλήθος των βαθμών ελευθερίας του προβλήματος και το οποίο μπορεί να επιλυθεί μόνο με τη βοήθεια Η/Υ. Η εξέλιξη των Η/Υ με τις ολοένα μεγαλύτερες δυνατότητες διαχείρισης μεγάλου όγκου δεδομένων, αλλά και με την αύξηση ταχύτητας εκτελέσεως των αριθμητικών πράξεων, κατέστησε εφικτή την επίλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων σύνθετων προβλημάτων του μηχανικού, τα οποία θεωρούνταν απροσπέλαστα πριν μερικά χρόνια. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αν και επινοήθηκε και εφαρμόστηκε για την στατική ανάλυση φορέων, έχει καθολικότερη εφαρμογή σε μια ευρύτερη κατηγορία προβλημάτων του μηχανικού όπως για παράδειγμα στη ρευστομηχανική, στη μεταφορά θερμότητας, στην ακουστική, στον ηλεκτρομαγνητισμό, στην εμβιομηχανική, κ.λπ.

Από το 1960 έως τις μέρες μας, η βιβλιογραφία στην επιστημονική περιοχή των πεπερασμένων στοιχείων έχει αυξηθεί με γεωμετρική πρόοδο. Αξίζει να αναφερθεί ότι υπάρχει μία πλειάδα έγκυρων διεθνών περιοδικών, στα οποία δημοσιεύονται επιστημονικά άρθρα με αποκλειστικό αντικείμενο τη θεωρία και τις εφαρμογές αυτής της μεθόδου. Τα πεπερασμένα στοιχεία, αποτελούν επέκταση της μητρικής ανάλυσης των κατασκευών στις μη ραβδωτές, δηλαδή στις ολόσωμες κατασκευές.

## 5.2 Ανάπτυξη μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων

Υπάρχουν διαφορετικοί μέθοδοι, ή διαφορετικές φιλοσοφίες, για την ανάπτυξη της θεωρίας των πεπερασμένων στοιχείων.

**Η ενεργειακή μέθοδος**, η οποία βασίζεται στην ολική δυναμική ενέργεια του σώματος ή της κατασκευής (total potential energy), μαζί με την μέθοδο των μετατοπίσεων. Η μέθοδος αυτή είναι απλή και δεν απαιτεί την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων.

Επίσης, σε προβλήματα μεταφοράς θερμότητας χρησιμοποιείται η ενεργειακή μέθοδος, όταν υπάρχει η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας, η οποία μετονομάζεται και λέγεται συναρτησιακή ενέργεια (functional).

Η ενεργειακή μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί, εάν υπάρχει δυνατότητα να εκφραστεί η ολική δυναμική ενέργεια του προβλήματος στα στερεά ή η functional στα προβλήματα της μεταφοράς θερμότητας. Αν δεν γνωρίζουμε την ολική δυναμική ενέργεια, τότε χρησιμοποιούνται άλλοι μέθοδοι, όπως η μέθοδος του Galerkin.

**Η μέθοδος Galerkin** ανήκει στην γενική κατηγορία των μεθόδων των σταθμισμένων υπολοίπων (methods of weighted residuals). Η μέθοδος αυτή είναι γενική, πολύ δυνατή και εφαρμόζεται απ' ευθείας στην επίλυση των διαφορικών εξισώσεων.

Ο τρόπος επίλυσης προβλημάτων με την χρήση των πεπερασμένων στοιχείων είναι σχεδόν ο ίδιος σε όλες τις περιοχές που εφαρμόζεται. Για παράδειγμα για την επίλυση μιας κατασκευής σχεδιάζουμε πρώτα την κατασκευή κατόπιν την χωρίζουμε σε μικρά γεωμετρικά σχήματα π.χ. τρίγωνα ή τετράπλευρα, τα οποία λέγονται πεπερασμένα στοιχεία. Οι ιδιότητες του υλικού και οι εξισώσεις που χαρακτηρίζουν το υλικό εξετάζονται στα πεπερασμένα στοιχεία σαν συνάρτηση των αγνώστων μετατοπίσεων στις κορυφές του πεπερασμένου στοιχείου (μέθοδος μετατοπίσεων). Λαμβάνουμε υπόψη τις οριακές συνθήκες καθώς και τα φορτία (μηχανικά και θερμικά) και καταλήγουμε στις εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής. Η λύση του συστήματος των εξισώσεων ως προς τους αγνώστους, οι οποίοι είναι οι κομβικές μετατοπίσεις είναι η ζητούμενη προσεγγιστική λύση. Γνωστών των κομβικών μετατοπίσεων υπολογίζονται στα διάφορα σημεία της κατασκευής οι τάσεις ( $\sigma$ ), οι παραμορφώσεις ( $\epsilon$ ) και οι αντιδράσεις ( $R$ ) των στηρίξεων.

Στην παρούσα διπλωματική χρησιμοποιείται η δυναμική ενέργεια (potential energy) του συστήματος και η μέθοδος των μετατοπίσεων για την ανάπτυξη της μεθόδου των πεπε-

ρασμένων στοιχείων. Η ανάπτυξη της μεθόδου εφαρμόζεται στα στερεά και στις κατασκευές. Στην εργασία αυτή το μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων βασίζεται στις παραδοχές της ελαστικής και γραμμικής συμπεριφοράς των υλικών και των μικρών μετατοπίσεων και στροφών της κατασκευής.

## ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΟΚΩΝ ΕΠΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΕΛΑΦΟΥΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

### 6.1 Θεωρία δοκού τύπου Euler-Bernoulli

Βασικές αρχές και παραδοχές για την προσομοίωση της δοκού είναι οι ακόλουθες:

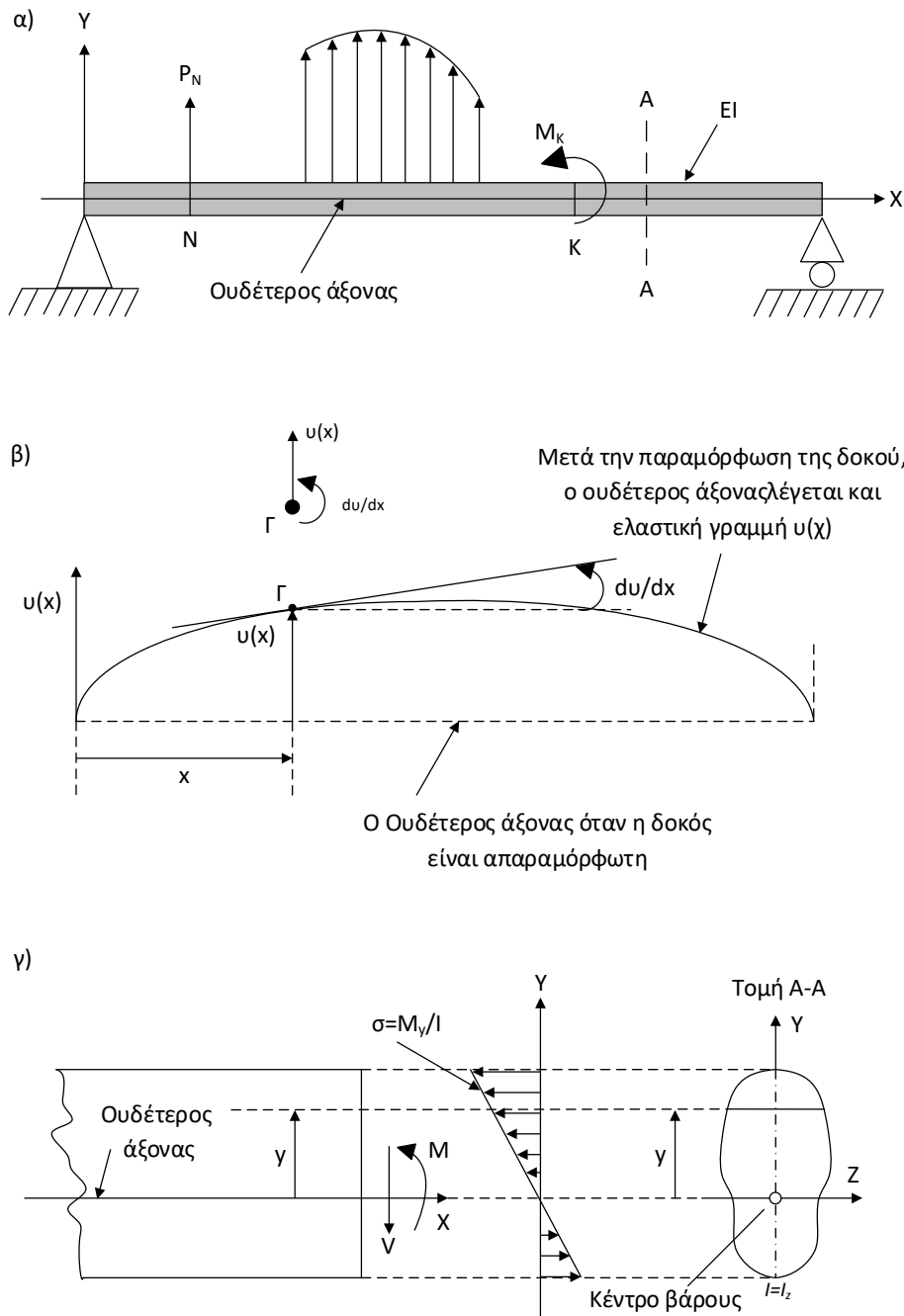
- i. Η διατομή της δοκού έχει ένα άξονα συμμετρίας που περιέχεται στο επίπεδο φόρτισης
- ii. Όλα τα φορτία ενεργούν κάθετα στο άξονα της δοκού και βρίσκονται μέσα στο επίπεδο φόρτισης στον οποίον περιέχεται ο άξονας συμμετρίας της δοκού
- iii. Κάθε διατομή επίπεδη και κάθετη στον άξονα της δοκού πριν και μετά την παραμόρφωση παραμένει επίπεδη και κάθετη
- iv. Οι αναπτυσσόμενες τάσεις είναι μικρότερες από το όριο αναλογίας του υλικού και
- v. Οι παραμορφώσεις είναι μικρές

Μια τυπική δοκός φέροντας διάφορα φορτία δίνεται στο Σχήμα 8(α). Από την θεωρία της δοκού για ισότροπο υλικό θα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (6.1.1)$$

$$\sigma = \frac{M}{I}y \quad (6.1.2)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad \text{Εξίσωση της ελαστικής γραμμής} \quad (6.1.3)$$



**Σχήμα 8.** (α) φορτία δοκού, (β) Ελαστική γραμμή  $u(x)$ ,  
(γ) Διανομή των τάσεων  $\sigma = My/I$

Στις τελευταίες σχέσεις οι παράμετροι είναι:

$v$  το βέλος ή η κατακόρυφη μετατόπιση ενός σημείου της ελαστικής γραμμής Σχήμα 8(β). Ο ουδέτερος άξονας περνά από το κέντρο βάρους της διατομής Σχήμα 8(γ).

$M$  είναι η καμπτική ροπή.

$E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας.

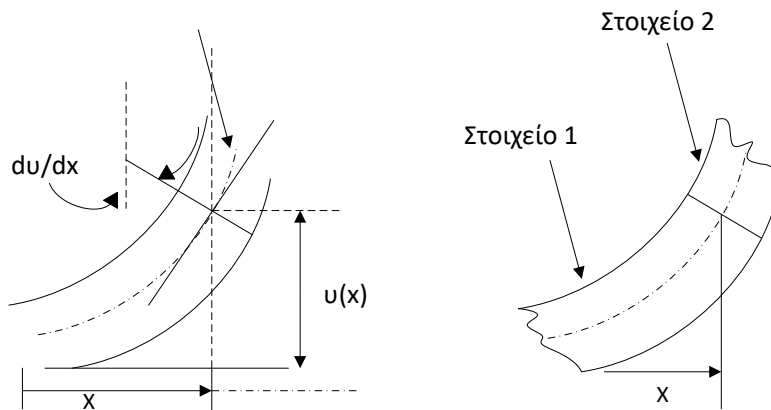
$I=I_Z$  είναι η ροπή αδρανείας της διατομής ως προς τον άξονα  $Z$  που είναι και η ουδέτερη γραμμή, Σχήμα 8(γ).

$\sigma$  είναι η ορθή τάση, Σχήμα 8(γ).

$y$  είναι η απόσταση από την ουδέτερη γραμμή, Σχήμα 8(γ).

$\epsilon$  είναι η παραμόρφωση (normal strain).

Στο Σχήμα 9(α) φαίνεται μια δοκός πριν και μετά την παραμόρφωση με βέλος  $u$  και την κλίση ή στροφή  $du/dx$ . Θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν ότι μεταξύ δύο γειτονικών στοιχείων της δοκού πρέπει να υπάρχει συνέχεια στις μετατοπίσεις (displacements continuity) και αυτό εξασφαλίζεται, όταν στην κοινή περιοχή των δύο στοιχείων υπάρχει συνέχεια στο βέλος  $u$  και στην κλίση  $du/dx$ . Σχήμα 9(β).



α) Παραμόρφωση της διατομής δοκού

β) Συνθήκη συνέχειας μεταξύ δύο στοιχείων  
(Displacement continuity)  $u|_{x^-} = u|_{x^+}$  και  
 $(du/dx)|_{x^-} = (du/dx)|_{x^+}$

**Σχήμα 9.** (α) Διατομή της δοκού πριν και μετά την φόρτιση,  
(β) Συνθήκη συνέχειας μεταξύ δύο στοιχείων

## 6.2 Δυναμική ενέργεια δοκού

Η ενέργεια παραμόρφωσης  $U$  για ένα στοιχειώδες μήκος  $dx$  της δοκού είναι:

$$dU = \frac{1}{2} \int_A \sigma \varepsilon dA dx = \frac{1}{2} \int_A \sigma \left( \frac{\sigma}{E} \right) dA dx$$

Από την εξίσωση(6.1.2), η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$dU = \frac{1}{2} \left( \frac{M^2}{EI^2} \int_A y^2 dA \right) dx = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2} EI \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx \quad (6.2.1)$$

όπου I είναι η ροπή αδρανείας της διατομής της δοκού

$$I = \int_A y^2 dA$$

Η ολική ενέργεια για το συνολικό μήκος L της δοκού παίρνει τη μορφή

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^L qv dx - \sum_N P_N v_N - \sum_K M_K q_K \quad (6.2.2)$$

όπου

$\frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx$  εκφράζει την εσωτερική ενέργεια της παραμόρφωσης

$\int_0^L qv dx$  είναι το έργο του συνεχούς φορτίου q

$\sum_N P_N v_N$  είναι το έργο του φορτίου  $P_N$ , και

$\sum_K M_K q_K$  το έργο της ροπής  $M_K$ .

### 6.3 Υπολογισμός του μητρώου δυσκαμψίας του στοιχείου δοκού

Το πεπερασμένο στοιχείο 1 της δοκού, ορίζεται από τους κόμβους 1 και 2, Σχήμα 10(α)

Ο κάθε κόμβος έχει δυο βαθμούς ελευθερίας:

το βέλος ή κατακόρυφη μετατόπιση v και

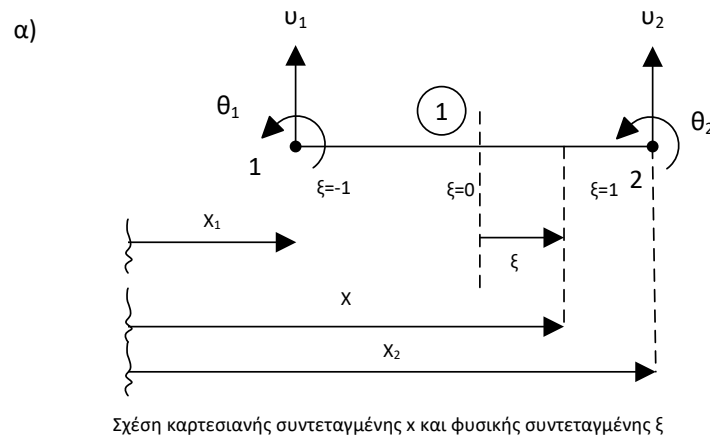
την κλίση ή στροφή  $\frac{dv}{dx}$ .

Λόγω της παραδοχής ότι οι παραμορφώσεις της δοκού είναι μικρές, θεωρούμε ότι η κλίση  $\frac{dv}{dx}$  είναι ίση με την στροφή  $\theta$ , δηλαδή θα είναι :

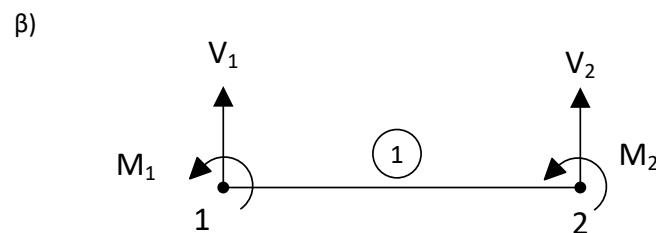
$$\frac{dv}{dx} = \theta \quad \text{κλίση ή στροφή}$$



Το στοιχείο έχει τέσσερις βαθμούς ελευθέριας, που είναι τα βέλη και οι στροφές  $u_1, \theta_1, u_2, \theta_2$  όπως φαίνεται στο Σχήμα 10(α).



$$X = X_1 \frac{1-\xi}{2} + X_2 \frac{1+\xi}{2}$$



**Σχήμα 10.** Το πεπερασμένο στοιχείο 1 έχει: (α) τις κομβικές μετατοπίσεις και στροφές  $u_1, \theta_1, u_2, \theta_2$  και (β) τις κομβικές δυνάμεις και ροπές  $V_1, M_1, V_2, M_2$ . Η σύμβαση των θετικών φορών για όλα τα μεγέθη είναι αυτή του σχήματος.

Το διάνυσμα των κομβικών μετατοπίσεων (Σχήμα 10 α) είναι:

$$d = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (6.3.2)$$

και το αντίστοιχο διάνυσμα των κομβικών δυνάμεων (Σχήμα 10 β) είναι:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (6.3.3)$$

Ως τοπική συντεταγμένη ορίζεται η φυσική συντεταγμένη  $\xi$ , όπου είναι  $-1 \leq \xi \leq 1$ , (Σχήμα 10). Για να ικανοποιήσουμε τη συνθήκη συνέχειας μεταξύ δύο γειτονικών στοιχείων, ορίζουμε τις

συναρτήσεις σχήματος ή συναρτήσεις παρεμβολής του Hermite, που είναι πολυώνυμα τρίτου βαθμού της μορφής:

$$H_i = a_i + b_i \xi + c_i \xi^2 + d_i \xi^3 \quad \text{όπου } i=1,2,3,4 \quad (6.3.4\alpha)$$

Οι σταθερές  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  και  $d_i$  για  $i=1,2,3,4$  θα προσδιορισθούν στην συνέχεια.

Η παράγωγος της  $H_i$  ως προς  $\xi$  είναι:

$$\frac{dH_i}{d\xi} = b_i + 2c_i \xi + 3d_i \xi^2 \quad \text{όπου } i=1,2,3,4 \quad (6.3.4\beta)$$

Το βέλος  $v$  σε ένα τυχαίο  $\xi$  του στοιχείου 1-2, ορίζεται με την χρήση των συναρτήσεων σχήματος του Hermite:

$$v(\xi) = H_1 v_1 + H_2 \left( \frac{dv}{d\xi} \right)_1 + H_3 v_2 + H_4 \left( \frac{dv}{d\xi} \right)_2 \quad (6.3.5\alpha)$$

Η παράγωγος της (6.3.5α) ως προς  $\xi$  είναι :

$$\frac{dv}{d\xi} = H_{1,\xi} v_1 + H_{2,\xi} \left( \frac{dv}{d\xi} \right)_1 + H_{3,\xi} v_2 + H_{4,\xi} \left( \frac{dv}{d\xi} \right)_2 \quad (6.3.5\beta)$$

Σημειώνεται ότι συχνά χρησιμοποιείται για τις παραγωγίσεις ο συμβολισμός :  $\frac{\partial H_k}{\partial \xi} = H_{k,\xi}$

Για να εξασφαλισθεί η συνέχεια στους κόμβους των στοιχείων, θα πρέπει να υπάρχει συνέχεια των κομβικών μετατοπίσεων και των κομβικών κλίσεων (στροφών). Για τους κόμβους 1 και 2 του στοιχείου έχουμε διαμορφώνεται ο επόμενος πίνακας.

## Πίνακας 2

Κόμβος 1 $\xi=-1$	$u(-1)=u_1$	$H_1=1, H_2=H_3=H_4=0$
	$\left( \frac{dv}{d\xi} \right)_{\xi=-1} = \left( \frac{dv}{d\xi} \right)_2$	$H_{2,\xi}=1, H_{1,\xi}=H_{3,\xi}=H_{4,\xi}=0$
Κόμβος 2 $\xi=+1$	$u(+1)=u_2$	$H_3=1, H_1=H_2=H_4=0$
	$\left( \frac{dv}{d\xi} \right)_{\xi=+1} = \left( \frac{dv}{d\xi} \right)_1$	$H_{4,\xi}=1, H_{1,\xi}=H_{2,\xi}=H_{3,\xi}=0$

Από την τρίτη στήλη του παραπάνω πίνακα και από τις εξισώσεις (6.3.4α) και (6.3.4β) καταλήγουμε σε ένα σύστημα εξισώσεων  $16 \times 16$ , με αγνώστους τους 16 συντελεστές  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  και  $d_i$  για  $i=1, 2, 3, 4$ .

Από την λύση του συστήματος των εξισώσεων τελικά έχουμε:

$$\begin{array}{llll} a_1 = \frac{1}{2} & b_1 = -\frac{3}{4} & c_1 = 0 & d_1 = \frac{1}{4} \\ a_2 = \frac{1}{4} & b_2 = -\frac{1}{4} & c_2 = -\frac{1}{4} & d_2 = \frac{1}{4} \\ a_3 = \frac{2}{4} & b_3 = \frac{3}{4} & c_3 = 0 & d_3 = -\frac{1}{4} \\ a_4 = -\frac{1}{4} & b_4 = -\frac{1}{2} & c_4 = \frac{1}{2} & d_4 = \frac{1}{4} \end{array}$$

Αντικαθιστούμε τις παραπάνω σταθερές στην εξίσωση (6.3.4α) και έχουμε:

$$H_1 = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi) \quad (6.3.6\alpha)$$

$$H_2 = \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(\xi + 1) \quad (6.3.6\beta)$$

$$H_3 = \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi) \quad (6.3.6\gamma)$$

$$H_4 = \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(\xi - 1) \quad (6.3.6\delta)$$

Η γραφική παράσταση των συντελεστών  $H_i$  φαίνεται στο Σχήμα 11.

Στο πεπερασμένο στοιχείο 1,2 η φυσική συντεταγμένη  $\xi$  και η καρτεσιανή συντεταγμένη  $x$  Σχήμα 10(α), συνδέονται με την σχέση:

$$x = \frac{1-\xi}{2}x_1 + \frac{1+\xi}{2}x_2 \quad \text{όπου } -1 \leq \xi \leq 1 \quad (6.3.7\alpha)$$

η οποία μετά από πράξεις γίνεται:

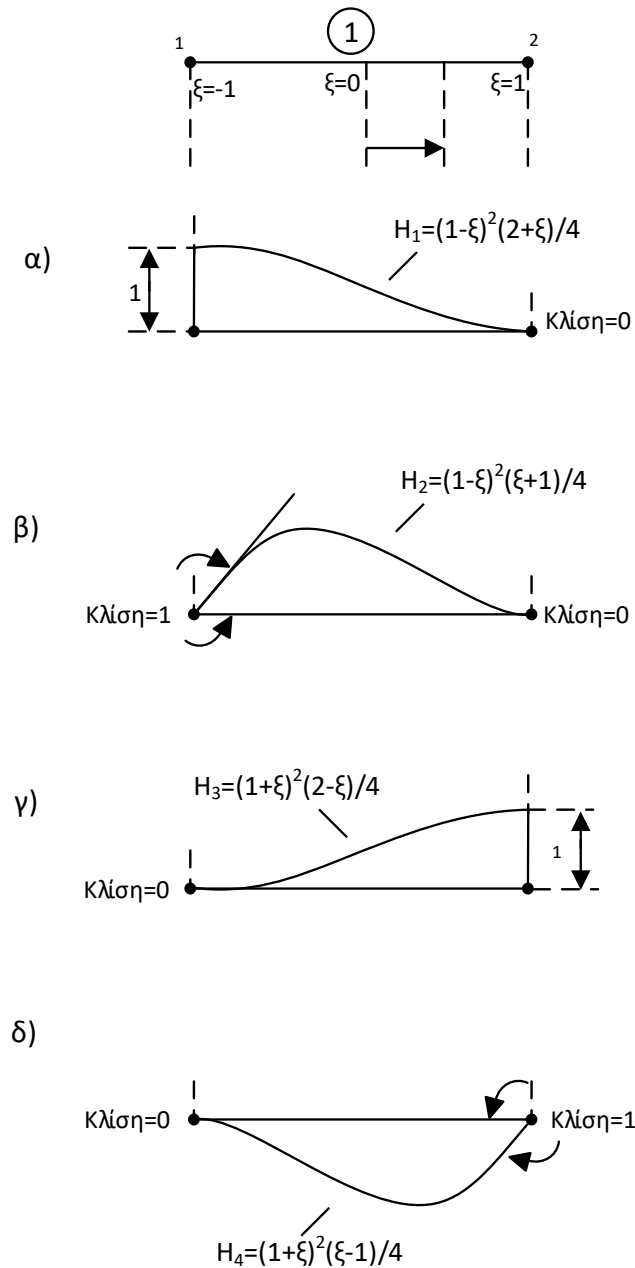
$$x = \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_2-x_1}{2}\xi = \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{L}{2}\xi \quad (6.3.7\beta)$$

όπου

$L = x_2 - x_1$  το μήκος του πεπερασμένου στοιχείου

Παραγωγίζουμε το  $x$  της εξίσωσης (6.3.7β) ως προς  $\xi$  και έχουμε

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{L}{2} \quad (6.3.8)$$



**Σχήμα 11.** Συναρτήσεις μορφής ή συναρτήσεις παρεμβολής του Hermite

Αυτό αξιοποιείται στην παραγωγή των μετατοπίσεων, όπως φαίνεται στη σχέση:

$$\frac{dv}{d\xi} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{d\xi} = \frac{dv}{dx} \frac{L}{2} = \theta \frac{L}{2} \quad (6.3.9)$$

όπου

$$\theta = \frac{dv}{dx}$$

Αντικαθιστούμε όπου  $\frac{dv}{d\xi} = \theta \frac{L}{2}$  στην εξίσωση (6.3.5α) και έχουμε:

$$\begin{aligned} u &= H_1 v_1 + H_2 \left( \frac{dv}{d\xi} \right)_1 + H_3 v_2 + H_4 \left( \frac{dv}{d\xi} \right)_2 \\ &= H_1 v_1 + H_2 \frac{L}{2} \theta_1 + H_3 v_2 + H_4 \frac{L}{2} \theta_2 \\ &= \left[ H_1 \quad \frac{L}{2} H_2 \quad H_3 \quad \frac{L}{2} H_4 \right] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{H} \mathbf{d} \end{aligned} \quad (6.3.10\alpha)$$

όπου

$$\mathbf{H} = \left[ H_1 \quad \frac{L}{2} H_2 \quad H_3 \quad \frac{L}{2} H_4 \right] \quad (6.3.11\alpha)$$

Η (6.3.11α) λόγω της (6.3.6) γίνεται:

$$\mathbf{H} = \left[ \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \quad \frac{L}{8}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \quad \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \quad \frac{L}{8}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \right] \quad (6.3.11\beta)$$

Η ολική ενέργεια παραμόρφωσης του στοιχείου είναι:

$$U = \frac{1}{2} EI \int \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx \quad (6.3.12)$$

Στην Εξίσωση (6.3.9) παραγωγίζουμε την παράγωγο  $\frac{dv}{d\xi}$  πάλι ως προς  $\xi$  και έχουμε

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} \left( \frac{dv}{d\xi} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{dv}{d\xi} \right) \frac{dx}{d\xi} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dv}{dx} \frac{L}{2} \right) = \frac{L^2}{4} \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (6.3.13)$$

από την οποία προκύπτει

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{4}{L^2} \frac{d^2 v}{d\xi^2} = \frac{4}{L^2} \frac{d^2 (\mathbf{H} \mathbf{d})}{d\xi^2} = \frac{4}{L^2} \frac{d^2 \mathbf{H}}{d\xi^2} \mathbf{d} \quad (6.3.14)$$

και θα είναι

$$\left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 = \frac{16}{L^4} \left( \frac{d^2 \mathbf{H}}{d\xi^2} \mathbf{d} \right)^2 = \mathbf{d}^T \frac{16}{L^4} \left( \frac{d^2 \mathbf{H}}{d\xi^2} \right)^T \frac{d^2 \mathbf{H}}{d\xi^2} \mathbf{d} \quad (6.3.15)$$

όπου

$$\left( \frac{d^2 \mathbf{H}}{d\xi^2} \mathbf{d} \right)^2 = \left( \frac{d^2 \mathbf{H}}{d\xi^2} \mathbf{d} \right)^T \left( \frac{d^2 \mathbf{H}}{d\xi^2} \mathbf{d} \right) = \mathbf{d}^T \left( \frac{d^2 \mathbf{H}}{d\xi^2} \right)^T \frac{d^2 \mathbf{H}}{d\xi^2} \mathbf{d}$$

και από την Εξίσωση (6.3.11β) προκύπτει:

$$\frac{d^2 \mathbf{H}}{d\xi} = \left[ \frac{3\xi}{2} \quad \frac{L(-1+3\xi)}{2} \quad \frac{-3\xi}{2} \quad \frac{L(1+3\xi)}{2} \right] \quad (6.3.16)$$

Αντικαθιστούμε την (6.3.16) στην (6.3.15) και η (6.3.12) τελικά παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} U &= \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \frac{8EI}{L^3} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \begin{bmatrix} \frac{9}{4} \xi^2 & \frac{3}{8} \xi(-1+3\xi)L & -\frac{9}{4} \xi^2 & \frac{3}{8} \xi(-1+3\xi)L \\ \frac{3}{8} \xi(-1+3\xi)\xi & \left(\frac{-1+3\xi}{4}\right)^2 L^2 & \frac{-3}{8} \xi(-1+3\xi)L & \frac{-1+9\xi^2}{16} L^2 \\ -\frac{9}{4} \xi^2 & \frac{-3}{8} \xi(-1+3\xi)L & \frac{9\xi^2}{4} & -\frac{3}{8} \xi(1+3\xi)L \\ \frac{3}{8} \xi(1+3\xi)L & \frac{-1+9\xi^2}{16} L^2 & -\frac{3}{8} \xi(1+3\xi)L & \left(\frac{-1+3\xi}{4}\right)^2 L^2 \end{bmatrix} d\xi \mathbf{d} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k} \mathbf{d} \end{aligned} \quad (6.3.17)$$

όπου  $\mathbf{k}$  είναι το μητρώο δυσκαμψίας του πεπερασμένου στοιχείου της δοκού στο τοπικό σύστημα. Μετά την ολοκλήρωση προκύπτει:

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{matrix} \quad (6.3.18)$$

και όπως φαίνεται το μητρώο δυσκαμψίας  $\mathbf{k}$  είναι συμμετρικό ως προς την κύρια διαγώνιο και διαστάσεων  $4 \times 4$ .

## 6.4 Ισοδύναμα κομβικά φορτία του στοιχείου

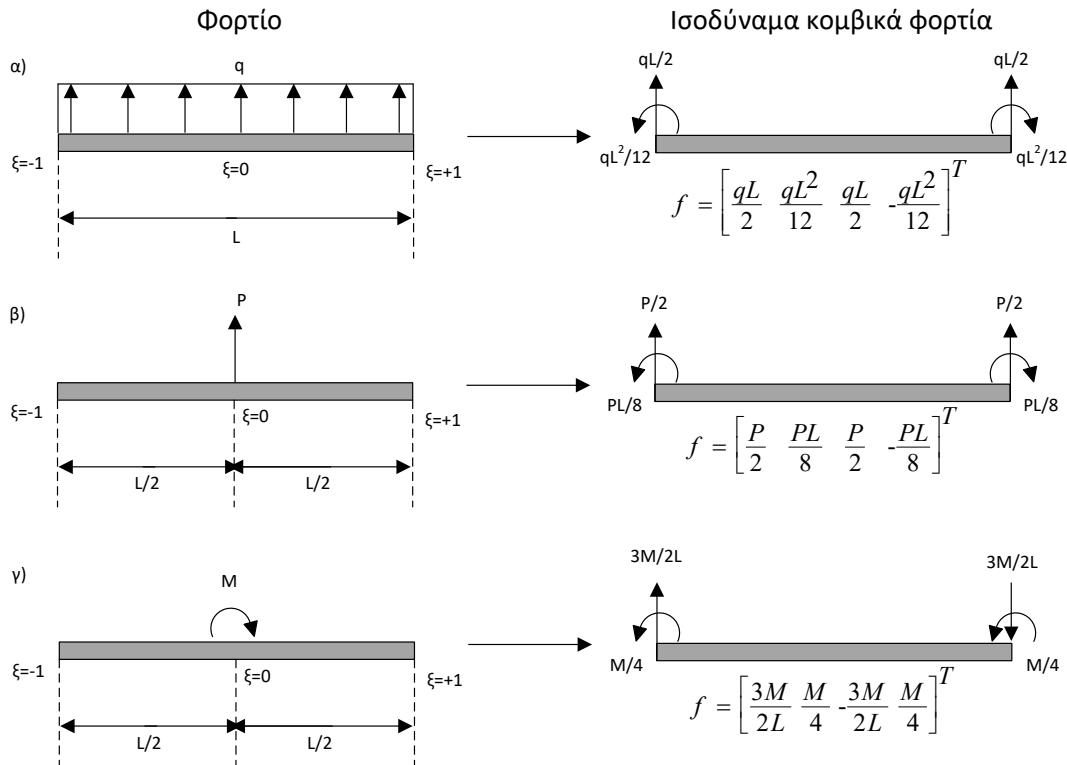
Θεωρούμε ότι στο πεπερασμένο στοιχείο ασκούνται διάφορα είδη φορτίων, όπως το συνεχές φορτίο  $q$ , η συγκεντρωμένη δύναμη  $P$  και η ροπή  $M$  (Σχήμα 12).

Στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων αντικαθίστανται όλα τα φορτία με κομβικά, τα οποία λέγονται ισοδύναμα κομβικά φορτία. Ο τρόπος υπολογισμού ισοδύναμων κομβικών φορτίων που θα χρησιμοποιηθεί βασίζεται στη μέθοδο του μηχανικού έργου.

1) Για συνεχές φορτίο  $q$ , Σχήμα 12(α)

Το έργο λόγω του συνεχούς φορτίου  $q$  σύμφωνα με την εξίσωση (6.2.2) είναι:

$$\int_L qv dx = \int_{-1}^1 q(\mathbf{Hd}) \left(\frac{L}{2} d\xi\right) = \left(\frac{qL}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{H} d\xi\right) \mathbf{d} \quad (6.4.1)$$



Σχήμα 12. Φορτία δοκού και υπολογισμός των ισοδύναμων κομβικών φορτίων.

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (6.4.1) το  $\mathbf{H}$  από την εξίσωση (6.3.11β), και μετά από ολοκλήρωση έχουμε:

$$\int_L qu dx = \left[ \frac{qL}{2} \quad \frac{qL^2}{12} \quad \frac{qL}{2} \quad \frac{-qL^2}{12} \right] \mathbf{d} = \mathbf{f}^T \mathbf{d} \quad (6.4.2)$$

όπου

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{-qL^2}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (6.4.3)$$

$\mathbf{f}$  είναι το διάνυσμα του ισοδύναμου κομβικού φορτίου, Σχήμα 12(α).

2) Για συγκεντρωμένο φορτίο  $P$ , Σχήμα 12(β)

Το έργο λόγω του συγκεντρωμένου φορτίου  $P$ , όπου  $P$  ασκείται στο μέσον του στοιχείου  $x = \frac{L}{2}$  ή  $\xi = 0$ , σύμφωνα με την εξίσωση (6.2.2), είναι:

$$P_{v_{x=L}} = P(\mathbf{Hd})_{\xi=0} = P\mathbf{H}_{\xi=0}\mathbf{d} = \mathbf{f}^T \mathbf{d} \quad (6.4.4)$$

Το  $\mathbf{H}_{\xi=0}$  υπολογίζεται από την (5.3.11β) για  $\xi = 0$

Από την εξίσωση (6.4.4) είναι:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \\ \frac{P}{2} \\ \frac{-PL}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (6.4.5)$$

$\mathbf{f}$  είναι το διάνυσμα του ισοδύναμου κομβικού φορτίου, Σχήμα 12(β).

3) Για καμπτική ροπή  $M$ , Σχήμα 12(γ)

Το έργο λόγω της ροπής  $M$  υπολογίζεται από την εξίσωση (6.2.2). Στο παράδειγμα που εξετάζουμε το  $M$  ασκείται στο μέσο του πεπερασμένου στοιχείου  $x = \frac{L}{2}$  ή  $\xi = 0$ . Η φορά της ροπής  $M$  είναι αρνητική επειδή έχει φορά αυτή των δεικτών του ωρολογίου, ενώ η σύμβαση της θετικής φοράς είναι αντίθετη των δεικτών του ωρολογίου, Σχήμα 12(β).

Το έργο της ροπής είναι:

$$\begin{aligned} (-M)\theta_{x=L/2} &= (-M) \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=L/2} \\ &= (-M) \left. \frac{2}{L} \frac{dv}{d\xi} \right|_{\xi=0} \\ &= (-M) \left. \frac{2}{L} \frac{d(\mathbf{Hd})}{d\xi} \right|_{\xi=0} \\ &= (-M) \left. \frac{2}{L} \frac{d\mathbf{H}}{d\xi} \right|_{\xi=0} \mathbf{d} \end{aligned}$$



$$= \mathbf{f}^T \mathbf{d}$$

Το  $\left. \frac{d\mathbf{H}}{d\xi} \right|_{\xi=0}$  υπολογίζεται αν παραγωγίσουμε ως προς  $\xi$  την εξίσωση (6.3.11β) και θέσουμε όπου  $\xi = 0$ .

Από την εξίσωση (6.4.6) είναι:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \frac{3M}{2L} \\ \frac{M}{4} \\ -\frac{3M}{2L} \\ \frac{M}{4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (6.4.7)$$

όπου  $\mathbf{f}$  είναι το διάνυσμα του ισοδύναμου κομβικού φορτίου, Σχήμα 12(γ). Λόγω των φορτίων  $q$ ,  $P$  και  $M$  του Σχήματος 12, το ολικό διανυσματικό φορτίο  $\mathbf{r}$  που ασκείται στους κόμβους του πεπερασμένου στοιχείου 1,2 είναι:

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = q \begin{Bmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{L^2}{12} \\ \frac{L}{2} \\ -\frac{L^2}{12} \end{Bmatrix} + P \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{L}{8} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{L}{8} \end{Bmatrix} + M \begin{Bmatrix} \frac{3}{2L} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2L} \\ \frac{1}{4} \end{Bmatrix} \quad (6.4.8)$$

Στον Πίνακα 3 δίνονται διάφορα φορτία και τα ισοδύναμα αυτών κομβικά φορτία.

## 6.5 Υπολογισμός των δυνάμεων και ροπών ενός στοιχείου

Σε ένα πεπερασμένο στοιχείο μήκους  $L$ , οι διατμητικές δυνάμεις και οι ροπές συνδέονται με τις κομβικές μετατοπίσεις και κομβικές στροφές με την σχέση:

$$\mathbf{r} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{f}_{\text{ισοδυν}}$$

$$\text{ή} \quad \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} - \mathbf{f}_{\text{ισοδυν}} \quad (6.5.1)$$

όπου

**Πίνακας 3. Φορτία στοιχείου και τα ισοδύναμα κομβικά φορτία**

Φορτίο	Ισοδύναμα κομβικά φορτία

$\mathbf{r}$  το διάνυσμα των αντιδράσεων

$\mathbf{k}$  το μητρώο δυσκαμψίας του συστήματος

$\mathbf{d}$  το διάνυσμα των κομβικών μετατοπίσεων και

$\mathbf{f}_{\text{ισοδυν}}$  το διάνυσμα των ισοδύναμων κομβικών φορτίων του στοιχείου και υπολογίζεται από τον Πίνακα 3.

Σημειώνεται ότι με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων όλα τα προβλήματα ισοστατικών ή υπερστατικών φορέων αντιμετωπίζονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και λύνονται εύκολα και απλά.

## 6.6 Ελαστική θεμελίωση

Εξετάζουμε δοκό, όπως αυτή του Σχήματος 13, στην οποία:

Ασκείται συνεχές φορτίο  $q$  και αξονικό θλιπτικό φορτίο  $N$

Στηρίζεται σε συνεχή ελατήρια με σταθερά ελατηρίου  $k=k(x)$  ( $k$  σταθερά ελατηρίου ανά μονάδα μήκους). Τα συνεχή ελατήρια χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση της ελαστικής θεμελίωσης ή θεμελίωση του Winkler.

Για να βρεθεί το μητρώο δυσκαμψίας του πεπερασμένου στοιχείου χωρίζεται η δοκός μήκους  $L$  σε πλήθος  $n$  κόμβων και  $n-1$  πεπερασμένων στοιχείων, μήκους  $b=L/(n-1)$  το κάθε ένα.

Η ολική ενέργεια της δοκού είναι:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ \frac{EI}{2} (v'')^2 + \frac{k}{2} v^2 - \frac{1}{2} N (v')^2 - qv \right] dx \right\} \quad (6.6.1)$$

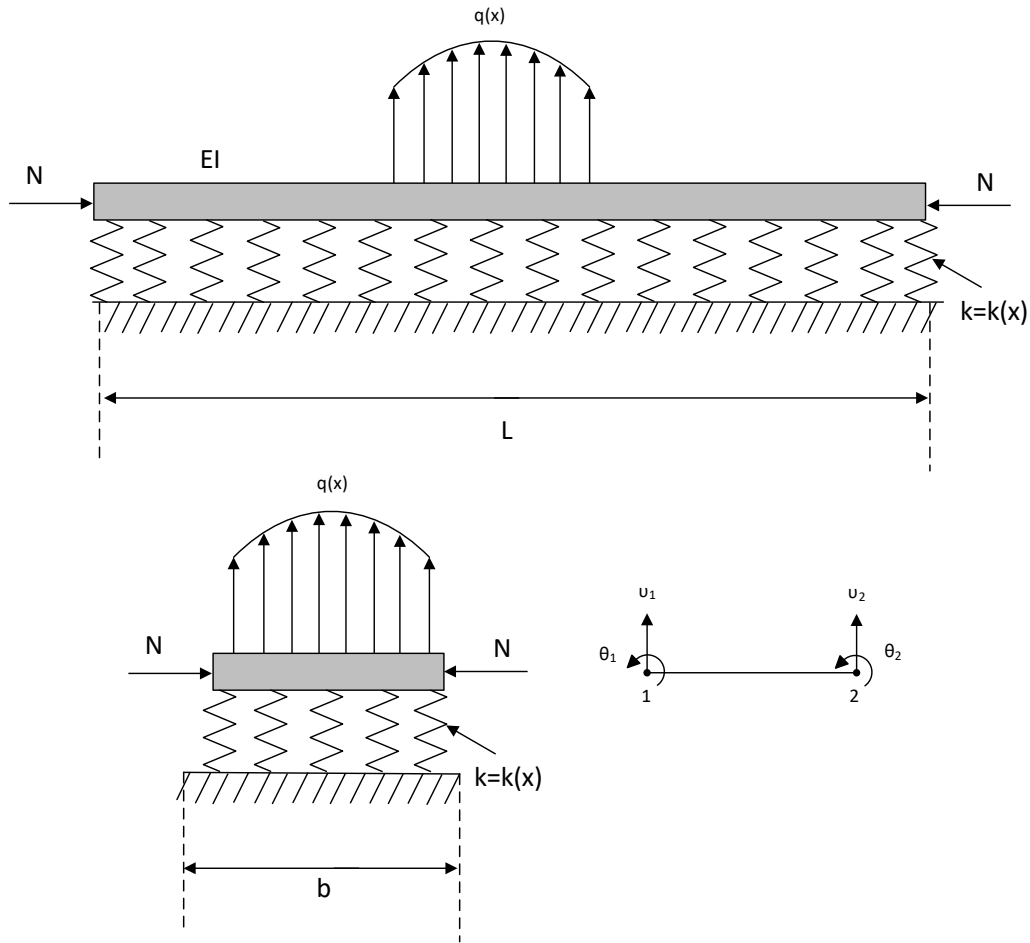
όπου

$v$  το βέλος και

$$v' = \frac{dv}{dx}, v'' = \frac{d^2v}{dx^2}$$

Από το ολοκλήρωμα της (6.6.1) για το πεπερασμένο στοιχείο μήκους  $b$  είναι:

$$\int \frac{EI}{2} (v'')^2 dx + \int \frac{k}{2} v^2 dx + \int \frac{-N}{2} (v')^2 dx = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k}_1 \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k}_2 \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k}_3 \mathbf{d}$$



**Σχήμα 13.** Δοκός με συνεχή ελατήρια, ελαστική θεμελίωση ή θεμελίωση του Winkler με σταθερά ελατηρίου  $k=k(x)$  ( $k$  σταθερά ελατηρίου ανά μονάδα μήκους)

όπου

$$\int \frac{EI}{2} (v'')^2 dx = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k}_1 \mathbf{d} \quad (6.6.2\alpha)$$

$$\int \frac{k}{2} v^2 dx = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k}_2 \mathbf{d} \quad (6.6.2\beta)$$

$$\int \frac{-N}{2} (v')^2 dx = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k}_3 \mathbf{d} \quad (6.6.2\gamma)$$

Το ολικό μητρώο δυσκαμψίας  $\mathbf{k}$  του πεπερασμένου στοιχείου είναι:

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \quad (6.6.3)$$

όπου

Το μητρώο δυσκαμψίας  $\mathbf{k}_1$  έχει υπολογισθεί από την εξίσωση (6.3.17) και είναι:

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EI}{b^3} \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ 12 & 6b & -12 & 6b \\ 6b & 4b^2 & -6b & 2b^2 \\ -12 & -6b & 12 & -6b \\ 6b & 2b^2 & -6b & 4b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (6.6.4)$$

Το μητρώο δυσκαμψίας  $\mathbf{k}_2$  υπολογίζεται από την εξίσωση (6.6.2β), στην οποία αντικαθίσταται η έκφραση  $v = \mathbf{H}\mathbf{d}$ , οπότε γίνεται

$$\frac{1}{2} \mathbf{d}^T k \int \mathbf{H}^T \mathbf{H} dx \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \frac{kL}{2} \int_{\xi=-1}^1 \mathbf{H}^T \mathbf{H} d\xi \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k}_2 \mathbf{d} \quad (6.6.5)$$

όπου

$$\mathbf{k}_2 = \frac{kb}{2} \int_{\chi=-1}^1 \mathbf{H}^T \mathbf{H} dx \text{ και μετά την ολοκλήρωση έχουμε:}$$

$$\mathbf{k}_2 = \frac{kb}{420} \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ 156 & 22b & 54 & -13b \\ 22b & 4b^2 & 13b & -3b^2 \\ 54 & 13b & 156 & -22b \\ -13b & -3b^2 & -22b & 4b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (6.6.6)$$

Το μητρώο δυσκαμψίας  $\mathbf{k}_3$  υπολογίζεται από την εξίσωση (6.6.2γ), αν θέσουμε όπου  $v = Hd$  και κάνουμε την ολοκλήρωση. Λόγω του αξονικού φορτίου  $N$  αναπτύσσονται και αξονικές παραμορφώσεις τις οποίες δεν λαμβάνουμε υπόψη. Οι αξονικές παραμορφώσεις λαμβάνονται υπόψη, όταν μελετάμε το φαινόμενο του λυγισμού.

Θεωρούμε ότι το φορτίο  $N$  είναι σταθερό και μετά από πράξεις προκύπτει:

$$\mathbf{k}_3 = \frac{-N}{30b} \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ 36 & 3b & -36 & 3b \\ 3b & 4b^2 & -3b & -b^2 \\ -36 & -3b & 36 & -3b \\ 3b & -b^2 & -3b & 4b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (6.6.7)$$

Από τις εξισώσεις (6.6.7), (6.6.6) και (6.6.5) το ολικό μητρώο  $\mathbf{k}$  του πεπερασμένου στοιχείου διαμορφώνεται ως:

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{b^3} \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ 12 & 6b & -12 & 6b \\ 6b & 4b^2 & -6b & 2b^2 \\ -12 & -6b & 12 & -6b \\ 6b & 2b^2 & -6b & 4b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \frac{kb}{420} \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ 156 & 22b & 54 & -13b \\ 22b & 4b^2 & 13b & -3b^2 \\ 54 & 13b & 156 & -22b \\ -13b & -3b^2 & -22b & 4b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{(-N)}{30b} \begin{bmatrix} 36 & 3b & -36 & 3b \\ 3b & 4b^2 & -3b & -b^2 \\ -36 & -3b & 36 & -3b \\ 3b & -b^2 & -3b & 4b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (6.6.8)$$

όπου

$b=L/(n-1)$  είναι το μήκος κάθε πεπερασμένου στοιχείου

$L$  το μήκος της δοκού

$N$  το πλήθος των κόμβων και  $n-1$  το πλήθος των πεπερασμένων στοιχείων.

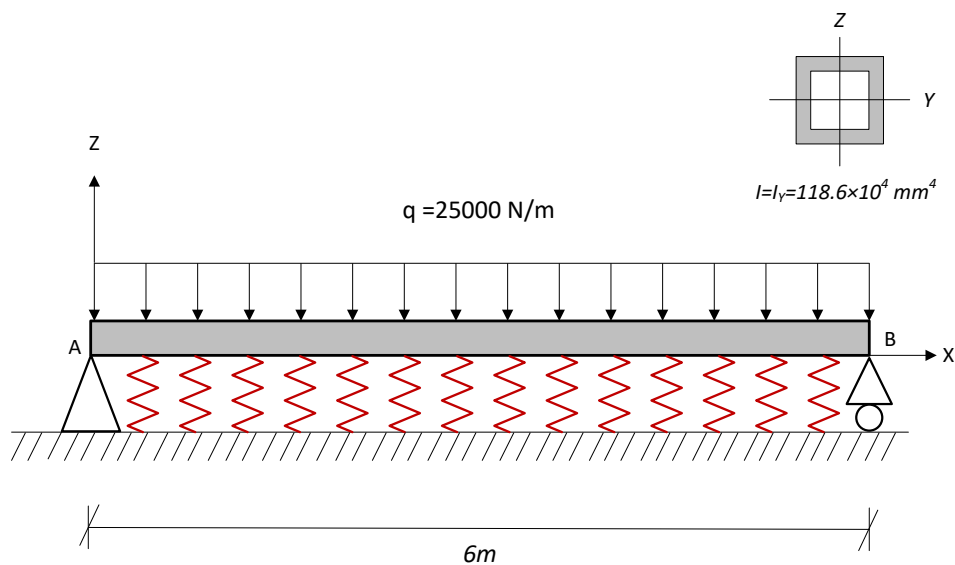
Το μητρώο δυσκαμψίας του συστήματος είναι:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{k}$$

όπου  $\mathbf{k}$  ορίζεται από την (6.6.8).

## 6.7 Αριθμητικά Παραδείγματα

### 6.7.1 Παράδειγμα 1 : Ισοστατικός Φορέας



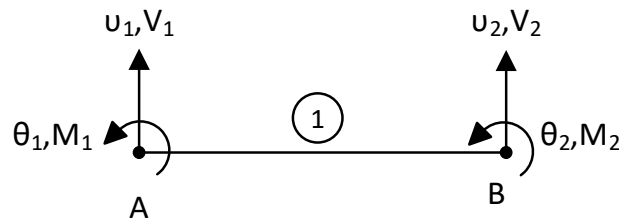
Σχήμα 14. Ισοστατικός Φορέας

Η δοκός του Σχήματος 14 φορτίζεται με ομοιόμορφο φορτίο  $25000 \text{ N/m}$ . Η διατομή της δοκού έχει εμβαδόν  $A = 6650 \text{ mm}^2$ , ροπή αδρανείας  $I = 118.6 \times 10^6 \text{ mm}^4$  και μέτρο ελαστικότητας  $E = 200 \text{ GPa}$ . Η δοκός εδράζεται σε ελαστική θεμελίωση ή θεμελίωση Winkler με σταθερά ελατηρίου  $K_s = 7.5 \text{ MN/m}^3$ .

Να υπολογισθούν οι στροφές και οι αντιδράσεις στις στηρίξεις.

### Επίλυση

Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα είναι ισοστατικό. Επομένως η δοκός θα έχει ένα στοιχείο, Σχήμα 15.



Σχήμα 15. Πεπερασμένο στοιχείο 1

Το πρώτο μας βήμα είναι λοιπόν να υπολογίσουμε το μητρώο δυσκαμψίας και τα ισοδύναμα κομβικά φορτία. Επειδή η δοκός εδράζεται πάνω σε ελαστική θεμελίωση το μητρώο δυσκαμψίας θα είναι:

$$k = \frac{EI}{b^3} \begin{bmatrix} 12 & 6b & -12 & 6b \\ 6b & 4b^2 & -6b & 2b^2 \\ -12 & -6b & 12 & -6b \\ 6b & 2b^2 & -6b & 4b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \frac{kb}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22b & 54 & -13b \\ 22b & 4b^2 & 13b & -3b^2 \\ 54 & 13b & 156 & -22b \\ -13b & -3b^2 & -22b & 4b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

όπου

$b=L/(n-1)$  είναι το μήκος του πεπερασμένου στοιχείου.

$L$  το μήκος της δοκού.

$N$  το πλήθος των κόμβων και  $n-1$  το πλήθος των πεπερασμένων στοιχείων.

$$k = \frac{(200 \times 10^9)(1.186 \times 10^{-4})}{6^3} \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ 12 & 6 \times 6 & -12 & 6 \times 6 \\ 6 \times 6 & 4 \times 6^2 & -6 \times 6 & 2 \times 6^2 \\ -12 & -6 \times 6 & 12 & -6 \times 6 \\ 6 \times 6 & 2 \times 6^2 & -6 \times 6 & 4 \times 6^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{7.5 \times 10^6 \times 6}{420} \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ 156 & 22 \times 6 & 54 & -13 \times 6 \\ 22 \times 6 & 4 \times 6^2 & 13 \times 6 & -3 \times 6^2 \\ 54 & 13 \times 6 & 156 & -22 \times 6 \\ -13 \times 6 & -3 \times 6^2 & -22 \times 6 & 4 \times 6^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$k = 109814.81 \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ 12 & 36 & -12 & 36 \\ 36 & 144 & -36 & 72 \\ -12 & -36 & 12 & -36 \\ 36 & 72 & -36 & 144 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$+ 107142.86 \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ 156 & 132 & 54 & -78 \\ 132 & 144 & 78 & -108 \\ 54 & 78 & 156 & -132 \\ -78 & -108 & -132 & 144 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Επομένως, το ολικό μητρώο δυσκαμψίας είναι το άθροισμα των παραπάνω:

$$K = \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ 18032063 & 18096190 & 4467937 & -4403810 \\ 18096190 & 31241905 & 4403810 & -3664762 \\ 4467937 & 4403810 & 18032063 & -18096190 \\ -4403810 & -3664762 & -18096190 & 31241905 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Λόγω του συνεχούς κατανεμημένου φορτίου  $q$ , τα ισοδύναμα κομβικά φορτία υπολογίζονται από τον Πίνακα 3 και είναι:

$$f = \begin{Bmatrix} -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ -qL/2 \\ qL^2/12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

Όπου  $f$  το διάνυσμα του ισοδύναμου κομβικού φορτίου



$$f = \begin{Bmatrix} -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ -qL/2 \\ qL^2/12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-((25 \times 10^3) \times 6)}{2} \\ \frac{-((25 \times 10^3) \times 6^2)}{12} \\ \frac{-((25 \times 10^3) \times 6)}{2} \\ \frac{((25 \times 10^3) \times 6^2)}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -75000 \\ -75000 \\ -75000 \\ 75000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

Οι ολικές κομβικές δυνάμεις στο σύστημα είναι:

$$P = (\text{Εξωτερικές δυνάμεις}) + (\text{Ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις}) = 0 + f$$

Η εξίσωση ισορροπίας είναι:

$$P = K D \quad \text{ή} \quad f = K D$$

Οι οριακές συνθήκες του φορέα είναι οι εξής:

Κόμβος A (Άρθρωση)

$$v_1 = 0$$

$$\theta_1 = ?$$

Κόμβος B (Κύλιση)

$$v_2 = 0$$

$$\theta_2 = ?$$

Έχοντας προσδιορίσει λοιπόν τις οριακές συνθήκες του φορέα το διάνυσμα μετατοπίσεων  $D$  θα διαμορφωθεί ως εξής:

$$D = \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Έτσι η εξίσωση ισορροπίας θα γίνει:

$$f = \begin{bmatrix} 18032063 & 18096190 & 4467937 & -4403810 \\ 18096190 & 31241905 & 4403810 & -3664762 \\ 4467937 & 4403810 & 18032063 & -18096190 \\ -4403810 & -3664762 & -18096190 & 31241905 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -75000 \\ -75000 \\ -75000 \\ 75000 \end{Bmatrix}$$

Απαλείφοντας τις γραμμές και στήλες που αντιστοιχούν στις μηδενικές μετατοπίσεις και κλίσεις και προκύπτει:

$$\begin{matrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \begin{bmatrix} 31241905 & -3664762 \\ -3664762 & 31241905 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -75000 \\ 75000 \end{Bmatrix}$$

Λύνουμε το σύστημα ως προς τα άγνωστα διανύσματα των μετατοπίσεων και έχουμε

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.00214859 \text{ rad} \\ 0.00214859 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Επομένως το ολικό διάνυσμα των μετατοπίσεων μπορεί να γραφθεί ως εξής:

$$\mathbf{D} = [0 \quad -0.0024859 \quad 0 \quad 0.00214859]^T$$

### Υπολογισμός Αντιδράσεων

Έχοντας υπολογίσει το μητρώο δυσκαμψίας, το διάνυσμα των ισοδύναμων κομβικών φορτίων και το ολικό διάνυσμα των μετατοπίσεων μπορούμε πολύ εύκολα να υπολογίσουμε τις διατμητικές δυνάμεις και τις ροπές του στοιχείου χρησιμοποιώντας την παρακάτω σχέση.

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \mathbf{D} - \mathbf{f}$$

όπου

$\mathbf{R}$  είναι το διάνυσμα το αντιδράσεων.

$\mathbf{f}$  το διάνυσμα των ισοδύναμων κομβικών φορτίων.

$\mathbf{K}$  το μητρώο δυσκαμψίας του φορέα.

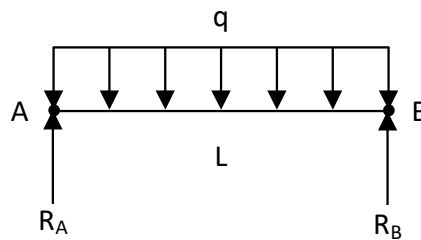
$\mathbf{D}$  το ολικό διάνυσμα των μετατοπίσεων.

$$\begin{Bmatrix} R_A = V_1 \\ M_1 \\ R_B = V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 18032063 & 18096190 & 4467937 & -4403810 \\ 18096190 & 31241905 & 4403810 & -3664762 \\ 4467937 & 4403810 & 18032063 & -18096190 \\ -4403810 & -3664762 & -18096190 & 31241905 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.00214859 \\ 0 \\ 0.00214859 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -75000 \\ -75000 \\ -75000 \\ 75000 \end{Bmatrix}$$

Λύνοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει

$$\begin{Bmatrix} R_A = V_1 \\ M_1 \\ R_B = V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -48343 \\ -75000 \\ -48343 \\ 75000 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -75000 \\ -75000 \\ -75000 \\ 75000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 26657 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \\ 26657 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

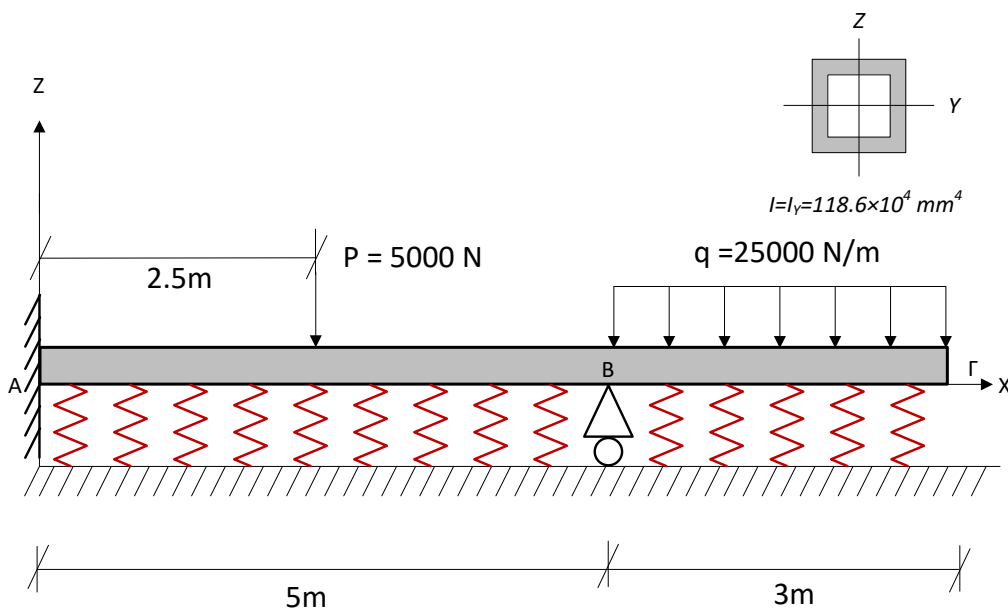
Συνεπώς είναι  $R_A = V_1 = 26657 \text{ N}$ ,  $R_B = V_2 = 26657 \text{ N}$  και  $M_1 = M_2 = 0 \text{ Nm}$



Σχήμα 16. Αντιδράσεις στις στηρίξεις

### 6.7.2 Παράδειγμα 2 : Υπερστατικός Φορέας

Η δοκός του Σχήματος 17 φορτίζεται με συγκεντρωμένο φορτίο 5000 N στο κέντρο του στοιχείου A-B και ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο 25000 N/m στο ένα άνοιγμα (B-Γ).



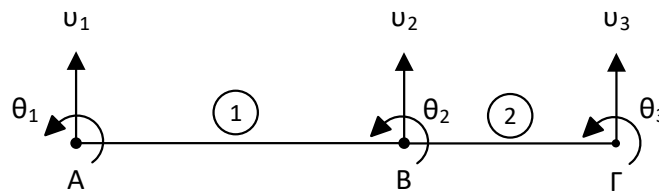
Σχήμα 17. Υπερστατικός Φορέας

Η διατομή της δοκού έχει εμβαδόν  $A = 6650 \text{ mm}^2$ , ροπή αδρανείας  $I = 118.6 \times 10^6 \text{ mm}^4$  και μέτρο ελαστικότητας  $E = 200 \text{ GPa}$ . Η δοκός εδράζεται σε ελαστική θεμελίωση ή θεμελίωση Winkler με σταθερά ελατηρίου  $K_S = 7.5 \text{ MN/m}^3$ .

Να υπολογισθούν, η κατακόρυφη μετατόπιση στο ελεύθερο άκρο, οι κλίσεις στην κύλιση και στο ελεύθερο άκρο, καθώς και οι αντιδράσεις στις στηρίξεις.

### Επίλυση

Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα είναι υπερστατικό. Επομένως, χωρίζουμε τη δοκό σε δύο στοιχεία, τα 1 και 2, όπως φαίνεται στο Σχήμα 18.



Σχήμα 18. Πεπερασμένα Στοιχεία 1 και 2

Το πρώτο μας βήμα είναι λοιπόν να υπολογίσουμε το μητρώο δυσκαμψίας και τα ισοδύναμα κομβικά φορτία για το κάθε στοιχείο ξεχωριστά. Επειδή η δοκός εδράζεται πάνω σε ελαστική θεμελίωση το μητρώο δυσκαμψίας θα είναι:

$$k = \frac{EI}{b^3} \begin{bmatrix} 12 & 6b & -12 & 6b \\ 6b & 4b^2 & -6b & 2b^2 \\ -12 & -6b & 12 & -6b \\ 6b & 2b^2 & -6b & 4b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \frac{kb}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22b & 54 & -13b \\ 22b & 4b^2 & 13b & -3b^2 \\ 54 & 13b & 156 & -22b \\ -13b & -3b^2 & -22b & 4b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

όπου

$b=L/(n-1)$  είναι το μήκος του πεπερασμένου στοιχείου

$L$  το μήκος της δοκού

$N$  το πλήθος των κόμβων και  $n-1$  το πλήθος των πεπερασμένων στοιχείων.

## Στοιχείο 1

$$k_1 = \frac{(200 \times 10^9)(1.186 \times 10^{-4})}{5^3} \begin{bmatrix} u_1 & \theta_1 & u_2 & \theta_2 \\ 12 & 6 \times 5 & -12 & 6 \times 5 \\ 6 \times 5 & 4 \times 5^2 & -6 \times 5 & 2 \times 5^2 \\ -12 & -6 \times 6 & 12 & -6 \times 5 \\ 6 \times 5 & 2 \times 5^2 & -6 \times 5 & 4 \times 5^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{7.5 \times 10^6 \times 5}{420} \begin{bmatrix} u_1 & \theta_1 & u_2 & \theta_2 \\ 156 & 22 \times 5 & 54 & -13 \times 5 \\ 22 \times 5 & 4 \times 5^2 & 13 \times 5 & -3 \times 5^2 \\ 54 & 13 \times 5 & 156 & -22 \times 5 \\ -13 \times 5 & -3 \times 5^2 & -22 \times 5 & 4 \times 5^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = 189760 \begin{bmatrix} u_1 & \theta_1 & u_2 & \theta_2 \\ 12 & 30 & -12 & 30 \\ 30 & 100 & -30 & 50 \\ -12 & -30 & 12 & -30 \\ 30 & 50 & -30 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$+ 89285.71 \begin{bmatrix} u_1 & \theta_1 & u_2 & \theta_2 \\ 156 & 110 & 54 & -65 \\ 110 & 100 & 65 & -75 \\ 54 & 65 & 156 & -110 \\ -65 & -75 & -110 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Επομένως το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου 1 είναι το άθροισμα των παραπάνω:

$$k_1 = \begin{bmatrix} u_1 & \theta_1 & u_2 & \theta_2 \\ 16205691 & 15514229 & 2544309 & -110771 \\ 15514229 & 27904571 & 110771 & 2791571 \\ 2544309 & 110771 & 16205691 & -15514229 \\ -110771 & 2791571 & -15514229 & 27904571 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

## Στοιχείο 2

$$k_2 = \frac{(200 \times 10^9)(1.186 \times 10^{-4})}{3^3} \begin{bmatrix} u_1 & \theta_1 & u_2 & \theta_2 \\ 12 & 6 \times 3 & -12 & 6 \times 3 \\ 6 \times 3 & 4 \times 3^2 & -6 \times 3 & 2 \times 3^2 \\ -12 & -6 \times 3 & 12 & -6 \times 3 \\ 6 \times 3 & 2 \times 3^2 & -6 \times 3 & 4 \times 3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{7.5 \times 10^6 \times 3}{420} \begin{bmatrix} u_1 & \theta_1 & u_2 & \theta_2 \\ 156 & 22 \times 3 & 54 & -13 \times 3 \\ 22 \times 3 & 4 \times 3^2 & 13 \times 3 & -3 \times 3^2 \\ 54 & 13 \times 3 & 156 & -22 \times 3 \\ -13 \times 3 & -3 \times 3^2 & -22 \times 3 & 4 \times 3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = 878518.52 \begin{bmatrix} u_1 & \theta_1 & u_2 & \theta_2 \\ 12 & 18 & -12 & 18 \\ 18 & 36 & -18 & 18 \\ -12 & -18 & 12 & -18 \\ 18 & 18 & -18 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$+ 53571.43 \begin{bmatrix} u_1 & \theta_1 & u_2 & \theta_2 \\ 156 & 66 & 54 & -39 \\ 66 & 36 & 39 & -27 \\ 54 & 39 & 156 & -66 \\ -39 & -27 & -66 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

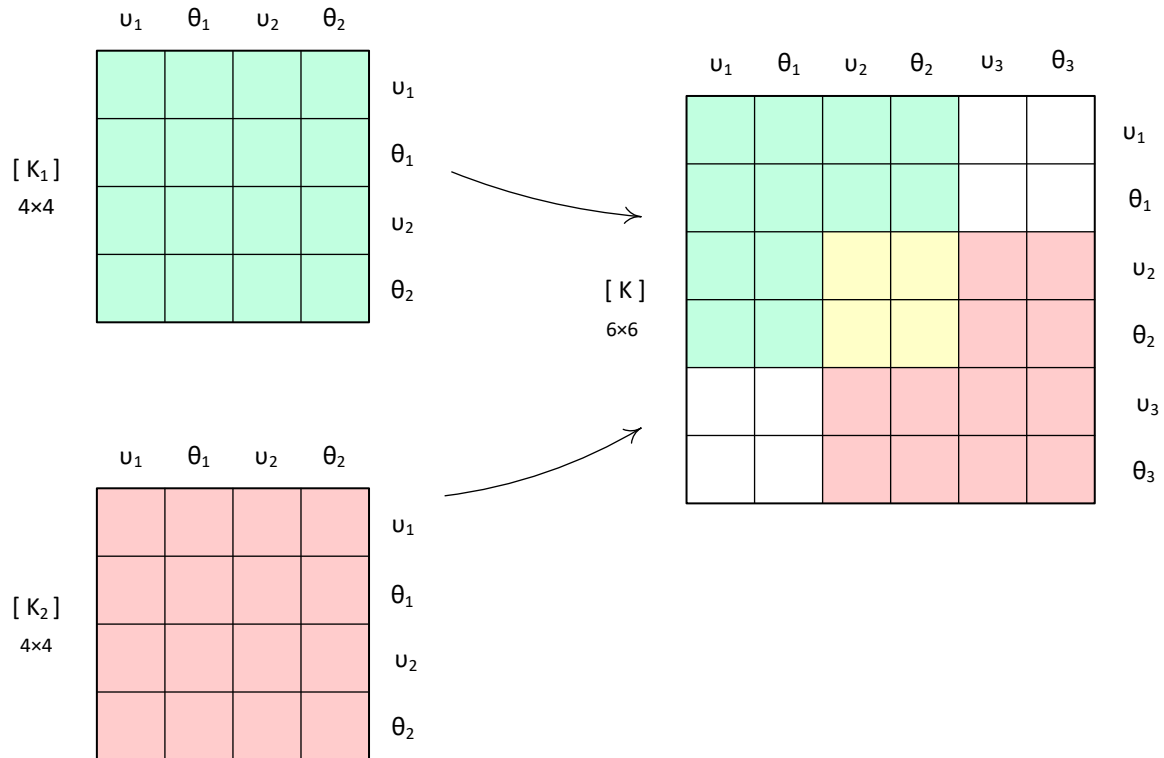
Επομένως το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου 2 είναι το άθροισμα των παραπάνω:

$$k_2 = \begin{bmatrix} u_1 & \theta_1 & u_2 & \theta_2 \\ 18899365 & 19349048 & -7649365 & 13724048 \\ 19349048 & 33555238 & -13724048 & 14366905 \\ -7649365 & -13724048 & 18899365 & -19349048 \\ 13724048 & 14366905 & -19349048 & 33555238 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Το ολικό μητρώο δυσκαμψίας προκύπτει από τη σύνθεση των δύο μητρώων δυσκαμψίας, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα 19.

Επομένως, το ολικό μητρώο δυσκαμψίας είναι το άθροισμα των επιμέρους μητρώων δυσκαμψίας 1 και 2:

$$K = \begin{bmatrix} u_1 & \theta_1 & u_2 & \theta_2 & u_3 & \theta_3 \\ 16205691 & 15514229 & 2544309 & -110771 & 0 & 0 \\ 15514229 & 27904571 & 110771 & 2791571 & 0 & 0 \\ 2544309 & 110771 & 35105057 & 3834819 & -7649365 & 13724048 \\ -110771 & 2791571 & 3834819 & 61459810 & -13724048 & 14366905 \\ 0 & 0 & -7649365 & -13724048 & 18899365 & -19349048 \\ 0 & 0 & 13724048 & 14366905 & -19349048 & 33555238 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 19. Σύνθεση Μητρώων Δυσκαμψίας

Λόγω του συνεχούς κατανομημένου φορτίου  $q$  και του συγκεντρωμένου φορτίου  $P$ , τα ισοδύναμα κομβικά φορτία υπολογίζονται από τον πίνακα 3.

$$f_1 = \begin{Bmatrix} -P/2 \\ -PL/8 \\ -P/2 \\ PL/8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

όπου  $f_1$  το διάνυσμα του ισοδύναμου κομβικού φορτίου για το στοιχείο 1

$$f_1 = \begin{Bmatrix} -P/2 \\ -PL/8 \\ -P/2 \\ PL/8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{50000}{2} \\ \frac{50000 \times 5}{8} \\ -\frac{50000}{2} \\ \frac{50000 \times 5}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -25000 \\ -31250 \\ -25000 \\ 31250 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

$$f_2 = \begin{Bmatrix} -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ -qL/2 \\ qL^2/12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_2 \\ M_2 \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

όπου  $f_2$  το διάνυσμα του ισοδύναμου κομβικού φορτίου για το στοιχείο 2

Ουάσεφ Αλέξανδρος

Ανάλυση Ελαστικά Εδραζόμενων Δοκών  
με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων

$$f_2 = \begin{Bmatrix} -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ -qL/2 \\ qL^2/12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-((25 \times 10^3) \times 3)}{2} \\ \frac{-((25 \times 10^3) \times 3^2)}{12} \\ \frac{-((25 \times 10^3) \times 3)}{2} \\ \frac{((25 \times 10^3) \times 3^2)}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -37500 \\ -18750 \\ -37500 \\ 18750 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_2 \\ M_2 \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

Το ολικό κομβικό φορτίο στο σύστημα είναι:

$$P = (\text{Εξωτερικές δυνάμεις}) + (\text{Ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις}) = 0 + (f_1 + f_2)$$

ή

$$P = f_1 + f_2 = \begin{Bmatrix} -25000 \\ -31250 \\ -62500 \\ 12500 \\ -37500 \\ 18750 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

Η εξίσωση ισορροπίας είναι:

$$P = K D \quad \text{ή} \quad f = K D$$

Οι οριακές συνθήκες του φορέα είναι οι εξής:

Κόμβος Α (Πάκτωση)

$$v_1 = 0$$

$$\theta_1 = 0$$

Κόμβος Β (Κύλιση)

$$v_2 = 0$$

$$\theta_2 = ?$$

Κόμβος Γ (Ελεύθερο Άκρο)

$$v_3 = ?$$

$$\theta_3 = ?$$



Έχοντας προσδιορίσει λοιπόν τις οριακές συνθήκες του φορέα το διάνυσμα μετατοπίσεων  $\mathbf{D}$  θα διαμορφωθεί ως εξής:

$$\mathbf{D} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

Η εξίσωση ισορροπίας είναι:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 16205691 & 15514229 & 2544309 & -110771 & 0 & 0 \\ 15514229 & 27904571 & 110771 & 2791571 & 0 & 0 \\ 2544309 & 110771 & 35105057 & 3834819 & -7649365 & 13724048 \\ -110771 & 2791571 & 3834819 & 61459810 & -13724048 & 14366905 \\ 0 & 0 & -7649365 & -13724048 & 18899365 & -19349048 \\ 0 & 0 & 13724048 & 14366905 & -19349048 & 33555238 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -25000 \\ -31250 \\ -62500 \\ 12500 \\ -37500 \\ 18750 \end{Bmatrix}$$

Απαλείφουμε εκείνες τις γραμμές και στήλες, που αντιστοιχούν σε μηδενικές μετατοπίσεις και κλίσεις και προκύπτει:

$$\begin{matrix} & \theta_2 & u_3 & \theta_3 \\ = & \begin{bmatrix} 61459810 & -13724048 & 14366905 \\ -13724048 & 18899365 & -19349048 \\ 14366905 & -19349048 & 33555238 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ u_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12500 \\ -37500 \\ 18750 \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

Λύνουμε το σύστημα ως προς τα άγνωστα διανύσματα των μετατοπίσεων και έχουμε

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ u_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.00027734 \text{ rad} \\ -0.00364202 \text{ m} \\ -0.00142258 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Επομένως το ολικό διάνυσμα των μετατοπίσεων μπορεί να γραφθεί ως εξής:

$$\mathbf{D} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -0.00027734 \quad -0.00364202 \quad -0.00142258]^T$$

### Υπολογισμός Αντιδράσεων

Έχοντας υπολογίσει το μητρώο δυσκαμψίας, το διάνυσμα των ισοδύναμων κομβικών φορτίων και το ολικό διάνυσμα των μετατοπίσεων μπορούμε πολύ εύκολα να υπολογίσουμε τις διατμητικές δυνάμεις και τις ροπές του στοιχείου χρησιμοποιώντας την παρακάτω σχέση.

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \mathbf{D} - \mathbf{f}$$

όπου

$\mathbf{R}$  είναι το διάνυσμα το αντιδράσεων.

$\mathbf{f}$  το διάνυσμα των ισοδύναμων κομβικών φορτίων.

$\mathbf{K}$  το μητρώο δυσκαμψίας του φορέα.

$\mathbf{D}$  το ολικό διάνυσμα των μετατοπίσεων.

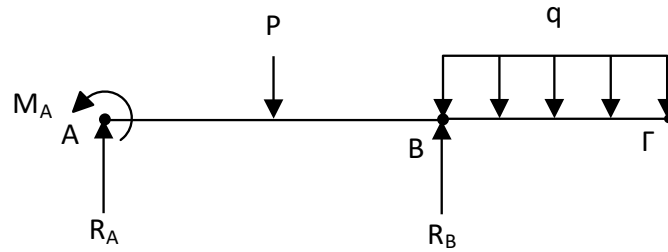
Λύνοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει

$$\begin{bmatrix} R_A = V_1 \\ M_1 \\ R_B = V_2 \\ M_2 \\ R_\Gamma = V_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16205691 & 15514229 & 2544309 & -110771 & 0 & 0 \\ 15514229 & 27904571 & 110771 & 2791571 & 0 & 0 \\ 2544309 & 110771 & 35105057 & 3834819 & -7649365 & 13724048 \\ -110771 & 2791571 & 3834819 & 61459810 & -13724048 & 14366905 \\ 0 & 0 & -7649365 & -13724048 & 18899365 & -19349048 \\ 0 & 0 & 13724048 & 14366905 & -19349048 & 33555238 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.00027734 \\ -0.00364202 \\ -0.00142258 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -25000 \\ -31250 \\ -62500 \\ 12500 \\ -37500 \\ 18750 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ -774 \\ 7272 \\ 12500 \\ -37500 \\ 18750 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -25000 \\ -31250 \\ -62500 \\ 12500 \\ -37500 \\ 18750 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25031 \text{ N} \\ 30476 \text{ Nm} \\ 69772 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \\ 0 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, τα αποτελέσματα είναι:

$$R_A = V_1 = 25031 \text{ N}, \quad R_B = V_2 = 69772 \text{ N}, \quad R_\Gamma = V_3 = 0 \text{ N},$$

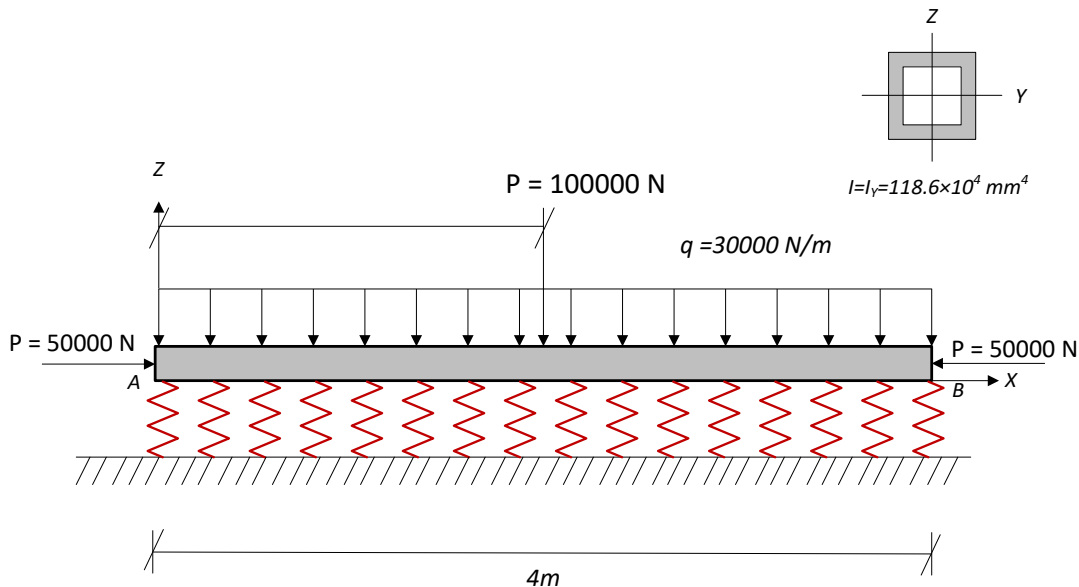
$$M_1 = 30476 \text{ Nm}, \quad M_2 = 0 \text{ Nm} \quad \text{και} \quad M_3 = 0 \text{ Nm}$$



Σχήμα 20. Αντιδράσεις στις στηρίξεις

### 6.7.3 Παράδειγμα 3 : Ισοστατικός Φορέας

Η δοκός του Σχήματος 21 φορτίζεται με συγκεντρωμένο φορτίο 100000 N στο κέντρο του στοιχείου A-B, με ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο 30000 N/m σε όλο το μήκος της δοκού και με θλιπτικό αξονικό φορτίο 50000 N. Η διατομή της δοκού έχει εμβαδόν  $A = 6650 \text{ mm}^2$ , ροπή αδρανείας  $I = 118.6 \times 10^6 \text{ mm}^4$  και μέτρο ελαστικότητας  $E = 200 \text{ GPa}$ . Η δοκός εδράζεται σε ελαστική θεμελίωση ή θεμελίωση Winkler με σταθερά ελατηρίου  $K_s = 50 \text{ MN/m}^3$ .

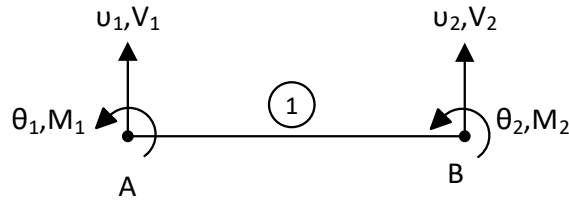


Σχήμα 21. Ισοστατικός Φορέας

Να υπολογισθούν οι κατακόρυφες μετατοπίσεις και οι κλίσεις στα άκρα της δοκού, καθώς και να αποδειχθεί ότι οι ακραίες δράσεις είναι μηδενικές.

## Επίλυση

Το πρόβλημα, προφανώς, είναι ισοστατικό. Επομένως, η δοκός θα αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 22.



Σχήμα 22. Πεπερασμένο στοιχείο 1

Το πρώτο μας βήμα είναι, λοιπόν, να υπολογίσουμε το μητρώο δυσκαμψίας και τα ισοδύναμα κομβικά φορτία. Αφού η δοκός εδράζεται σε ελαστική θεμελίωση και θλίβεται από αξονικό φορτίο, το μητρώο δυσκαμψίας θα είναι:

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{b^3} \begin{bmatrix} 12 & 6b & -12 & 6b \\ 6b & 4b^2 & -6b & 2b^2 \\ -12 & -6b & 12 & -6b \\ 6b & 2b^2 & -6b & 4b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \frac{kb}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22b & 54 & -13b \\ 22b & 4b^2 & 13b & -3b^2 \\ 54 & 13b & 156 & -22b \\ -13b & -3b^2 & -22b & 4b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \frac{(-N)}{30b} \begin{bmatrix} 36 & 3b & -36 & 3b \\ 3b & 4b^2 & -3b & -b^2 \\ -36 & -3b & 36 & -3b \\ 3b & -b^2 & -3b & 4b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

όπου

$b=L/(n-1)$  είναι το μήκος του πεπερασμένου στοιχείου

$L$  το μήκος της δοκού

$N$  το πλήθος των κόμβων και  $n-1$  το πλήθος των πεπερασμένων στοιχείων.

$$\mathbf{k} = \frac{(200 \times 10^9)(1.186 \times 10^{-4})}{4^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 \times 4 & -12 & 6 \times 4 \\ 6 \times 4 & 4 \times 6^2 & -6 \times 4 & 2 \times 4^2 \\ -12 & -6 \times 4 & 12 & -6 \times 4 \\ 6 \times 4 & 2 \times 4^2 & -6 \times 4 & 4 \times 4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{50 \times 10^6 \times 4}{420} \begin{bmatrix} u_1 & \theta_1 & u_2 & \theta_2 \\ 156 & 22 \times 4 & 54 & -13 \times 4 \\ 22 \times 4 & 4 \times 4^2 & 13 \times 4 & -3 \times 4^2 \\ 54 & 13 \times 4 & 156 & -22 \times 4 \\ -13 \times 4 & -3 \times 4^2 & -22 \times 4 & 4 \times 4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{(-50000)}{30 \times 4} \begin{bmatrix} u_1 & \theta_1 & u_2 & \theta_2 \\ 36 & 3 \times 4 & -36 & 3 \times 4 \\ 3 \times 4 & 4 \times 4^2 & -3 \times 4 & -4^2 \\ -36 & -3 \times 4 & 36 & -3 \times 4 \\ 3 \times 4 & -4^2 & -3 \times 4 & 4 \times 4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$k = 189760 \begin{bmatrix} u_1 & \theta_1 & u_2 & \theta_2 \\ 12 & 30 & -12 & 30 \\ 30 & 100 & -30 & 50 \\ -12 & -30 & 12 & -30 \\ 30 & 50 & -30 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$+ 595238.10 \begin{bmatrix} u_1 & \theta_1 & u_2 & \theta_2 \\ 156 & 110 & 54 & -65 \\ 110 & 100 & 65 & -75 \\ 54 & 65 & 156 & -110 \\ -65 & -75 & -110 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$- 333.33 \begin{bmatrix} u_1 & \theta_1 & u_2 & \theta_2 \\ 36 & 15 & -36 & 15 \\ 15 & 100 & -15 & -25 \\ -36 & -15 & 36 & -15 \\ 15 & -25 & -15 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Επομένως το ολικό μητρώο δυσκαμψίας είναι το άθροισμα των παραπάνω:

$$K = \begin{bmatrix} u_1 & \theta_1 & u_2 & \theta_2 \\ 95122263 & 71163990 & 29877737 & -33002676 \\ 71163990 & 78466476 & 33002676 & -35146524 \\ 29877737 & 33002676 & 95122263 & -71163990 \\ -33002676 & -35146524 & -71163990 & 78466476 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Λόγω του συνεχούς κατανεμημένου φορτίου  $q$  και του συγκεντρωμένου φορτίου  $P$ , τα ισοδύναμα κομβικά φορτία υπολογίζονται από τον Πίνακα 3 και θα δίνονται από τη σχέση:

$$f = \begin{Bmatrix} -P/2 \\ -PL/8 \\ -P/2 \\ PL/8 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ -qL/2 \\ qL^2/12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

όπου  $f$  το διάνυσμα του ισοδύναμου κομβικού φορτίου.

$$f = \begin{Bmatrix} (-50000/2) \\ (-50000 \times 4)/8 \\ (-50000/2) \\ (50000 \times 4)/8 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{-((30 \times 10^3) \times 4)}{2} \\ \frac{-((30 \times 10^3) \times 4^2)}{12} \\ \frac{-((30 \times 10^3) \times 4)}{2} \\ \frac{((30 \times 10^3) \times 4^2)}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -110000 \\ -90000 \\ -110000 \\ 90000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

Οι ολικές κομβικές δυνάμεις στο σύστημα είναι:

$$P = (\text{Εξωτερικές δυνάμεις}) + (\text{Ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις}) = 0 + f$$

Η εξίσωση ισορροπίας είναι:

$$P = K D \quad \text{ή} \quad f = K D$$

Οι οριακές συνθήκες του φορέα είναι οι εξής:

Κόμβος A (Ελεύθερο άκρο)

$$v_1 = ? \quad \text{και} \quad \theta_1 = ?$$

Κόμβος B (Ελεύθερο άκρο)

$$v_2 = ? \quad \text{και} \quad \theta_2 = ?$$

Έχοντας προσδιορίσει, λοιπόν, τις οριακές συνθήκες του φορέα το διάνυσμα μετατοπίσεων  $D$  θα διαμορφωθεί ως εξής:

$$D = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Η εξίσωση ισορροπίας είναι:

$$f = \begin{bmatrix} & u_1 & \theta_1 & u_2 & \theta_2 \\ 95122263 & 71163990 & 29877737 & -33002676 \\ 71163990 & 78466476 & 33002676 & -35146524 \\ 29877737 & 33002676 & 95122263 & -71163990 \\ -33002676 & -35146524 & -71163990 & 78466476 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -110000 \\ -90000 \\ -110000 \\ 90000 \end{Bmatrix}$$

Λύνουμε το σύστημα ως προς τα άγνωστα διανύσματα των μετατοπίσεων και προκύπτει

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.00093181 \text{ m} \\ 0.00006217 \text{ rad} \\ -0.00093181 \text{ m} \\ -0.00006217 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Επομένως το ολικό διάνυσμα των μετατοπίσεων μπορεί να γραφθεί ως εξής:

$$\mathbf{D} = [-0.00093181 \quad 0.00006217 \quad -0.00093181 \quad -0.00006217]^T$$

### Υπολογισμός Αντιδράσεων

Έχοντας υπολογίσει το μητρώο δυσκαμψίας, το διάνυσμα των ισοδύναμων κομβικών φορτίων και το ολικό διάνυσμα των μετατοπίσεων μπορούμε πολύ εύκολα να υπολογίσουμε τις διατμητικές δυνάμεις και τις ροπές του στοιχείου χρησιμοποιώντας την παρακάτω σχέση.

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \mathbf{D} - \mathbf{f}$$

όπου

$\mathbf{R}$  είναι το διάνυσμα το αντιδράσεων.

$\mathbf{f}$  το διάνυσμα των ισοδύναμων κομβικών φορτίων.

$\mathbf{K}$  το μητρώο δυσκαμψίας του φορέα.

$\mathbf{D}$  το ολικό διάνυσμα των μετατοπίσεων.

$$\begin{Bmatrix} R_A = V_1 \\ M_1 \\ R_B = V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 95122263 & 71163990 & 29877737 & -33002676 \\ 71163990 & 78466476 & 33002676 & -35146524 \\ 29877737 & 33002676 & 95122263 & -71163990 \\ -33002676 & -35146524 & -71163990 & 78466476 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.00093181 \\ 0.00006217 \\ -0.00093181 \\ -0.00006217 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -110000 \\ -90000 \\ -110000 \\ 90000 \end{Bmatrix}$$

Λύνοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει

$$\begin{Bmatrix} R_A = V_1 \\ M_1 \\ R_B = V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -110000 \\ -90000 \\ -110000 \\ 90000 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -110000 \\ -90000 \\ -110000 \\ 90000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \\ 0 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Συνεπώς είναι  $R_A = V_1 = 0 \text{ N}$ ,  $R_B = V_2 = 0 \text{ N}$  και  $M_1 = M_2 = 0 \text{ Nm}$ .

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

---

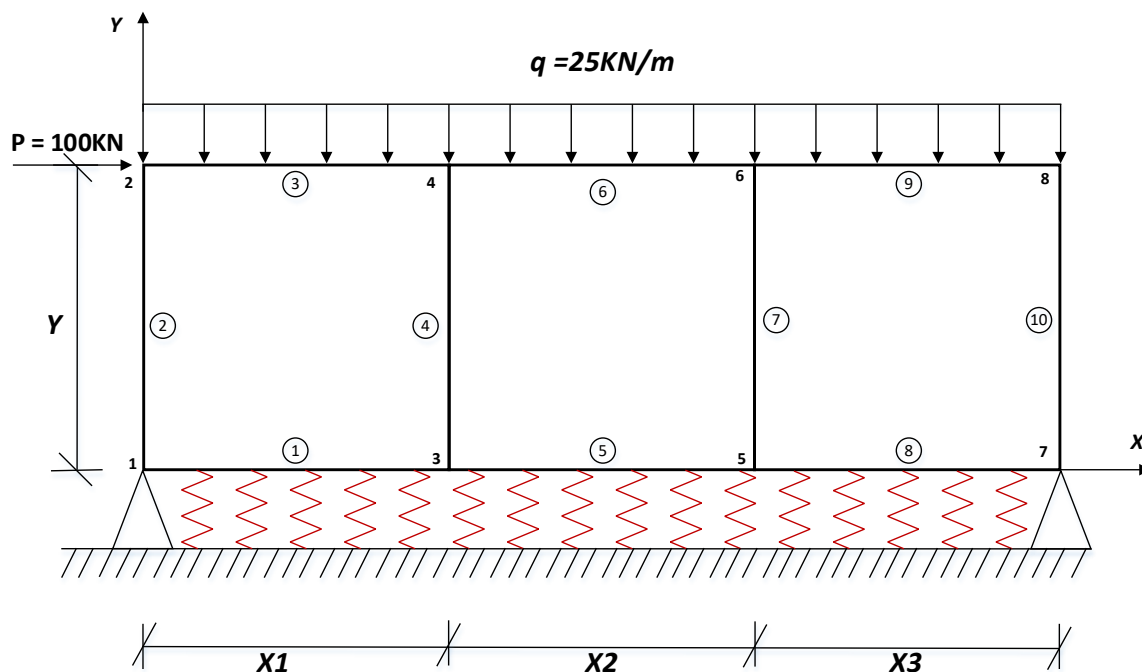
- 1) ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ (Απρίλιος 2013), [ΓΚΟΤΣΗΣ Κ. ΠΑΣΧΑΛΗΣ](#)
- 2) Foundation Design: Theory and Practice, N. S. V. Kameswara Rao
- 3) Analysis of Structure Supported on Elastic Foundation, International Journal of Engineering and Advanced Technology (IJEAT) ISSN: 2249 – 8958, Volume-4 Issue-1, October 2014
- 4) Beams on Elastic Foundation. The Simplified Continuum Approach, Iancu-Bogdan Teodoru
- 5) Consistent Stiffness Matrix for Analysis of Beams and Plates on an Elastic Foundation, Abdullah Gedikli and M. ERTAÇ ERGÜVEN
- 6) FOUNDATION ANALYSIS AND DESIGN (1997), J. E. Bowles
- 7) Bending the Foundation Beam on Elastic Base by Two Reaction Coefficient of Winkler's Subgrade (January 2019), Open Journal of Civil Engineering 09(02):123-134, Mirko Balabušić, Boris Folić, Slobodan Čorić
- 8) Ανάλυση Τοιχοποιίας Με Την Μέθοδο Των Πεπερασμένων Στοιχείων (Αθήνα 2019), Κόκκινος Τριαντάφυλλος Φίλης



# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

## Βήματα Επίλυσης Φορέα στο Microsoft EXCEL

Το πλαίσιο του Σχήματος 23 φέρει ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο  $25 \text{ KN/m}$  στα μέλη 3, 6 και 9 και συγκεντρωμένο φορτίο  $100 \text{ KN}$  στον κόμβο 2. Τα μέλη 1, 5 και 8 εδράζονται σε ελαστική θεμελίωση τύπου Winkler με σταθερά ελατηρίου  $K_S = 7500 \text{ KN/m}^3$ .



**Σχήμα 23.** Πλαισιωτός φορέας τριών ανοιγμάτων εδραζόμενος επί ελαστικού εδάφους τύπου Winkler.

Τα μέλη του φορέα έχουν διαφορετικές διατομές καθώς χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες, υποστυλώματα, δοκοί άνω και δοκοί κάτω. Τα εμβαδά και οι ροπές αδρανείας δίνονται στο φύλλο υπολογισμού του EXCEL και το μέτρο ελαστικότητας λαμβάνεται ίδιο για όλα τα στοιχεία με τιμή  $E = 21 \text{ GPa}$ .

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα βασικά βήματα της επίλυσης του φορέα όπως συντάχθηκαν στο EXCEL και παρατίθενται εικόνες από τα φύλλα υπολογισμού. Τέλος, γίνεται συγκριτική παρουσίαση της παραμόρφωσης του πλαισίου για διαφορετικές τιμές των τριών ανοιγμάτων του. Το πλήρες ηλεκτρονικό αρχείο EXCEL συνοδεύει αναπόσπαστα την ηλεκτρονική μορφή της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

### **Βήμα 1<sup>ο</sup>**

Εισαγωγή γεωμετρικών δεδομένων του πλαισίου, που είναι οι συντεταγμένες των κόμβων, η συνδεσιμότητα των κόμβων για τη μόρφωση των μελών, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των διατομών για τον υπολογισμό του εμβαδού των διατομών και των ροπών αδρανείας τους. Δίνονται, επίσης, τα μηχανικά χαρακτηριστικά των μελών του, δηλαδή το μέτρο ελαστικότητας, καθώς και οι ελαστικές σταθερές των ελατηρίων. Επίσης, εισάγονται τιμές για την εσωτερική φόρτιση των μελών του, το κατανεμημένο φορτίο  $q$ . Όλα τα προαναφερθέντα παρουσιάζονται στην Εικόνα 1, που ακολουθεί.

### **Βήμα 2<sup>ο</sup>**

Μόρφωση του μητρώου μετασχηματισμού και του μητρώου στιβαρότητας κάθε μέλους στο τοπικό σύστημα αξόνων αυτού και στη συνέχεια υπολογισμός του μητρώου στιβαρότητας του μέλους στο καθολικό σύστημα αξόνων του φορέα. Επίσης, προσδιορίζονται οι ακραίες δράσεις παγίωσης των μελών στο τοπικό και στη συνέχεια στο καθολικό σύστημα αξόνων. Τα ανωτέρω παρουσιάζονται στις Εικόνες 2 και 3.

### **Βήμα 3<sup>ο</sup>**

(α) Μόρφωση του ολικού μητρώου στιβαρότητας και του μητρώου επικόμβιων δράσεων παγίωσης του πλαισίου στο καθολικό σύστημα αξόνων συνδυάζοντας, αντίστοιχα, τα επιμέρους μητρώα στιβαρότητας και τα μητρώα ακραίων δράσεων παγίωσης των μελών στο καθολικό σύστημα αξόνων. Αυτά φαίνονται στην Εικόνα 4.

(β) Μηχανισμός αυτόματης μόρφωσης του μητρώου επικόμβιων δράσεων παγίωσης του πλαισίου συνδυάζοντας τα επιμέρους μητρώα ακραίων δράσεων παγίωσης των μελών του στο καθολικό σύστημα αξόνων. Παρουσιάζονται στην Εικόνα 5.

### Βήμα 4<sup>ο</sup>

Καταγραφή όλων των δεδομένων επικόμβιων μεγεθών του πλαισίου, δηλαδή των γνωστών επικόμβιων μετακινήσεων και των επιβεβλημένων επικόμβιων φορτίων και βάσει αυτών την μόρφωση του μητρώου αναδιάταξης του πλαισίου, το οποίο προκύπτει από την νέα σειρά βαθμών ελευθερίας, με την οποία διαχωρίζονται οι ελεύθεροι από τους δεσμευμένους βαθμούς. Ακολούθως, μορφώνεται μονοδιάστατο μητρώο με στοιχεία του τις μετακινήσεις των δεσμευμένων βαθμών (μετακινήσεις στηρίξεων) και δεύτερο με τα επικόμβια φορτία στις ελεύθερες διευθύνσεις (επιβεβλημένα εξωτερικά φορτία). Επίσης, συγκεντρώνονται οι επικόμβιες δράσεις παγίωσης στους κόμβους του φορέα και διαχωρίζονται σε δύο μητρώα σύμφωνα με τους ελεύθερους και δεσμευμένους βαθμούς. Το σύνολο των ενεργειών αυτών παρουσιάζονται, στη συνέχεια, στις Εικόνες 6, 7 και 8.

### Βήμα 5<sup>ο</sup>

Υπολογισμός του τροποποιημένου (αναδιατεταγμένου) μητρώου στιβαρότητας  $[K_m]$  του πλαισίου βάσει του μητρώου αναδιάταξης  $[V]$  και του ολικού μητρώου στιβαρότητας  $[K]$  του πλαισίου σύμφωνα με τη σχέση  $[K_m]=[V] [K] [V]^T$ . Αυτά φαίνονται στην Εικόνα 9.

### Βήμα 6<sup>ο</sup>

Η ισοδύναμη φόρτιση προκύπτει από την επαλληλία των δεδομένων εξωτερικών επικόμβιων φορτίων και μαζί μετακινήσεων στηρίξεων με τις αντίθετες των δράσεων παγίωσης του φορέα, σύμφωνα με την έκφραση  $[P_f]_{\text{ισοδ}}=[P_f]-[S_f]$ . Προσδιορίζονται τα επικόμβια φορτία της Ισοδύναμης Φόρτισης και στη συνέχεια επιλύονται οι εξισώσεις της σχέσης στιβαρότητας  $[K_m] [\Delta_m]=[P_m]$  για τον υπολογισμό των άγνωστων επικόμβιων μετατοπίσεων  $[\Delta_f]_{\text{ισοδ}}$  και των αντιδράσεων  $[P_s]_{\text{ισοδ}}$  του πλαισίου, λόγω της ισοδύναμης φόρτισης. Οι επικόμβιες μετατοπίσεις για την Ισοδύναμη Φόρτιση είναι ίδιες με αυτές της αρχικής συνολικής φόρτισης του φορέα και στην οποία συμπεριλαμβάνεται η εσωτερική φόρτιση των μελών. Αναλυτικά, τα προαναφερθέντα δίνονται στην Εικόνα 10.

## Βήμα 7<sup>ο</sup>

Μόρφωση του τροποποιημένου μητρώου επικόμβιων μετατοπίσεων  $[\Delta_m]_{\text{Ισοδ}}$  από τα επιμέρους μητρώα επικόμβιων μετατοπίσεων  $[\Delta_f]_{\text{Ισοδ}}$  των ελεύθερων βαθμών και  $[\Delta_s]_{\text{Ισοδ}}$  των δεσμευμένων βαθμών και αναδιάταξη αυτού για τον προσδιορισμό του μητρώου επικόμβιων μετατοπίσεων  $[\Delta \text{ bar}]_{\text{Ισοδ}}$ . Αυτές οι πράξεις παρουσιάζονται στην Εικόνα 11.

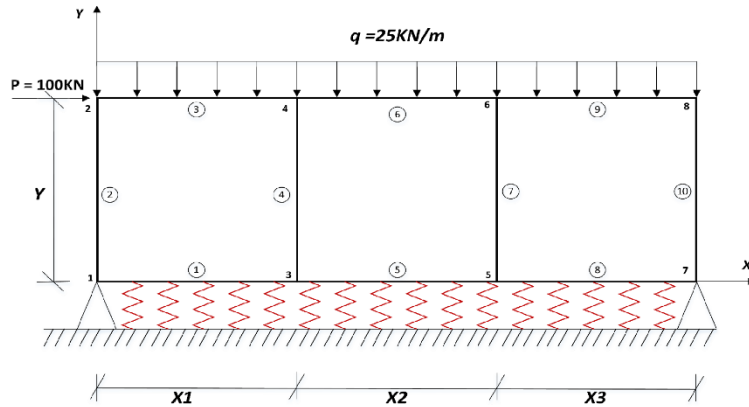
## Βήμα 8<sup>ο</sup>

Για την ισοδύναμη φόρτιση μορφώνονται τα μητρώα ακραίων μετακινήσεων  $[D_i \text{ bar}]$  των μελών στο καθολικό σύστημα αξόνων, στη συνέχεια, μέσω του μητρώου μετασχηματισμού κάθε μέλους υπολογίζεται το αντίστοιχο μητρώο ακραίων μετακινήσεων  $[D_i]$  στο τοπικό σύστημα αξόνων του μέλους και με το τοπικό μητρώο στιβαρότητας προσδιορίζονται οι ακραίες δράσεις του μέλους στο τοπικό σύστημα αξόνων για την ισοδύναμη φόρτιση. Κατόπιν επαλληλίας με τις ακραίες δράσεις παγίωσης καθορίζονται τα εντατικά μεγέθη  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  στα άκρα των μελών για την συνολική αρχική φόρτιση του πλαισίου. Τα επιμέρους αυτά υπολογιστικά βήματα δίνονται στις Εικόνες 12 και 13.

## Αποτελέσματα

Στην Εικόνα 14 έχει αποτυπωθεί η παραμόρφωση του πλαισιωτού φορέα του Σχήματος 23 για δύο διαφορετικές περιπτώσεις τιμών των ανοιγμάτων του. Στην πρώτη, τα τρία ανοίγματα των μελών 1, 5 και 8 είναι 6m, 10m και 8m, αντίστοιχα, ενώ στη δεύτερη περίπτωση τα ίδια μέλη έχουν μήκη 8m, 8m και 8m, αντίστοιχα. Στην Εικόνα 14 φαίνεται καθαρά η επιρροή του μήκους των ανοιγμάτων στην παραμόρφωση του πλαισιωτού φορέα, καθώς και τα μέγιστα βέλη κάμψης των μελών του.

**Βήμα 1:** Εισαγωγή γεωμετρικών δεδομένων του πλαισίου (συντεταγμένες κόμβων και συνδεσιμότητα κόμβων για τη μόρφωση των μελών), φυσικών χαρακτηριστικών των μελών του (μέτρο ελαστικότητας, εμβαδόν διατομής και ροπή αδράνειας περί τον άξονα Y) και της εσωτερικής φόρτισης των μελών του (καταναμημένο φορτίο q ή και συγκεντρωμένη δύναμη P στο μέσον του μέλους).

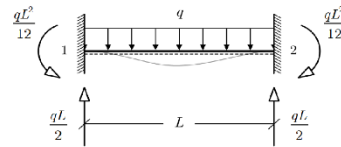


Συντεταγμένες στο καθολικό σύστημα αξόνων

Κόμβος	X	Y
1	0.0	0.0
2	0.0	4.0
3	8.0	0.0
4	8.0	4.0
5	16.0	0.0
6	16.0	4.0
7	24.0	0.0
8	24.0	4.0

ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Y:	4	m
X1:	8	m
X2:	8	m
X3:	8	m
E:	21	Gpa
Ks:	7500	KN/m <sup>3</sup>



Μέλος	Ei(KN/m <sup>2</sup> )	Ai(m <sup>2</sup> )	Ii(m <sup>4</sup> )	Καταναμημένο φορτίο q(KN/m)
1	2.10E+07	2.00E-01	0.0042	0
2	2.10E+07	9.00E-02	0.0007	0
3	2.10E+07	1.80E-01	0.0054	25
4	2.10E+07	9.00E-02	0.0007	0
5	2.10E+07	2.00E-01	0.0042	0
6	2.10E+07	1.80E-01	0.0054	25
7	2.10E+07	9.00E-02	0.0007	0
8	2.10E+07	2.00E-01	0.0042	0
9	2.10E+07	1.80E-01	0.0054	25
10	2.10E+07	9.00E-02	0.0007	0

ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΤΟΜΩΝ

	Υποστυλώμα			m
	1	2	3	
b:	0.30	0.30	0.40	
h:	0.30	0.60	0.50	

Μέλος	Συνδεσιμότητα Κόμβων		Τύπος Διατομής	Συντεταγμένες στο καθολικό σύστημα αξόνων				ΔX1	ΔX2	Li	cosθi	sinθi
	αρχή j	πέρασ k		X1	X2	X1	X2					
1	1	3	3	0.0	0.0	8.0	0.0	8.0	0.0	8.00	1.0000	0.0000
2	1	2	1	0.0	0.0	0.0	4.0	0.0	4.0	4.00	0.0000	1.0000
3	2	4	2	0.0	4.0	8.0	4.0	8.0	0.0	8.00	1.0000	0.0000
4	3	4	1	8.0	0.0	8.0	4.0	0.0	4.0	4.00	0.0000	1.0000
5	3	5	3	8.0	0.0	16.0	0.0	8.0	0.0	8.00	1.0000	0.0000
6	4	6	2	8.0	4.0	16.0	4.0	8.0	0.0	8.00	1.0000	0.0000
7	5	6	1	16.0	0.0	16.0	4.0	0.0	4.0	4.00	0.0000	1.0000
8	5	7	3	16.0	0.0	24.0	0.0	8.0	0.0	8.00	1.0000	0.0000
9	6	8	2	16.0	4.0	24.0	4.0	8.0	0.0	8.00	1.0000	0.0000
10	7	8	1	24.0	0.0	24.0	4.0	0.0	4.0	4.00	0.0000	1.0000

Εικόνα 1<sup>η</sup>

**Βήμα 2:** Μόρφωση του Μητρώου Μετασχηματισμού και του Μητρώου Στιβαρότητας στο τοπικό σύστημα του μέλους και υπολογισμός του Μητρώου Στιβαρότητας κάθε μέλους στο καθολικό σύστημα αξόνων του φορέα.

**Μέλος 1**  
 αρχή : 1  
 πέρας : 3  
 μήκος : 8.00  
 cosθ = 1.0000  
 sinθ = 0.0000  
 Ks: 7500

EI = 87500  
 EA = 4200000  
 q = 0.0

**[Λ<sub>i</sub>]**

Μητρώα Μετασχηματισμού των μελών από το τοπικό στο καθολικό σύστημα

1.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0000	1.0000	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1.0000	0.0000	0
0	0	0	0.0000	1.0000	0
0	0	0	0	0	1

**[K<sub>i</sub>]**

Μητρώα Στιβαρότητας μελών στο τοπικό σύστημα αξόνων τους

5.25E+05	0.00E+00	0.00E+00	-5.25E+05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	2.43E+04	3.33E+04	0.00E+00	5.66E+03	-6.65E+03
0.00E+00	3.33E+04	8.03E+04	0.00E+00	6.65E+03	-5.55E+03
-5.25E+05	0.00E+00	0.00E+00	5.25E+05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	5.66E+03	6.65E+03	0.00E+00	2.43E+04	-3.33E+04
0.00E+00	-6.65E+03	-5.55E+03	0.00E+00	-3.33E+04	8.03E+04

**Μέλος 2**  
 αρχή : 1  
 πέρας : 2  
 μήκος : 4.00  
 cosθ = 0.0000  
 sinθ = 1.0000

EI = 141.75  
 EA = 1890000  
 q = 0.0

0.0000	1.0000	0	0	0	0
-1.0000	0.0000	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0.0000	1.0000	0
0	0	0	-1.0000	0.0000	0
0	0	0	0	0	1

4.73E+05	0.00E+00	0.00E+00	-4.73E+05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	2.66E+03	5.32E+03	0.00E+00	-2.66E+03	5.32E+03
0.00E+00	5.32E+03	1.42E+04	0.00E+00	-5.32E+03	7.09E+03
-4.73E+05	0.00E+00	0.00E+00	4.73E+05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	-2.66E+03	-5.32E+03	0.00E+00	2.66E+03	-5.32E+03
0.00E+00	5.32E+03	7.09E+03	0.00E+00	-5.32E+03	1.42E+04

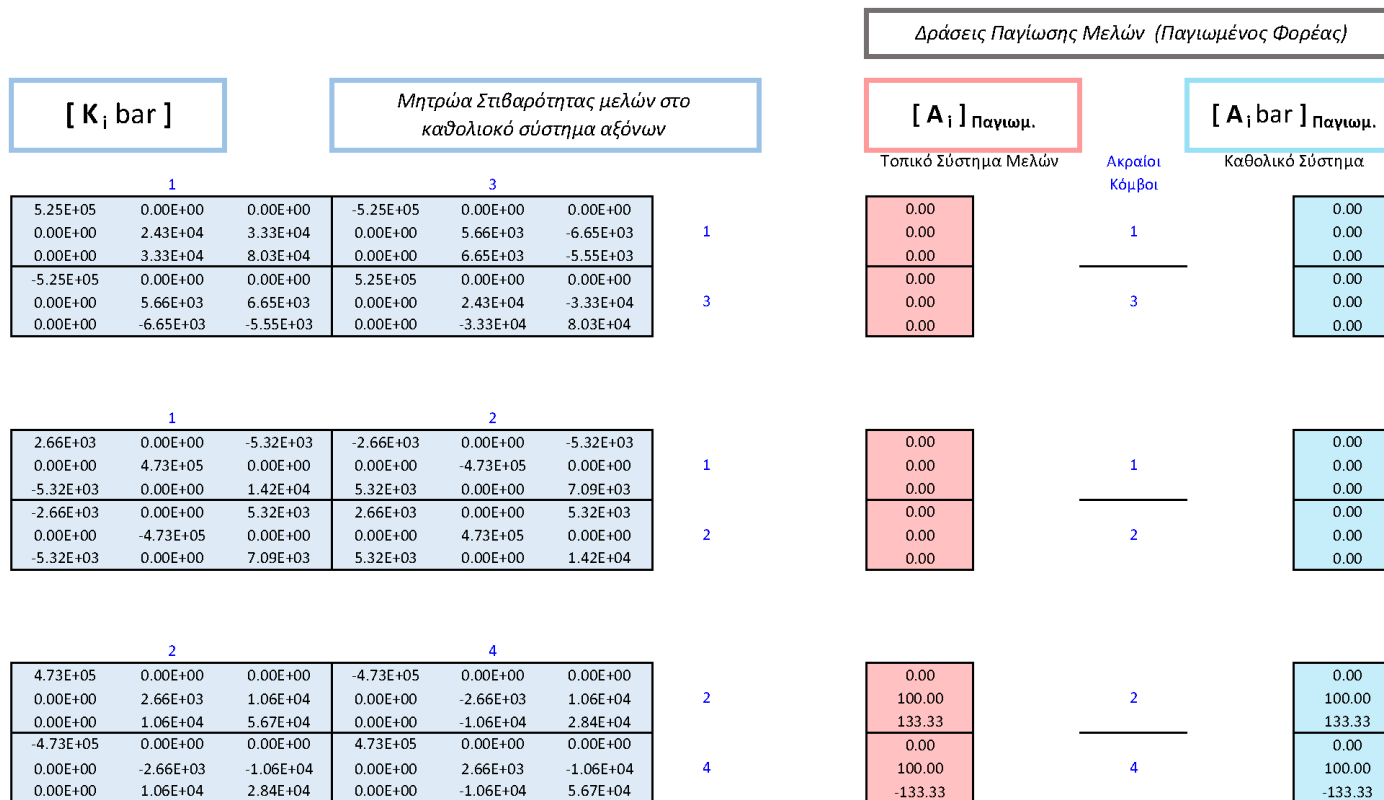
**Μέλος 3**  
 αρχή : 2  
 πέρας : 4  
 μήκος : 8.00  
 cosθ = 1.0000  
 sinθ = 0.0000

EI = 113400  
 EA = 3780000  
 q = 25.0

1.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0000	1.0000	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1.0000	0.0000	0
0	0	0	0.0000	1.0000	0
0	0	0	0	0	1

4.73E+05	0.00E+00	0.00E+00	-4.73E+05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	2.66E+03	1.06E+04	0.00E+00	-2.66E+03	1.06E+04
0.00E+00	1.06E+04	5.67E+04	0.00E+00	-1.06E+04	2.84E+04
-4.73E+05	0.00E+00	0.00E+00	4.73E+05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	-2.66E+03	-1.06E+04	0.00E+00	2.66E+03	-1.06E+04
0.00E+00	1.06E+04	2.84E+04	0.00E+00	-1.06E+04	5.67E+04

**Εικόνα 2<sup>η</sup>**



**Εικόνα 3<sup>η</sup>**

**Βήμα 3α:** Μάρκωση του Ολικού Μητρώου Στιβαρότητας και του Μητρώου Επικείμενων Δράσεων Παγίωσης του πλαισίου στο καθολικό σύστημα αξόνων συνδυάζοντας, αντίστοιχα, τα επιμέρους μητρώα στιβαρότητας και τα μητρώα ακραίων δράσεων παγίωσης των μελών στο καθολικό σύστημα αξόνων.

Κόμβοι	Βαθ. Ελευθ.	1			2			3			4			5			6			7			8			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
1	1	5.28E+05	0.00E+00	-5.32E+03	-2.66E+03	0.00E+00	-5.32E+03	-5.25E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	2	0.00E+00	4.97E+05	3.33E+04	0.00E+00	-4.73E+05	0.00E+00	0.00E+00	5.66E+03	-6.65E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	3	-5.32E+03	3.33E+04	9.45E+04	5.32E+03	0.00E+00	7.09E+03	0.00E+00	6.65E+03	-5.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
2	4	-2.66E+03	0.00E+00	5.32E+03	4.75E+05	0.00E+00	5.32E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-4.73E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	5	0.00E+00	-4.73E+05	0.00E+00	0.00E+00	4.75E+05	1.06E+04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.66E+03	1.06E+04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	6	-5.32E+03	0.00E+00	7.09E+03	5.32E+03	1.06E+04	7.09E+04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.06E+04	2.84E+04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
3	7	-5.25E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.05E+06	0.00E+00	-5.32E+03	-2.66E+03	0.00E+00	-5.32E+03	-5.25E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	8	0.00E+00	5.66E+03	6.65E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.21E+05	0.00E+00	0.00E+00	-4.73E+05	0.00E+00	0.00E+00	5.66E+03	-6.65E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	9	0.00E+00	-6.65E+03	-5.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-5.32E+03	0.00E+00	1.75E+05	5.32E+03	0.00E+00	7.09E+03	0.00E+00	6.65E+03	-5.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
4	10	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-4.73E+05	0.00E+00	0.00E+00	-2.66E+03	0.00E+00	5.32E+03	9.48E+05	0.00E+00	5.32E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-4.73E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	11	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.66E+03	-1.06E+04	0.00E+00	-4.73E+05	0.00E+00	0.00E+00	4.78E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.66E+03	1.06E+04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	12	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.06E+04	2.84E+04	-5.32E+03	0.00E+00	7.09E+03	5.32E+03	0.00E+00	1.28E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.06E+04	2.84E+04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
5	13	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-5.25E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.05E+06	0.00E+00	-5.32E+03	-2.66E+03	0.00E+00	-5.32E+03	-5.25E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	14	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.66E+03	6.65E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.21E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-4.73E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	15	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-6.65E+03	-5.55E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
6	16	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-4.73E+05	0.00E+00	0.00E+00	-2.66E+03	0.00E+00	5.32E+03	9.48E+05	0.00E+00	5.32E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	17	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.66E+03	-1.06E+04	0.00E+00	-4.73E+05	0.00E+00	0.00E+00	4.78E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	18	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.06E+04	2.84E+04	-5.32E+03	0.00E+00	7.09E+03	5.32E+03	0.00E+00	1.28E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
7	19	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-5.25E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	20	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.66E+03	6.65E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	21	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
8	22	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-4.73E+05	0.00E+00	0.00E+00	-2.66E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	23	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.66E+03	-1.06E+04	0.00E+00	-4.73E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	24	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.06E+04	2.84E+04	-5.32E+03	0.00E+00	7.09E+03	5.32E+03	-1.06E+04	2.84E+04	7.09E+03

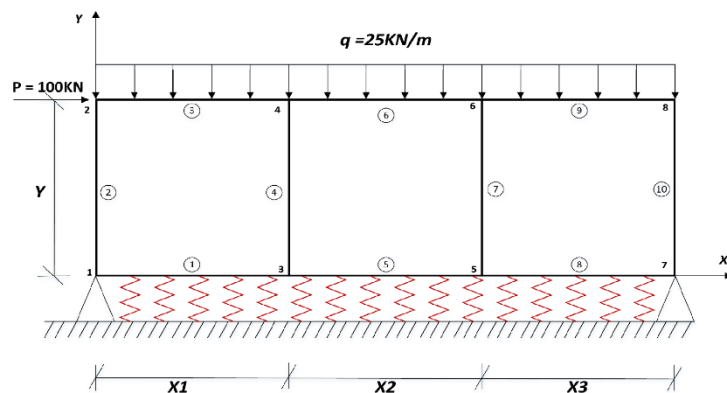
[S <sub>frame</sub> ]	Βαθ. Ελευθ.	Κόμβοι
0.00	1	1
0.00	2	1
0.00	3	
0.00	4	
100.00	5	2
133.33	6	
0.00	7	
0.00	8	3
0.00	9	
0.00	10	
200.00	11	4
0.00	12	
0.00	13	
0.00	14	5
0.00	15	
0.00	16	
200.00	17	6
0.00	18	
0.00	19	
0.00	20	7
0.00	21	
0.00	22	
100.00	23	8
-133.33	24	

**Εικόνα 4<sup>η</sup>**





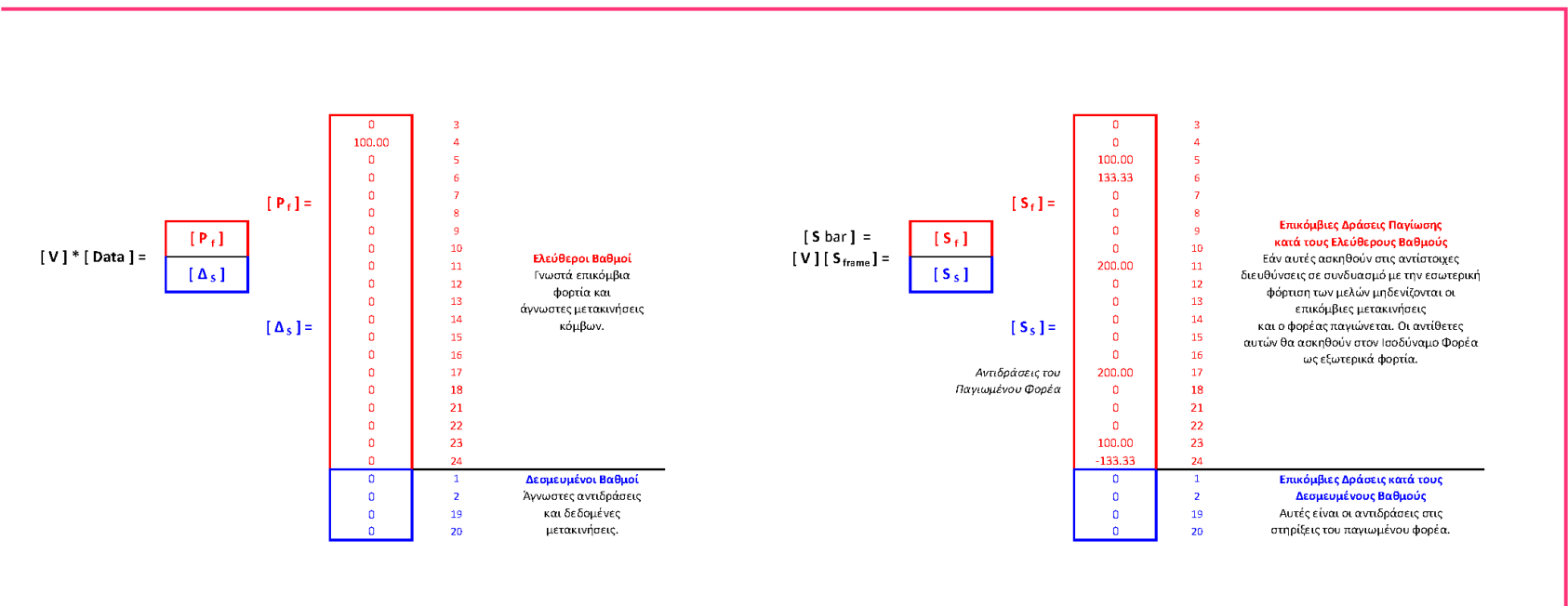
**Βήμα 4:** Καταγραφή όλων των δεδομένων επικόμβιων μεγεθών του πλαισίου, δηλαδή των γνωστών επικόμβιων μετακινήσεων και των επιβεβλημένων επικόμβιων φορτίων και βάσει αυτών μόρφωση του Μητρώου Αναδιάταξης του πλαισίου



Κόμβος	Βαθ. Ελευθ.	ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΚΟΜΒΩΝ		[ Data ]		Νέα σειρά βαθ. ελευθ.	
		Pi	Δi	Pi ή Δi			
1	1		0.00	0.00000	1	3	
	2		0.00	0.00000		2	4
	3	0.00		0.00000		3	5
2	4	100.00		100.00	4	6	
	5	0.00		0.00		5	7
	6	0.00		0.00		6	8
3	7	0.00		0.00	7	9	
	8	0.00		0.00		8	10
	9	0.00		0.00		9	11
4	10	0.00		0.00	10	12	
	11	0.00		0.00		11	13
	12	0.00		0.00		12	14
5	13	0.00		0.00000	13	15	
	14	0.00		0.00000		14	16
	15	0.00		0.00		15	17
6	16	0.00		0.00	16	18	
	17	0.00		0.00		17	21
	18	0.00		0.00		18	22
7	19		0.00	0.00000	19	23	
	20		0.00	0.00000		20	24
	21	0.00		0.00		21	
8	22	0.00		0.00000	22	1	
	23	0.00		0.00000		23	2
	24	0.00		0.00		24	19

■ άγνωστο μέγεθος

**Εικόνα 6<sup>η</sup>**



**Εικόνα 7<sup>η</sup>**

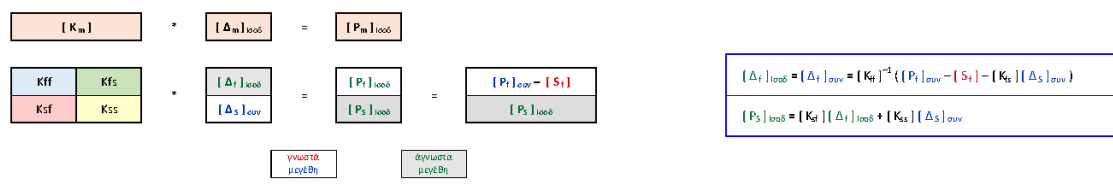
[V] =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

**Εικόνα 8<sup>η</sup>**

**Βήμα 5:** Υπόλογισμός του τροποποιημένου (αναδιατεταγμένου) Μητρώου Στιβαρότητας  $[K_m]$  του πλαισίου βάσει του Μητρώου Αναδιάταξης  $[V]$  και του Ολικού Μητρώου Στιβαρότητας  $[K]$  του πλαισίου:  $[K_m] = [V] [K] [V]^T$

		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	21	22	23	24	1	2	19	20	
3		94496.43	5315.63	0.00	7087.50	0.00	6654.02	-5553.57	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4		5315.63	475157.81	0.00	5315.63	0.00	0.00	0.00	-472500.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5		0.00	0.00	475157.81	10631.25	0.00	0.00	0.00	0.00	-2657.81	10631.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
6		7087.50	5315.63	10631.25	70875.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-10631.25	28350.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7		0.00	0.00	0.00	0.00	1052657.81	0.00	-5315.63	-2657.81	0.00	-5315.63	-525000.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
8		6654.02	0.00	0.00	0.00	0.00	521172.99	0.00	0.00	-472500.00	0.00	0.00	5663.50	-6654.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9		-5553.57	0.00	0.00	0.00	-5315.63	0.00	174817.86	5315.63	0.00	7087.50	0.00	6654.02	-5553.57	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10		0.00	-472500.00	0.00	0.00	-2657.81	0.00	5315.63	947657.81	0.00	5315.63	0.00	0.00	-472500.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
11		0.00	0.00	-2657.81	-10631.25	0.00	-472500.00	0.00	0.00	477815.63	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-2657.81	10631.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
12		0.00	0.00	10631.25	28350.00	-5315.63	0.00	7087.50	5315.63	0.00	127575.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-10631.25	28350.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
13		0.00	0.00	0.00	-525000.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1051657.81	0.00	-5315.63	-2657.81	0.00	-5315.63	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-525000.00
14		0.00	0.00	0.00	0.00	5663.50	6654.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	521172.99	0.00	0.00	-472500.00	0.00	-6654.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	5663.50
15		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-6654.02	-5553.57	0.00	0.00	0.00	0.00	174817.86	5315.63	0.00	7087.50	-5553.57	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	6654.02
16		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-472500.00	0.00	0.00	-2657.81	0.00	5315.63	947657.81	0.00	5315.63	0.00	-472500.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
17		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-2657.81	-10631.25	0.00	-472500.00	0.00	477815.63	0.00	0.00	0.00	-2657.81	10631.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
18		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	10631.25	28350.00	-5315.63	0.00	7087.50	5315.63	0.00	127575.00	0.00	0.00	-10631.25	28350.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
21		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-6654.02	-5553.57	0.00	0.00	0.00	94496.43	5315.63	0.00	7087.50	0.00	0.00	0.00	-5315.63	-33345.98	
22		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-472500.00	0.00	0.00	5315.63	475157.81	0.00	5315.63	0.00	0.00	0.00	-2657.81	0.00	
23		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-2657.81	-10631.25	0.00	0.00	475157.81	-10631.25	0.00	0.00	0.00	0.00	-472500.00	
24		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	10631.25	28350.00	7087.50	5315.63	-10631.25	70875.00	0.00	0.00	0.00	-5315.63	0.00
1		-5315.63	-2657.81	0.00	-5315.63	-525000.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	527657.81	0.00	0.00	0.00
2		33345.98	0.00	-472500.00	0.00	0.00	5663.50	-6654.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	496836.50	0.00	0.00
19		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-525000.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-5315.63	-2657.81	0.00	-5315.63	0.00	0.00	0.00	527657.81	0.00	0.00
20		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	5663.50	6654.02	0.00	0.00	0.00	-33345.98	0.00	-472500.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	496836.50



**Εικόνα 9<sup>η</sup>**

**Βήμα 6:** Η Ισοδύναμη Φόρτιση είναι επαλληλία των δεδομένων εξωτερικών επικόμβιων φορτίων μετακινήσεων στηρίξεων και των αντίθετων των δράσεων παγίωσης του φορέα,  $[P_f]_{\text{ισοδ}} = [P_f] - [S_f]$ . Προσδιορίζονται τα επικόμβια φορτία της Ισοδύναμης Φόρτισης και στη συνέχεια επιλύονται οι εξισώσεις της σχέσης σταθερότητας  $[K_m] [\Delta_m] = [P_m]$  για τον υπολογισμό των επικόμβιων μετατοπίσεων  $[\Delta_f]_{\text{ισοδ}}$  και αντιδράσεων  $[P_s]_{\text{ισοδ}}$  του πλαισίου λόγω της ισοδύναμης φόρτισης. Οι επικόμβιες μετατοπίσεις για την Ισοδύναμη Φόρτιση είναι ίδιες με αυτές της συνολικής φόρτισης στην οποία συμπεριλαμβάνεται και η εσωτερική φόρτιση των μελών.

Μετατοπίσεις ελεύθερων βαθμών  
Ισοδύναμου Φορέα

$$[\Delta_f]_{\text{ισοδ}} = [K_{ff}]^{-1} * ([P_f]_{\text{ισοδ}} - [K_{fs}] * [\Delta_s]_{\text{αυν}})$$

	<p>Ισοδύναμη Φόρτιση</p> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid red;">0.00</td><td style="border: 1px solid red;">3</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">100.00</td><td style="border: 1px solid red;">4</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">-100.00</td><td style="border: 1px solid red;">5</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">-133.33</td><td style="border: 1px solid red;">6</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">0.00</td><td style="border: 1px solid red;">7</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">0.00</td><td style="border: 1px solid red;">8</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">0.00</td><td style="border: 1px solid red;">9</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">0.00</td><td style="border: 1px solid red;">10</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">-200.00</td><td style="border: 1px solid red;">11</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">0.00</td><td style="border: 1px solid red;">12</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">0</td><td style="border: 1px solid red;">13</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">0</td><td style="border: 1px solid red;">14</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">0</td><td style="border: 1px solid red;">15</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">0</td><td style="border: 1px solid red;">16</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">-200</td><td style="border: 1px solid red;">17</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">0</td><td style="border: 1px solid red;">18</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">0</td><td style="border: 1px solid red;">21</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">0</td><td style="border: 1px solid red;">22</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">-100</td><td style="border: 1px solid red;">23</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">133.33</td><td style="border: 1px solid red;">24</td></tr> </table>	0.00	3	100.00	4	-100.00	5	-133.33	6	0.00	7	0.00	8	0.00	9	0.00	10	-200.00	11	0.00	12	0	13	0	14	0	15	0	16	-200	17	0	18	0	21	0	22	-100	23	133.33	24	
0.00	3																																									
100.00	4																																									
-100.00	5																																									
-133.33	6																																									
0.00	7																																									
0.00	8																																									
0.00	9																																									
0.00	10																																									
-200.00	11																																									
0.00	12																																									
0	13																																									
0	14																																									
0	15																																									
0	16																																									
-200	17																																									
0	18																																									
0	21																																									
0	22																																									
-100	23																																									
133.33	24																																									
$[P_f]_{\text{ισοδ}} =$ $[P_f]_{\text{αυν}} - [S_f] =$	$[\Delta_f]_{\text{ισοδ}} =$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid red;">-1.19E-04</td><td style="border: 1px solid red;">3</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">1.16E-02</td><td style="border: 1px solid red;">4</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">-1.61E-04</td><td style="border: 1px solid red;">5</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">-3.42E-03</td><td style="border: 1px solid red;">6</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">5.26E-05</td><td style="border: 1px solid red;">7</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">-4.09E-03</td><td style="border: 1px solid red;">8</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">-2.17E-04</td><td style="border: 1px solid red;">9</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">1.14E-02</td><td style="border: 1px solid red;">10</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">-4.55E-03</td><td style="border: 1px solid red;">11</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">6.59E-05</td><td style="border: 1px solid red;">12</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">4.94E-05</td><td style="border: 1px solid red;">13</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">-3.95E-03</td><td style="border: 1px solid red;">14</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">-5.16E-04</td><td style="border: 1px solid red;">15</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">1.13E-02</td><td style="border: 1px solid red;">16</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">-4.40E-03</td><td style="border: 1px solid red;">17</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">-5.34E-04</td><td style="border: 1px solid red;">18</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">-1.09E-03</td><td style="border: 1px solid red;">21</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">1.12E-02</td><td style="border: 1px solid red;">22</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">-2.02E-04</td><td style="border: 1px solid red;">23</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid red;">1.99E-03</td><td style="border: 1px solid red;">24</td></tr> </table>	-1.19E-04	3	1.16E-02	4	-1.61E-04	5	-3.42E-03	6	5.26E-05	7	-4.09E-03	8	-2.17E-04	9	1.14E-02	10	-4.55E-03	11	6.59E-05	12	4.94E-05	13	-3.95E-03	14	-5.16E-04	15	1.13E-02	16	-4.40E-03	17	-5.34E-04	18	-1.09E-03	21	1.12E-02	22	-2.02E-04	23	1.99E-03	24
-1.19E-04	3																																									
1.16E-02	4																																									
-1.61E-04	5																																									
-3.42E-03	6																																									
5.26E-05	7																																									
-4.09E-03	8																																									
-2.17E-04	9																																									
1.14E-02	10																																									
-4.55E-03	11																																									
6.59E-05	12																																									
4.94E-05	13																																									
-3.95E-03	14																																									
-5.16E-04	15																																									
1.13E-02	16																																									
-4.40E-03	17																																									
-5.34E-04	18																																									
-1.09E-03	21																																									
1.12E-02	22																																									
-2.02E-04	23																																									
1.99E-03	24																																									

**ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΙΣ  $[P_s]_{\text{αυν}}$  ΤΟΥ ΑΡΧΙΚΟΥ ΦΟΡΕΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΗΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ**

	<p>Αντιδράσεις του αρχικού φορέα για το σύνολο της φόρτισης στους κόμβους και στα μέλη του.</p>																	
$[P_s]_{\text{αυν}} = [S_s] + [P_s]_{\text{ισοδ}} =$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black;">0.00</td><td style="border: 1px solid black;">1</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">0.00</td><td style="border: 1px solid black;">2</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">0.00</td><td style="border: 1px solid black;">19</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">0.00</td><td style="border: 1px solid black;">20</td></tr> </table>	0.00	1	0.00	2	0.00	19	0.00	20	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black;">-39.54</td><td style="border: 1px solid black;">1</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">50.31</td><td style="border: 1px solid black;">2</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">-60.46</td><td style="border: 1px solid black;">19</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">106.07</td><td style="border: 1px solid black;">20</td></tr> </table>	-39.54	1	50.31	2	-60.46	19	106.07	20
0.00	1																	
0.00	2																	
0.00	19																	
0.00	20																	
-39.54	1																	
50.31	2																	
-60.46	19																	
106.07	20																	

Αντιδράσεις του φορέα για την Ισοδύναμη Φόρτιση

$$[P_s]_{\text{ισοδ}} = [K_{sf}] * [\Delta_f]_{\text{ισοδ}} + [K_{ss}] * [\Delta_s]$$

	<p>Αντιδράσεις του φορέα για την Ισοδύναμη Φόρτιση</p>									
$[\Delta_s]_{\text{ισοδ}} = [\Delta_s]_{\text{αυν}} =$	$[P_s]_{\text{ισοδ}} =$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black;">0.0000</td><td style="border: 1px solid black;">1</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">0.0000</td><td style="border: 1px solid black;">2</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">0.0000</td><td style="border: 1px solid black;">19</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;">0.0000</td><td style="border: 1px solid black;">20</td></tr> </table>	0.0000	1	0.0000	2	0.0000	19	0.0000	20
0.0000	1									
0.0000	2									
0.0000	19									
0.0000	20									

**Εικόνα 10<sup>η</sup>**

**Βήμα 7:** Μόρφωση του Τροποποιημένου Μητρώου Επικόμβιων Μετατοπίσεων  $[\Delta_m]_{ισοδ}$  από τα επιμέρους μητρώα επικόμβιων μετατοπίσεων  $[\Delta_f]_{ισοδ}$  των ελεύθερων βαθμών και  $[\Delta_s]_{ισοδ}$  των δεσμευμένων βαθμών. Αναδιάταξη αυτού για τον προσδιορισμό του Μητρώου Επικόμβιων Μετατοπίσεων  $[\Delta bar]_{ισοδ}$

$$[\Delta_m]_{ισοδ} = \begin{bmatrix} [\Delta_f]_{ισοδ} \\ [\Delta_s]_{ισοδ} \end{bmatrix} =$$

	Βαθ. Ελευθ.
-1.19E-04	3
1.16E-02	4
-1.61E-04	5
-3.42E-03	6
5.26E-05	7
-4.09E-03	8
-2.17E-04	9
1.14E-02	10
-4.55E-03	11
6.59E-05	12
4.94E-05	13
-3.95E-03	14
-5.16E-04	15
1.13E-02	16
-4.40E-03	17
-5.34E-04	18
-1.09E-03	21
1.12E-02	22
-2.02E-04	23
1.99E-03	24
0.00	1
0.00	2
0.00	19
0.00	20

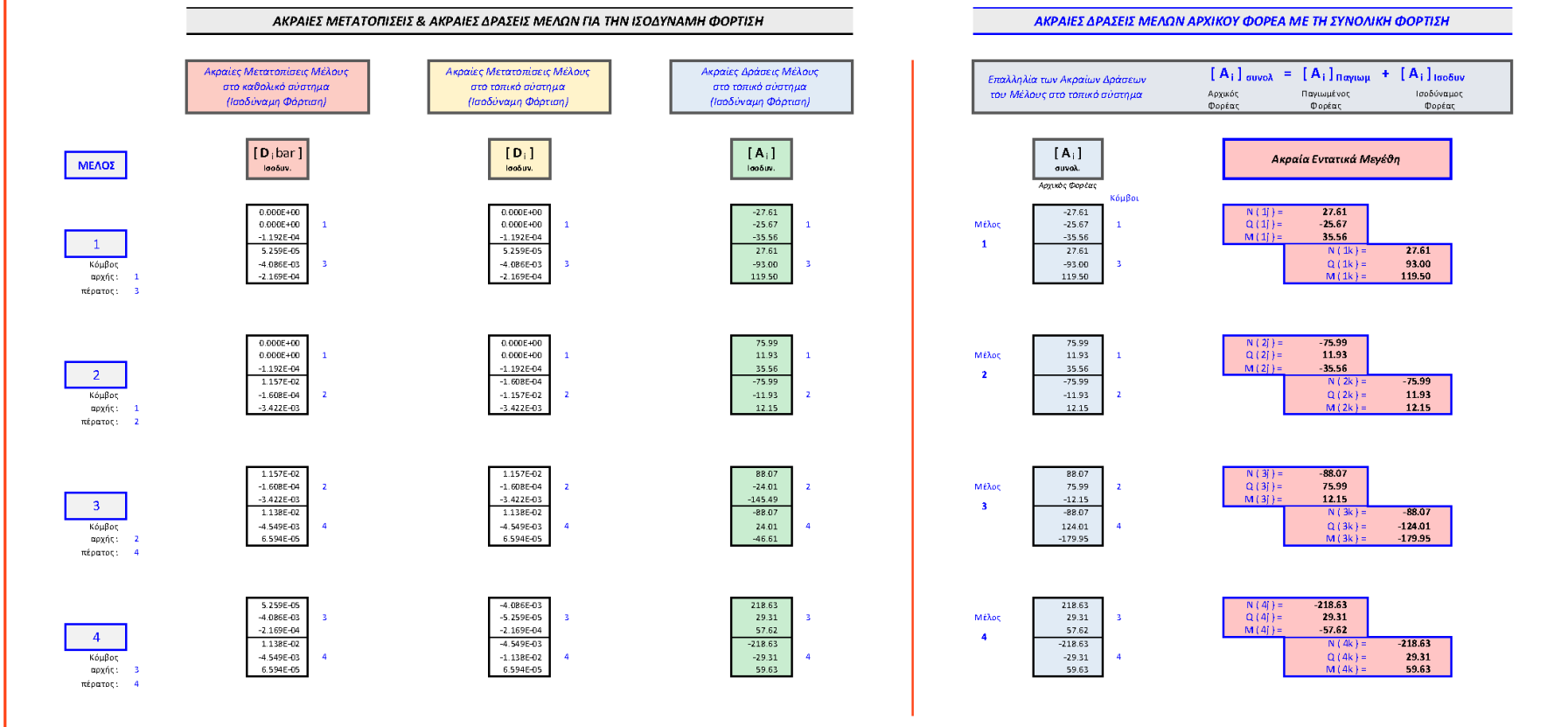
$$[\Delta bar]_{συν} = [V]^T [\Delta_m]_{συν} =$$

Μητρώο Επικόμβιων  
Μετακινήσεων του  
Ισοδύναμου Φορέα, που  
είναι ίδιο με αυτό του  
αρχικού φορέα για το  
σύνολο της φόρτισης.

	Βαθ. Ελευθ.	KOMBOΣ
0.00E+00	1	
0.00E+00	2	1
-1.19E-04	3	
1.16E-02	4	
-1.61E-04	5	2
-3.42E-03	6	
5.26E-05	7	
-4.09E-03	8	3
-2.17E-04	9	
1.14E-02	10	
-4.55E-03	11	4
6.59E-05	12	
4.94E-05	13	
-3.95E-03	14	5
-5.16E-04	15	
1.13E-02	16	
-4.40E-03	17	6
-5.34E-04	18	
0.00E+00	19	
0.00E+00	20	7
-1.09E-03	21	
1.12E-02	22	
-2.02E-04	23	8
1.99E-03	24	

**Εικόνα 11<sup>η</sup>**

**Βήμα 8:** Για την Ισοδύναμη Φόρτιση μάρφωση του Μητρώου Ακράιων Μετακινήσεων  $[D_i, bar]$  κάθε μέλους στο καθολικό σύστημα αξόνων, στη συνέχεια, μέσω του Μητρώου Μετασχηματισμού, υπολογισμός του Μητρώου Ακράιων Μετακινήσεων  $[D_i]$  στο τοπικό σύστημα αξόνων του μέλους και μέσω του τοπικού του Μητρώου Στεθαρότητας, προσδιορισμός των Ακράιων Δράσεων στο τοπικό σύστημα αξόνων του μέλους για την Ισοδύναμη Φόρτιση. Κατόπιν επαλληλίας με τις ακραίες δράσεις παγίωσης, καθορισμός των εντατικών μεγεθών  $N, Q, M$  στα άκρα των μελών για την συνολική αρχική φόρτιση του πλαισίου.



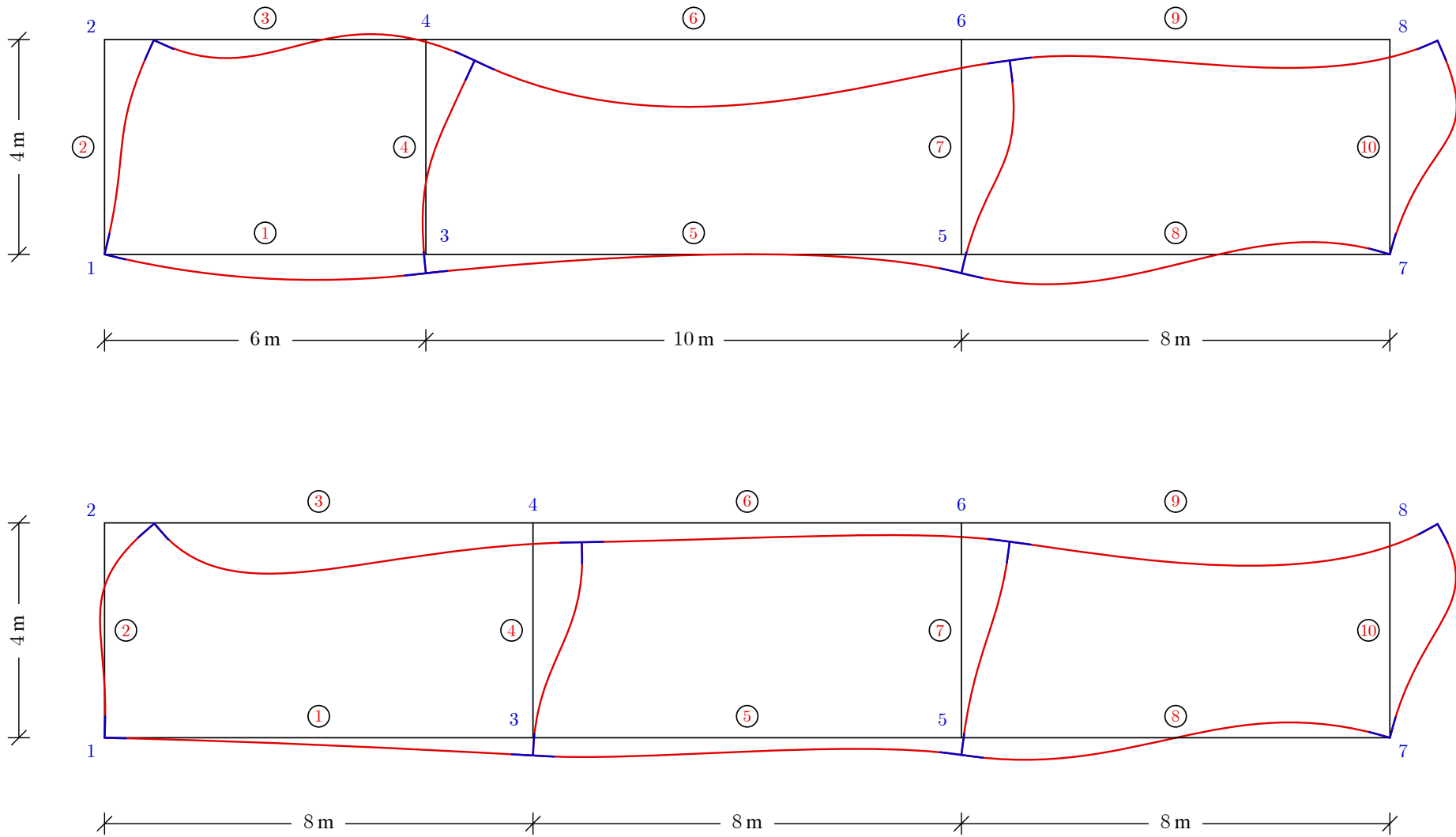
Εικόνα 12<sup>η</sup>



**Βήμα 8:** Για την Ισοδύναμη Φόρτιση μάρφωση του Μητρώου Ακραίων Μετακινήσεων  $[D_i, \text{bar}]$  κάθε μέλους στο καθολικό σύστημα αξόνων, στη συνέχεια, μέσω του Μητρώου Μετασχηματισμού, υπολογισμός του Μητρώου Ακραίων Μετακινήσεων  $[D_i]$  στο τοπικό σύστημα αξόνων του μέλους και μέσω του τοπικού του Μητρώου Στιβαρότητας, προσδιορισμός των Ακραίων Δράσεων στο τοπικό σύστημα αξόνων του μέλους για την Ισοδύναμη Φόρτιση. Κατόπιν επαλληλίας με τις ακραίες δράσεις παγίωσης, καθορισμός των εντατικών μεγεθών  $N, Q, M$  στα άκρα των μελών για την συνολική αρχική φόρτιση του πλαισίου.

ΑΚΡΑΙΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ & ΑΚΡΑΙΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ ΜΕΛΩΝ ΠΙΑ ΤΗΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ ΦΟΡΤΙΣΗ						ΑΚΡΑΙΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ ΜΕΛΩΝ ΑΡΧΙΚΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ							
		Ακραίες Μετατοπίσεις Μέλους στο καθολικό σύστημα (Ισοδύναμη Φόρτιση)		Ακραίες Μετατοπίσεις Μέλους στο τοπικό σύστημα (Ισοδύναμη Φόρτιση)		Ακραίες Δράσεις Μέλους στο τοπικό σύστημα (Ισοδύναμη Φόρτιση)		Επαλληλία των Ακραίων Δράσεων του Μέλους στο τοπικό σύστημα		[A <sub>i</sub> ] συνολ = [A <sub>i</sub> ] παγιωμ + [A <sub>i</sub> ] Ισοδυν			
		[D <sub>i</sub> , bar] Ισοδυν.		[D <sub>i</sub> ] Ισοδυν.		[A <sub>i</sub> ] Ισοδυν.		Αρχικός Φορέας		Παγιωμένος Φορέας			
ΜΕΛΟΣ	5	Κόμβος αρχής: 3 Πέρατος: 5	[D <sub>i</sub> , bar] Ισοδυν.		[D <sub>i</sub> ] Ισοδυν.		[A <sub>i</sub> ] Ισοδυν.		Μέλος 5	Αρχικός Φορέας	Κόμβοι	Ακραία Εντατικά Μεγέθη	
			5.259E-05 -4.086E-03 -2.169E-04 4.936E-05 -3.953E-03 -5.162E-04	3 5	5.259E-05 -4.086E-03 -2.169E-04 4.936E-05 -3.953E-03 -5.162E-04	3 5	1.70 -125.63 -177.12 -1.70 -103.57 118.75	3 5				N (5j) = -1.70 Q (5j) = -125.63 M (5j) = 177.12	N (5k) = -1.70 Q (5k) = 103.57 M (5k) = 118.75
ΜΕΛΟΣ	6	Κόμβος αρχής: 4 Πέρατος: 6	[D <sub>i</sub> , bar] Ισοδυν.		[D <sub>i</sub> ] Ισοδυν.		[A <sub>i</sub> ] Ισοδυν.		Μέλος 6	Αρχικός Φορέας	Κόμβοι	Ακραία Εντατικά Μεγέθη	
			1.138E-02 -4.549E-03 6.594E-05 1.126E-02 -4.397E-03 -5.339E-04	4 6	1.138E-02 -4.549E-03 6.594E-05 1.126E-02 -4.397E-03 -5.339E-04	4 6	58.76 -5.38 -13.01 -58.76 5.38 -30.02	4 6				N (6j) = -58.76 Q (6j) = 94.62 M (6j) = -120.32	N (6k) = -58.76 Q (6k) = -105.38 M (6k) = -163.35
ΜΕΛΟΣ	7	Κόμβος αρχής: 5 Πέρατος: 6	[D <sub>i</sub> , bar] Ισοδυν.		[D <sub>i</sub> ] Ισοδυν.		[A <sub>i</sub> ] Ισοδυν.		Μέλος 7	Αρχικός Φορέας	Κόμβοι	Ακραία Εντατικά Μεγέθη	
			4.936E-05 -3.953E-03 -5.162E-04 1.126E-02 -4.397E-03 -5.339E-04	5 6	-3.953E-03 -4.596E-05 -5.162E-04 -4.397E-03 -1.126E-02 -5.339E-04	5 6	209.75 24.21 48.49 -209.75 -24.21 48.36	5 6				N (7j) = -209.75 Q (7j) = 24.21 M (7j) = -48.49	N (7k) = -209.75 Q (7k) = 24.21 M (7k) = 48.36
ΜΕΛΟΣ	8	Κόμβος αρχής: 5 Πέρατος: 7	[D <sub>i</sub> , bar] Ισοδυν.		[D <sub>i</sub> ] Ισοδυν.		[A <sub>i</sub> ] Ισοδυν.		Μέλος 8	Αρχικός Φορέας	Κόμβοι	Ακραία Εντατικά Μεγέθη	
			4.936E-05 -3.953E-03 -5.162E-04 0.000E+00 0.000E+00 -1.087E-03	5 7	4.936E-05 -3.953E-03 -5.162E-04 0.000E+00 0.000E+00 -1.087E-03	5 7	25.91 -106.18 -167.24 -25.91 10.44 -58.18	5 7				N (8j) = -25.91 Q (8j) = -106.18 M (8j) = 167.24	N (8k) = -25.91 Q (8k) = -10.44 M (8k) = -58.18

Εικόνα 13<sup>η</sup>



**Εικόνα 14<sup>η</sup>**